



Politechnika Warszawska

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

**Instytut Podstaw Budowy Maszyn
Zakład Mechaniki**

<http://www.ipbm.simr.pw.edu.pl/>



Teoria maszyn i podstawy automatyki

semestr zimowy 2017/2018

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 9

Transmitancja widmowa. Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki.

Licencja: tylko do edukacyjnego użytku studentów Politechniki Warszawskiej.

Transmitancja operatorowa

Dany jest liniowy niezależny od czasu układ typu SISO o ciągłym sygnale wejściowym $x(t)$ i wyjściowym $y(t)$

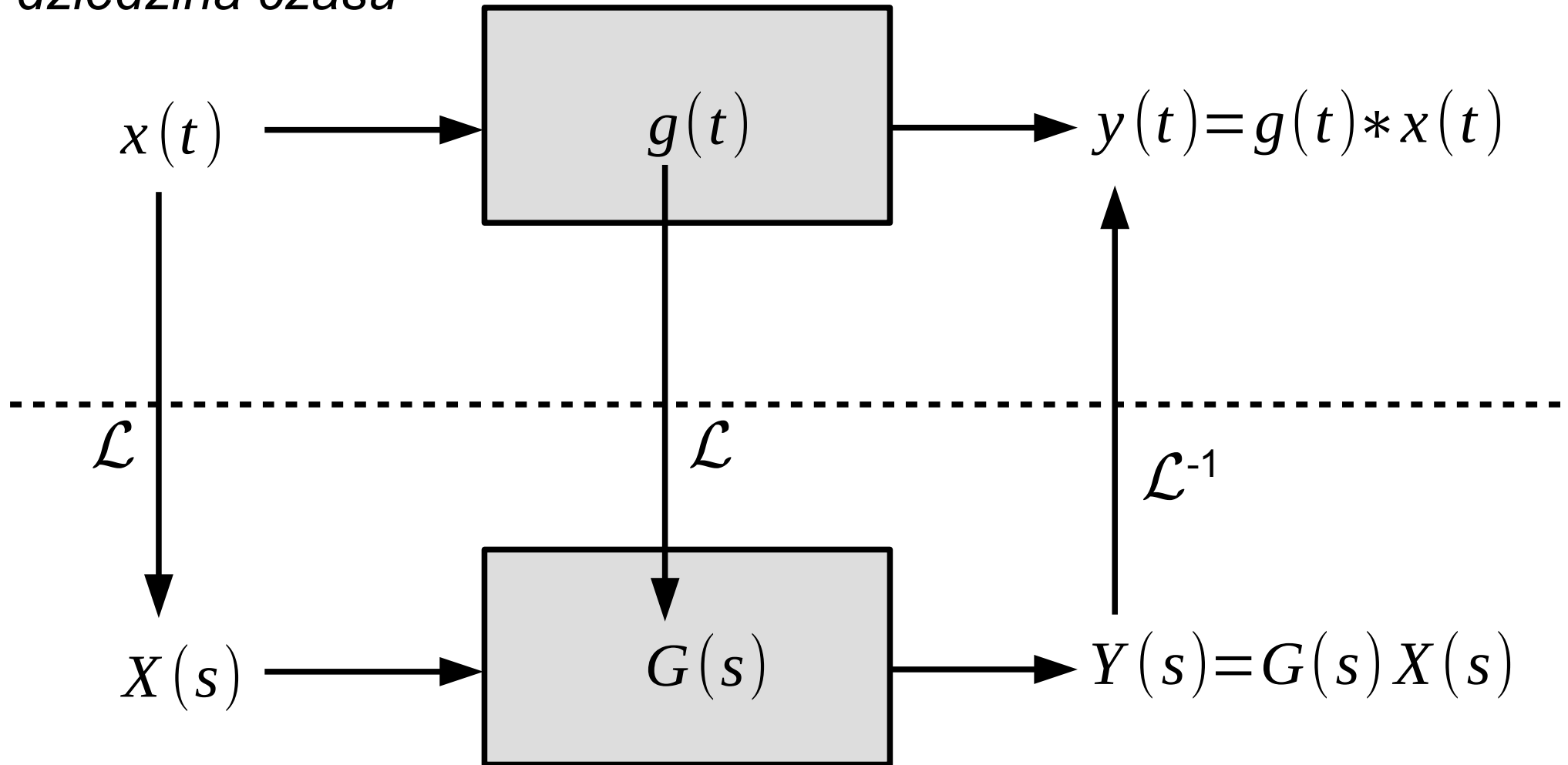
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$Y(s)$ - transformata Laplace'a sygnału wyjściowego

$X(s)$ - transformata Laplace'a sygnału wejściowego

Wejście i wyjście

dziedzina czasu



dziedzina zespolona

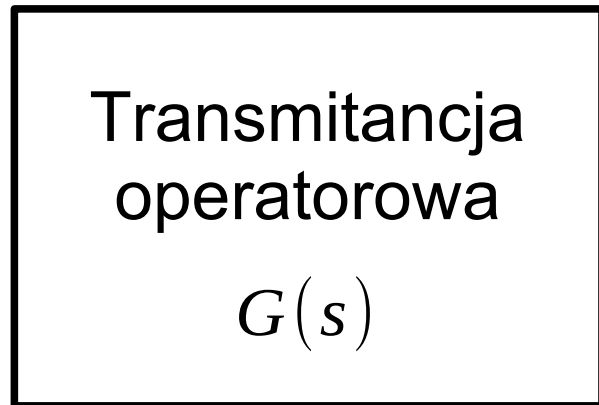
Transmitancja operatorowa i widmowa

Transmitancja
operatorowa

$$G(s)$$

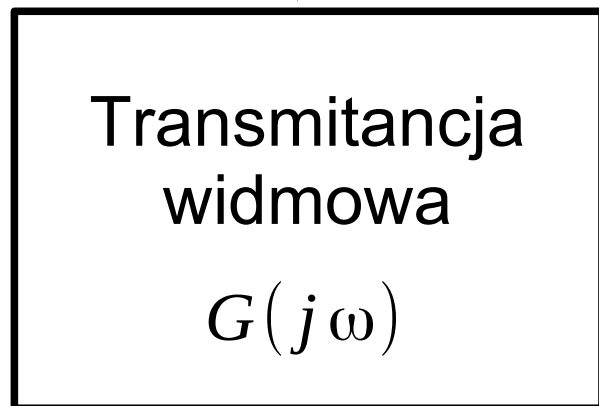
pełen opis dynamiki układu
(dla dowolnych sygnałów wejściowych)

Transmitancja operatorowa i widmowa



pełen opis dynamiki układu
(dla dowolnych sygnałów wejściowych)

$$s = j\omega$$



opis dynamiki układu w stanie ustalonym dla harmonicznego sygnału wejściowego

Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$ transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Transmitancja widmowa

wejscie: $x(t) = \sin(\omega t)$

wymuszenie harmoniczne

transmitancja: $G(s)$

wyjscie: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

w stanie ustalonym

Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$ transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s = j\omega} G(j\omega)$$

Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$ transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

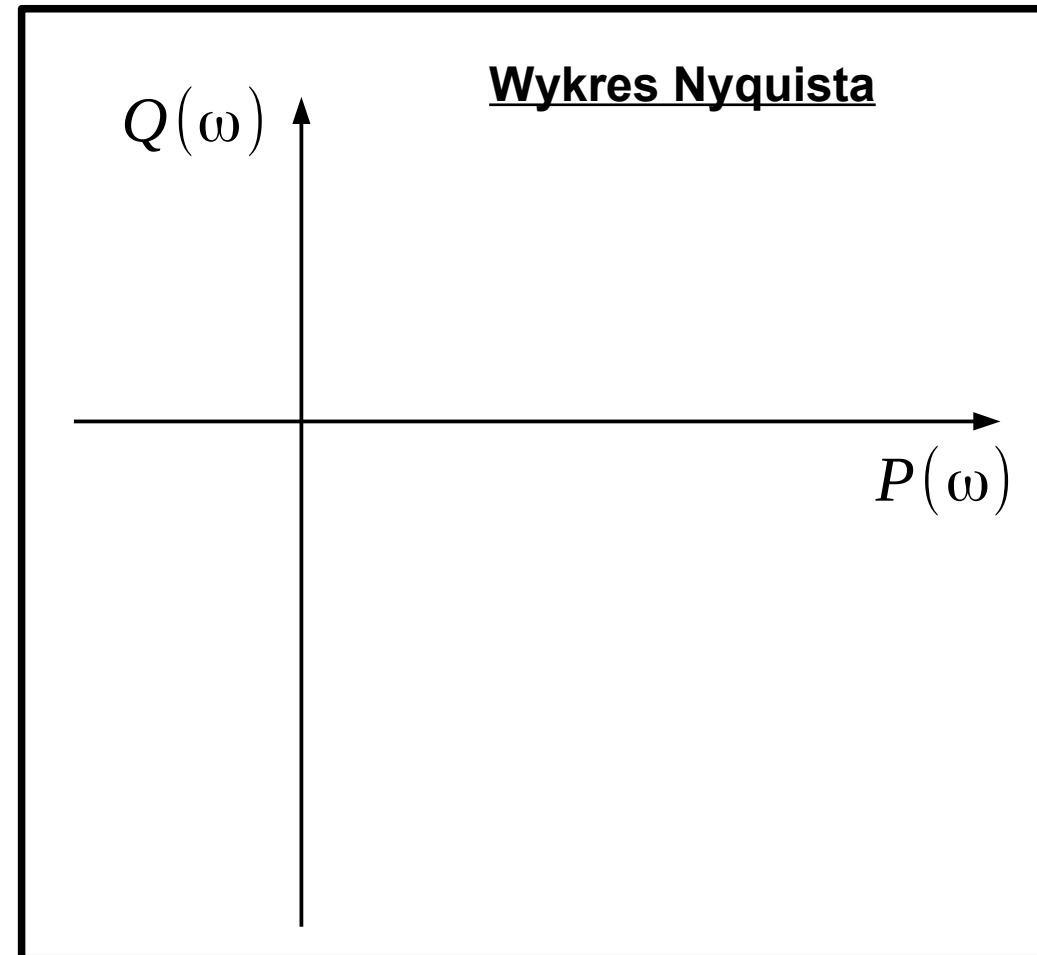
$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

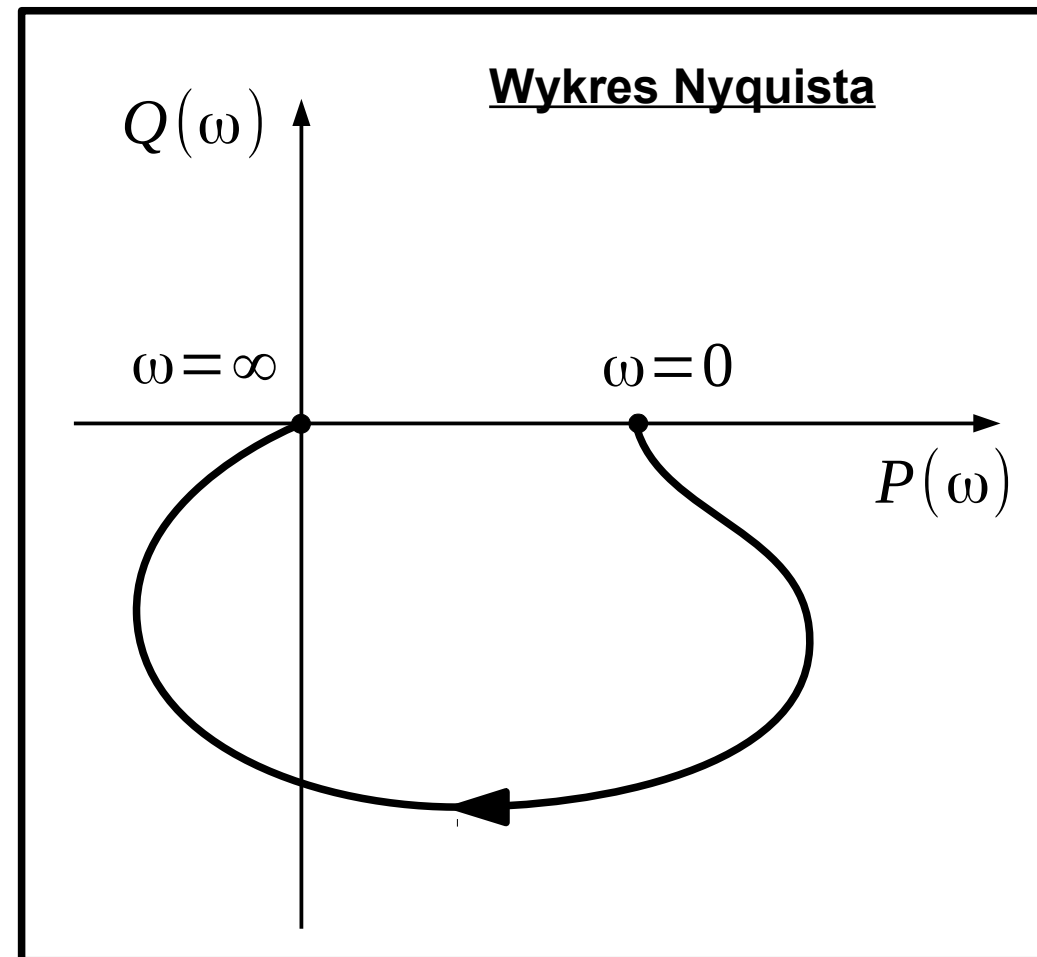


Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$



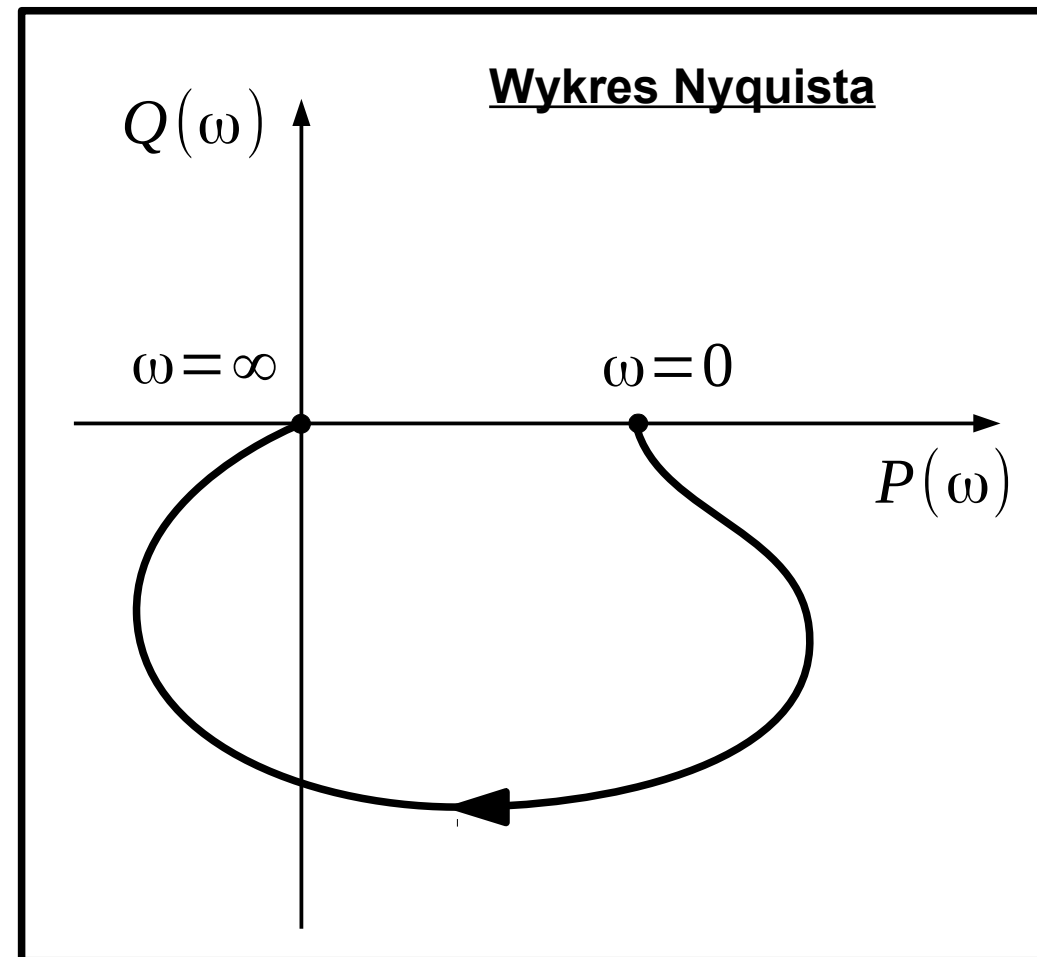
Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$



Transmitancja widmowa

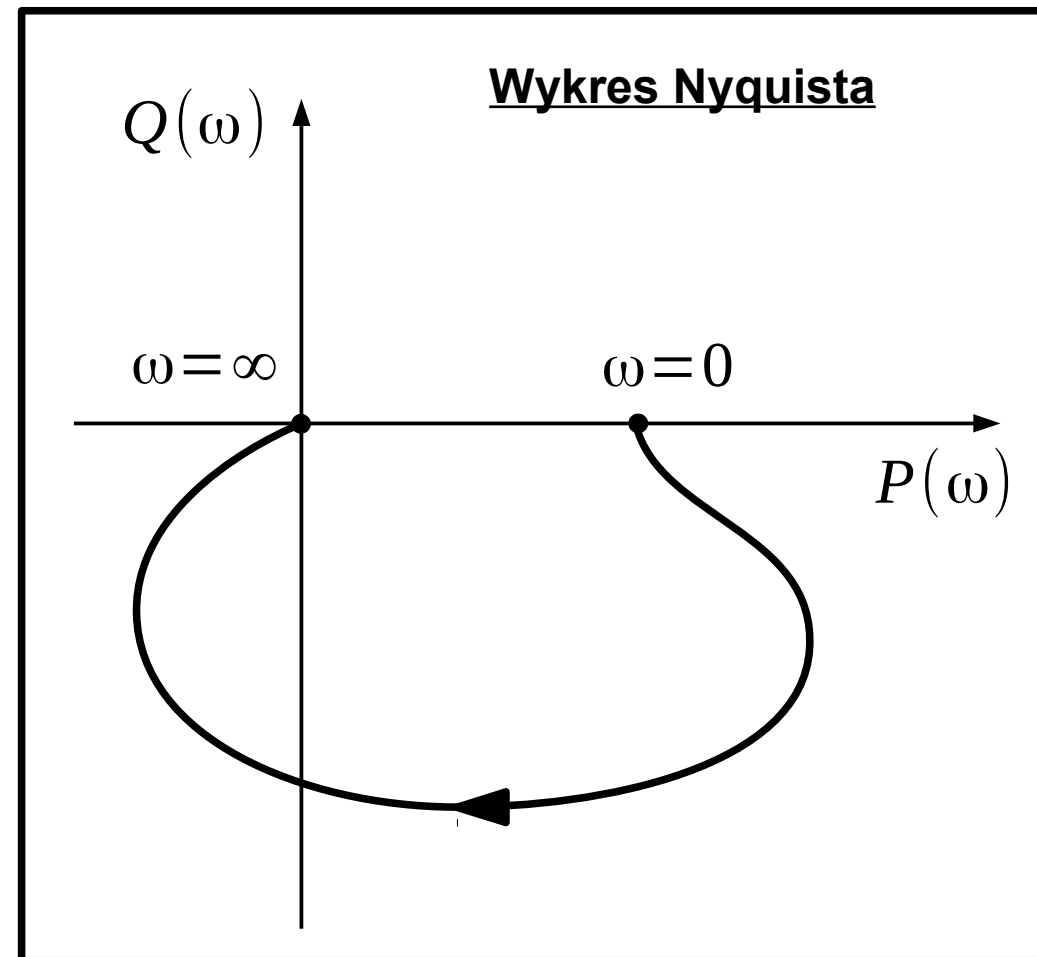
wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg } G(j\omega) = \text{arctg } \frac{Q}{P}$$



Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$

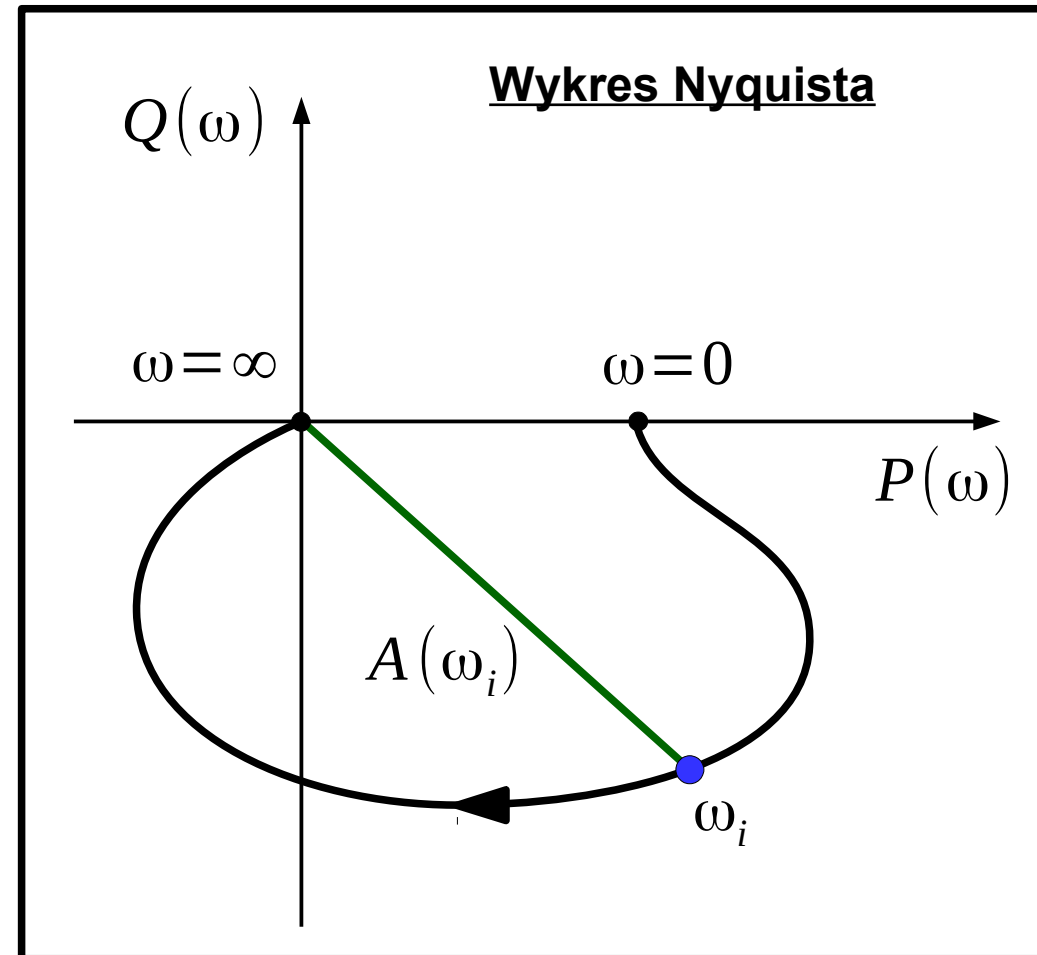
wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

wzmocnienie

$$\varphi(\omega) = \text{Arg } G(j\omega) = \arctg \frac{Q}{P}$$



Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$

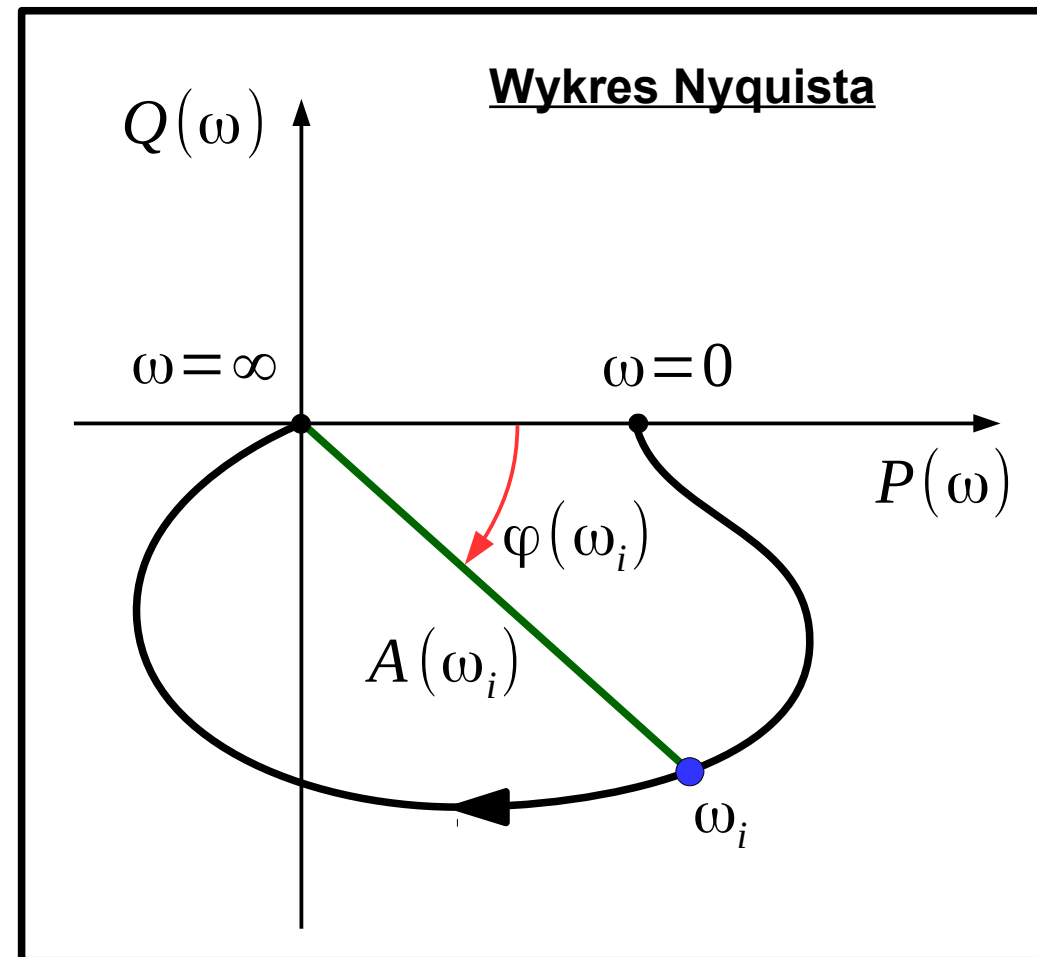
wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg } G(j\omega) = \arctg \frac{Q}{P}$$

opóźnienie



Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$

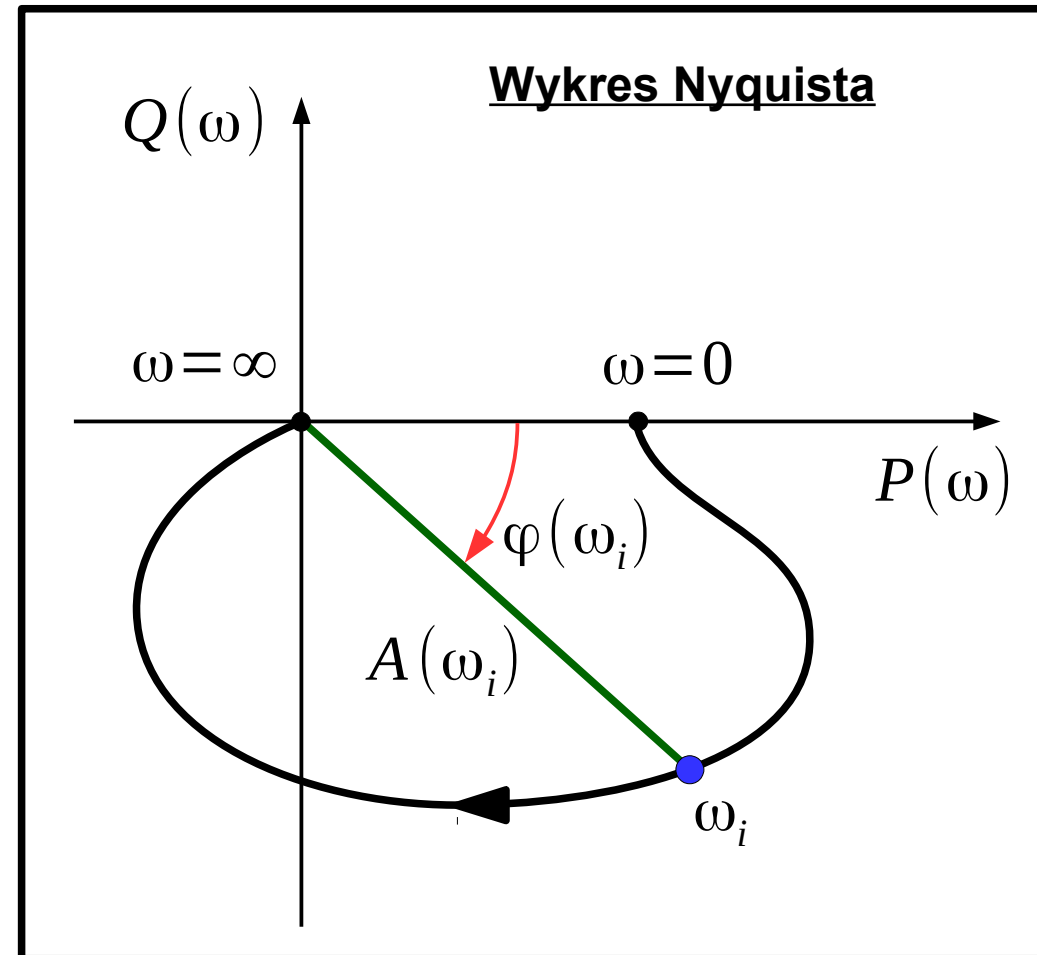
wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg } G(j\omega) = \text{arctg } \frac{Q}{P}$$

- **Wykres transmitancji widmowej**
- **Częstościowa charakterystyka amplitudowo-fazowa**



Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$

wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Wykres Bodego

Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$

wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Wykres Bodego

**wykres wzmocnienia
(amplitudowo-częstościowy)**

**wykres przesunięcia fazowego
(fazowo-częstościowy)**

Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

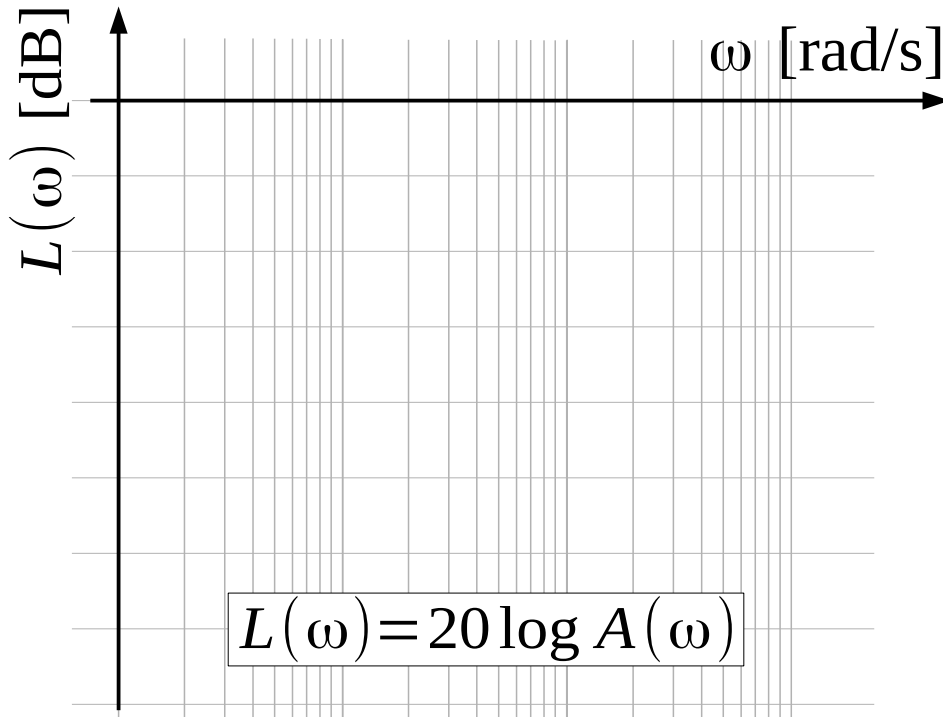
transmitancja: $G(s)$

wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Wykres Bodego

wykres wzmocnienia
(amplitudowo-częstościowy)

wykres przesunięcia fazowego
(fazowo-częstościowy)



Transmitancja widmowa

wejscie: $x(t) = \sin(\omega t)$

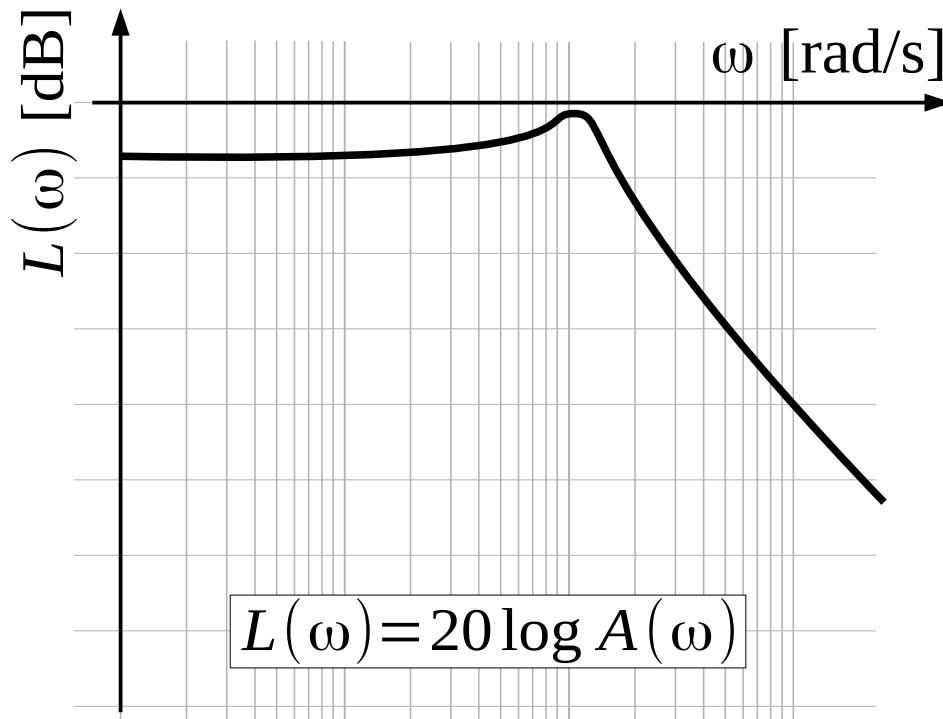
transmitancja: $G(s)$

wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Wykres Bodego

wykres wzmocnienia
(amplitudowo-częstościowy)

wykres przesunięcia fazowego
(fazowo-częstościowy)



$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

Transmitancja widmowa

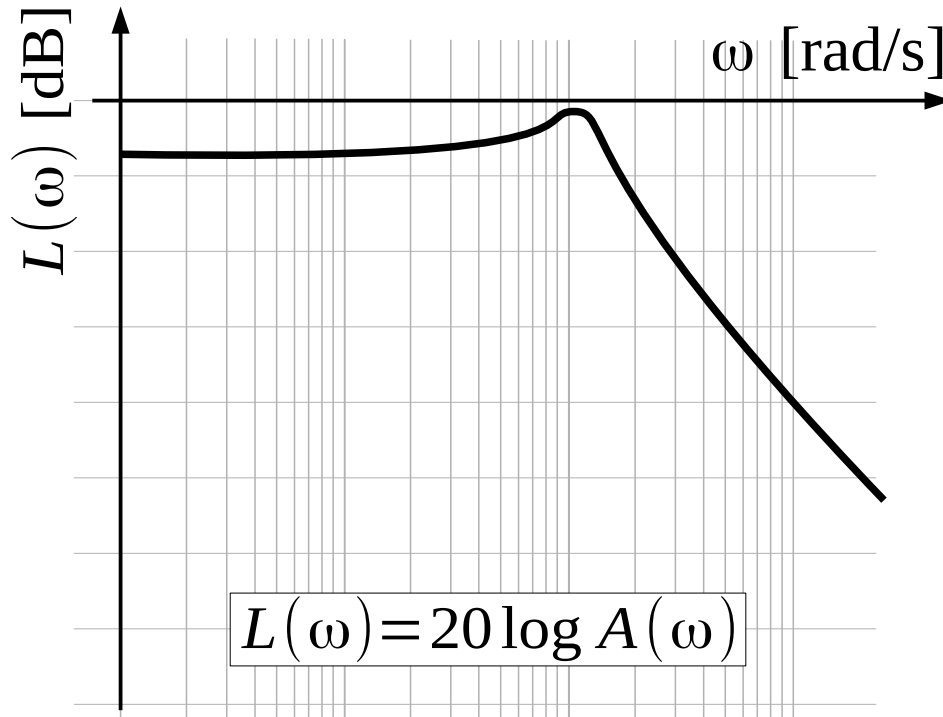
wejscie: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$

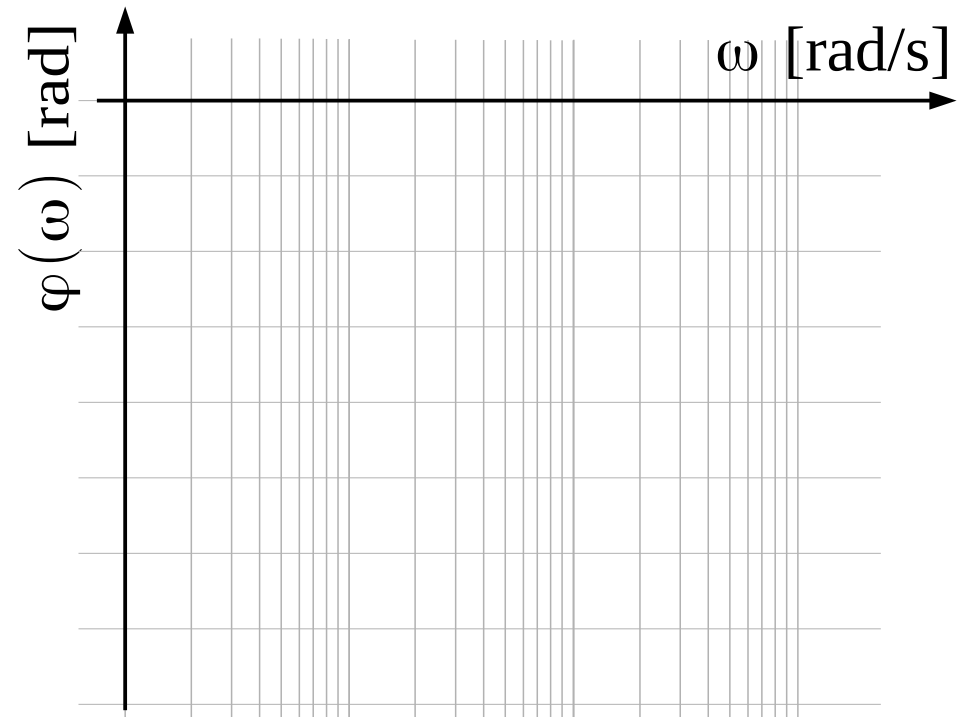
wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Wykres Bodego

wykres wzmocnienia
(amplitudowo-częstościowy)



wykres przesunięcia fazowego
(fazowo-częstościowy)



Transmitancja widmowa

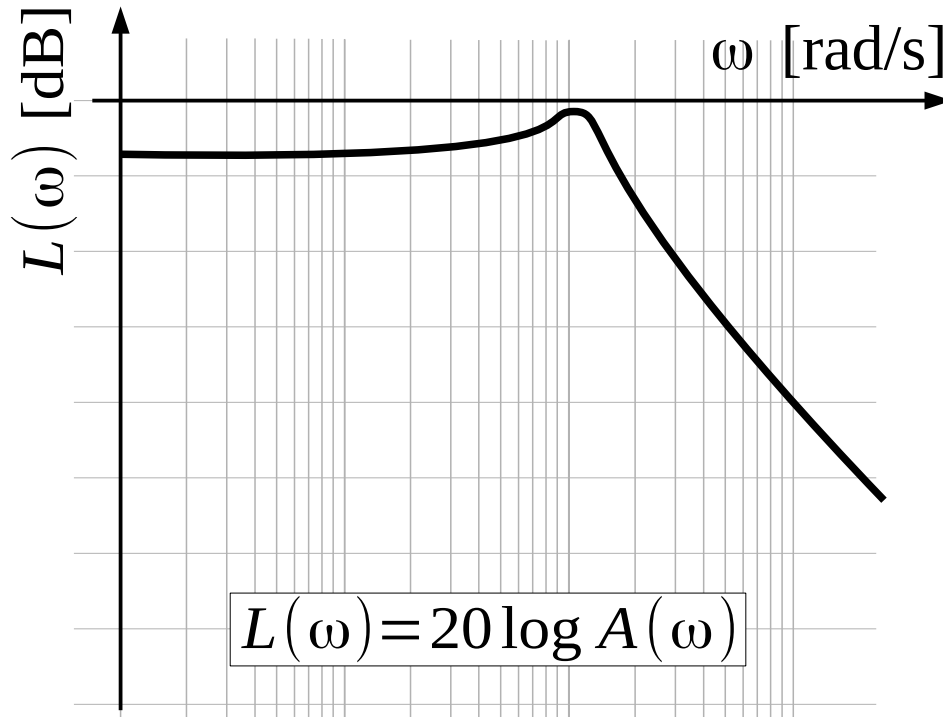
wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$

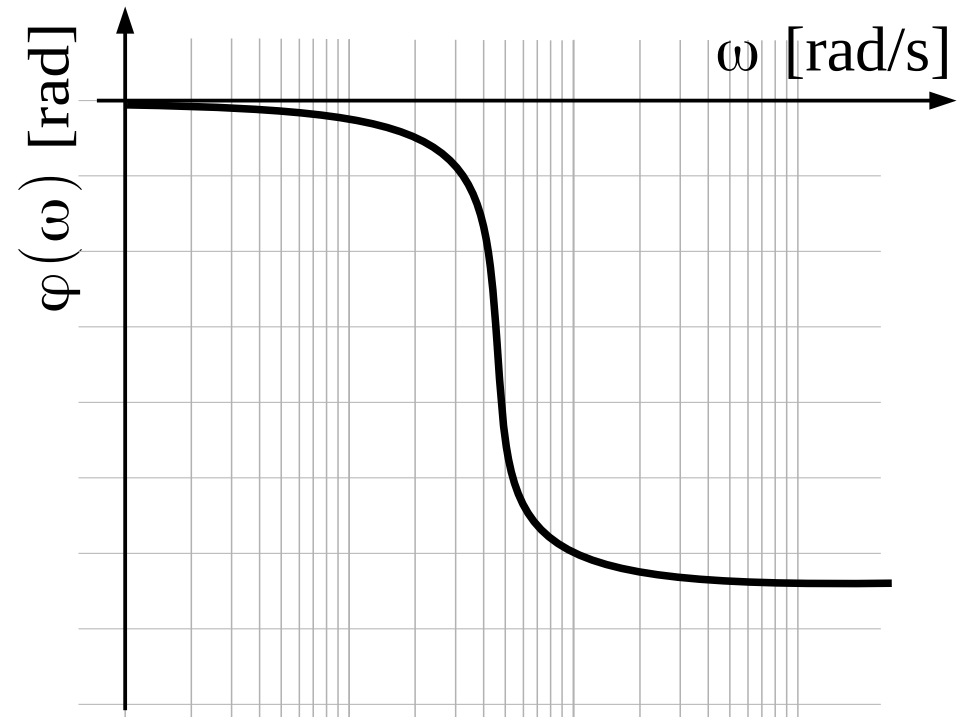
wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Wykres Bodego

wykres wzmocnienia
(amplitudowo-częstościowy)



wykres przesunięcia fazowego
(fazowo-częstościowy)



oś pozioma w skali logarytmicznej, oś pionowa w skali liniowej!

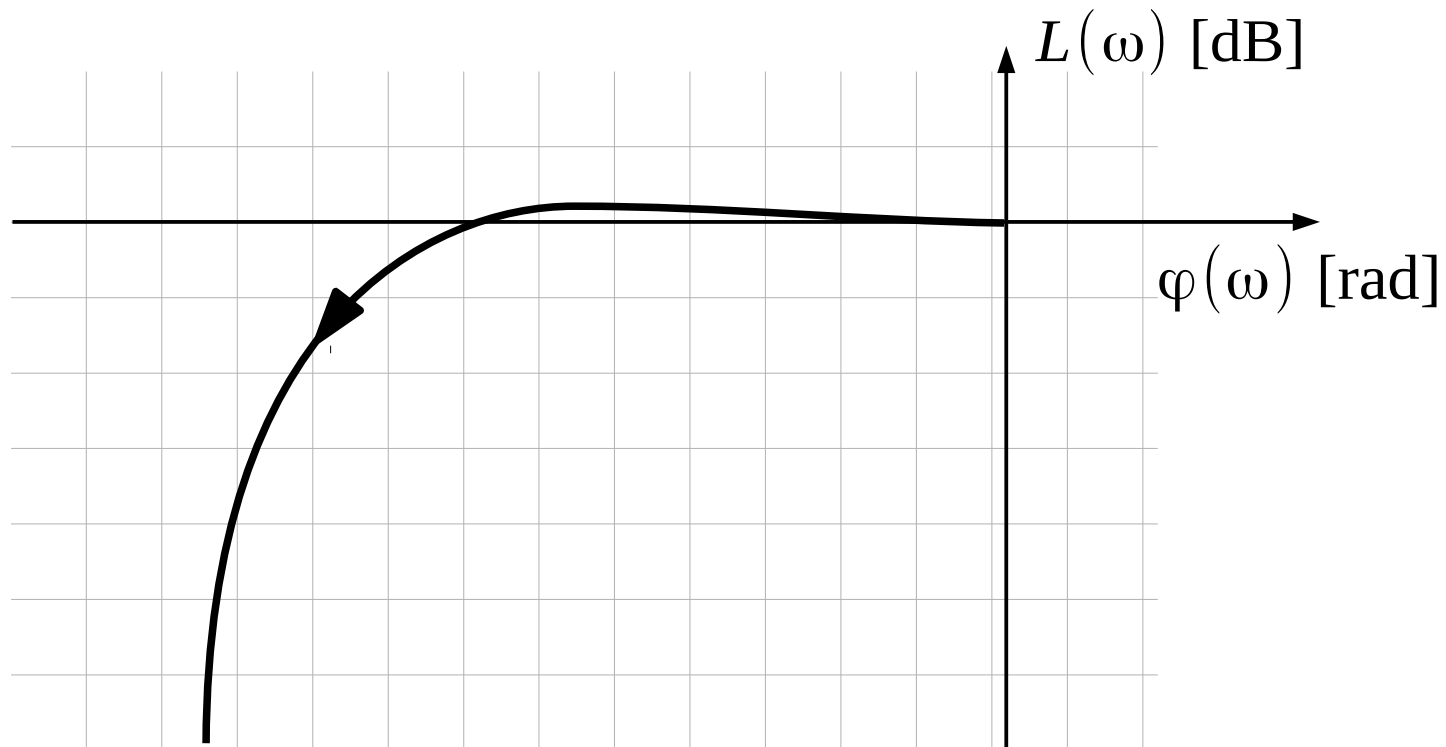
Transmitancja widmowa

wejście: $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja: $G(s)$

wyjście: $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

Wykres Nicholisa (współrzędne Blacka)



Transmitancja widmowa

Skala liniowa i logarytmiczna

A (wzmocnienie)	20logA [dB]
1000	60
100	40
10	20
1	0
0,1	-20
0,01	-40
0,001	-60

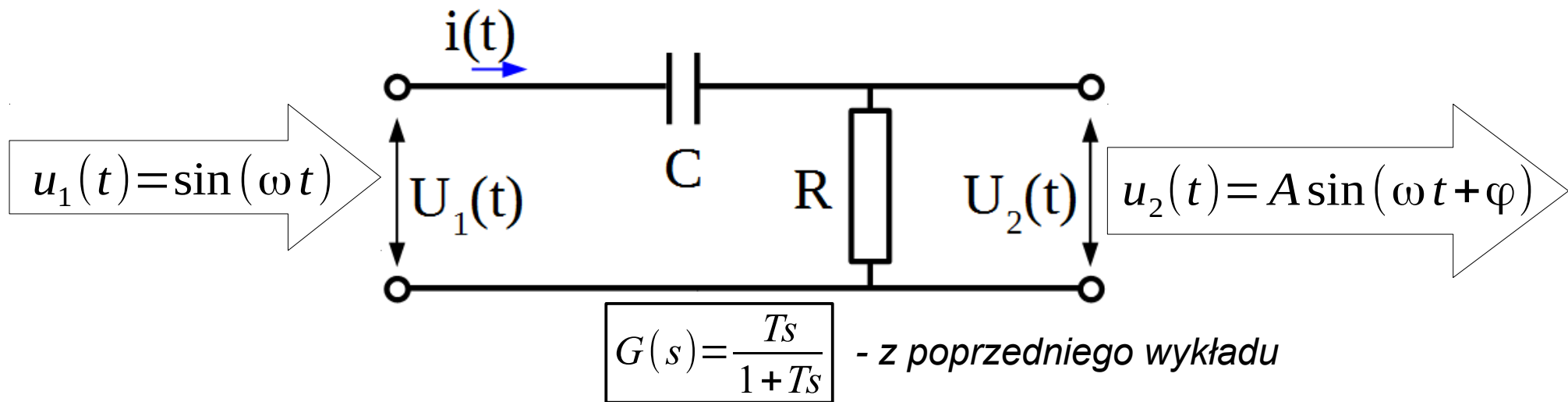
Transmitancja widmowa

Transmitancja widmowa znajduje zastosowanie do opisu własności m.in.:

- układów sterowania (obiekty sterowane, regulatory)
- układów drgających (zawieszenia, układy napędowe)
- układów audio (wzmacniacze, mikrofony, głośniki, kable)
- układów bezprzewodowej transmisji danych (wzmacniacze, anteny)

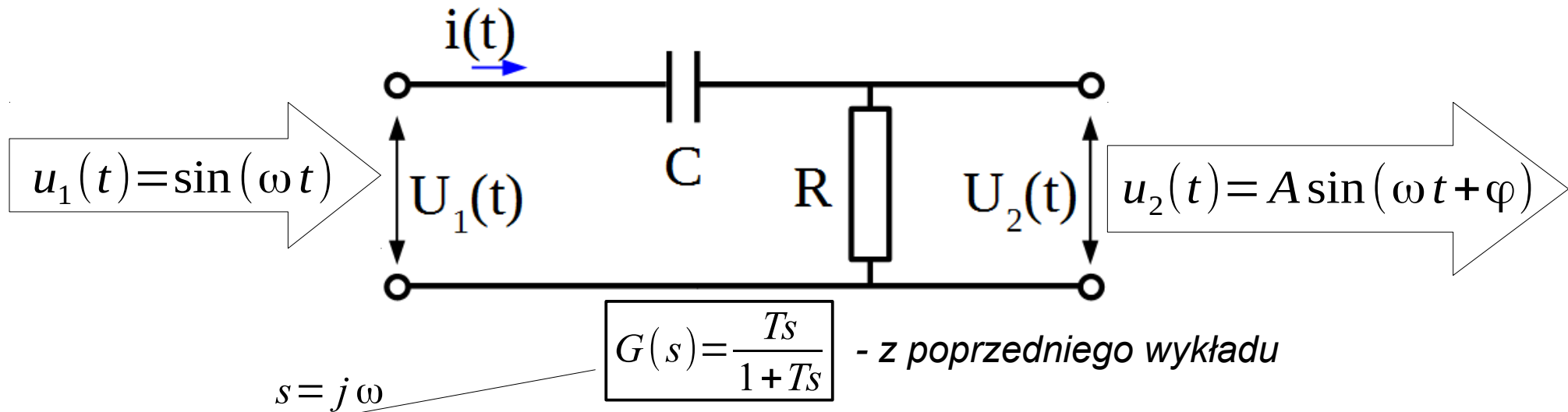
Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC



Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC



$$s = j\omega$$

$$G(j\omega) = \frac{Tj\omega}{1 + Tj\omega} = \frac{Tj\omega}{1 + Tj\omega} \cdot \frac{1 - Tj\omega}{1 - Tj\omega} = \frac{Tj\omega - T^2j^2\omega^2}{1^2 - T^2j^2\omega^2} = \frac{Tj\omega + T^2\omega^2}{1^2 + T^2\omega^2} = \frac{T^2\omega^2}{1^2 + T^2\omega^2} + j \frac{T\omega}{1^2 + T^2\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{T^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2} \quad Q(\omega) = \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2} \quad A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = 20 \log T\omega - 20 \log \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left(\frac{1}{T\omega} \right)$$

Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$P(\omega) = \frac{T^2 \omega^2}{1 + T^2 \omega^2} \quad Q(\omega) = \frac{T \omega}{1 + T^2 \omega^2}$$

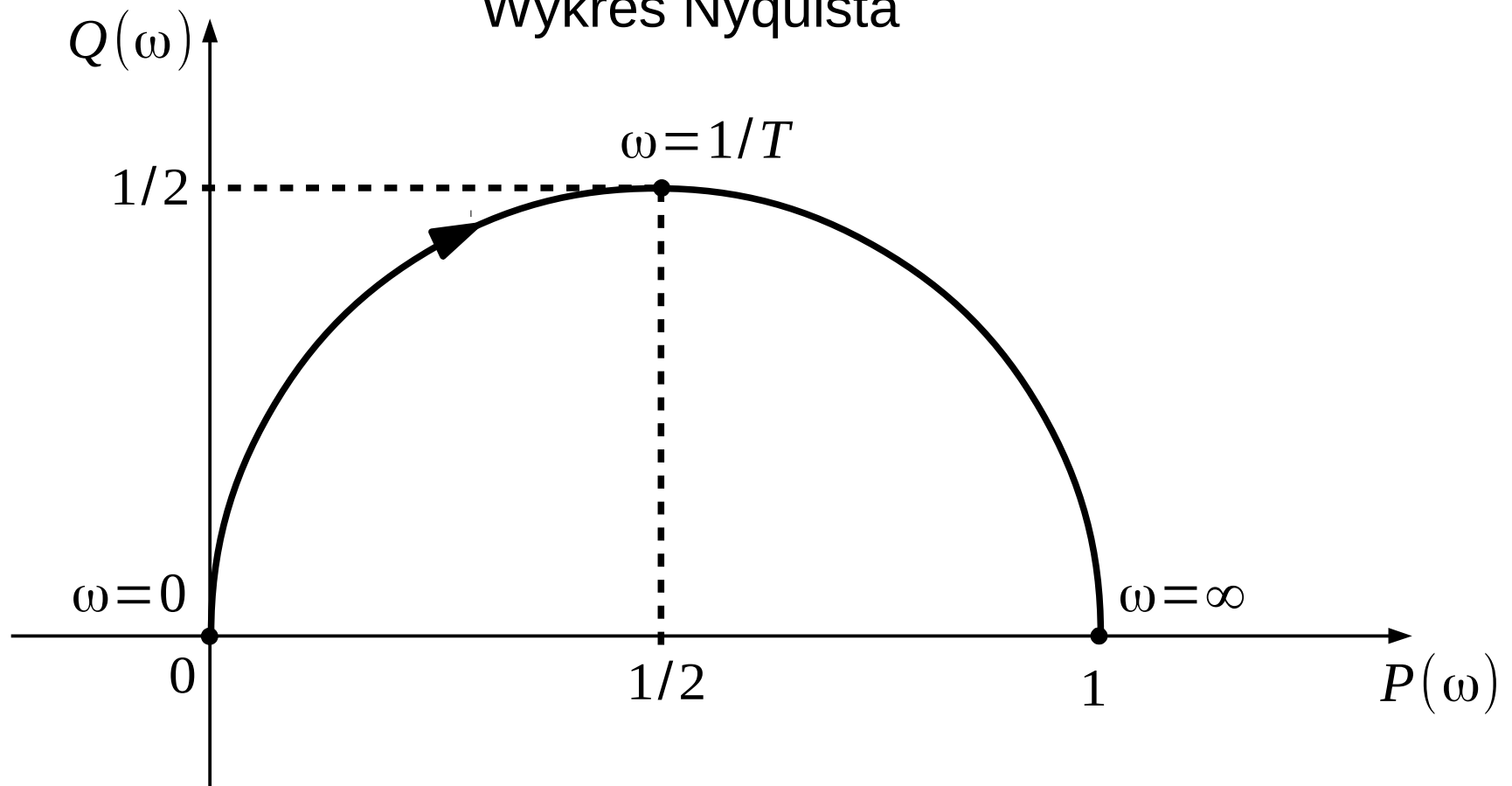
Wykres Nyquista

Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$P(\omega) = \frac{T^2 \omega^2}{1 + T^2 \omega^2} \quad Q(\omega) = \frac{T \omega}{1 + T^2 \omega^2}$$

Wykres Nyquista



Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$A(\omega) = \frac{T \omega}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}$$

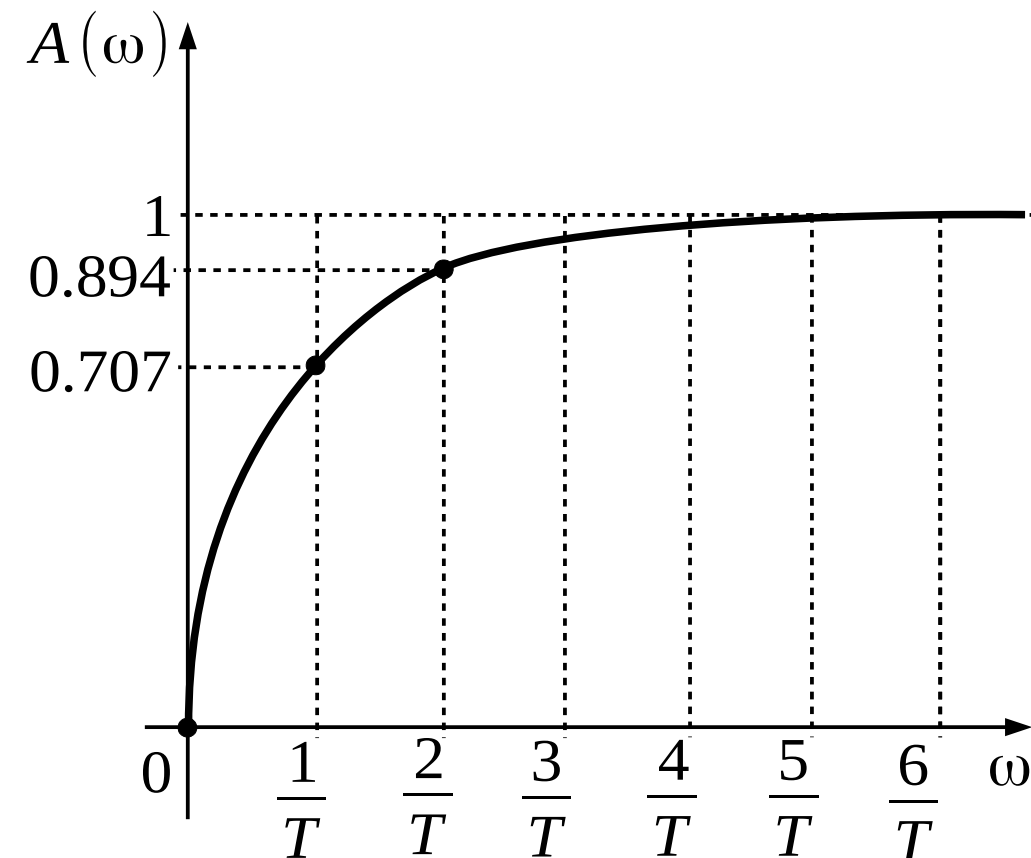
$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$A(\omega) = \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

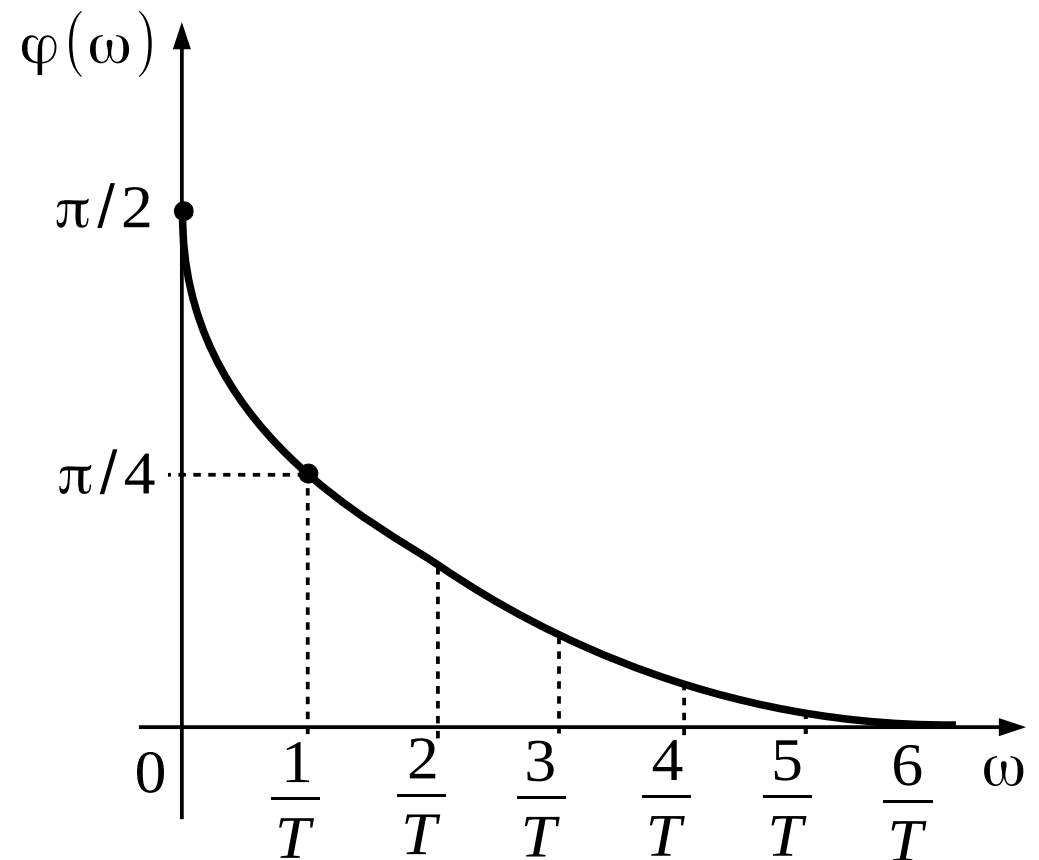
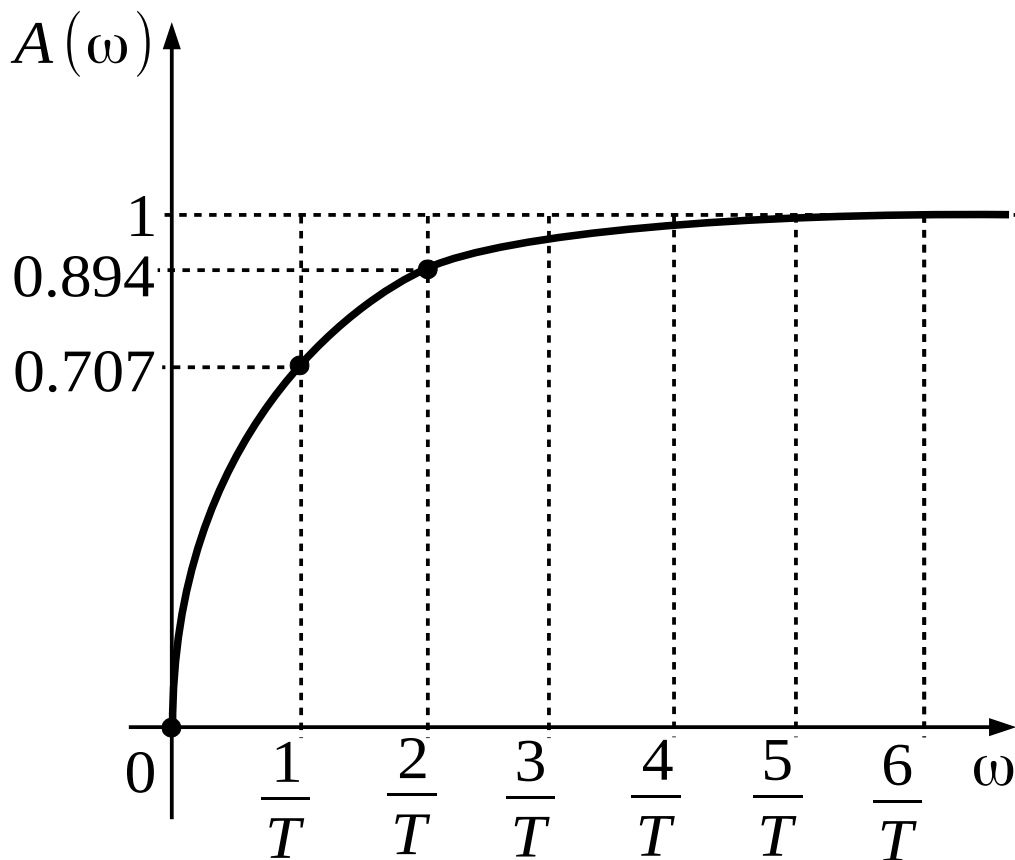


Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$A(\omega) = \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$



Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} \qquad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Wykres Bodego

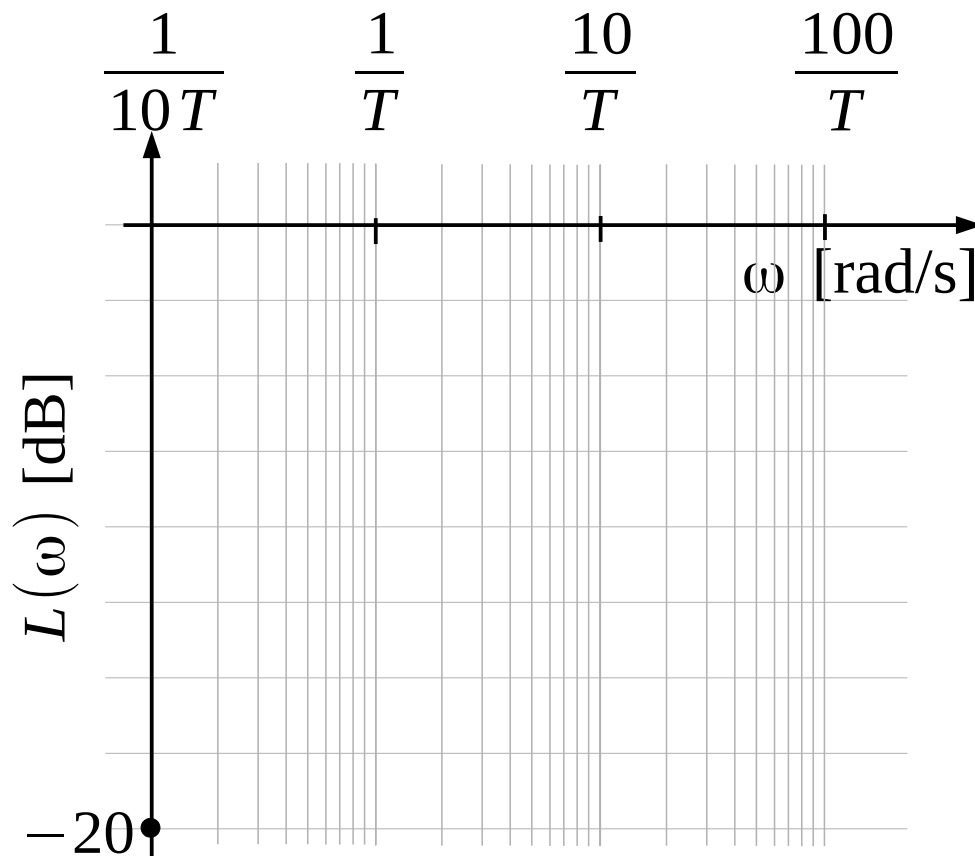
Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Wykres Bodego



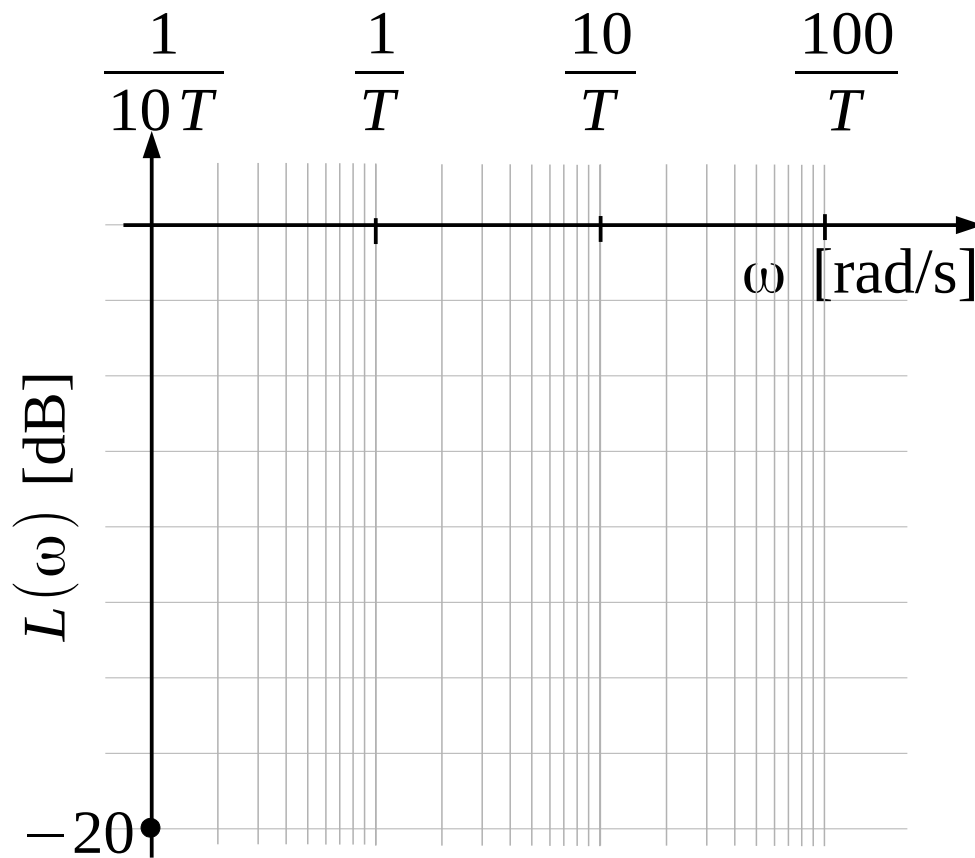
Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Wykres Bodego



$$L\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{2} \approx -3$$

$$L\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = 20 \log 10 - 20 \log \sqrt{101} \approx 0$$

$$L\left(\omega = \frac{100}{T}\right) = 20 \log 100 - 20 \log \sqrt{10001} \approx 0$$

$$L\left(\omega = \frac{1}{10T}\right) = 20 \log 0,1 - 20 \log \sqrt{1,01} \approx -20$$

$$L\left(\omega = \frac{1}{100T}\right) = 20 \log 0,01 - 20 \log \sqrt{1,0001} \approx -40$$

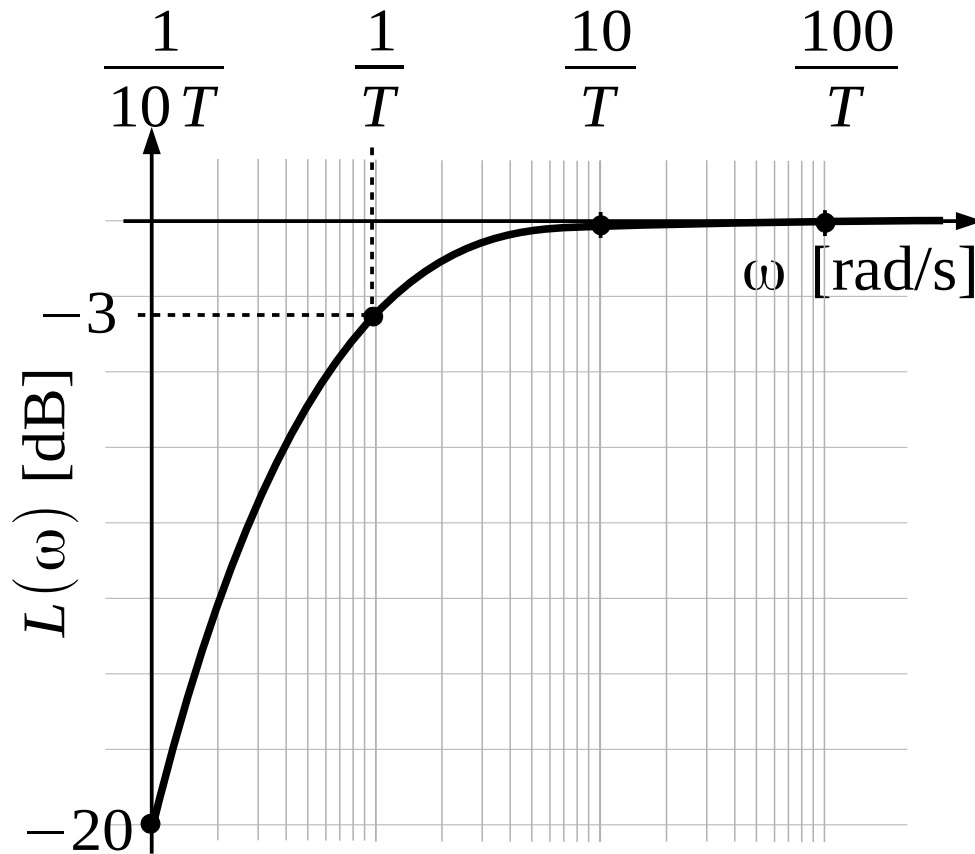
Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Wykres Bodego



$$L\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{2} \approx -3$$

$$L\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = 20 \log 10 - 20 \log \sqrt{101} \approx 0$$

$$L\left(\omega = \frac{100}{T}\right) = 20 \log 100 - 20 \log \sqrt{10001} \approx 0$$

$$L\left(\omega = \frac{1}{10T}\right) = 20 \log 0,1 - 20 \log \sqrt{1,01} \approx -20$$

$$L\left(\omega = \frac{1}{100T}\right) = 20 \log 0,01 - 20 \log \sqrt{1,0001} \approx -40$$

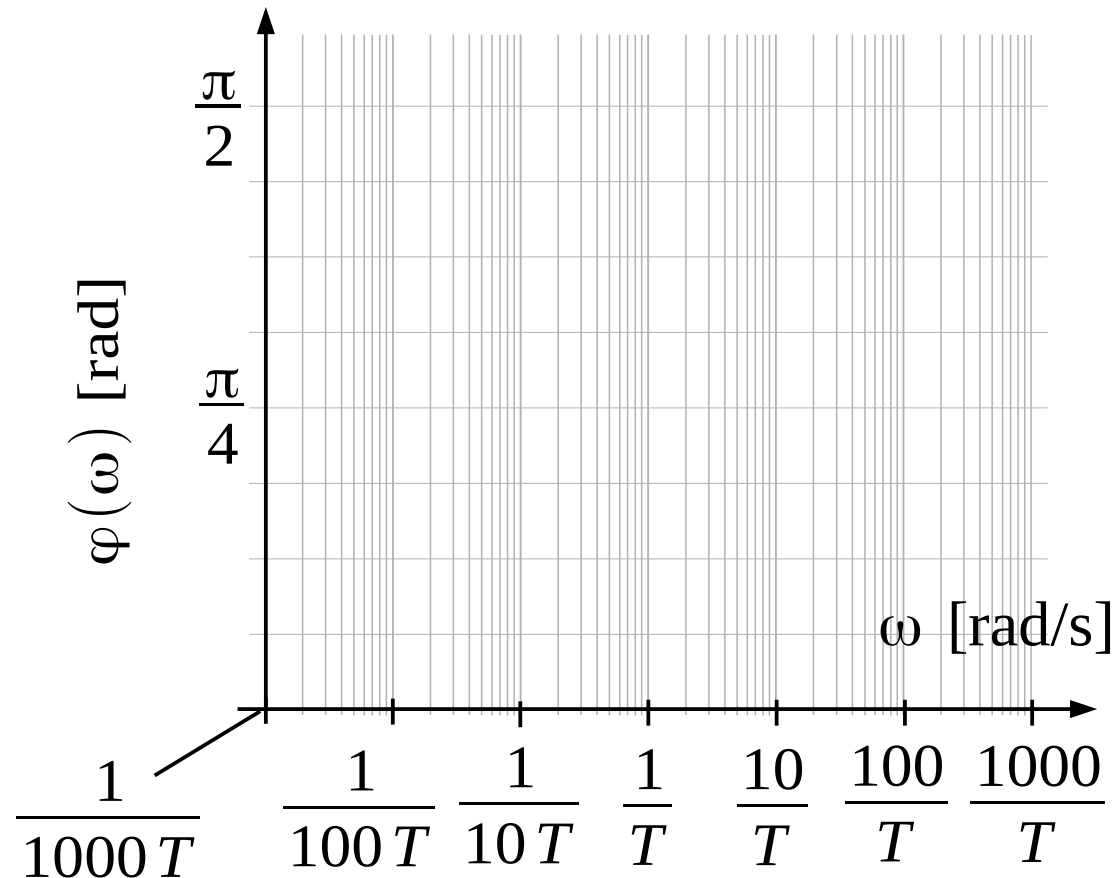
Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Wykres Bodego



Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Wykres Bodego

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

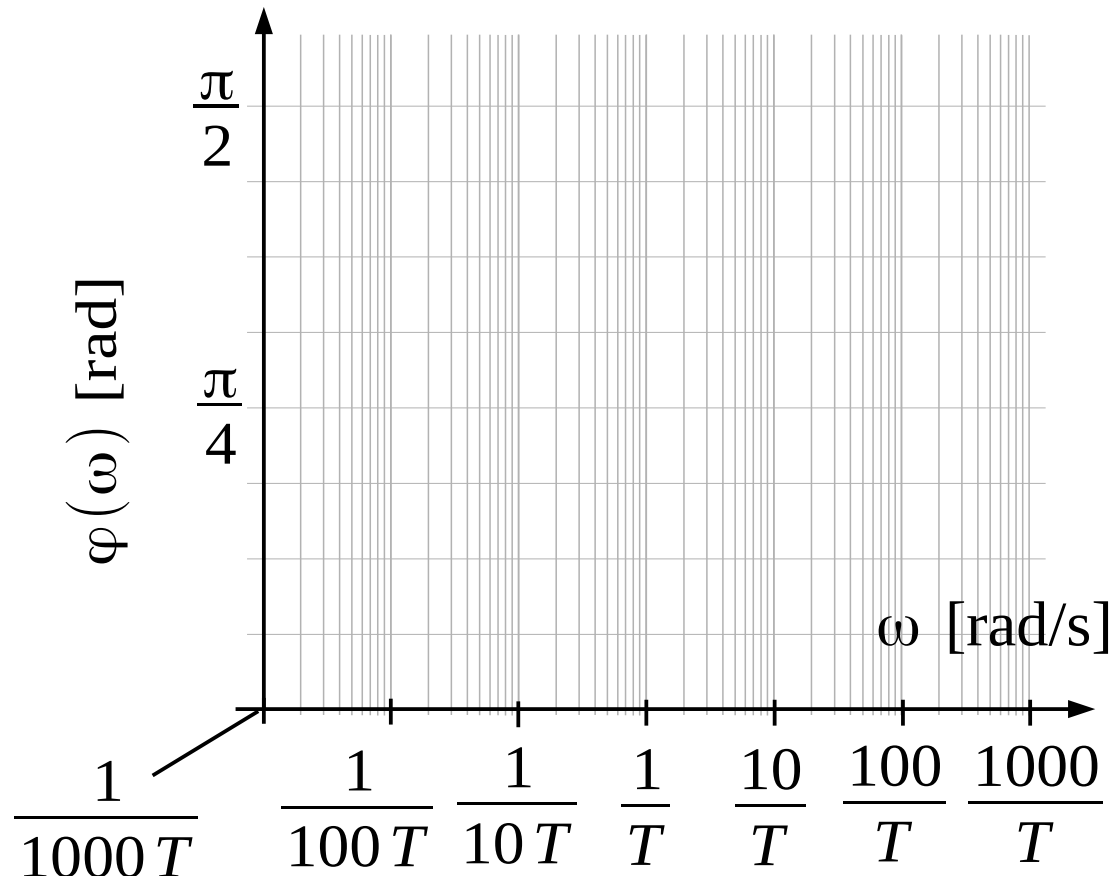
$$\varphi\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = \arctan \frac{1}{10} = 0,1 = 5,71^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{100}{T}\right) = \arctan \frac{1}{100} = 0,01 = 0,57^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1000}{T}\right) = \arctan \frac{1}{1000} = 0,001 = 0,06^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{10 T}\right) = \arctan 10 = 1,47 = 84,29^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{100 T}\right) = \arctan 100 = 1,56 = 89,43^\circ$$



Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Wykres Bodego

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

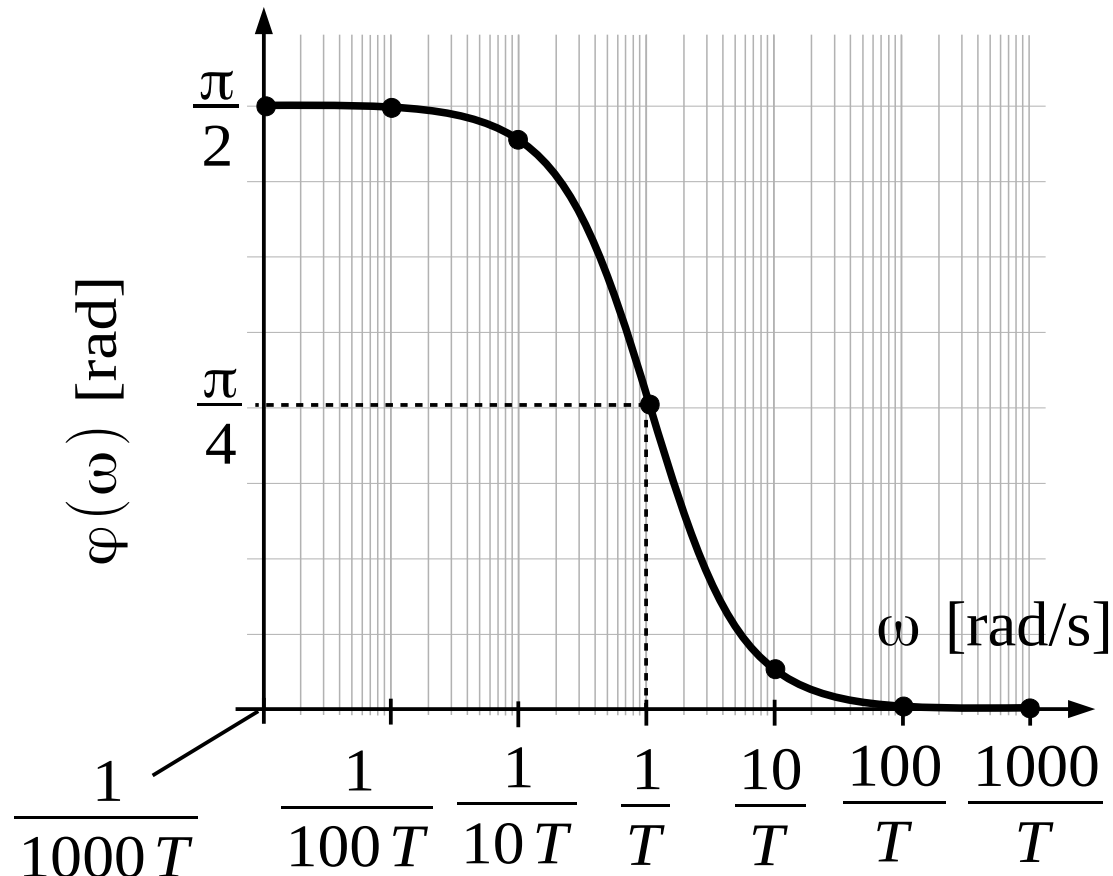
$$\varphi\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = \arctan \frac{1}{10} = 0,1 = 5,71^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{100}{T}\right) = \arctan \frac{1}{100} = 0,01 = 0,57^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1000}{T}\right) = \arctan \frac{1}{1000} = 0,001 = 0,06^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{10 T}\right) = \arctan 10 = 1,47 = 84,29^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{100 T}\right) = \arctan 100 = 1,56 = 89,43^\circ$$



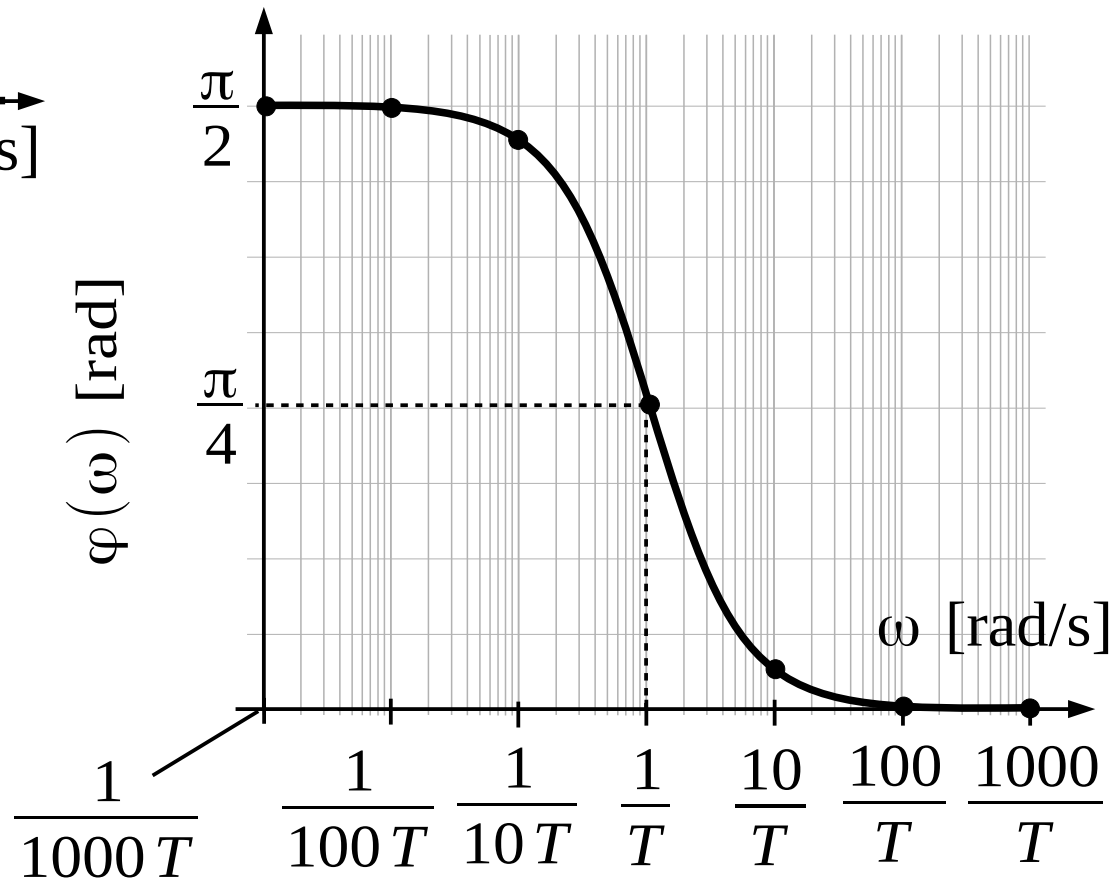
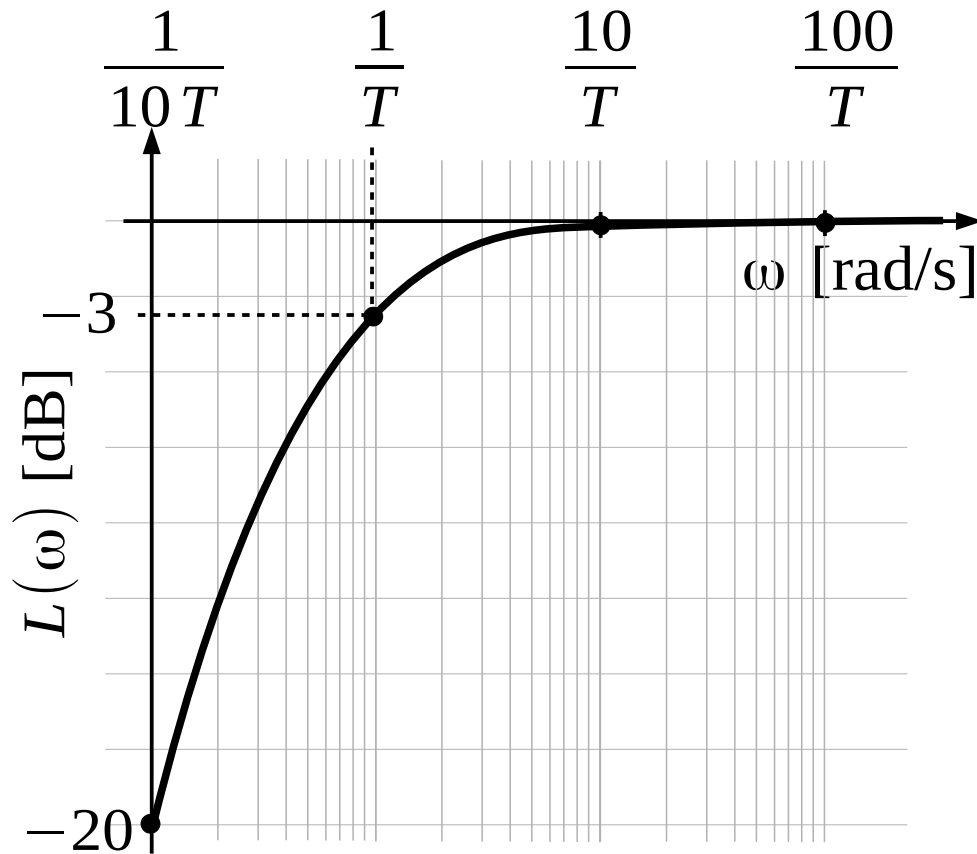
Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

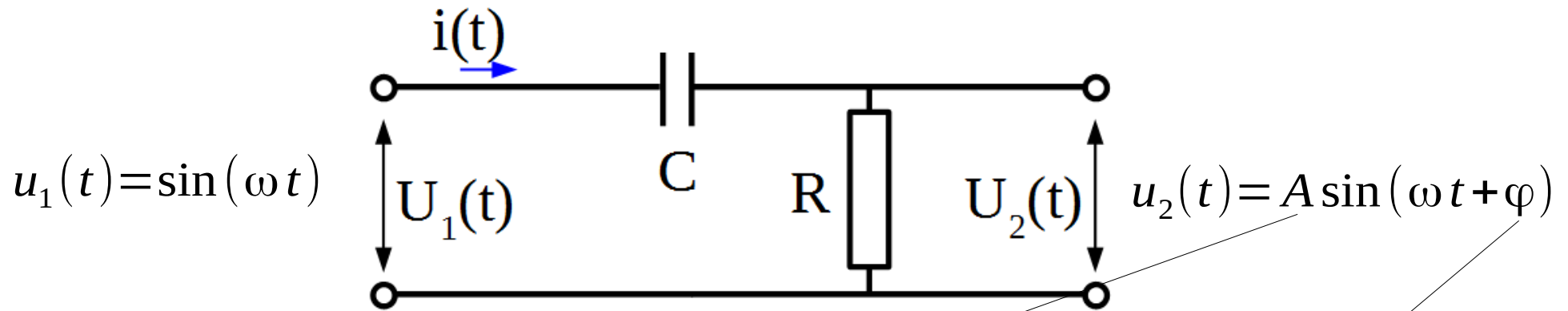
$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Wykres Bodego



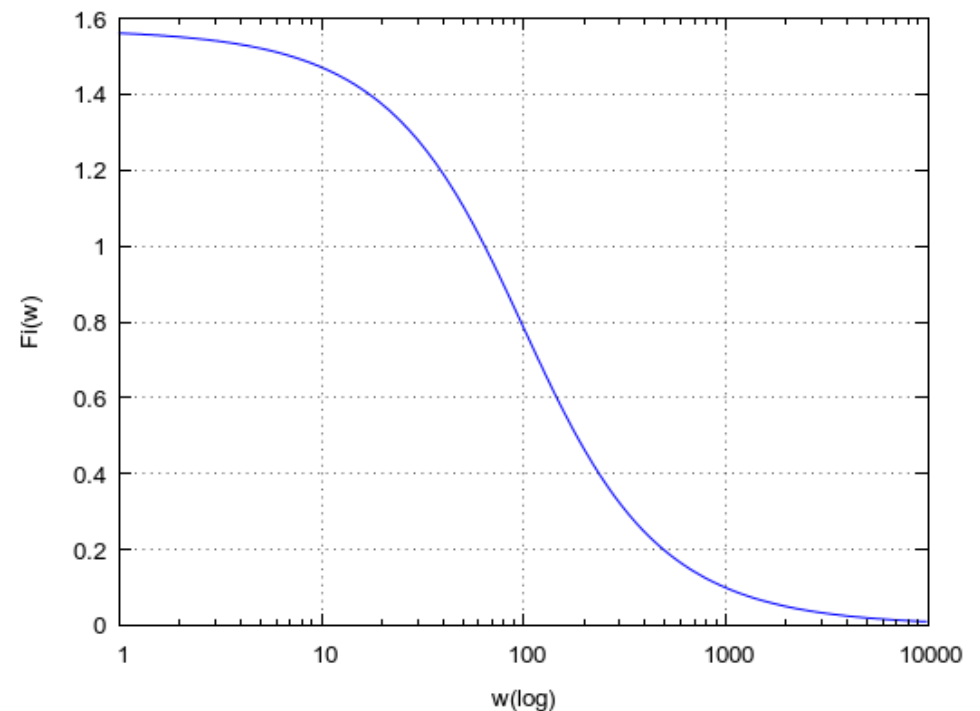
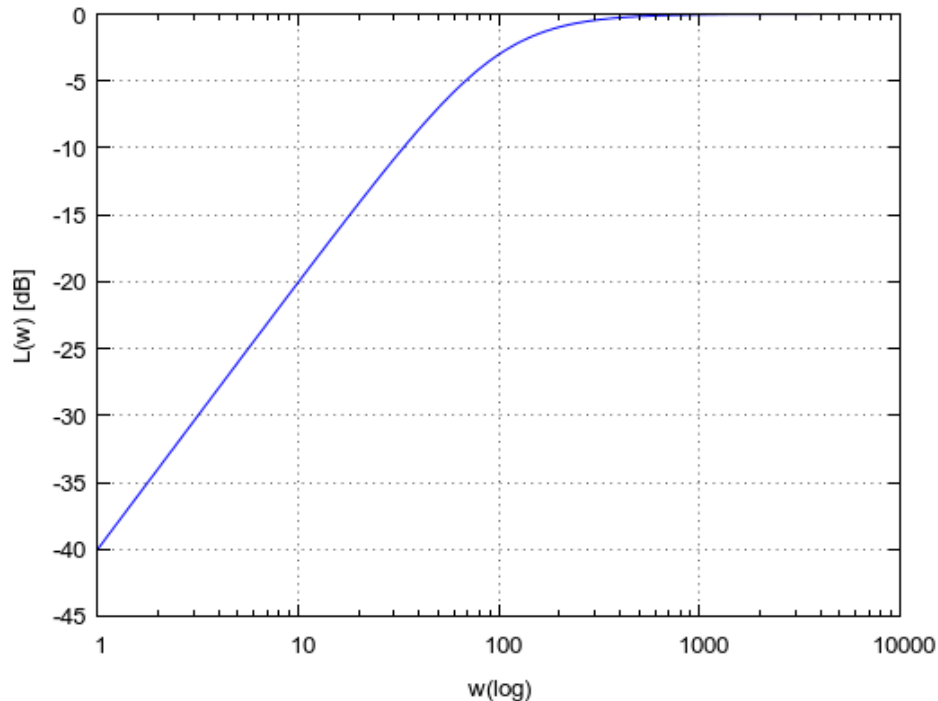
Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC



Przykładowe dane:

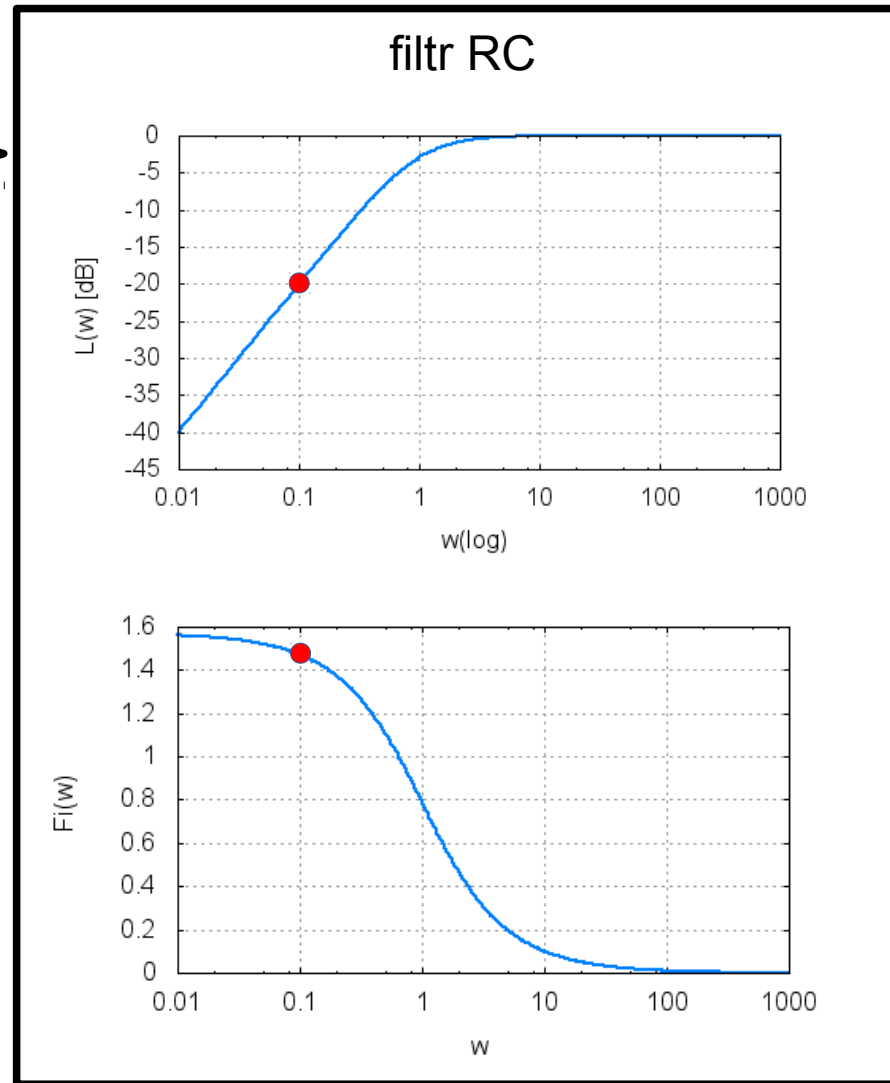
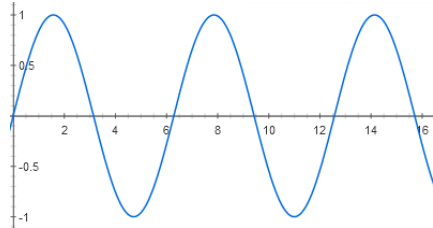
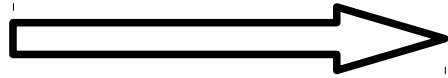
$$R = 1 \text{ k}\Omega, C = 10 \mu\text{F}$$



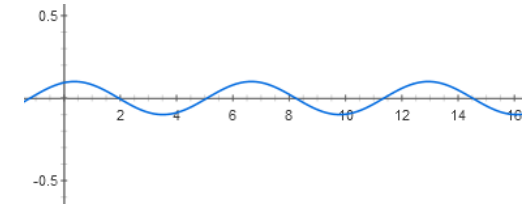
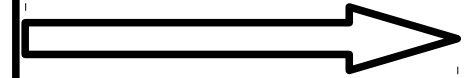
Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$u_1(t) = \sin(\omega t)$$



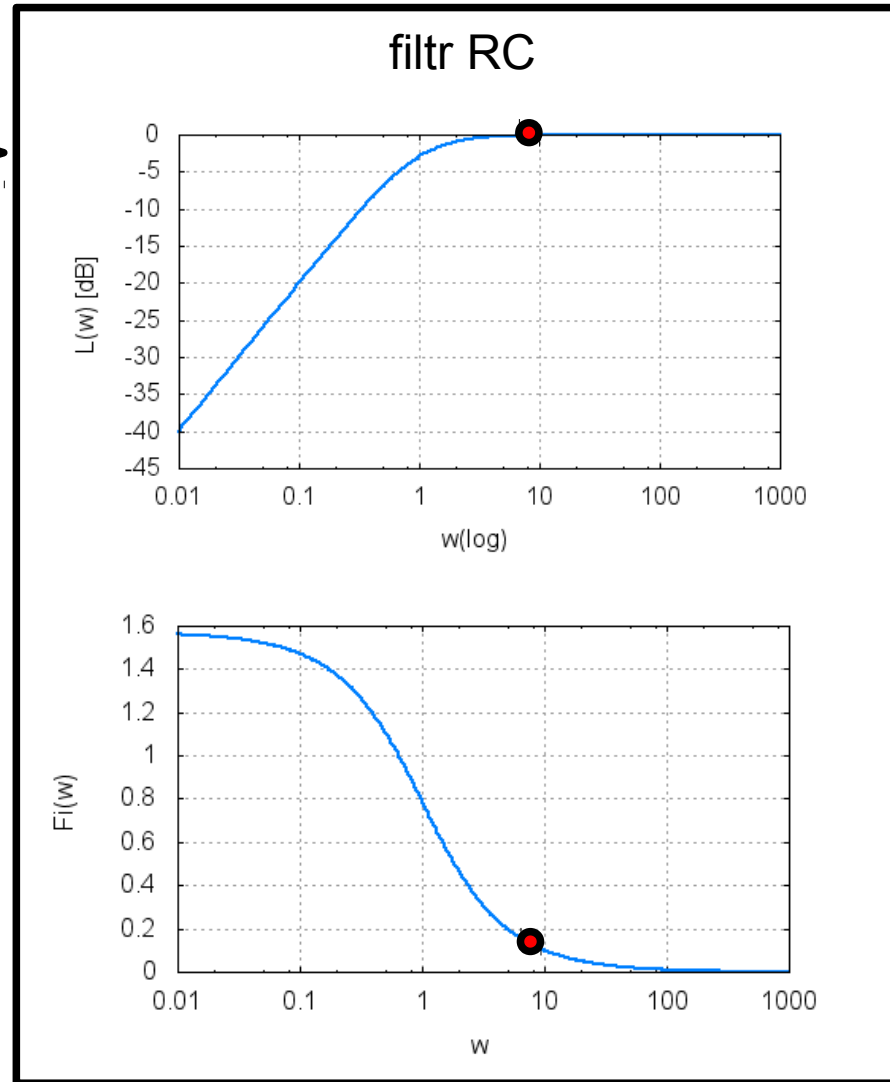
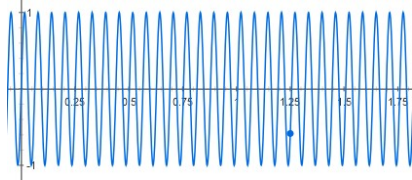
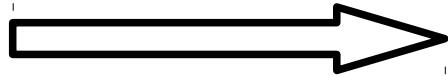
$$u_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$



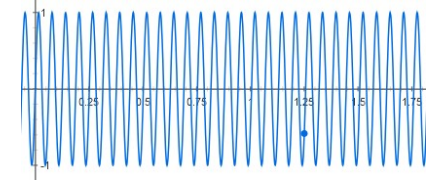
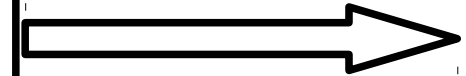
Transmitancja widmowa

Przykład 1 - obwód RC

$$u_1(t) = \sin(\omega t)$$



$$u_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$



Transmitancja widmowa

Przykład 2 - układ drgający

obiekt
traktowany jako
punkt materialny
o masie m

przeszyczenie
wyściowe

$y(t)$

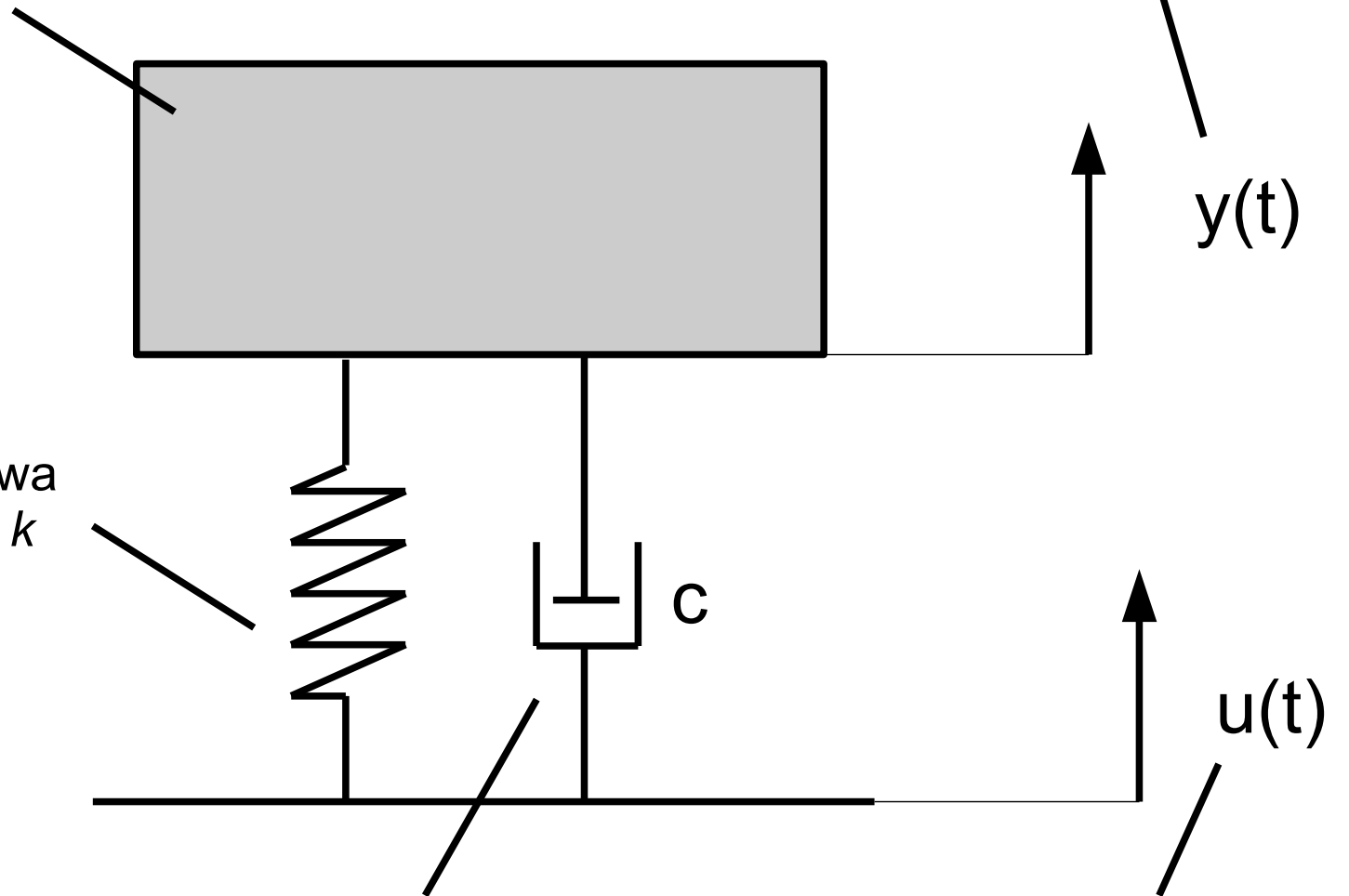
sprężyna liniowa
o sztywności k

c

$u(t)$

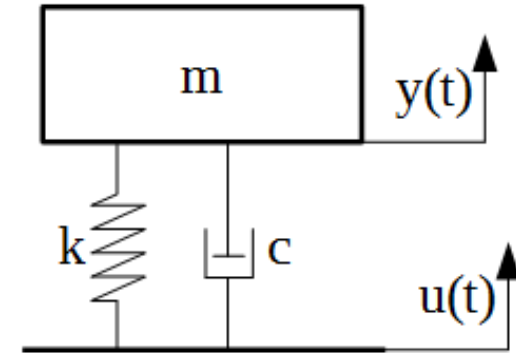
łumik liniowy
o wsp. tłumienia c

przeszyczenie
wejściowe



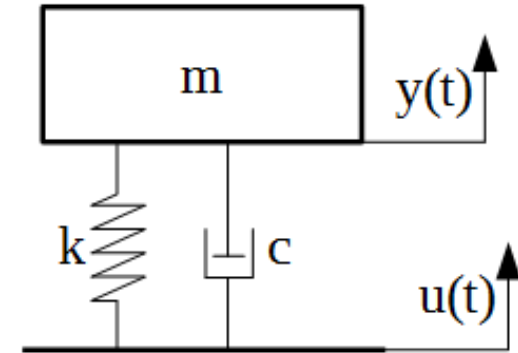
Transmitancja widmowa

Przykład 2 - układ drgający



Transmitancja widmowa

Przykład 2 - układ drgający



$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = c \dot{u}(t) + k u(t)$$

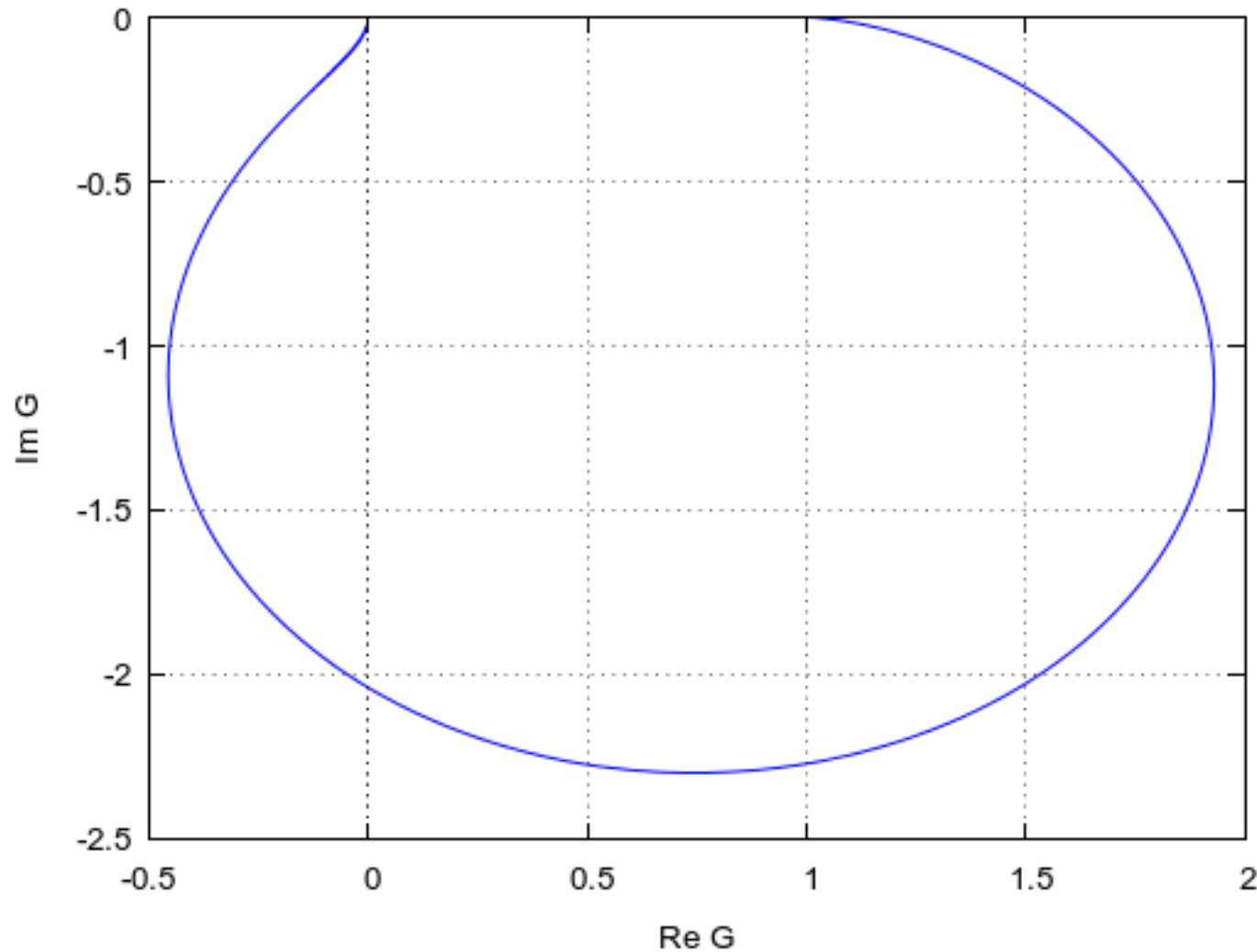
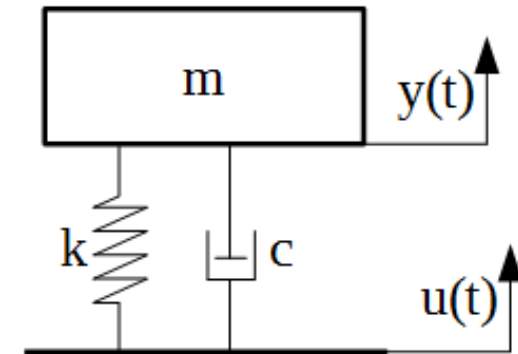
$$G(s) = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k}$$

$$P(\omega) = \frac{k^2 + c^2 \omega^2 - km\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-cm\omega^3}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}$$

Transmitancja widmowa

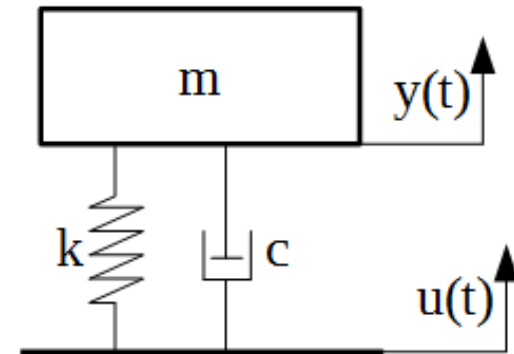
Przykład 2 - układ drgający

Wykresy dla: $m = 300 \text{ kg}$, $c = 800 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, $k = 11000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

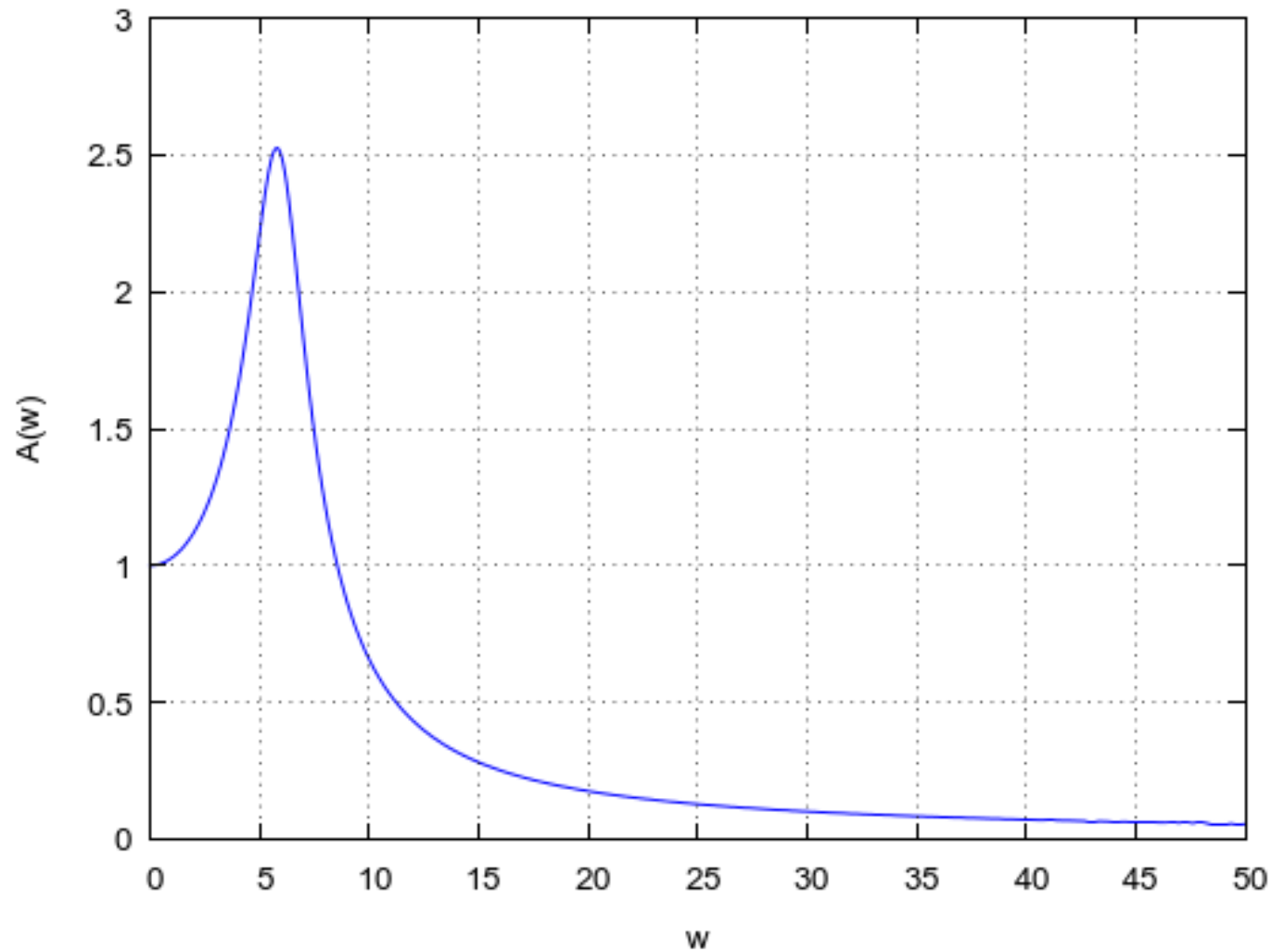


Transmitancja widmowa

Przykład 2 - układ drgający

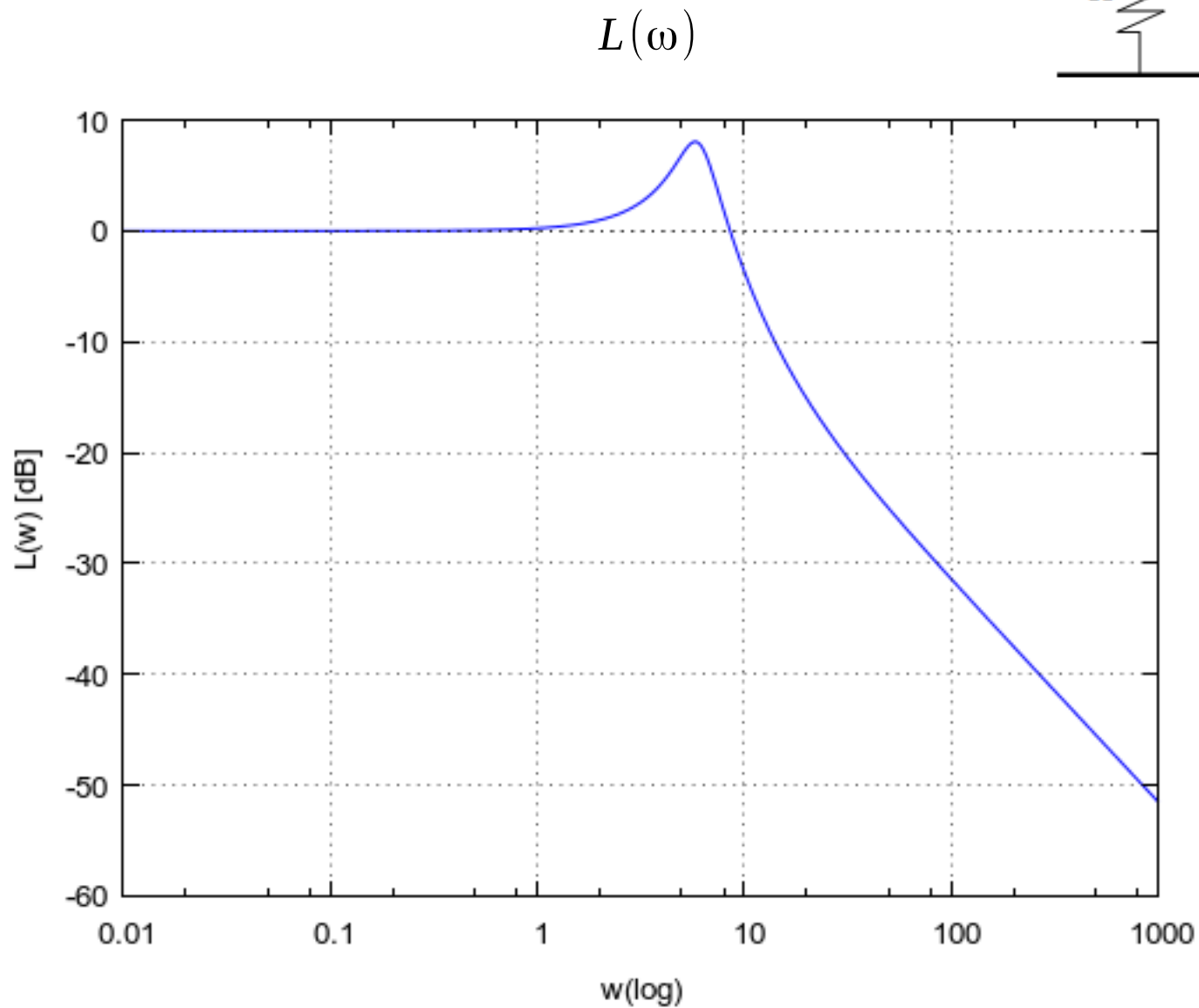
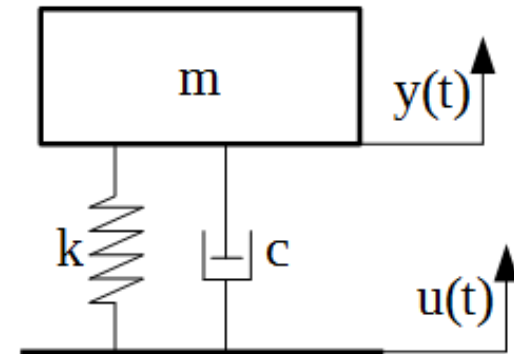


$$A(\omega)$$



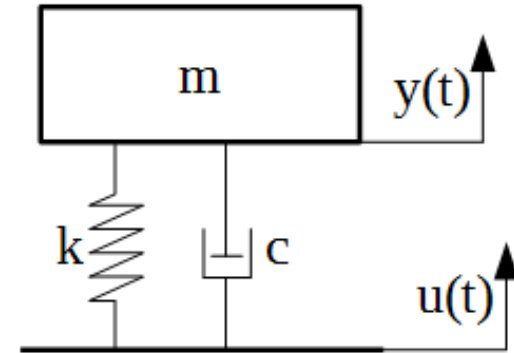
Transmitancja widmowa

Przykład 2 - układ drgający

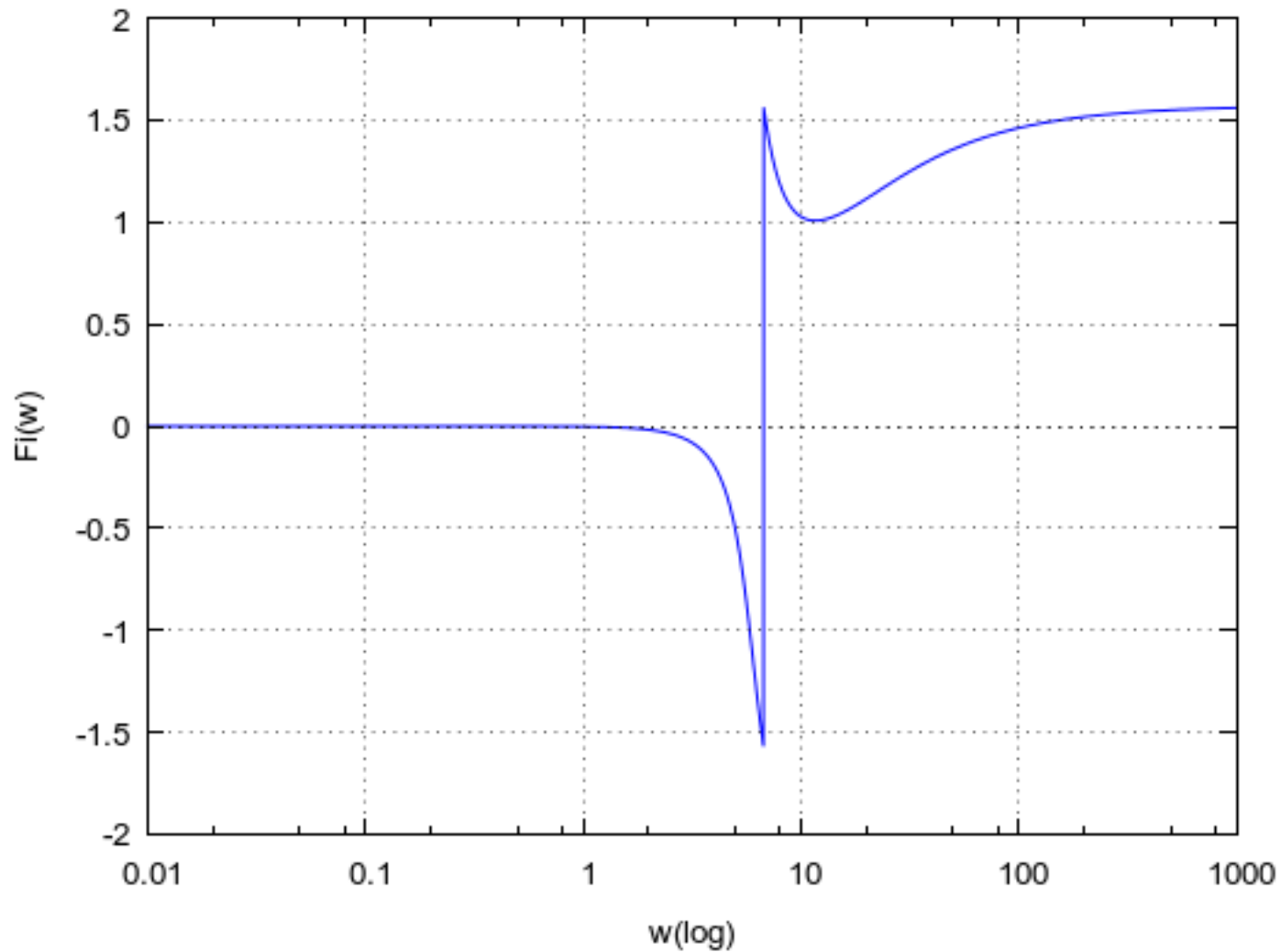


Transmitancja widmowa

Przykład 2 - układ drgający

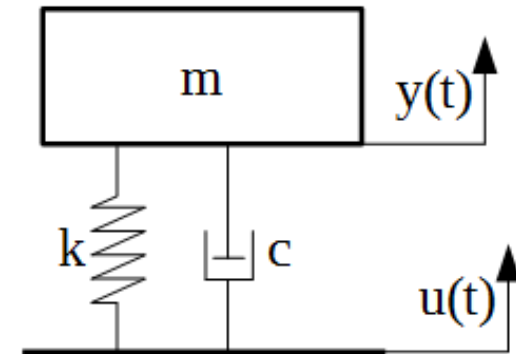


$\varphi(\omega)$ dla obliczeń z użyciem „atan”

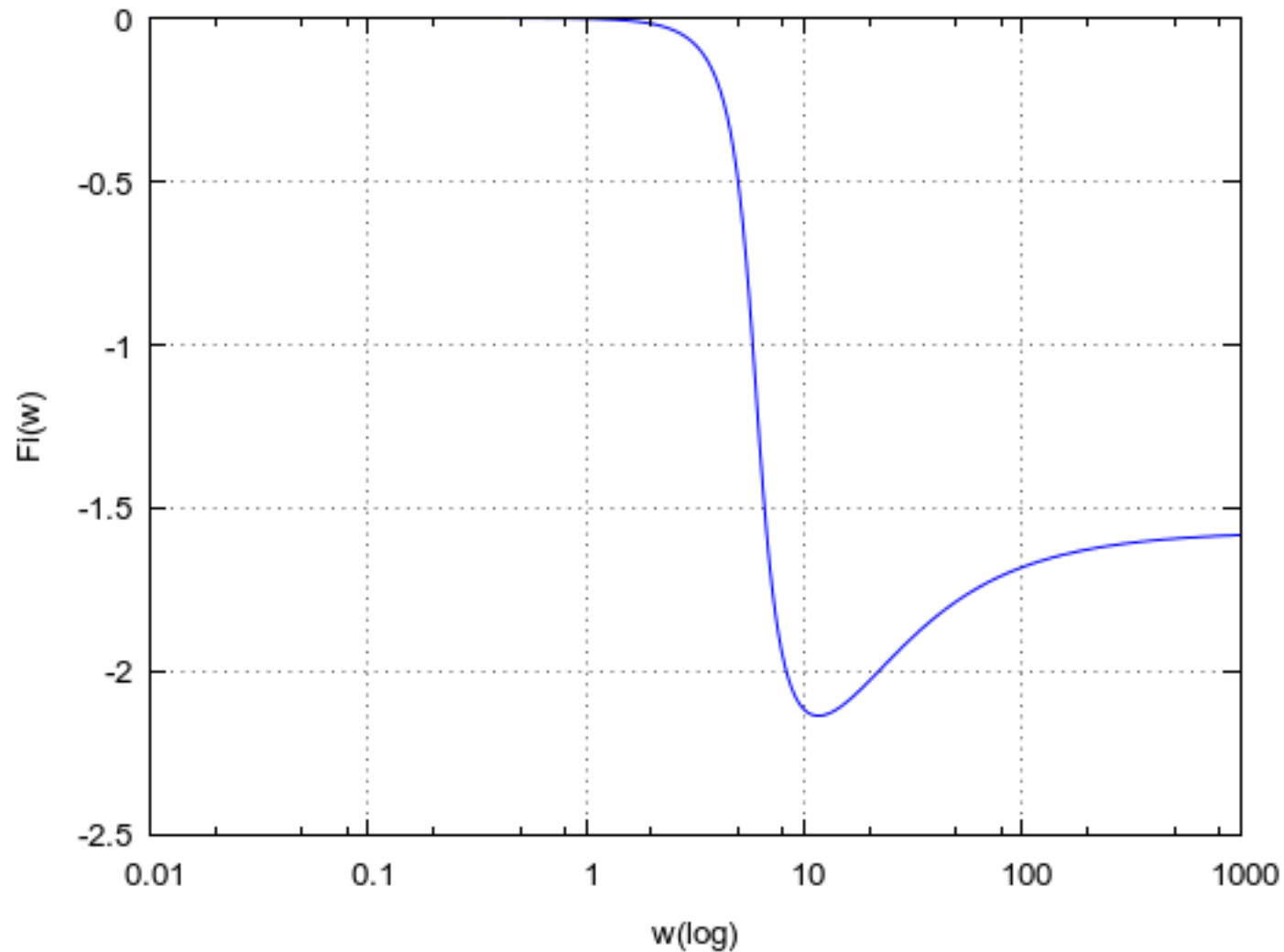


Transmitancja widmowa

Przykład 2 - układ drgający



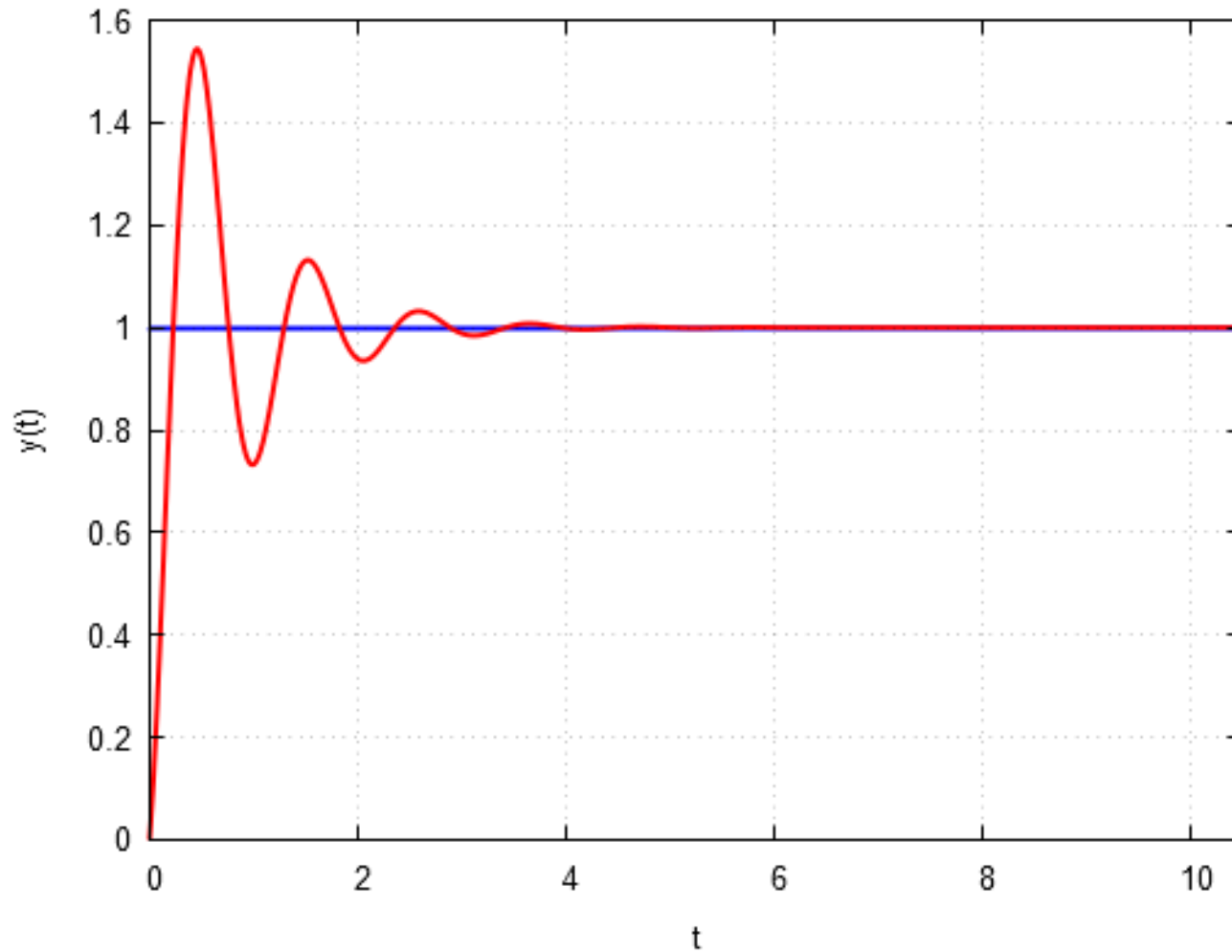
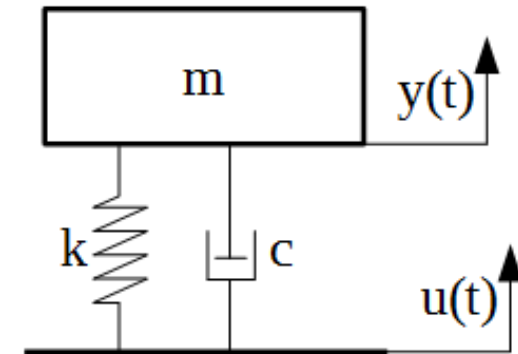
$\varphi(\omega)$ dla obliczeń z użyciem „atan2”



Transmitancja widmowa

Przykład 2 - układ drgający

Odp. na wymuszenie skokowe



Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

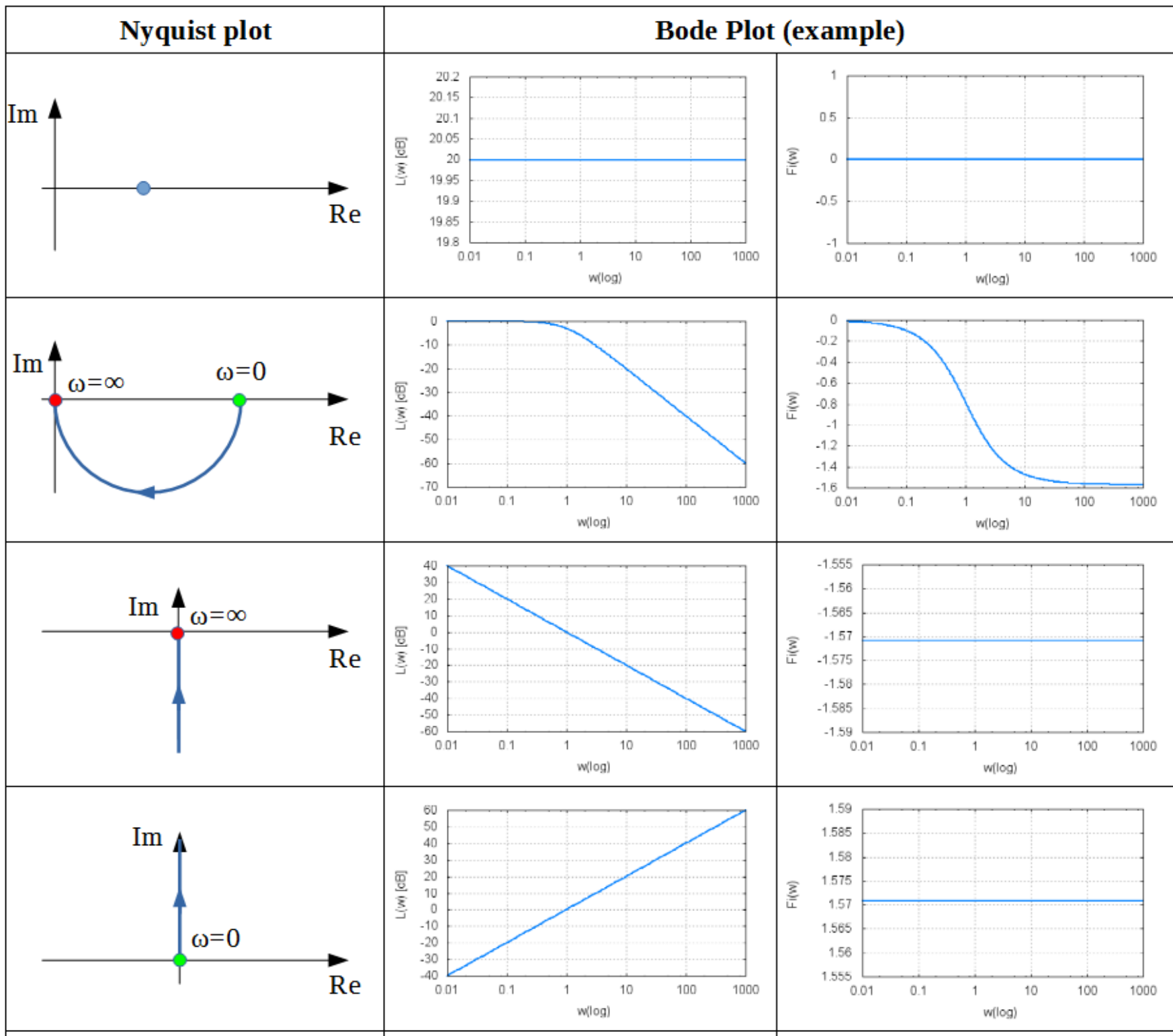
Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja
proporcjonalny (bezinercyjny)	$y(t) = ku(t)$	k
inercyjny I rzędu	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{Ts + 1}$
całkujący	$y(t) = k \int_0^t u(t) dt$ $\frac{dy(t)}{dt} = ku(t)$	$\frac{k}{s}$

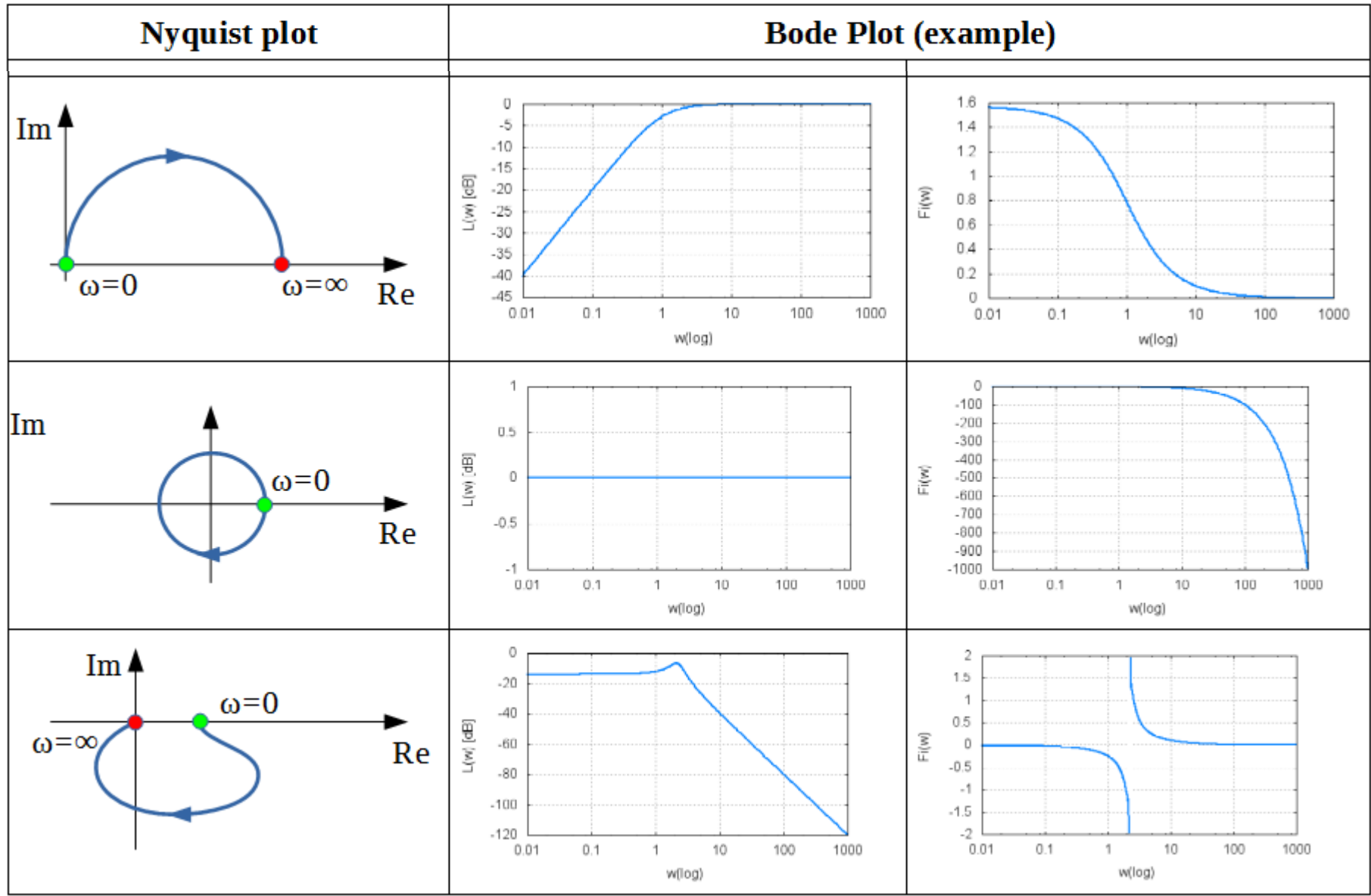
Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa	Równanie	Transmitancja
różniczkujący	$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	ks
różniczkujący rzeczywisty (z bezwładnością)	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	$\frac{ks}{Ts + 1}$

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa	Równanie	Transmitancja
opóźniający	$y(t) = u(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
inercyjny II rzędu (oscylacyjny)	$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$





WolframAlpha



transfer function $(8*s+4)/(2*s^4+7*s^3+11*s^2+19*s+6)$



[Examples](#) [Random](#)

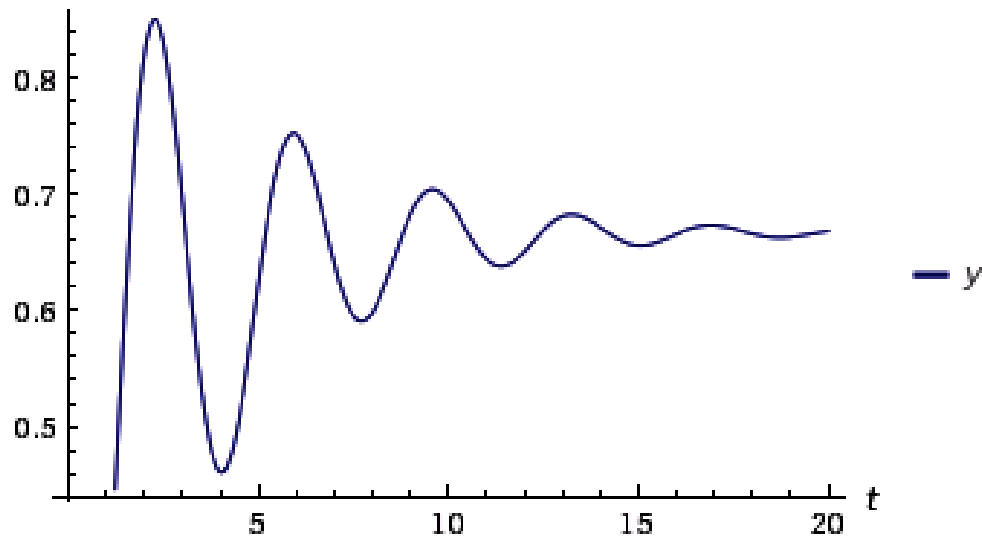
Input interpretation:

systems model

transfer function
$$\frac{4 + 8 s}{6 + 19 s + 11 s^2 + 7 s^3 + 2 s^4}$$

WolframAlpha

Unit step response plot:



Less time

More time

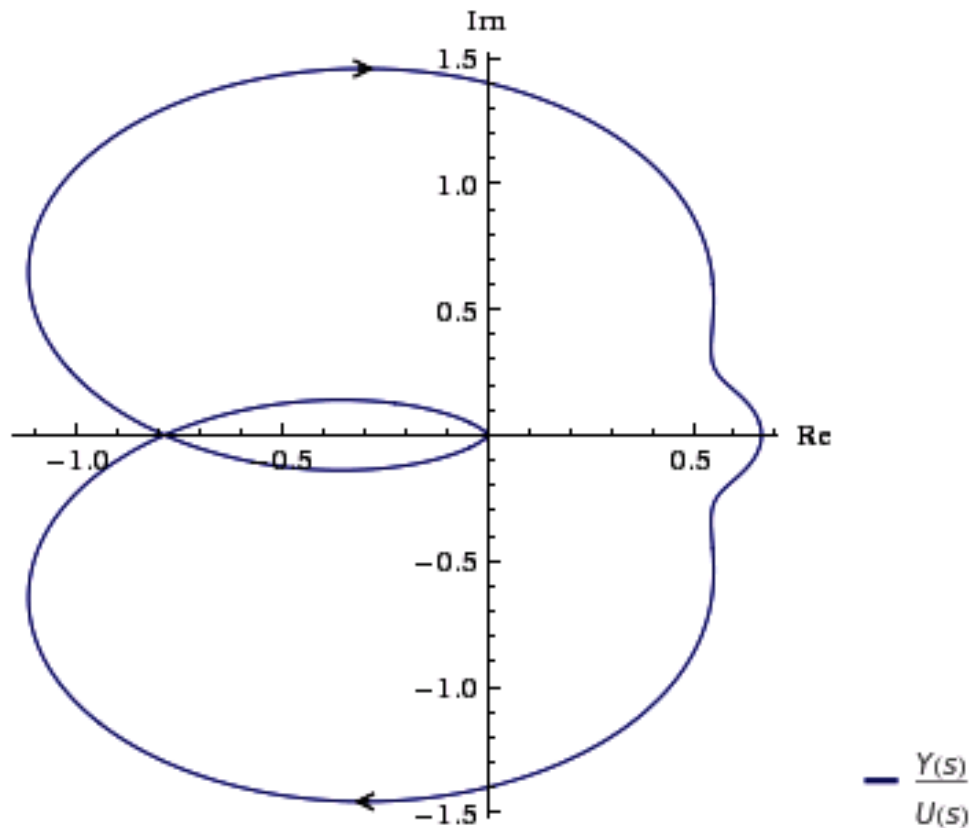
Unit step ▼

WolframAlpha

Nyquist plot:

Show Nyquist grid

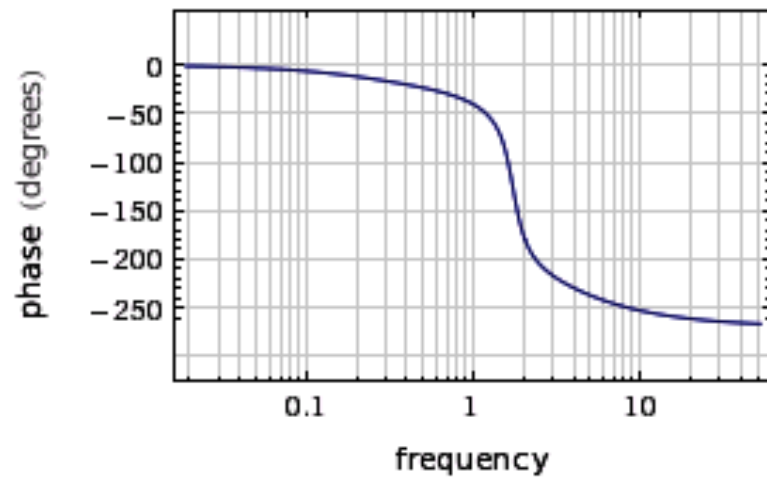
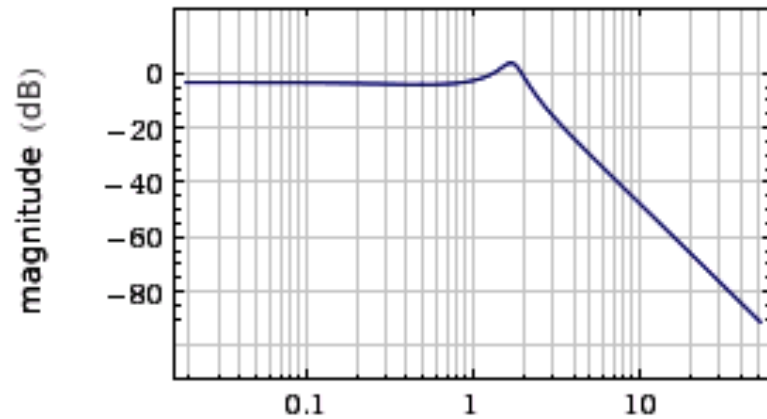
Show stability margins



WolframAlpha

Bode plot:

Show stability margins



— $\frac{Y(s)}{U(s)}$

WolframAlpha



partial fraction decomposition $s/(s^3+4s^2+5s+2)$



[Examples](#) [Random](#)

Assuming "s" is a variable | Use as a [unit](#) instead

Input:

partial fractions

$$\frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Result:

[Step-by-step solution](#)

$$\frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = -\frac{2}{s + 2} + \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{(s + 1)^2}$$

WolframAlpha



inverse laplace transform $s/(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)$



Examples Random

Assuming "s" is a variable | Use as a [unit](#) instead

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}\right](t)$$

$\mathcal{L}_s^{-1}[f(s)](t)$ is the inverse Laplace transform of $f(s)$ with real variable t

Result:

$$-e^{-2t} (e^t t - 2e^t + 2)$$