Politechnika Warszawska
Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
Instytut Podstaw Budowy Maszyn
Zakład Mechaniki
http://www.ipbm.simr.pw.edu.pl/

Teoria maszyn i podstawy automatyki

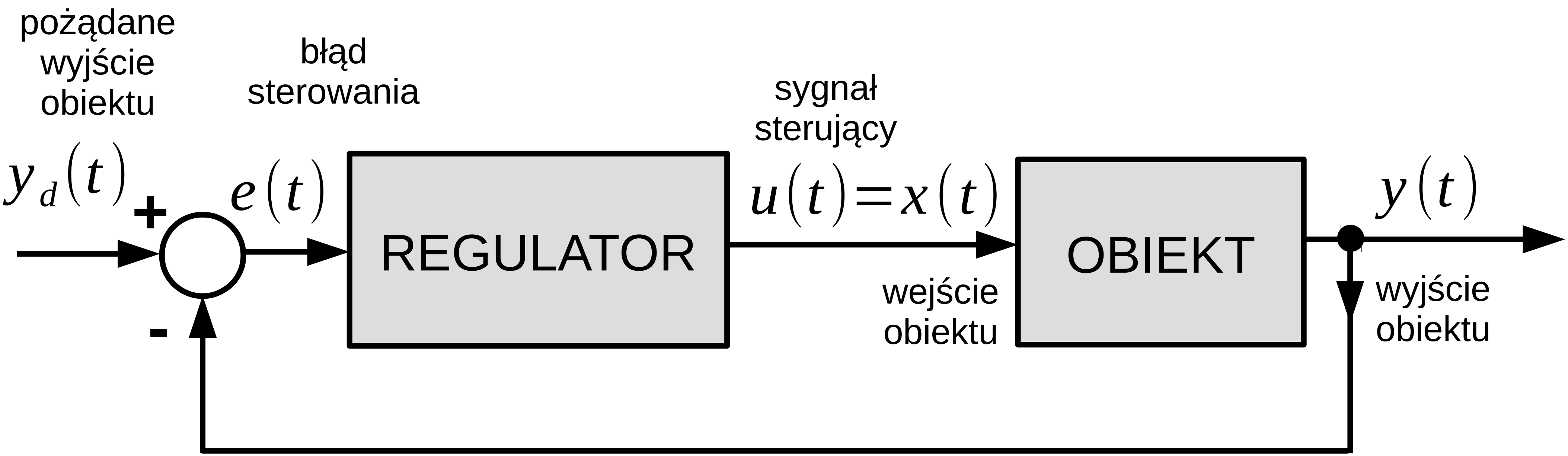
semestr zimowy 2017/2018

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 12

Regulator PID.
Stabilność.

Sterowanie w zamkniętej pętli



Transmitancje podstawowych regulatorów

Regulator	Transmitancja
Proporcjonalny (P)	k_P
Całkujący (I)	$\frac{1}{T_i s}$
Różniczkujący idealny (D)	$T_d s$
Różniczkujący rzeczywisty (D)	$\frac{T_d s}{T s+1}$

Transmitancje podstawowych regulatorów

Regulator	Transmitancja
Proporcjonalno-całkujący (PI)	$k_P\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$
Proporcjonalno-różniczkujący (PD)	$k_P\left(1+T_d s\right)$

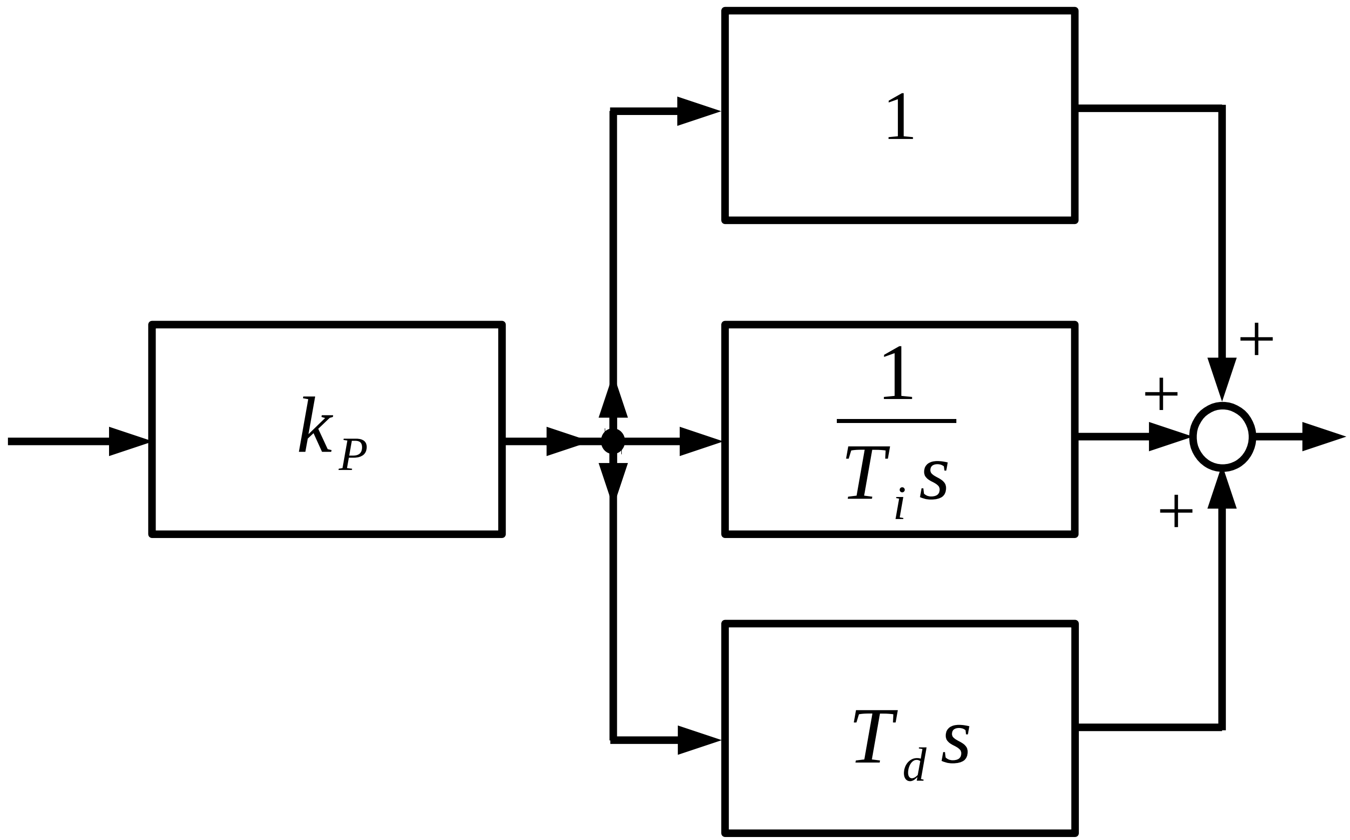
Transmitancje podstawowych regulatorów

Regulator	Transmitancja
Proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (PID) <u>w postaci standardowej</u> z różniczkowaniem idealnym	$k_P\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$
Proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (PID) <u>w postaci równoległej</u> z różniczkowaniem idealnym	$k_P+k_i\frac{1}{s}+k_d s$

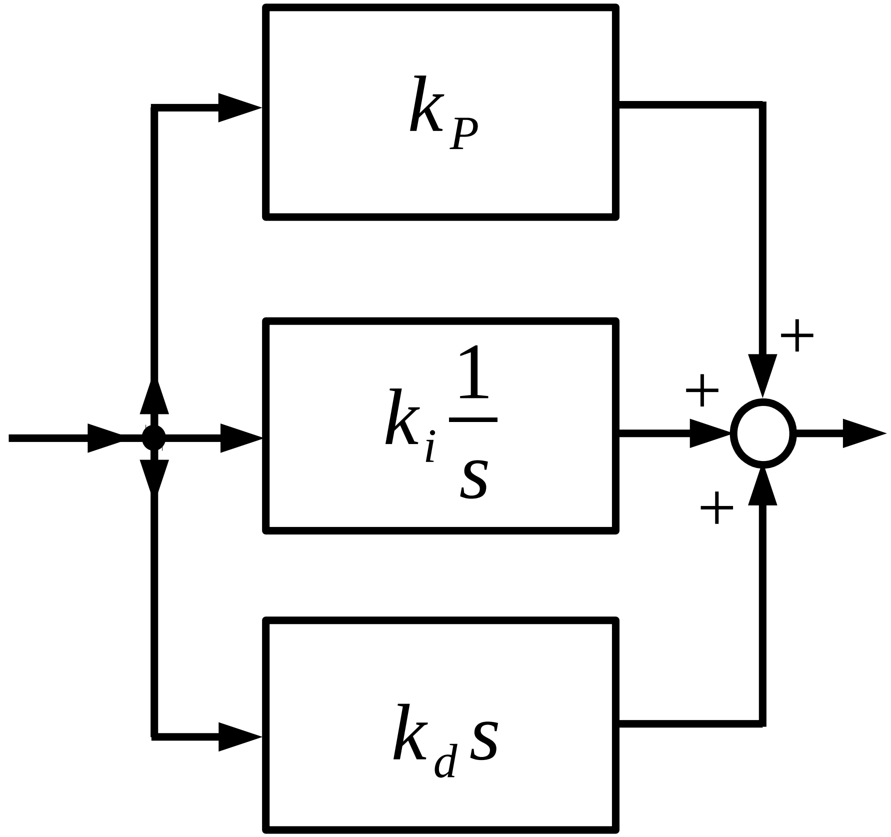
Transmitancje podstawowych regulatorów

Regulator	Transmitancja
Proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (PID) <u>w postaci standardowej</u> z różniczkowaniem rzeczywistym	$k_P\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{Ts+1}\right)$
Proporcjonalno-całkująco-różniczkujący (PID) <u>w postaci równoległej</u> z różniczkowaniem rzeczywistym	$k_P+k_i\frac{1}{s}+k_d\frac{s}{Ts+1}$

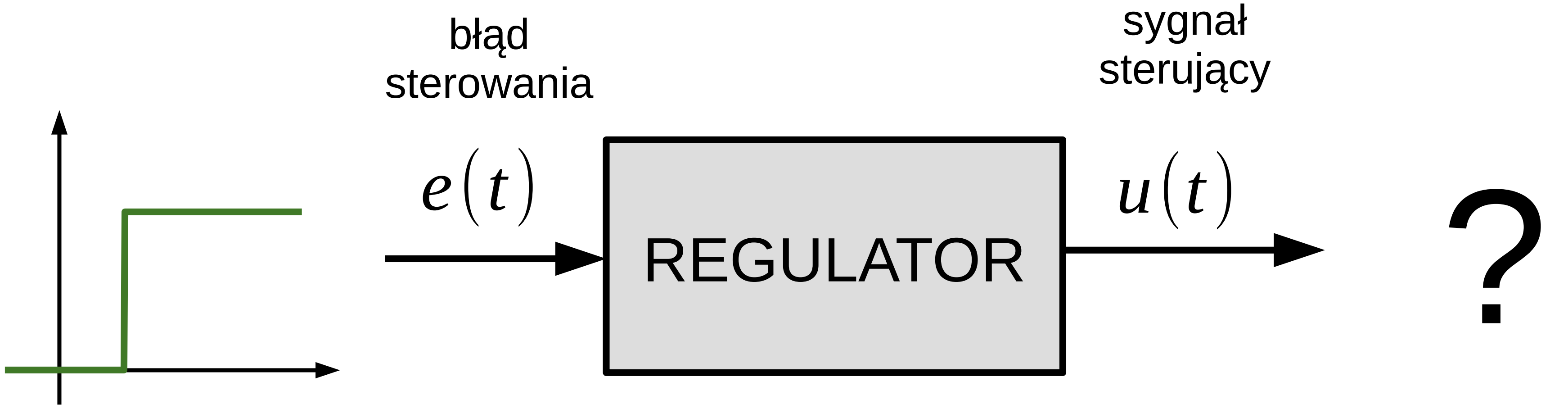
Regulator PID postać standardowa z różniczkowaniem idealnym



Regulator PID postać równoległa z różniczkowaniem idealnym

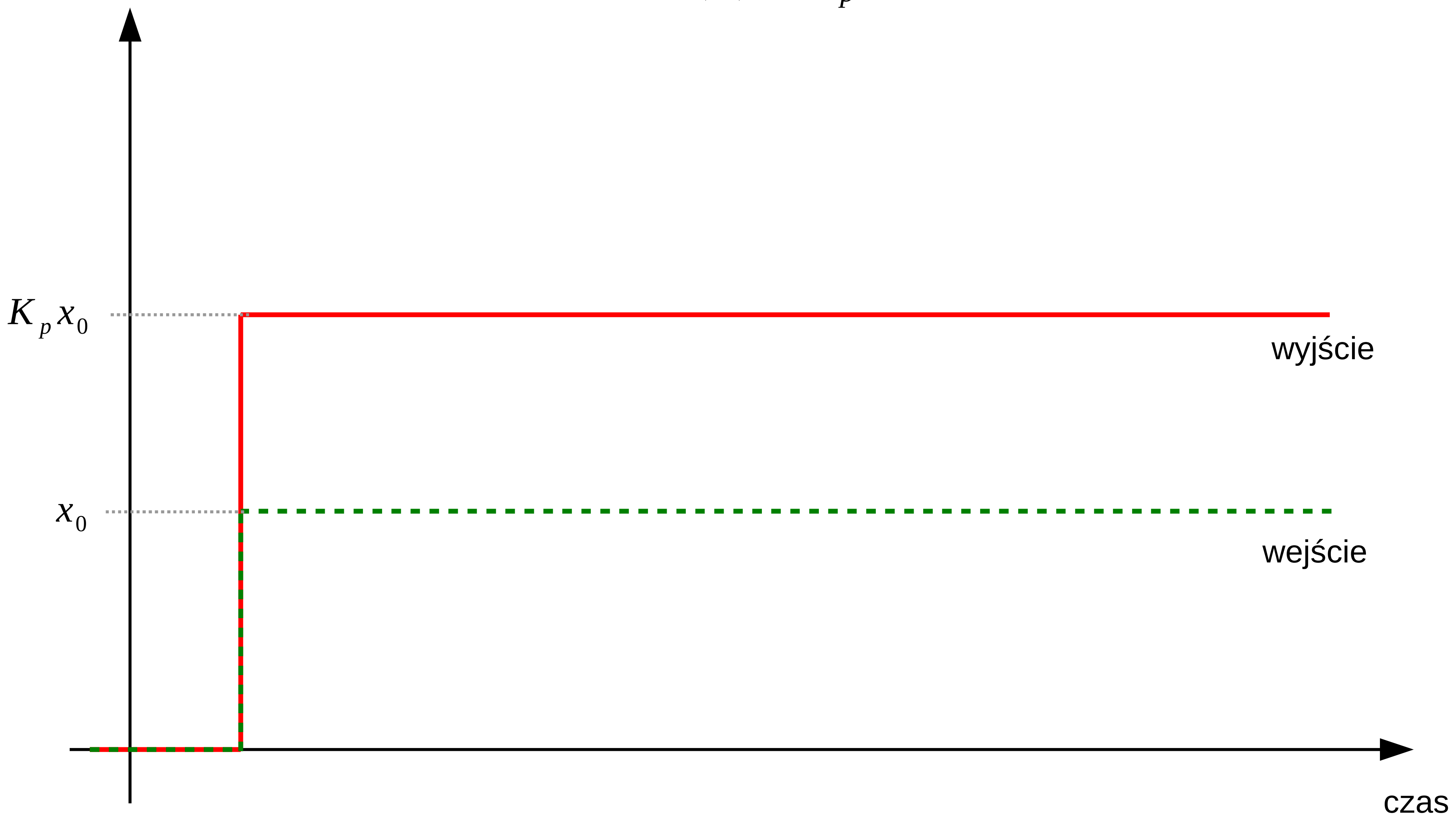


Regulatory - odpowiedzi na wymuszenia skokowe



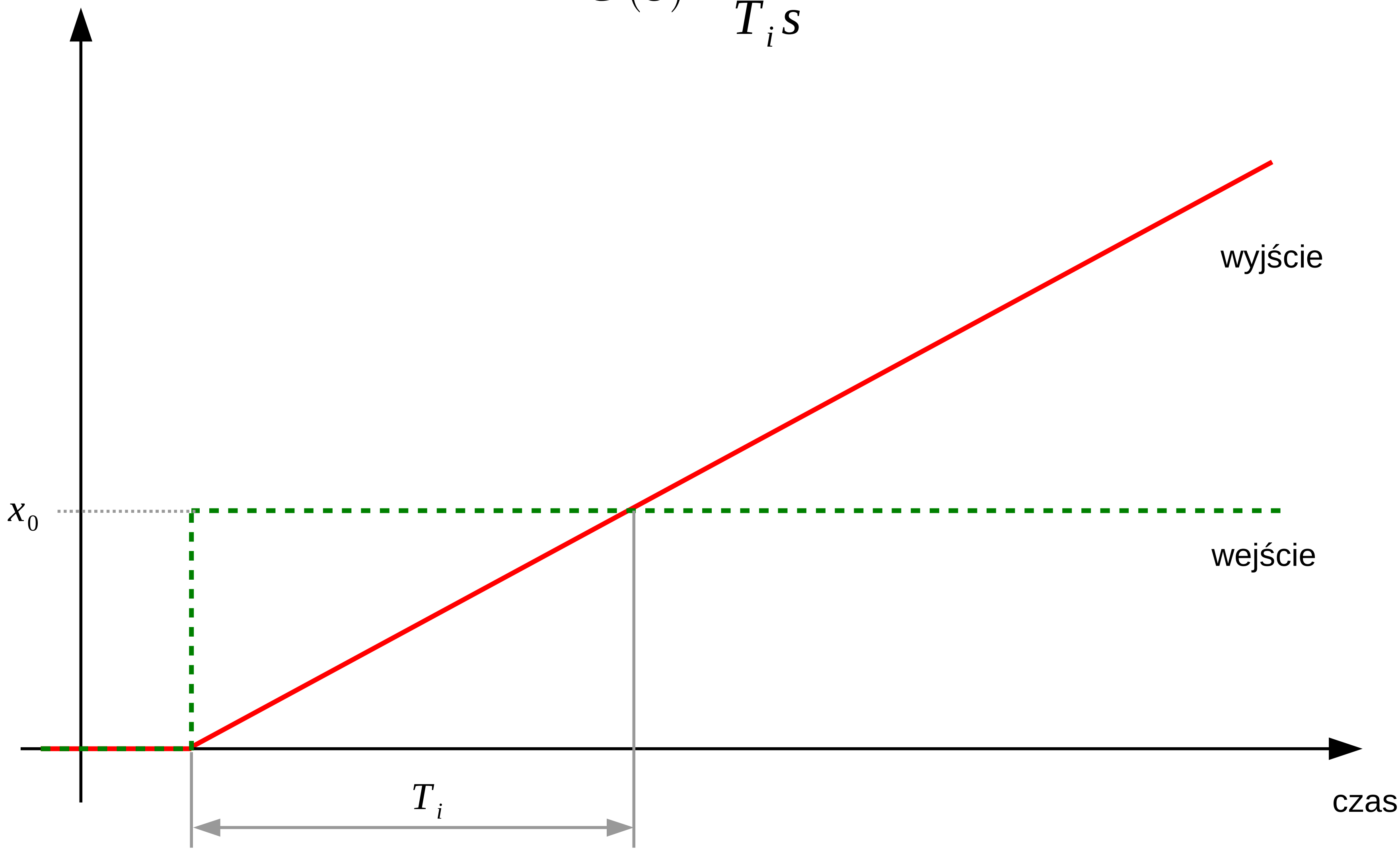
Regulator proporcjonalny (P)

$$G(s) = K_p$$



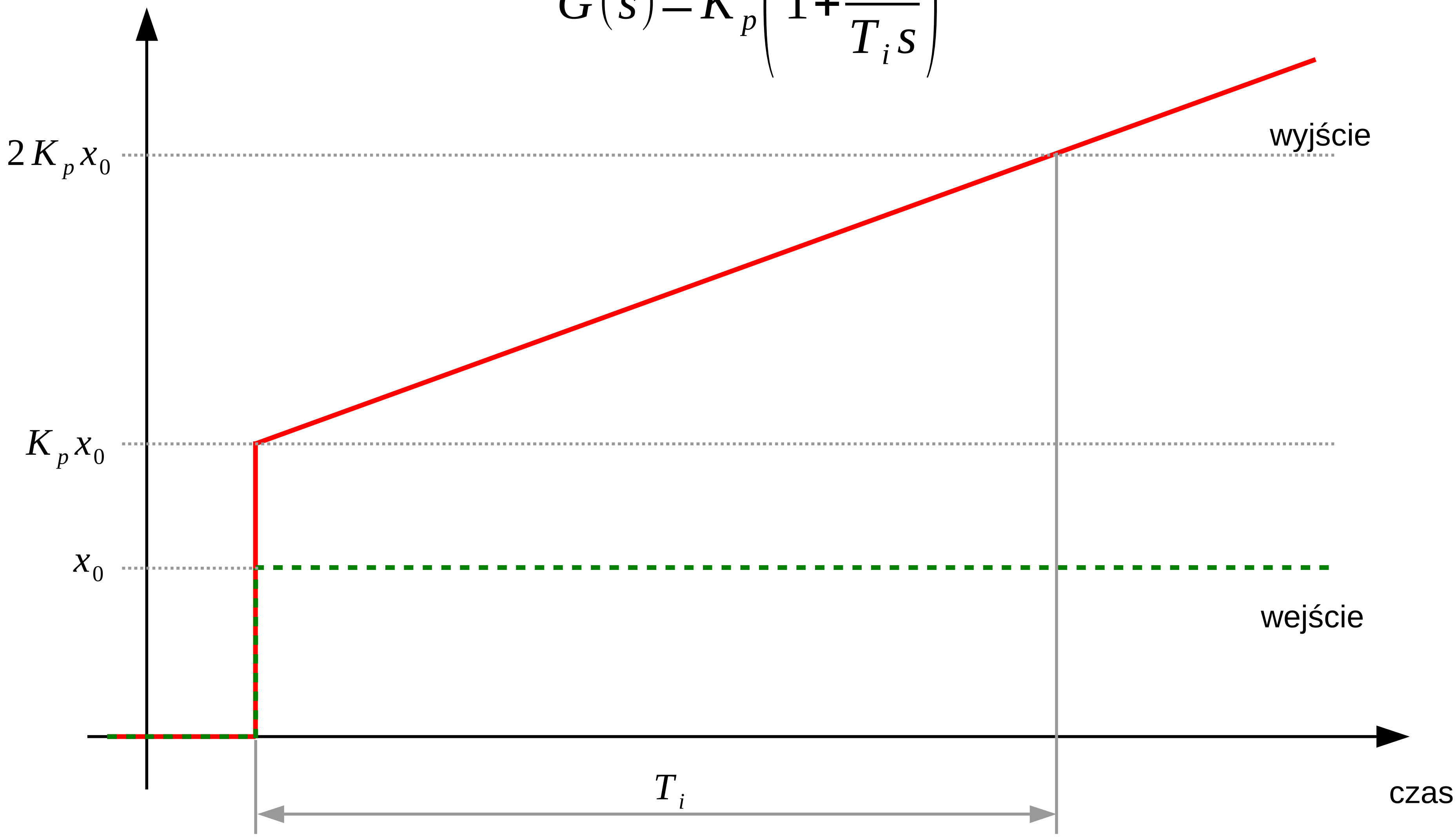
Regulator całkujący (I)

$$G(s)=\frac{1}{T_i s}$$



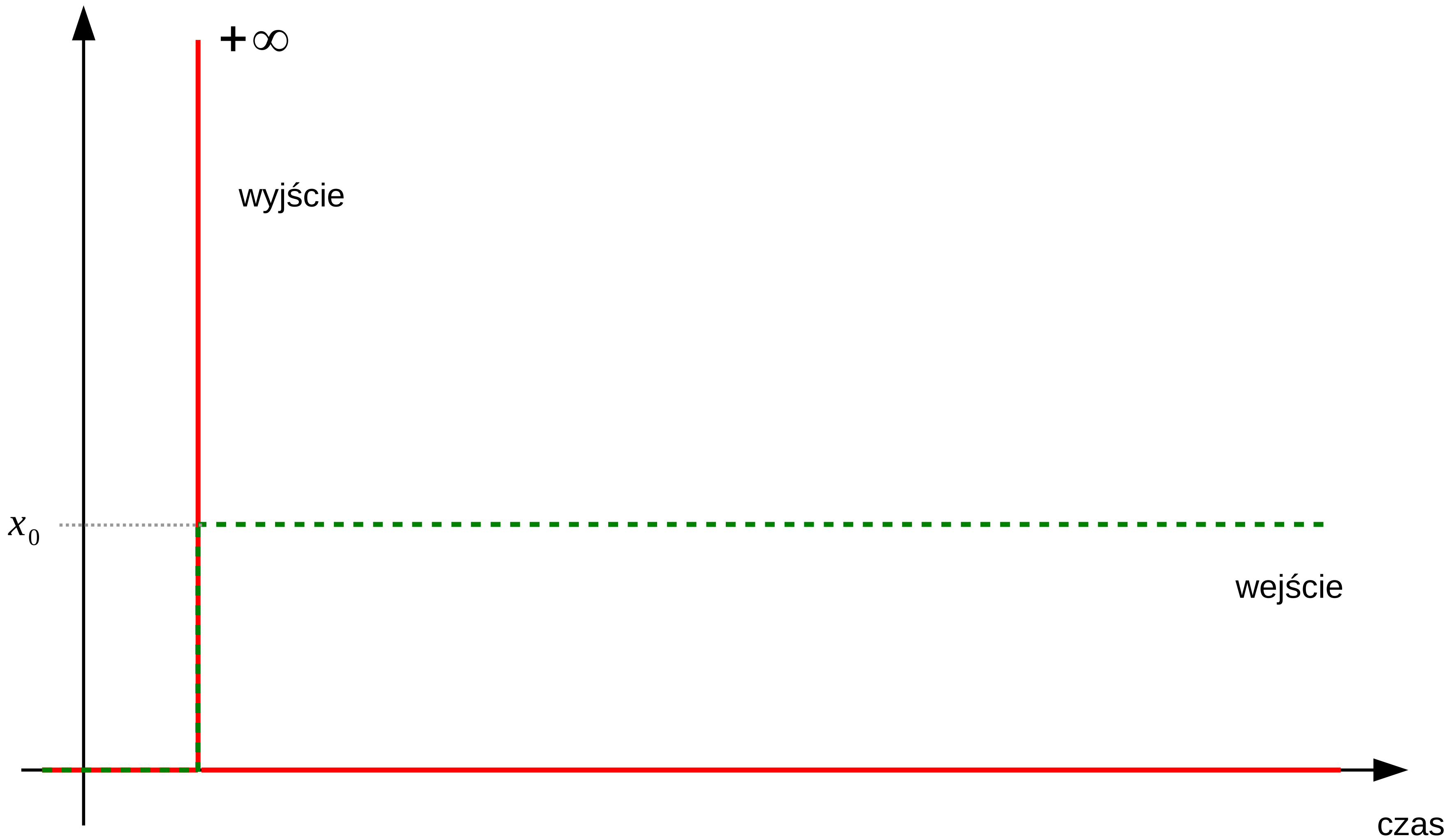
Regulator proporcjonalno-całkujący (PI)

$$G(s)=K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$$



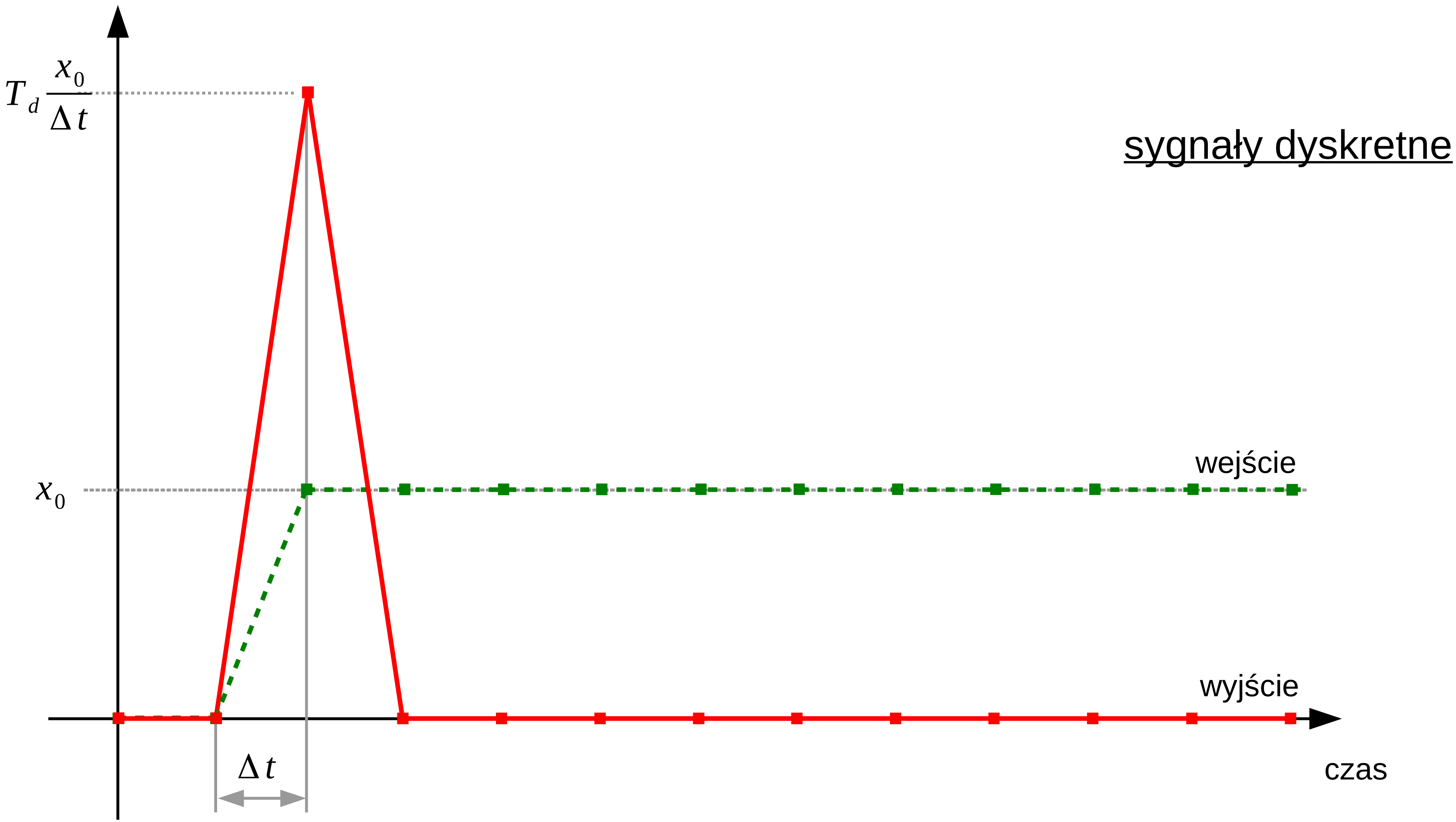
Regulator różniczkujący idealny (D)

$$G(s) = T_d s$$



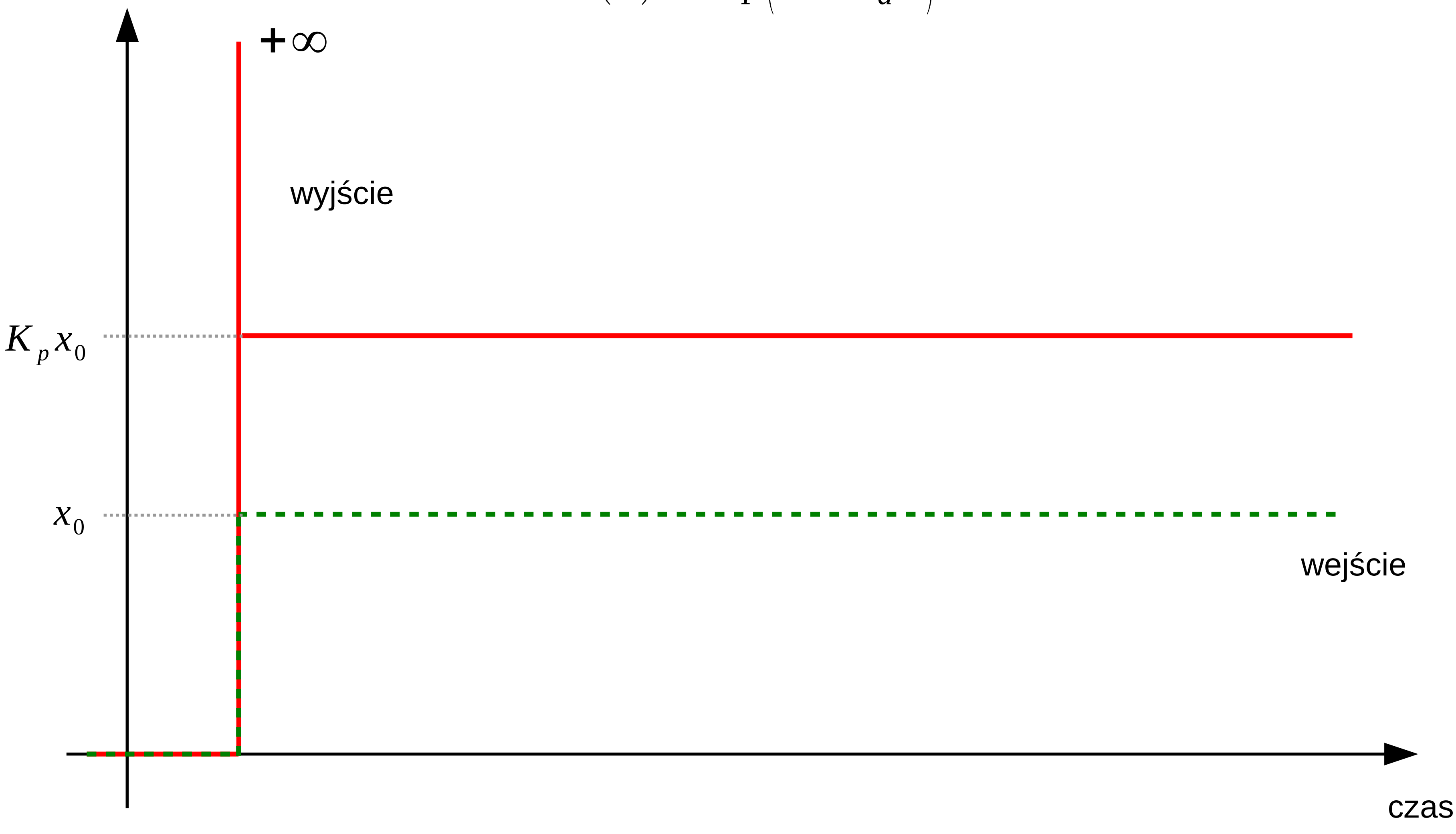
Regulator różniczkujący idealny (D)

$$G(s) = T_d s$$



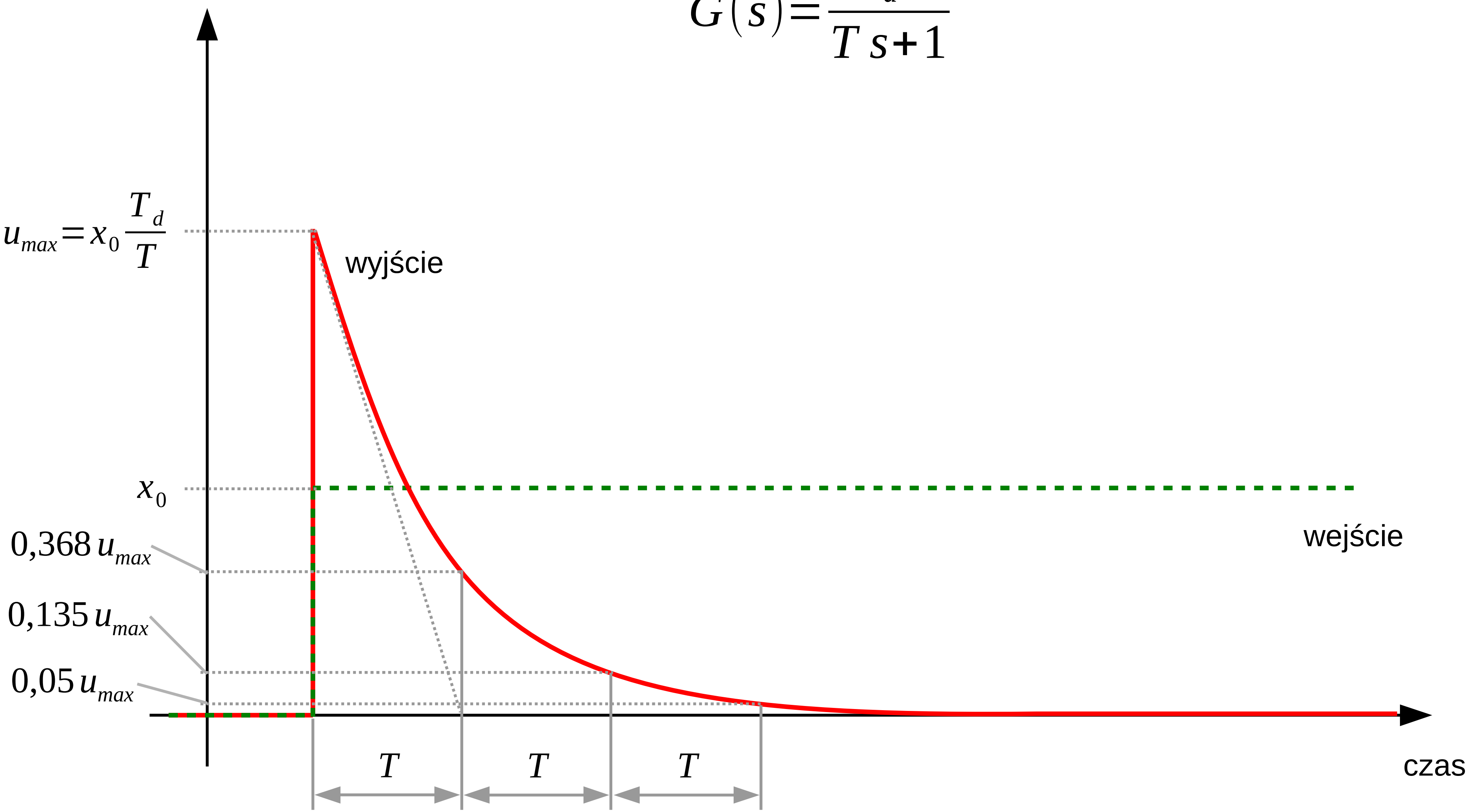
Regulator proporcjonalno-różniczkujący (PD)

$$G(s) = K_P(1 + T_d s)$$



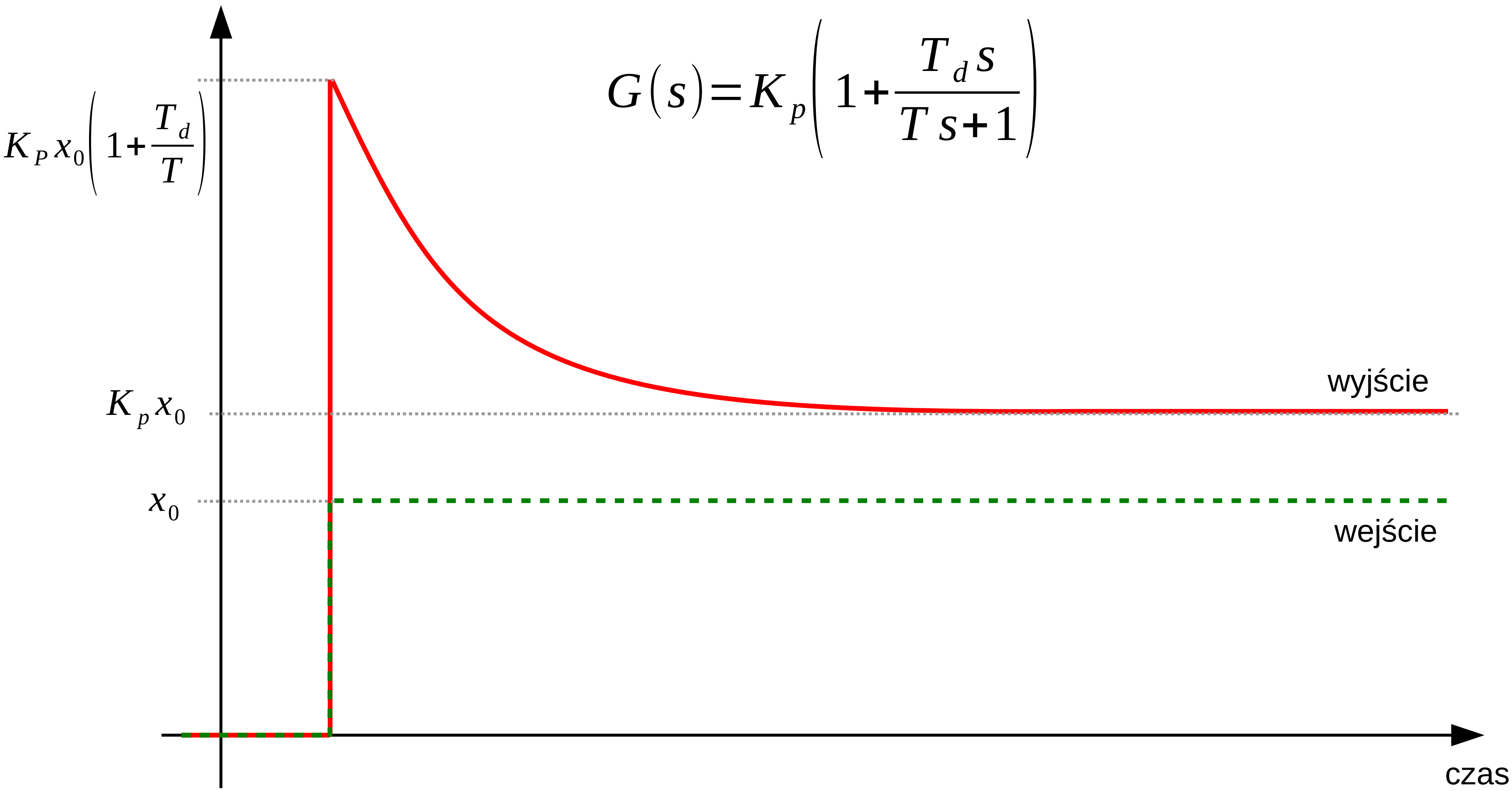
Regulator różniczkujący rzeczywisty (D)

$$G(s)=\frac{T_d s}{T s+1}$$



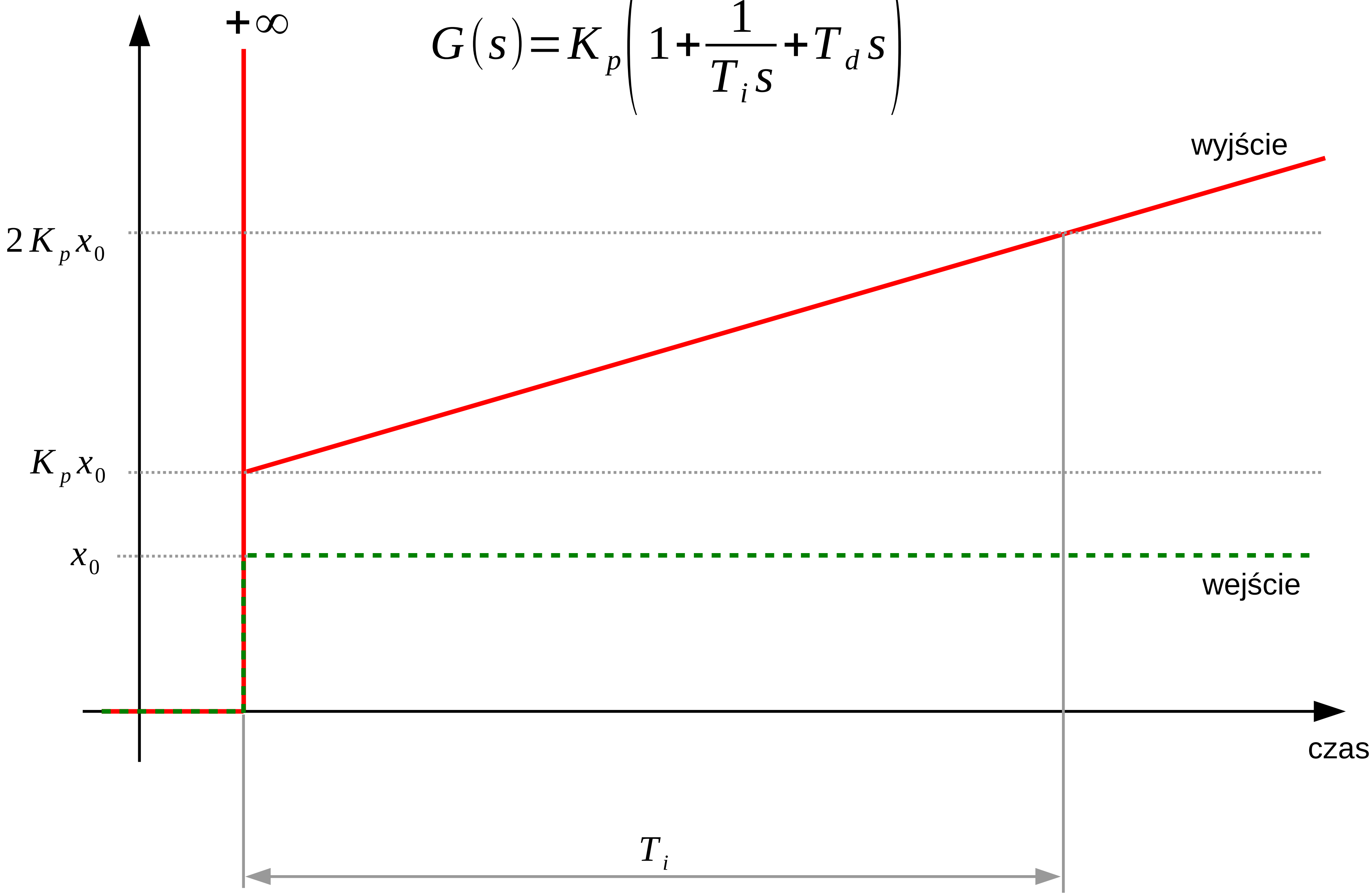
Regulator proporcjonalno-różniczkujący rzeczywisty (PD)

$$G(s) = K_p\left(1 + \frac{T_d s}{T s + 1}\right)$$



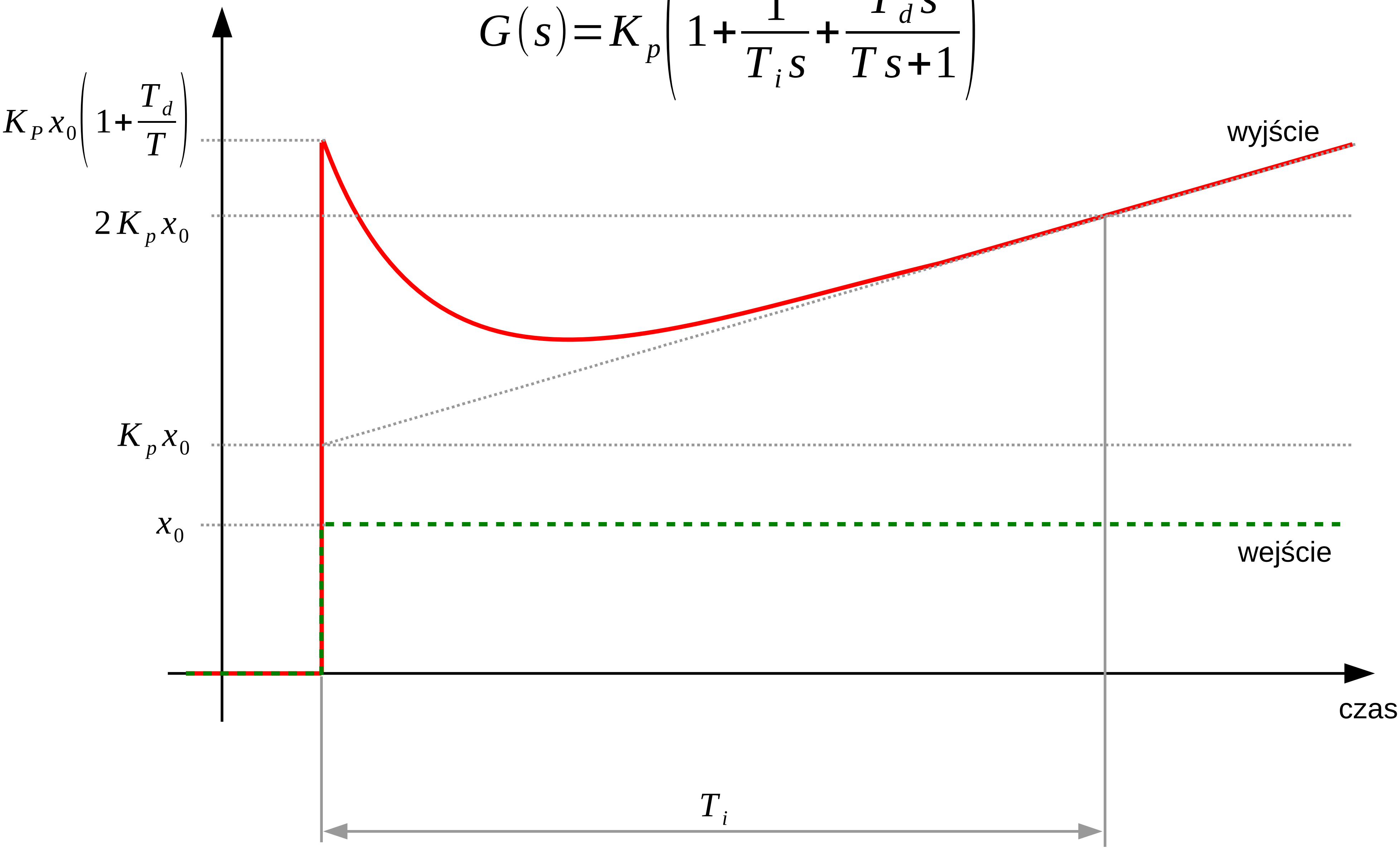
Regulator PID w postaci standardowej z różniczkowaniem idealnym

$$G(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$



Regulator PID w postaci standardowej z różniczkowaniem rzeczywistym

$$G(s)=K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{T s+1}\right)$$



regulator PID

charakterystyka działania

Czynnik proporcjonalny – zazwyczaj niezbędny do działania regulatora, gdyż powoduje generowanie sygnału sterującego zbliżającego wyjście układu do wartości zadanej; zwiększanie jego wartości zazwyczaj zmniejsza błędy sterowania; sygnał sterujący jest uzależniony tylko od aktualnej wartości błędu;

regulator PID

charakterystyka działania

Czynnik proporcjonalny – zazwyczaj niezbędny do działania regulatora, gdyż powoduje generowanie sygnału sterującego zbliżającego wyjście układu do wartości zadanej; zwiększanie jego wartości zazwyczaj zmniejsza błędy sterowania; sygnał sterujący jest uzależniony tylko od aktualnej wartości błędu;

Czynnik całkujący – akumuluje błędy; niezerowy błąd powoduje wzrost sygnału sterującego, co zazwyczaj pomaga osiągnąć wartość zadaną; sygnał sterujący jest uzależniony od wcześniejszego przebiegu błędów; problem nasycenia całkowania; wygładza zakłócenia;

regulator PID

charakterystyka działania

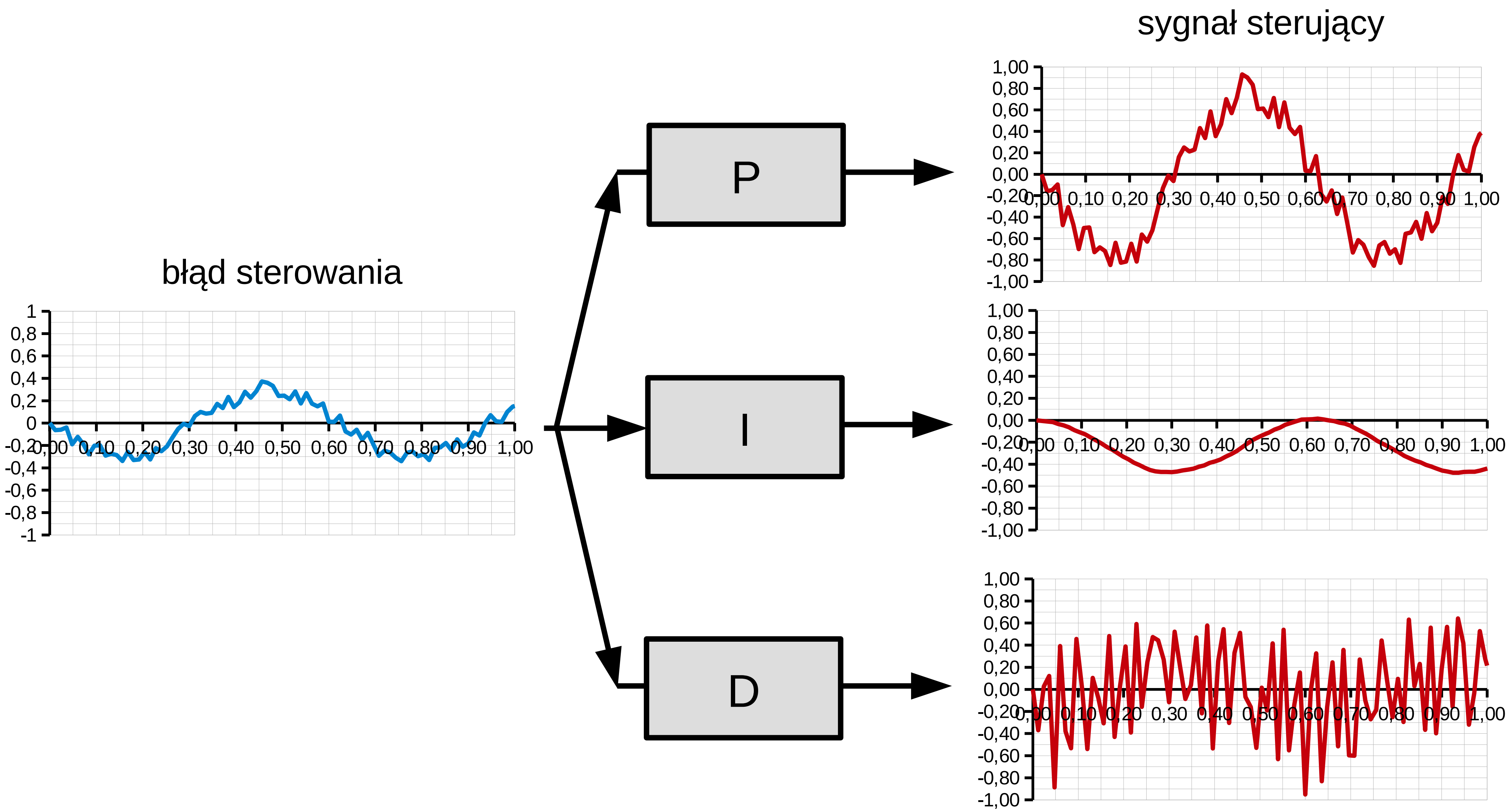
Czynnik proporcjonalny – zazwyczaj niezbędny do działania regulatora, gdyż powoduje generowanie sygnału sterującego zbliżającego wyjście układu do wartości zadanej; zwiększanie jego wartości zazwyczaj zmniejsza błędy sterowania; sygnał sterujący jest uzależniony tylko od aktualnej wartości błędu;

Czynnik całkujący – akumuluje błędy; niezerowy błąd powoduje wzrost sygnału sterującego, co zazwyczaj pomaga osiągnąć wartość zadaną; sygnał sterujący jest uzależniony od wcześniejszego przebiegu błędów; problem nasycenia całkowania; wygładza zakłócenia;

Czynnik różniczkujący – reaguje na zmiany wartości błędu; przy stałym błędzie generuje zerowy sygnał sterujący; sygnał sterujący wynika z trendu przyszłego błędu; czynnik bardzo podatny na zakłócenia;

regulator PID

Wpływ zakłóceń i błędów pomiaru na sygnał sterujący



regulator PID

problem nasycenia całkowania (*integral windup*)

Po dużej zmianie wartości zadanej czynnik całkujący może wygenerować bardzo duży sygnał sterujący na skutek długiego akumulowania błędu. Sygnał ten może wręcz osiągnąć maksymalną dopuszczalną wartość. Sygnał sterujący będzie tak duży dopóki wartość zakumulowanego błędu nie zacznie spadać, a to ma miejsce dopiero po osiągnięciu przeciwnego znaku błędu. Działanie układu sterowania jest zatem przez długi czas zablokowane, co niekorzystnie wpływa na zachowanie układu.

regulator PID

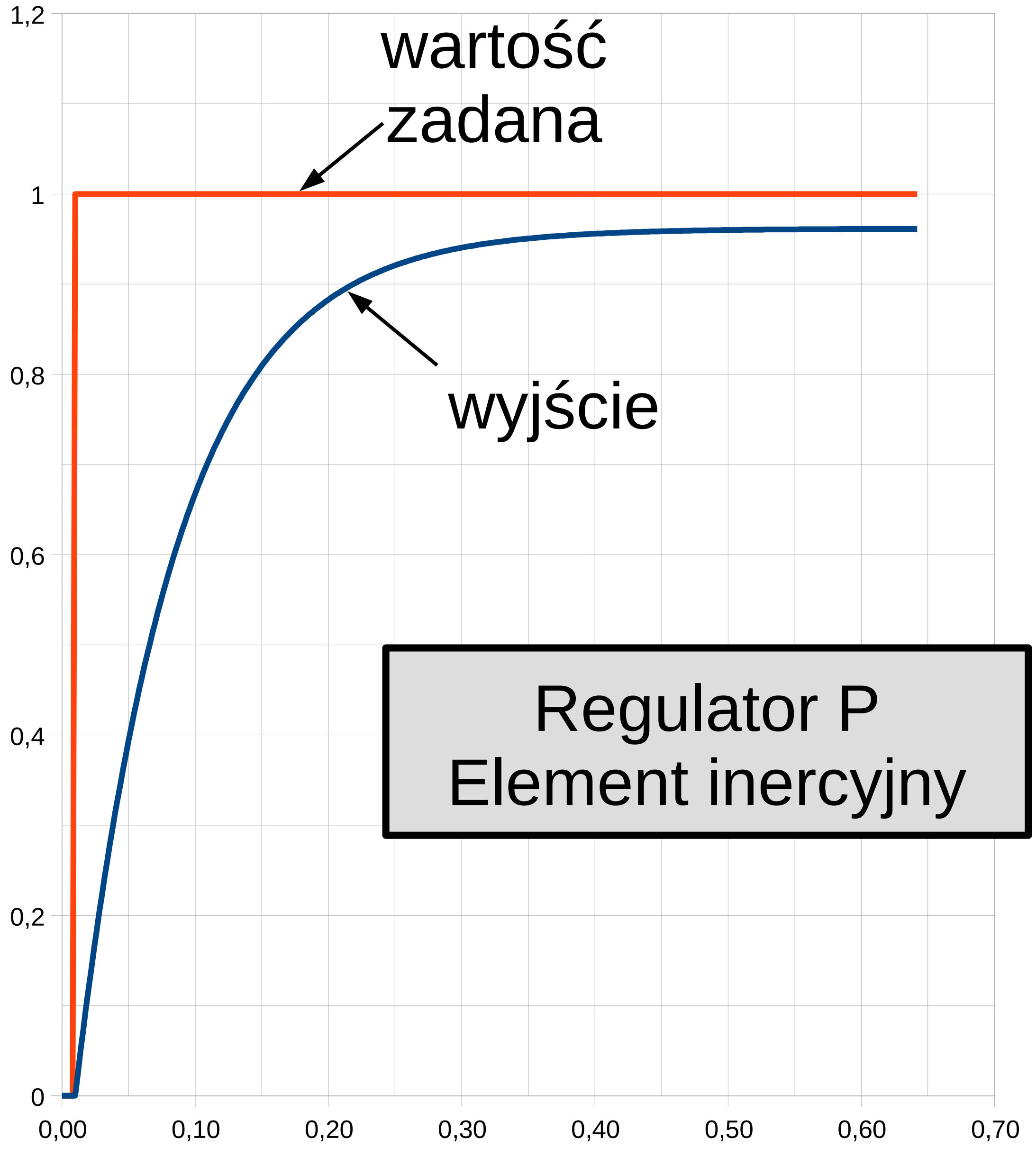
<u>problem nasycenia całkowania (*integral windup*)</u>

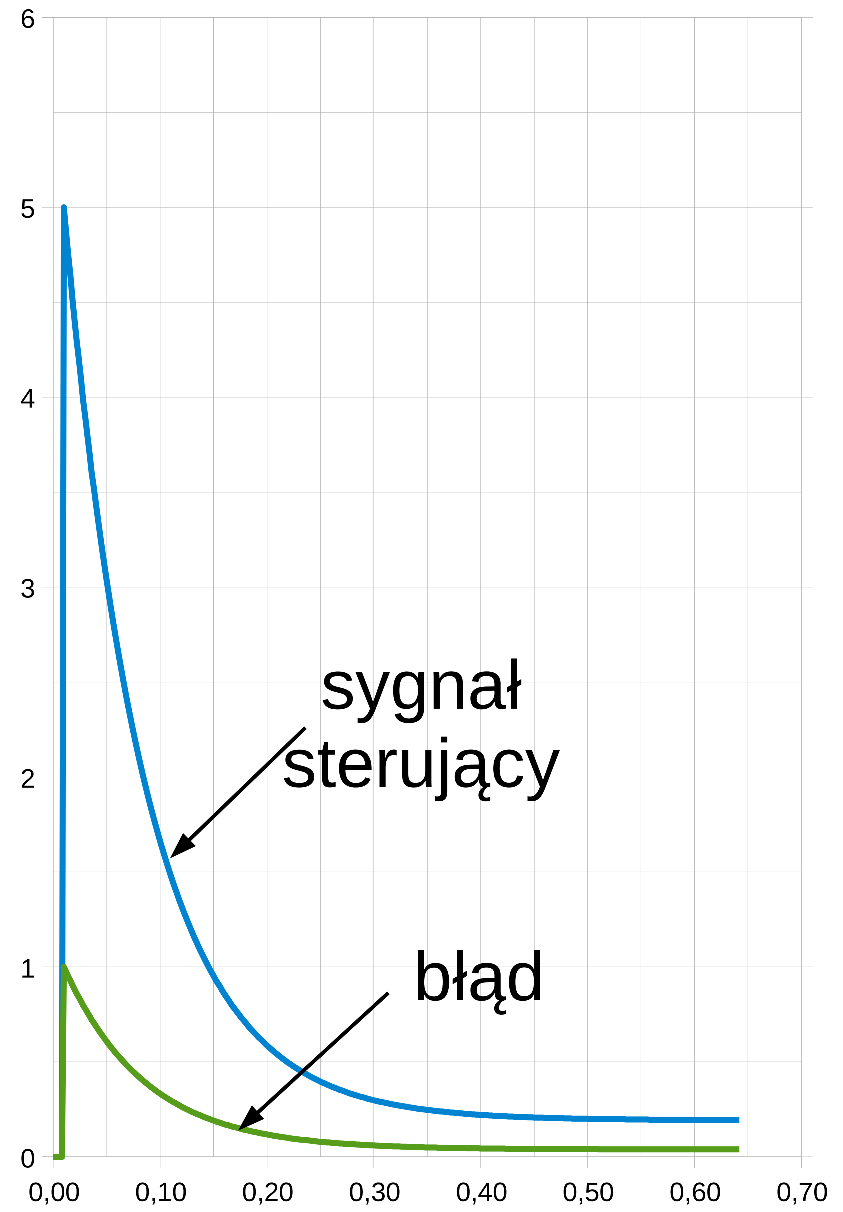
Po dużej zmianie wartości zadanej czynnik całkujący może wygenerować bardzo duży sygnał sterujący na skutek długiego akumulowania błędu. Sygnał ten może wręcz osiągnąć maksymalną dopuszczalną wartość. Sygnał sterujący będzie tak duży dopóki wartość zakumulowanego błędu nie zacznie spadać, a to ma miejsce dopiero po osiągnięciu przeciwnego znaku błędu. Działanie układu sterowania jest zatem przez długi czas zablokowane, co niekorzystnie wpływa na zachowanie układu.

<u>Możliwe rozwiązanie problemu</u>: wyłączanie i zerowanie zakumulowanego błędu, jeśli wartość błędu jest poza pewnym małym obszarem wokół zera.

regulator PID

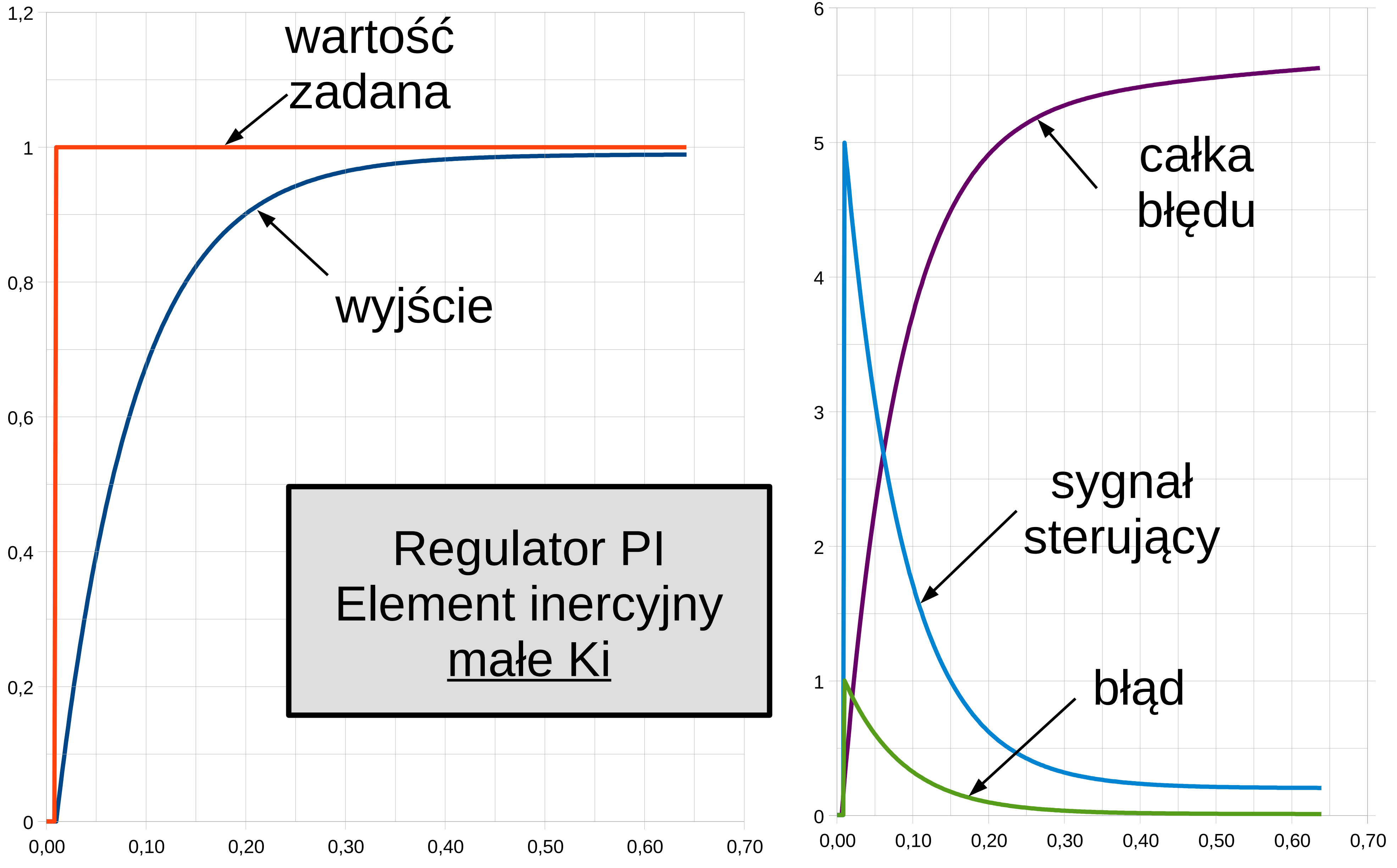
problem nasycenia całkowania (*integral windup*)





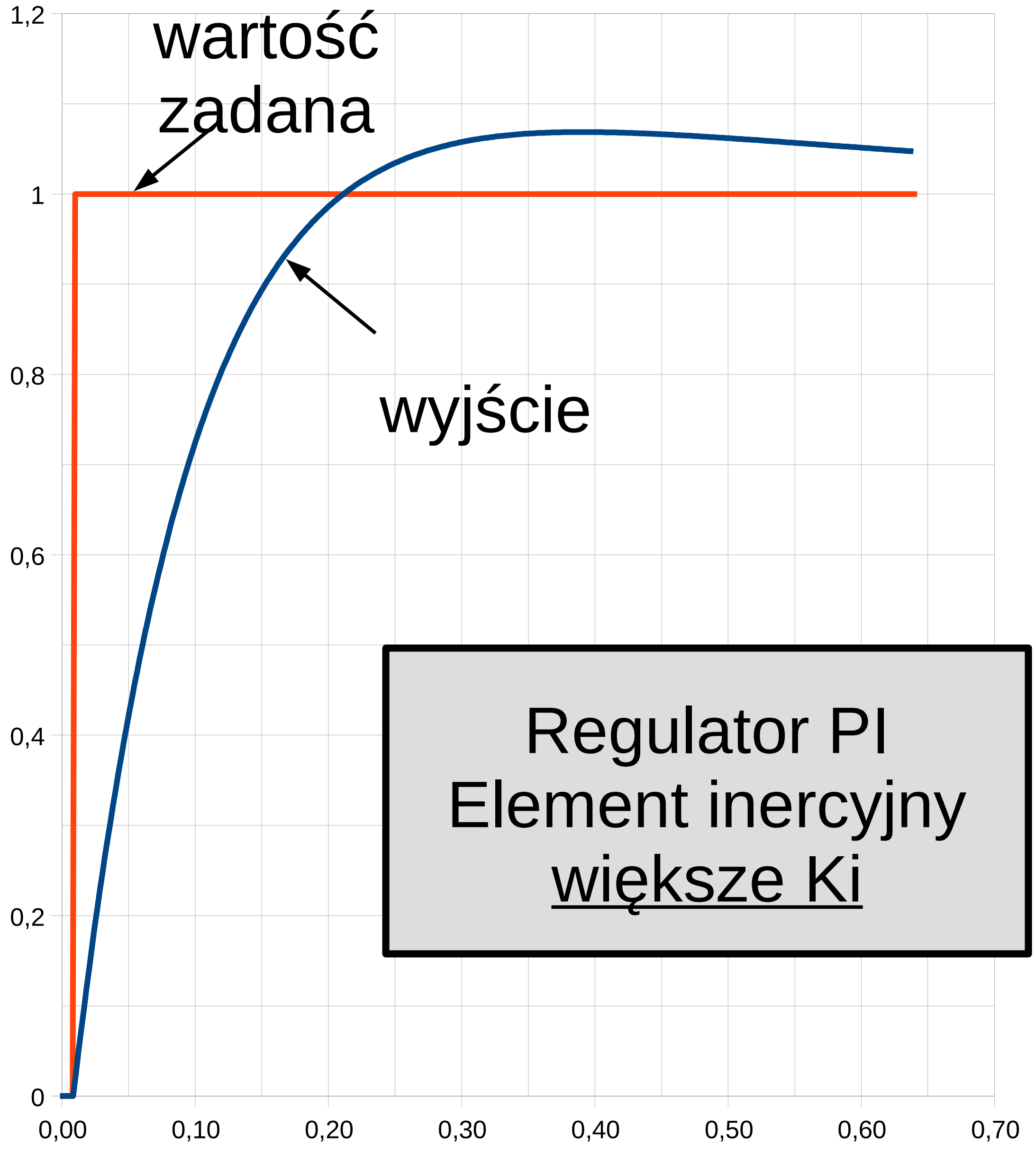
regulator PID

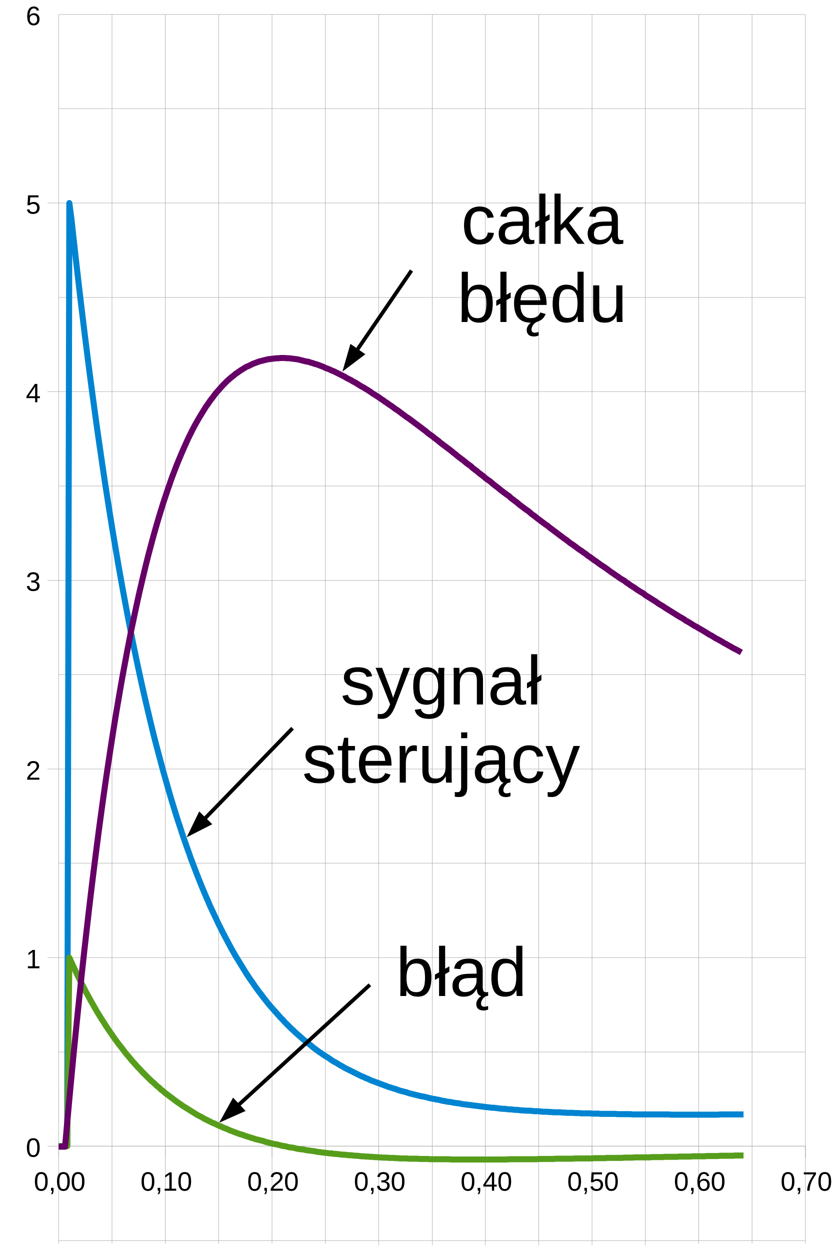
problem nasycenia całkowania (*integral windup*)



regulator PID

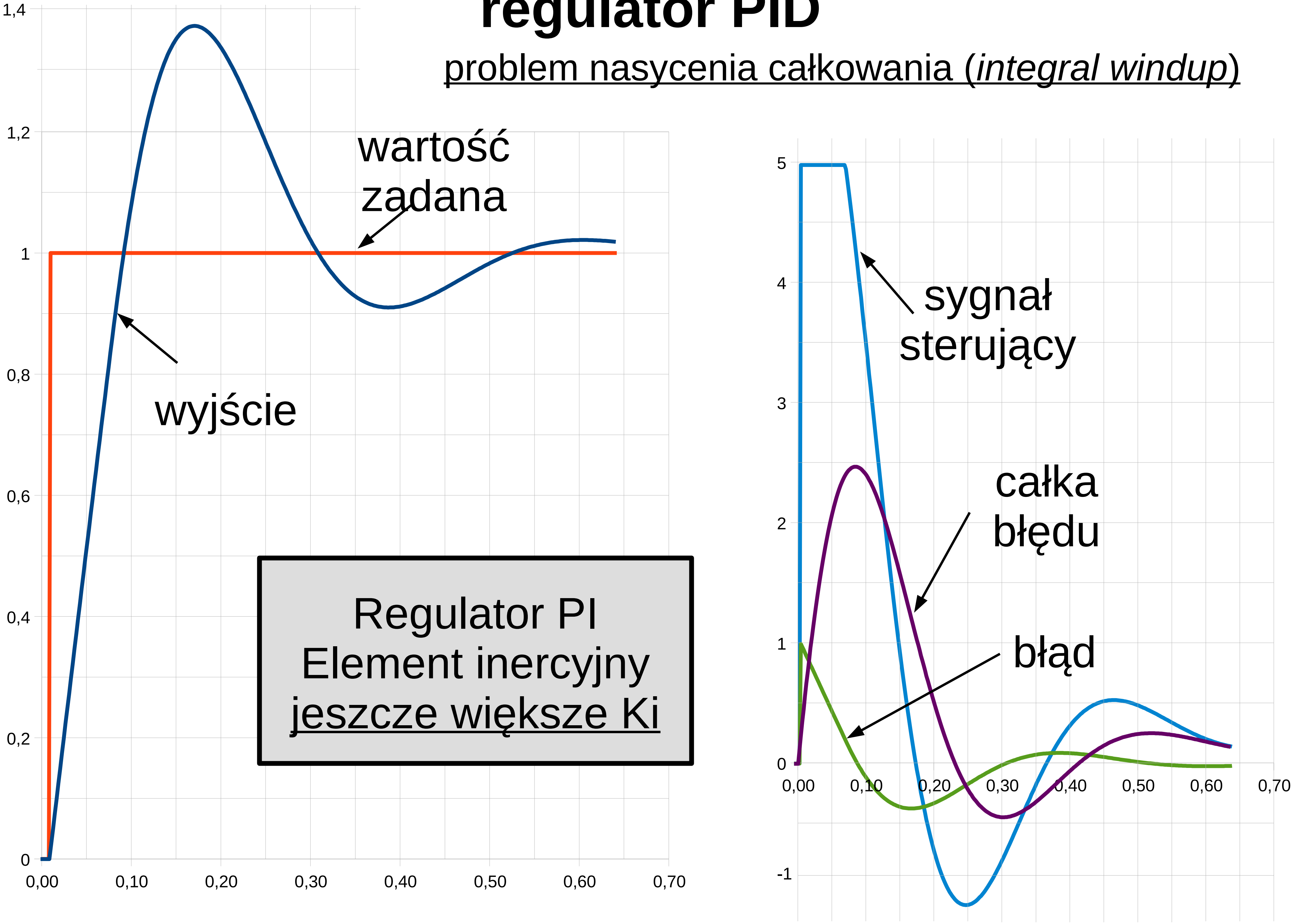
<u>problem nasycenia całkowania (*integral windup*)</u>



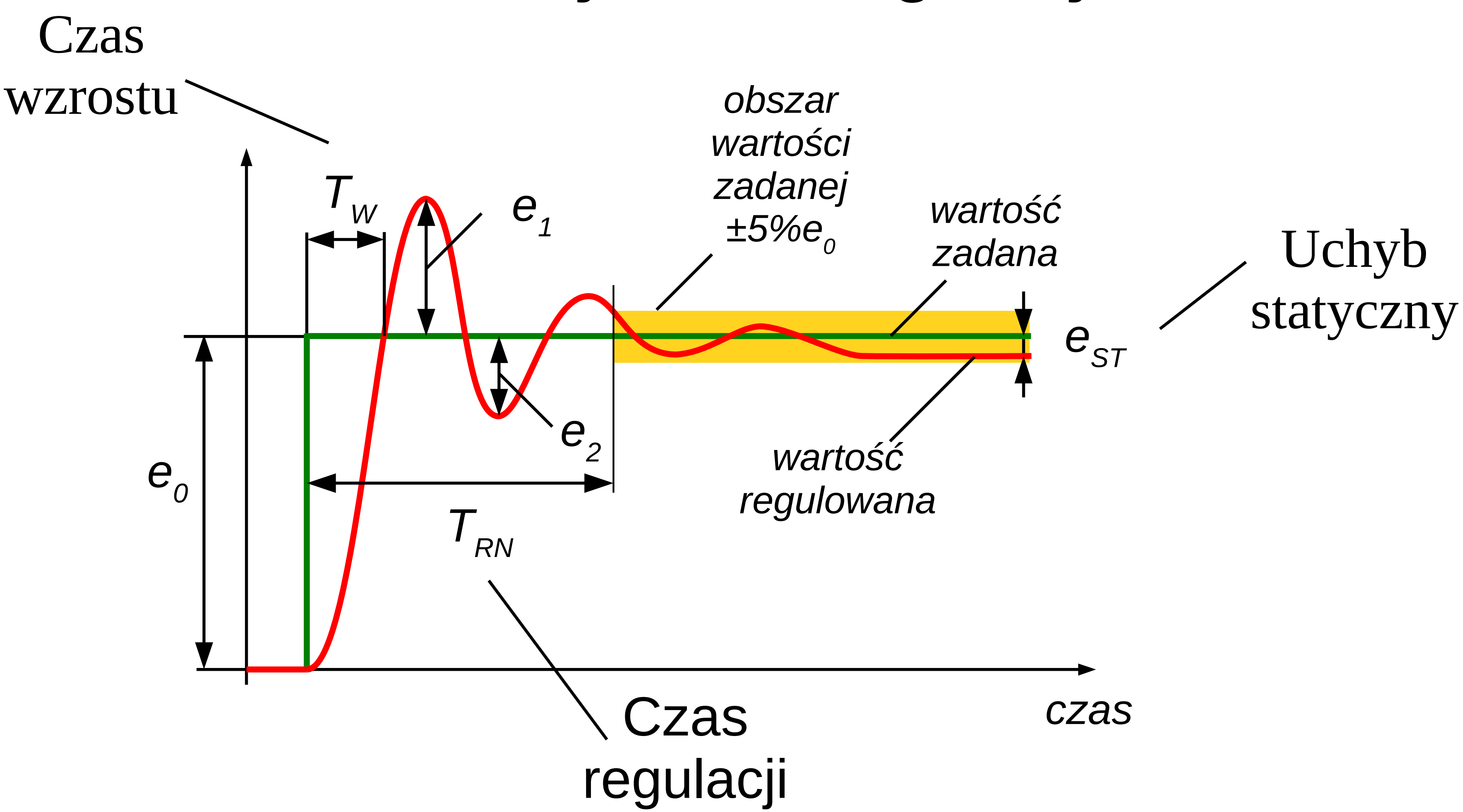


regulator PID

problem nasycenia całkowania (*integral windup*)



Ocena jakości regulacji



Wskaźnik przeregulowania $$w = \frac{e_1}{e_0} 100\,\%$$

Wskaźnik tłumienia $$d = \frac{e_2}{e_1} 100\,\%$$

regulator PID

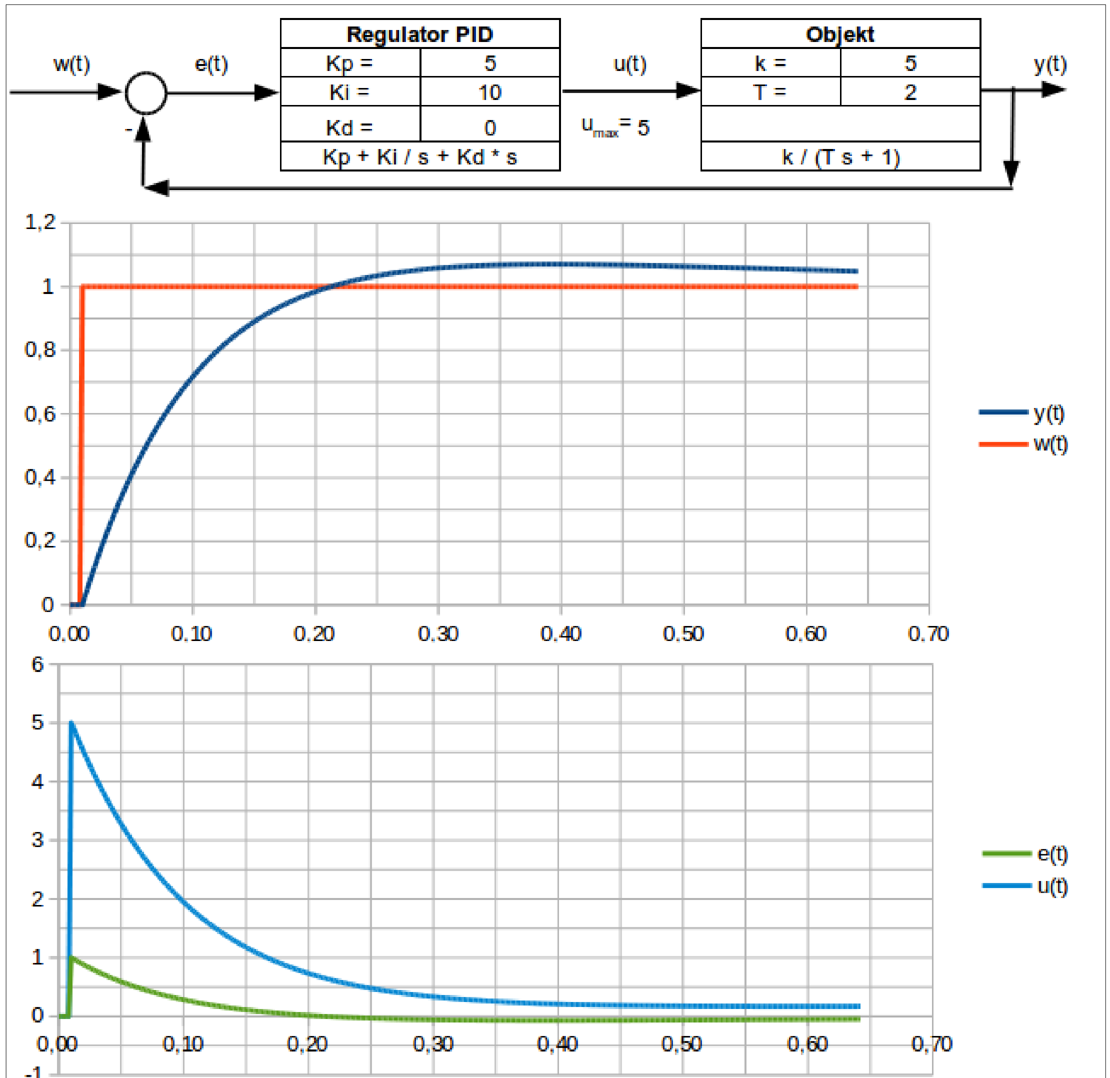
metody doboru nastawów regulatora

Analityczna	Symulacyjna	Eksperymentalna
1: wyznaczyć transmitancję zredukowaną układu sterowania 2: wyznaczyć odpowiedź na wymuszenie skokowe 3: dobrać parametry Kp, Ki i Kd do uzyskania zadowalającego kształtu odpowiedzi skokowej (można badać również odpowiedzi na dowolne wymuszenia lub charakterystyki Bodego)	1: wyznaczyć transmitancję zredukowaną układu sterowania 2: dokonać symulacji działania układu dla dowolnego interesującego nas wymuszenia 3: dobrać parametry Kp, Ki i Kd do uzyskania zadowalającego kształtu	Strojenie ręczne lub metody: ➔ Zieglera-Nicholsa ➔ Pessena ➔ Cohen’a-Coon’a ➔ Åström’a–Hägglund’a

regulator PID

Symulacja i strojenie

arkusz kalkulacyjny do pobrania na stronie



regulator PID

metoda Zieglera-Nicholsa (PID w formie standardowej)

1. Ustawić regulator na działanie proporcjonalne o minimalnej wartości wzmocnienia.

regulator PID

<u>metoda Zieglera-Nicholsa (PID w formie standardowej)</u>

1. Ustawić regulator na działanie proporcjonalne o minimalnej wartości wzmocnienia.
2. Obserwować odpowiedzi skokowe układu. Przejść do punktu 3 jeśli zaobserwuje się niegasnące oscylacje wyjścia układu. Jeśli brak oscylacji lub zanikają, to należy podnieść współczynnik wzmocnienia i powtórzyć punkt 2.

regulator PID

metoda Zieglera-Nicholsa (PID w formie standardowej)

1. Ustawić regulator na działanie proporcjonalne o minimalnej wartości wzmocnienia.
2. Obserwować odpowiedzi skokowe układu. Przejść do punktu 3 jeśli zaobserwuje się niegasnące oscylacje wyjścia układu. Jeśli brak oscylacji lub zanikają, to należy podnieść nieznacznie współczynnik wzmocnienia i powtórzyć punkt 2.
3. Dla uzyskanego w punkcie 2 wzmocnienia krytycznego K_{kryt} i zmierzonego okresu oscylacji T_{kryt} wyznaczyć nastawy według tabeli:

	k_p	T_i	T_d
Klasyczna reguła Zieglera-Nicholsa	$0{,}6\ K_u$	$0{,}5\ T_u$	$0{,}125\ T_u$
Wersja Pessen	$0{,}7\ K_u$	$0{,}4\ T_u$	$0{,}15\ T_u$
Bez przeregulowania	$0{,}2\ K_u$	$0{,}5\ T_u$	$0{,}333\ T_u$

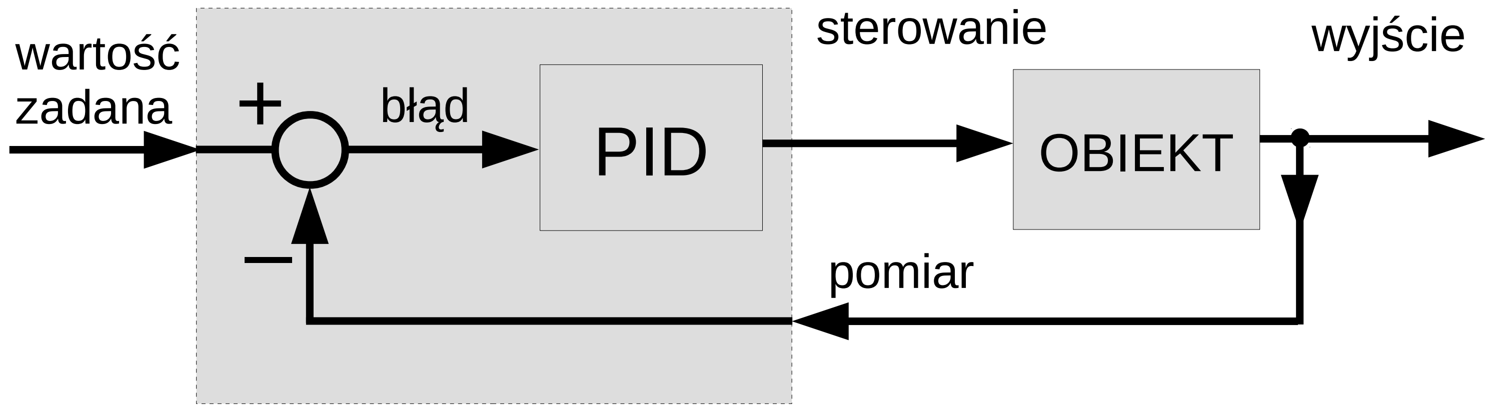
regulator PID (równoległy)

programowanie (pseudokod)

```
dt = 0.5
p_błąd = 0.
suma = 0.
Kp = 1.
Ki = 1.
Kd = 1.
start:
  wartość_zadana = …
  wartość_zmierzona = …
  błąd = wartość_zadana – wartość_zmierzona
  suma = suma + błąd * dt
  pochodna = ( błąd – p_błąd) / dt
  wyjście = Kp* błąd + Ki*suma + Kd*pochodna
  p_błąd = błąd
  wait(dt)
  goto start
```

regulator PID (równoległy)

programowanie (pseudokod)

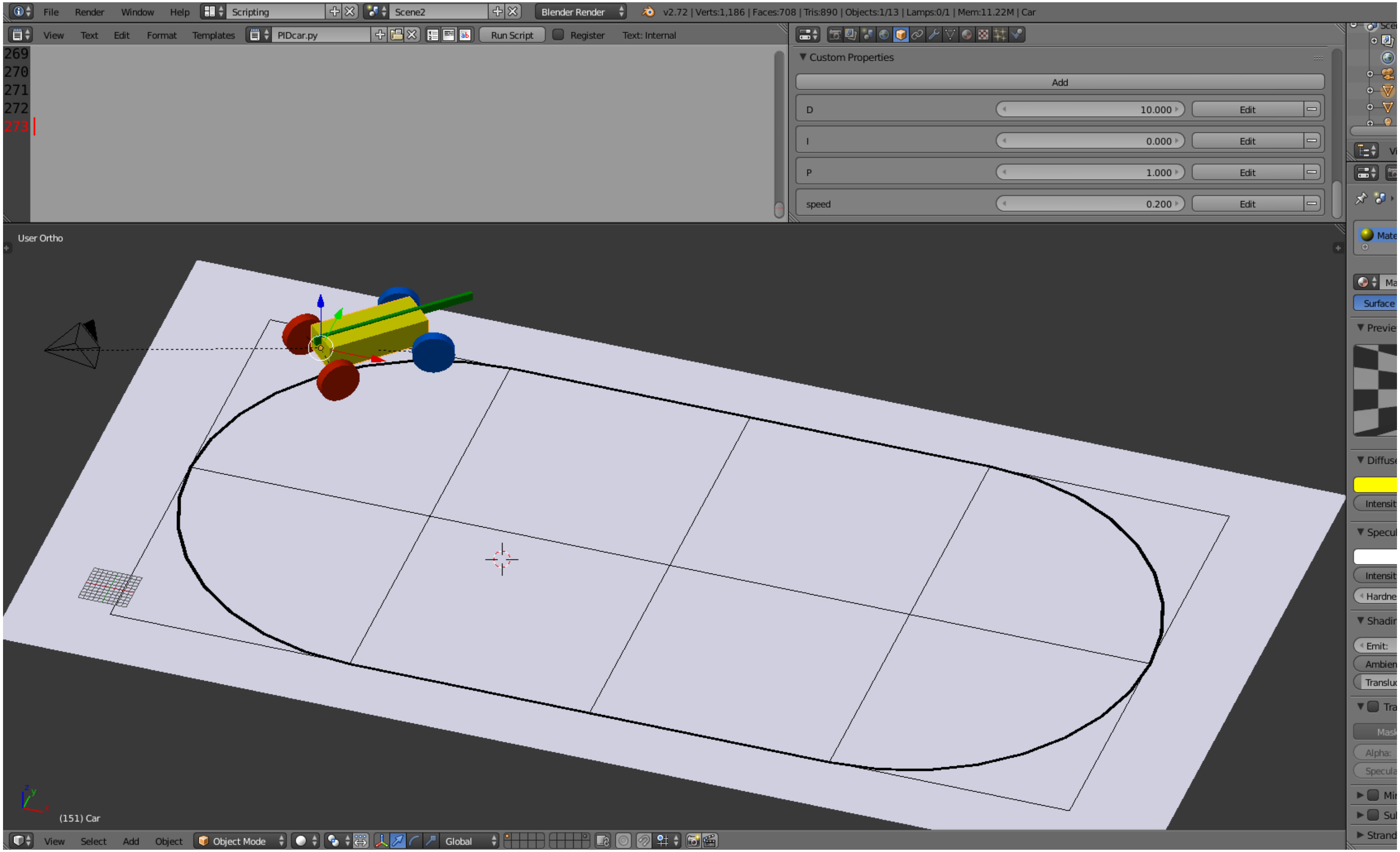



```
dt = 0.5
p_błąd = 0.
suma = 0.
Kp = 1.
Ki = 1.
Kd = 1.
start:
  wartość_zadana = …
  wartość_zmierzona = …
  błąd = wartość_zadana – wartość_zmierzona
  suma = suma + błąd * dt
  pochodna = (błąd – p_błąd) / dt
  wyjście = Kp* błąd + Ki*suma + Kd*pochodna
  p_błąd = błąd
  wait(dt)
  goto start
```

regulator PID

symulacja

regulator PID w sterowaniu ruchem samochodu



STABILNOŚĆ UKŁADÓW AUTOMATYKI

Stabilność

W matematyce:

- teoria stabilności
- stabilność metod numerycznych
- stabilność w geometrii teoretycznej

W naukach inżynierskich:

- stabilność wejście-wyjście
- stabilność lotu
- stabilność statków

Stabilność

Teoria stabilności (matematyka) – badanie stabilności rozwiązań równań różniczkowych, czyli ich zachowania przy małych zaburzeniach warunków początkowych

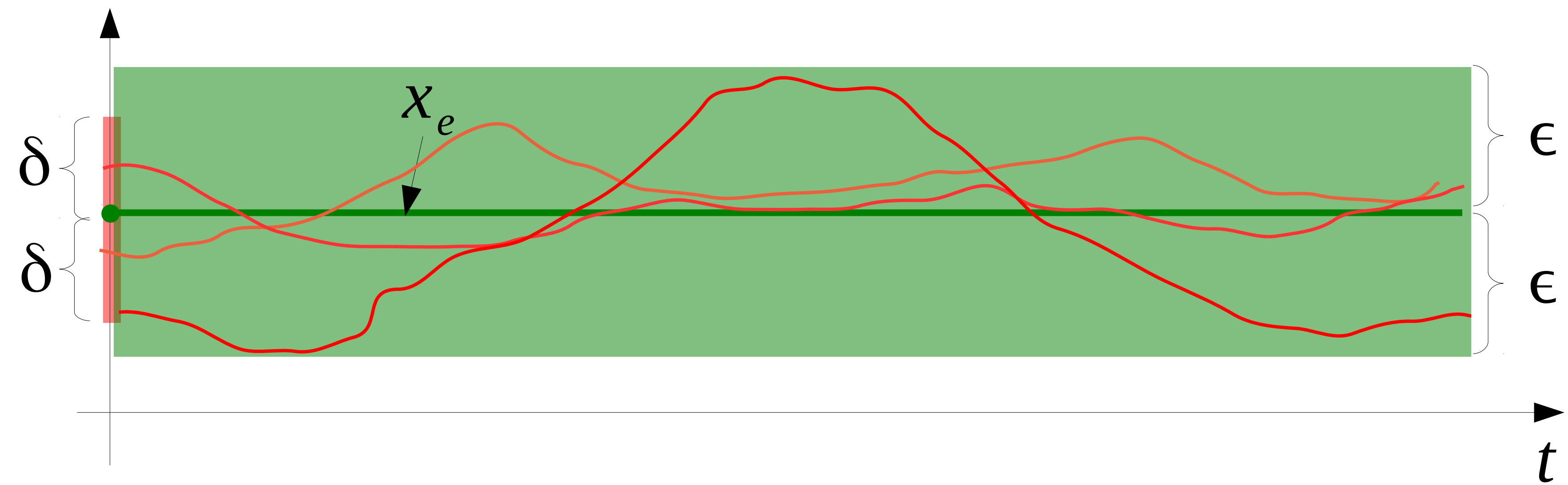
Rodzaje stabilności:

- Lapunowa
- asymptotyczna
- orbitalna
- strukturalna

Stabilność w sensie Lapunowa

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

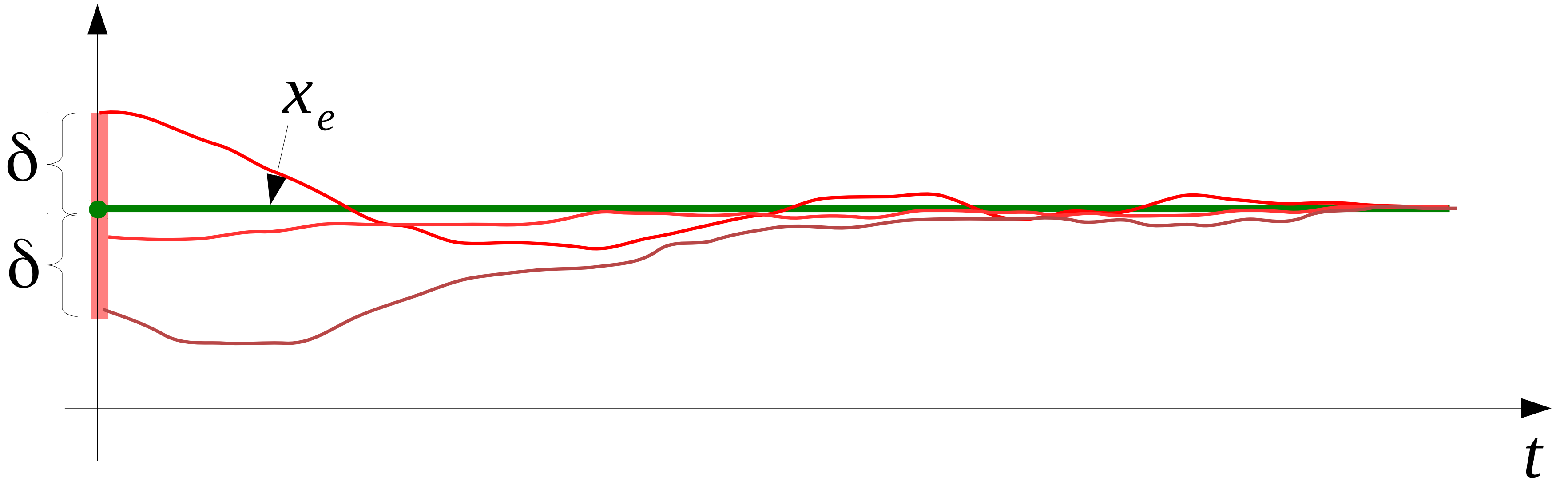
$f(x_e) = 0,\ x_e$ - położenie równowagi



$$\underset{t\geqslant 0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\quad \text{jeżeli } \|x(0)-x_e\|<\delta\text{, to } \|x(t)-x_e\|<\epsilon$$

Stabilność asymptotyczna

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad f(x_e) = 0, \quad x_e$$ - położenie równowagi



$$\underset{t \geqslant 0}{\forall} \ \underset{\epsilon > 0}{\forall} \ \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \text{jeżeli } \| x(0) - x_e \| < \delta, \text{ to } \lim_{t \to \infty} \| x(t) - x_e \| = 0$$

Stabilność BIBO

Bounded Input, Bounded Output stability (w teorii sterowania)

Układ liniowy jest BIBO stabilny jeśli jego wyjście pozostaje ograniczone przy ograniczonym wejściu.

$$x(t) \text{ - wejście}$$

$$y(t) \text{ - wyjście}$$

$$\underset{0<A<\infty}{\exists} \quad \underset{0<B<\infty}{\exists} \quad \underset{t \geqslant 0}{\forall} \qquad \text{jeżeli } |x(t)| \leqslant A \text{, to } |y(t)| \leqslant B$$

Kryteria stabilności

Ogólny warunek stabilności

Kryterium Hurwitz

Kryterium Nyquista

Ogólny warunek stabilności

Ogólny warunek stabilności

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1}$$

biegun transmitancji

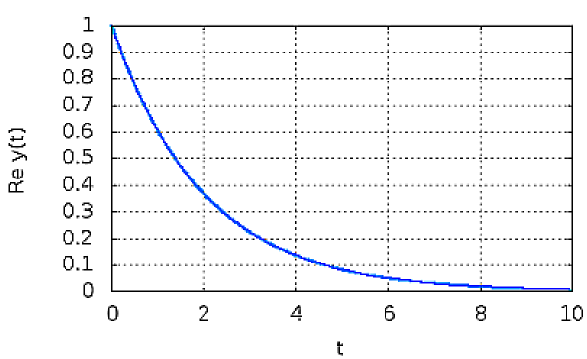
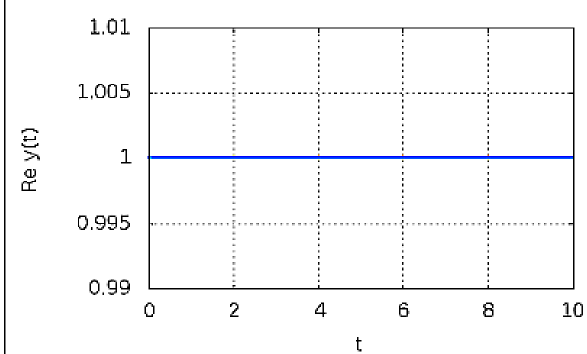
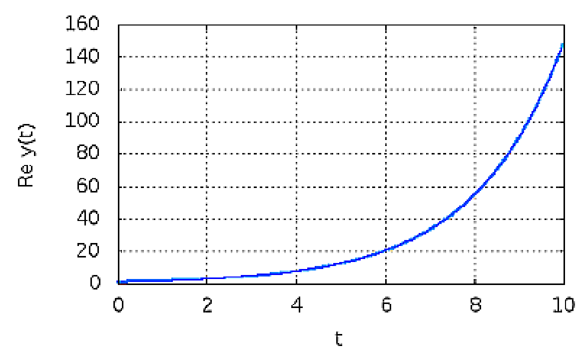
$$x(t)=\delta(t)$$

$$y(t)=L^{-1}\{x(s)G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_1}\right\}=e^{p_1 t}$$

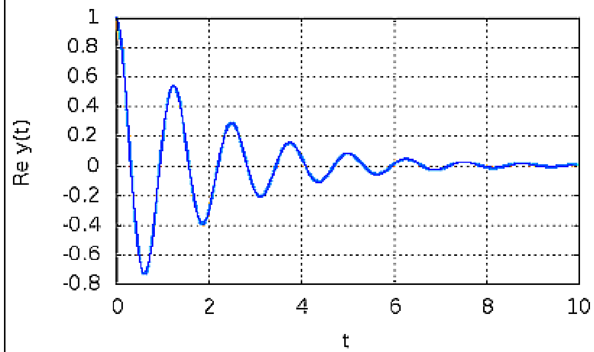
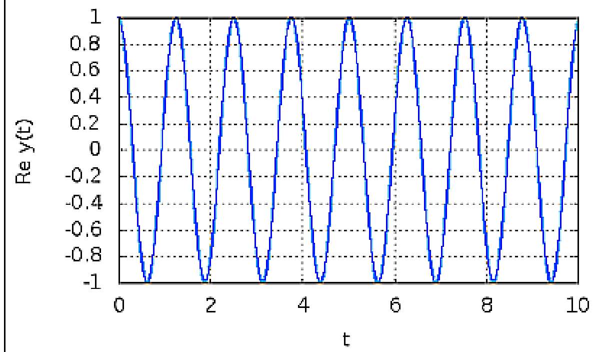
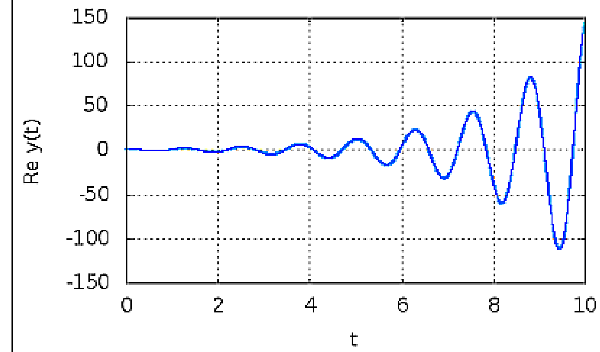
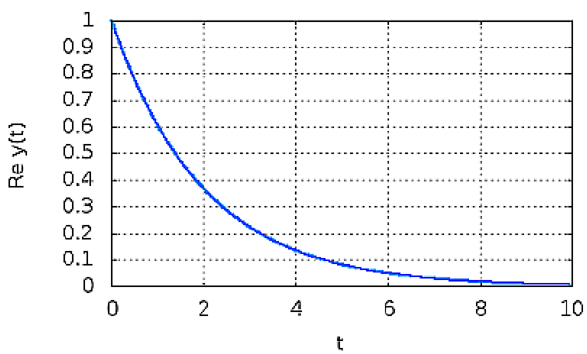
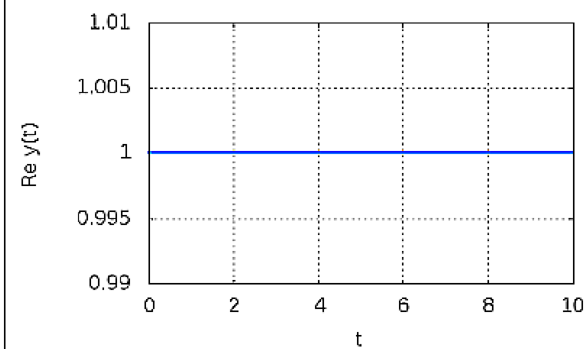
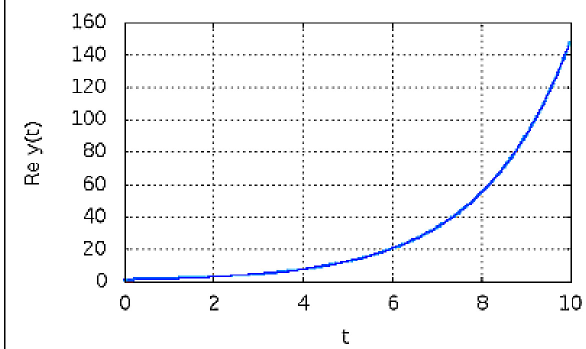
$$y(t)=e^{(a_1+jb_1)t}=e^{a_1 t}e^{jb_1 t}=e^{a_1 t}(\cos b_1 t+j\sin b_1 t)$$

$$\operatorname{Re} y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t$$

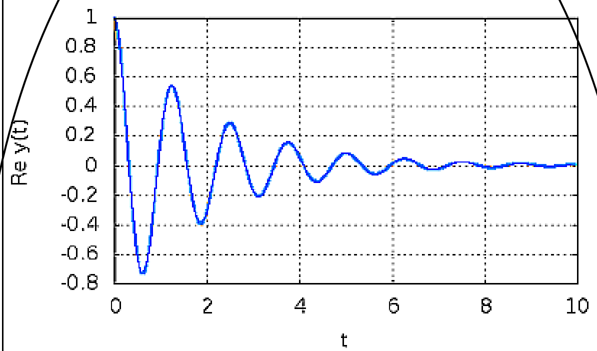
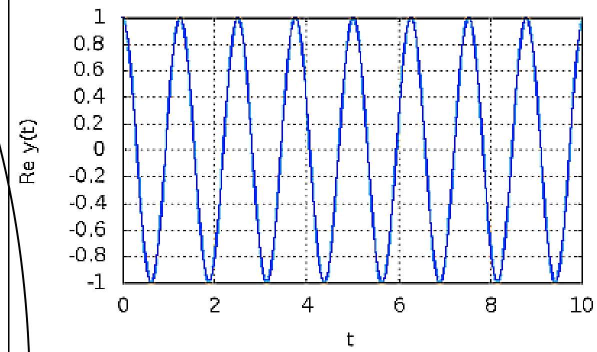
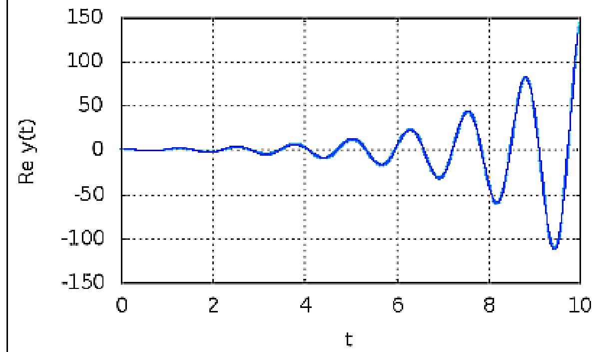
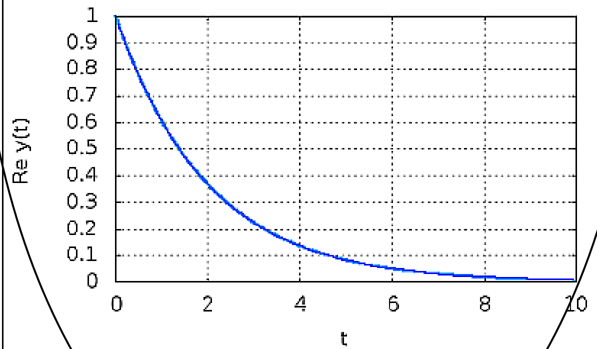
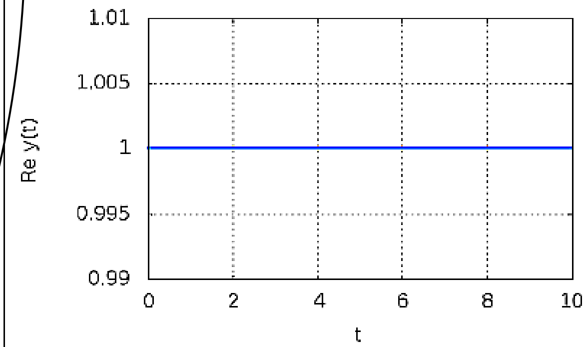
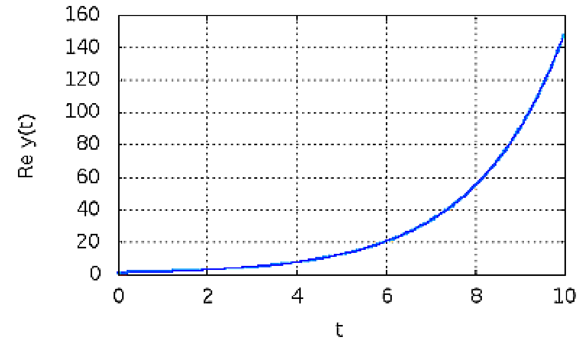
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1} \qquad y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t \qquad \Re(p_1)=a_1,\ \Im(p_1)=b_1$$

	$\boxed{a_1<0}$	$\boxed{a_1=0}$	$\boxed{a_1>0}$
$\boxed{b_1>0}$ $\boxed{b_1<0}$			
$\boxed{b_1=0}$			

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1} \qquad y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t \qquad \Re(p_1)=a_1,\ \Im(p_1)=b_1$$

	$a_1<0$	$a_1=0$	$a_1>0$
$b_1>0$ $b_1<0$			
$b_1=0$			

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1} \qquad y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t \qquad \Re(p_1)=a_1,\ \Im(p_1)=b_1$$

	$a_1<0$	$a_1=0$	$a_1>0$
$b_1>0$ $b_1<0$			
$b_1=0$			

stabilne asymptotycznie $\mathrm{Re}(p_1)<0$

Ogólny warunek stabilności

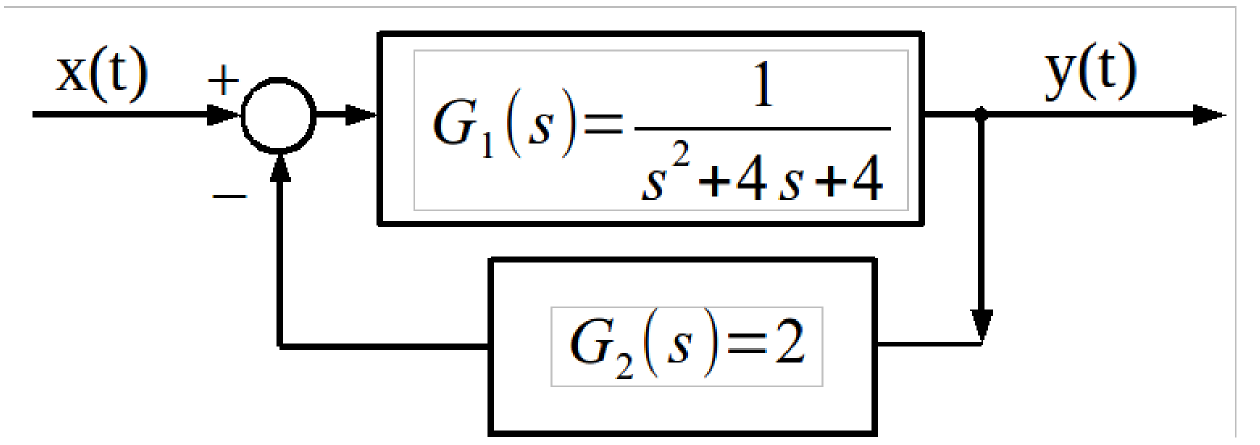
Układ liniowy o jednym wejściu i jednym wyjściu jest stabilny, jeśli części rzeczywiste wszystkich biegunów jego transmitancji są mniejsze od zera.

$$G(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)}$$

$$\mathrm{Re}\, p_1<0 \;\wedge\; \mathrm{Re}\, p_2<0 \;\wedge ... \wedge\; \mathrm{Re}\, p_n<0$$

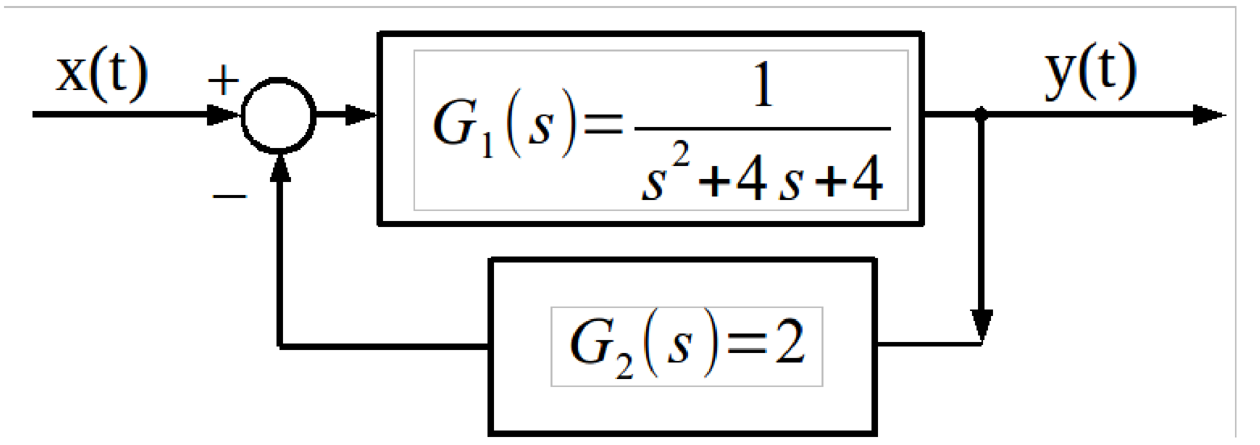
Przykład 1

Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności



Przykład 1

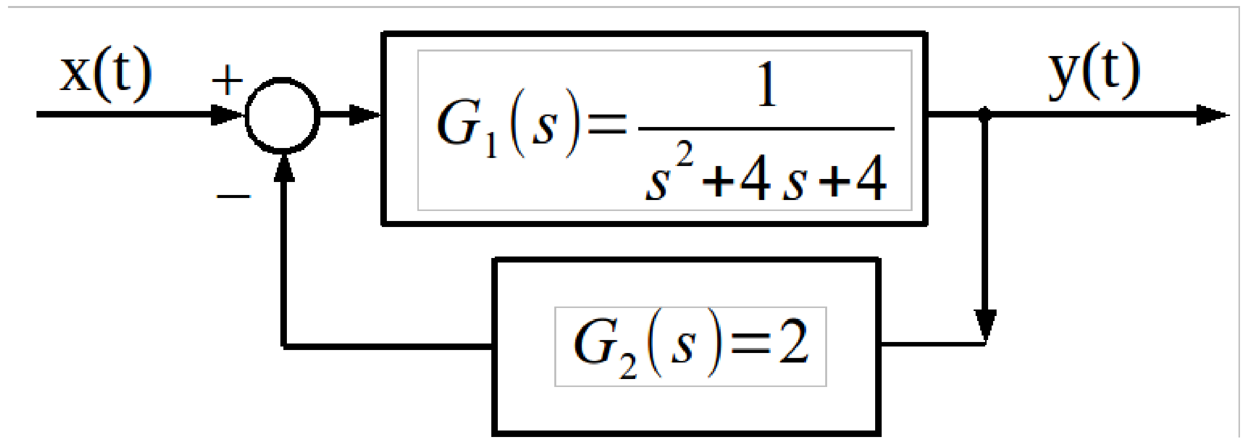
Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności



$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{1}{s^2+4s+6}=\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

Przykład 1

Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności

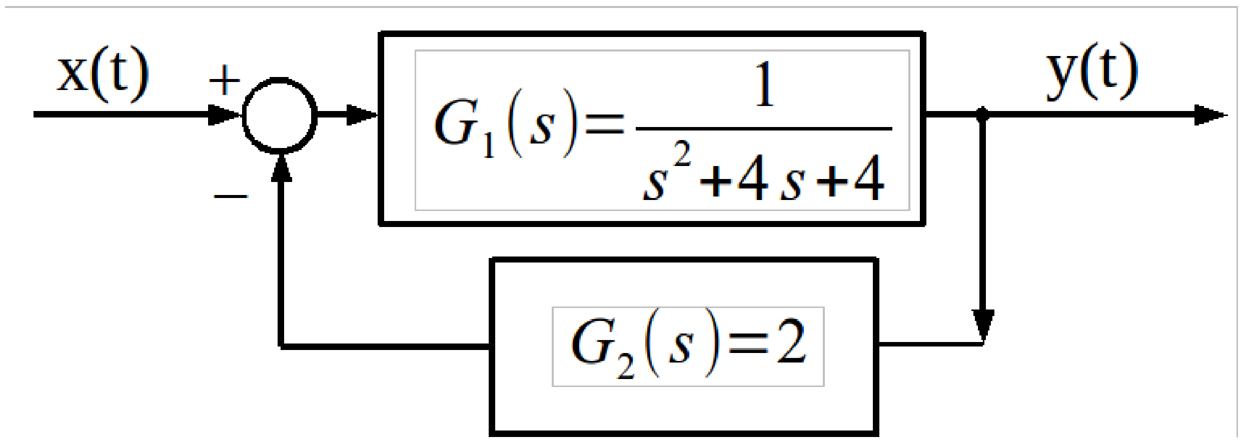


$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1 G_2}=\frac{1}{s^2+4s+6}=\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$p_1=-2-2\sqrt{2}\,j\,,\quad p_2=-2+\sqrt{2}\,j$$

Przykład 1

Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności



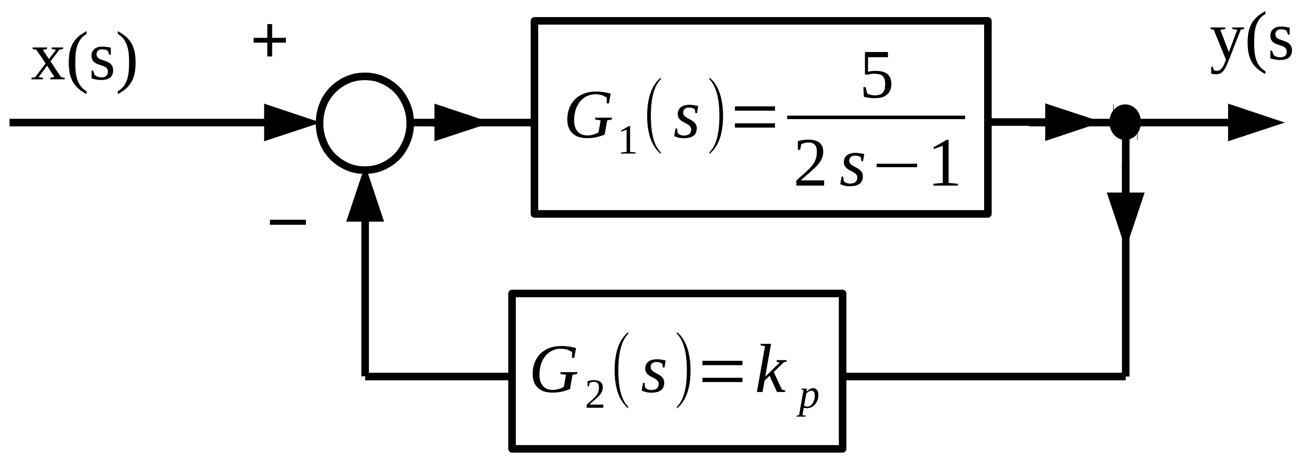
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{1}{s^2+4s+6}=\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$p_1=-2-2\sqrt{2}\,j\,,\quad p_2=-2+\sqrt{2}\,j$$

$$\Re(p_1)<0\ \wedge\ \Re(p_2)<0\ \Rightarrow$$ układ jest stabilny z ogólnego warunku stabilności

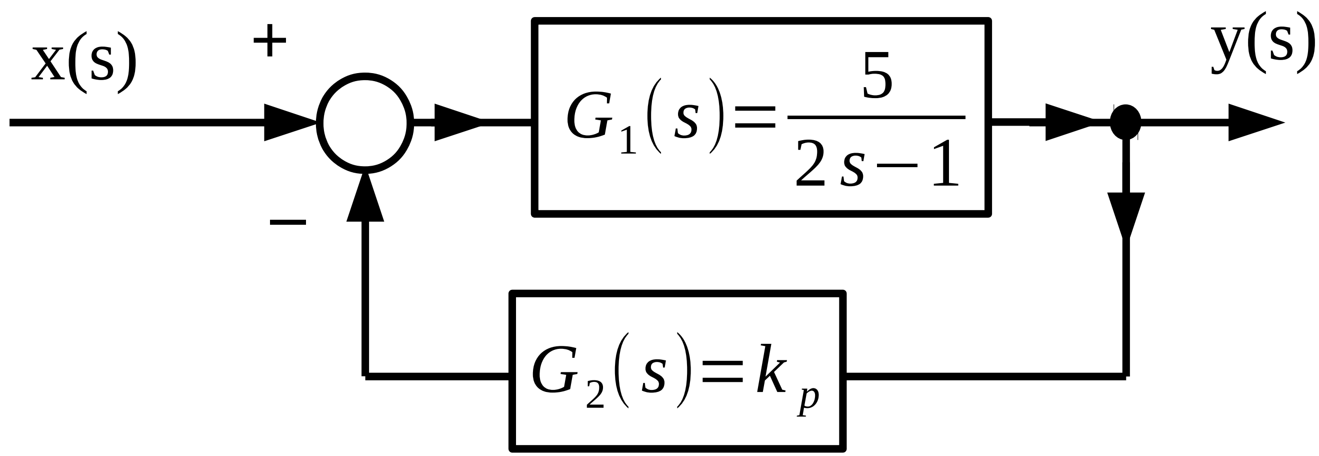
Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.

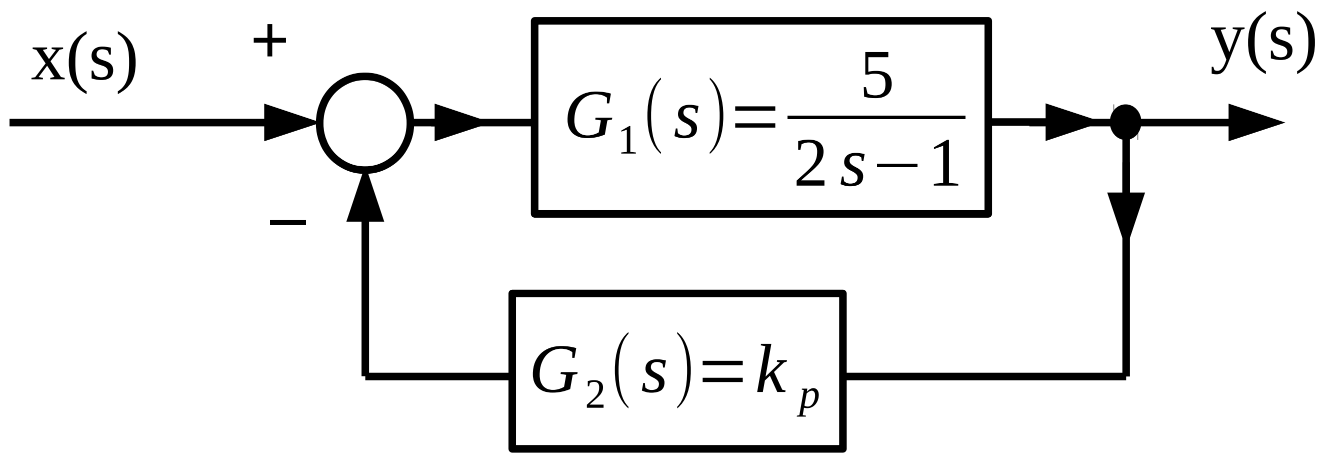


$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



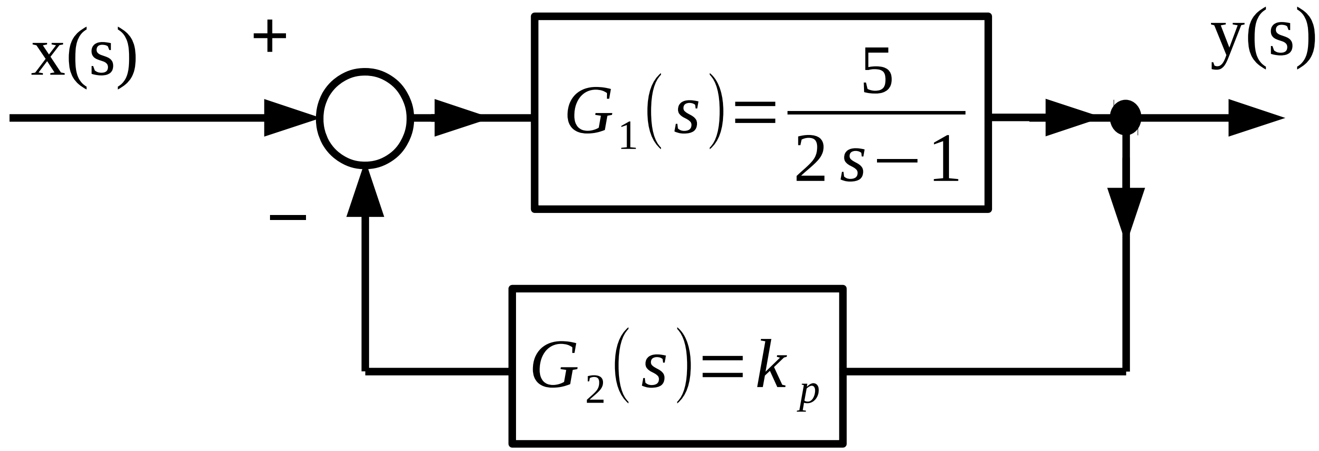
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1 G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0$

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



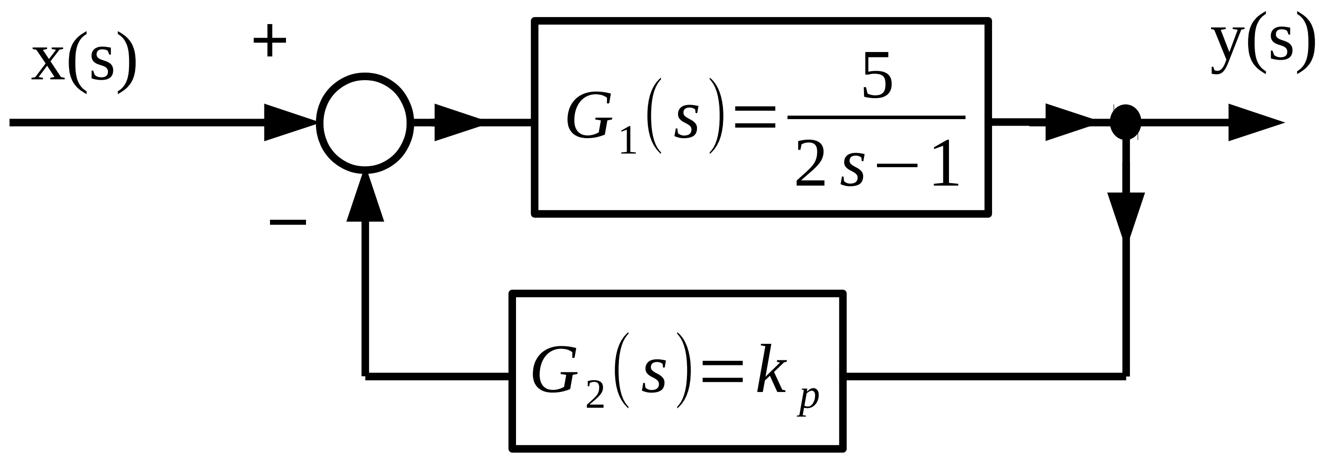
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.

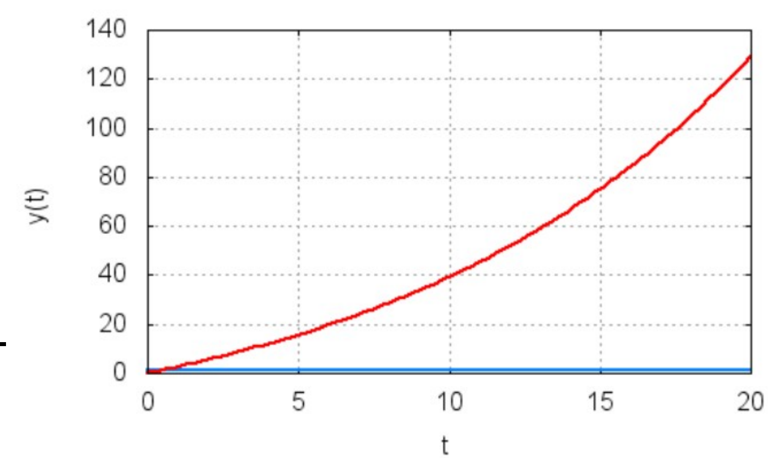


$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

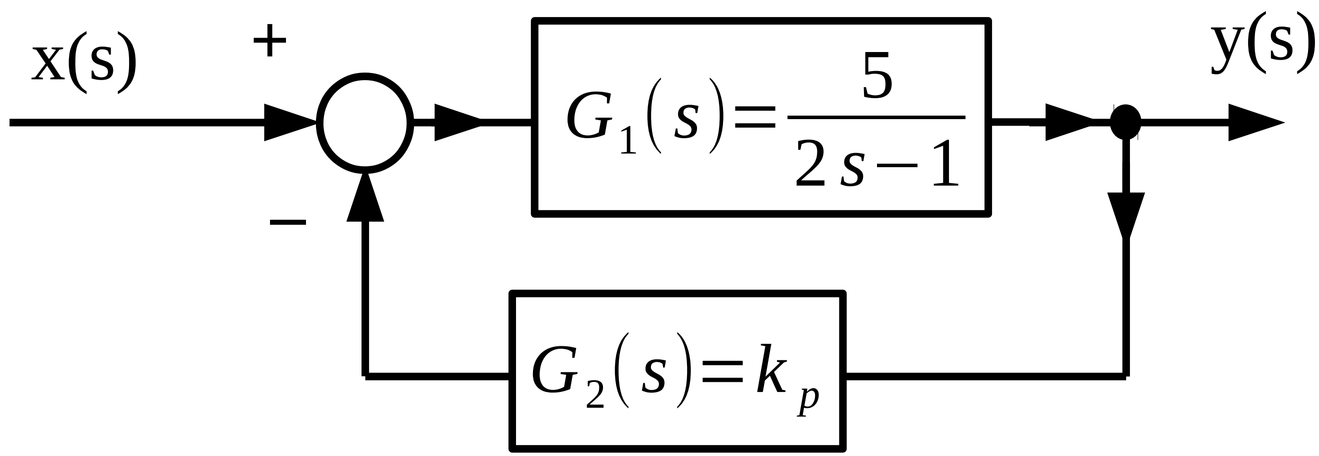
Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

$k_p=\frac{1}{6}$ (niestabilny)



Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.

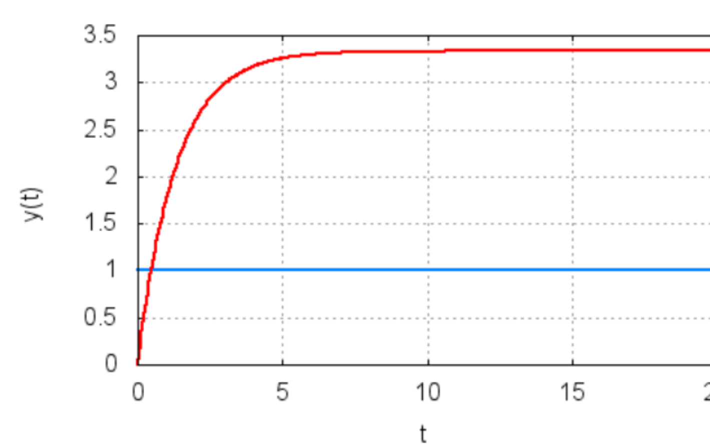


$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

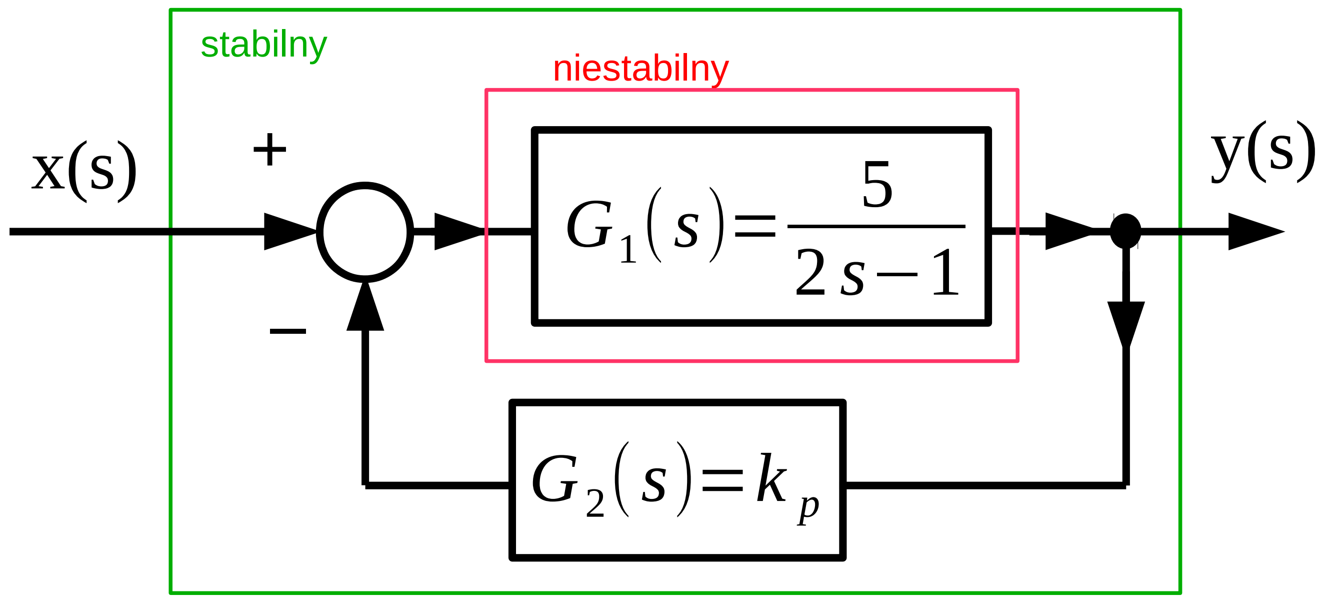
Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

$k_p=\frac{1}{2}$ (stabilny)



Przykład 2

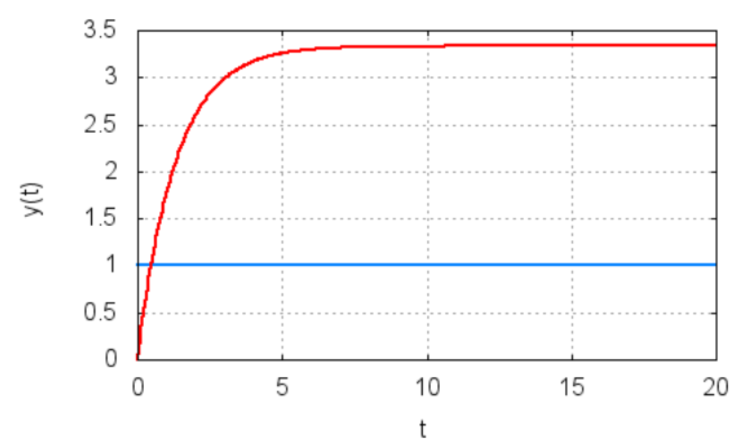
Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

$k_p=\frac{1}{2}$ (stabilny)



Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$