



# Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Teoria maszyn i podstawy automatyki*  
semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

# Wykład 3

## Metody wyznaczania przyspieszeń mechanizmów płaskich

# Metody wyznaczania prędkości i przyspieszeń mechanizmów

## Metody wykreślne

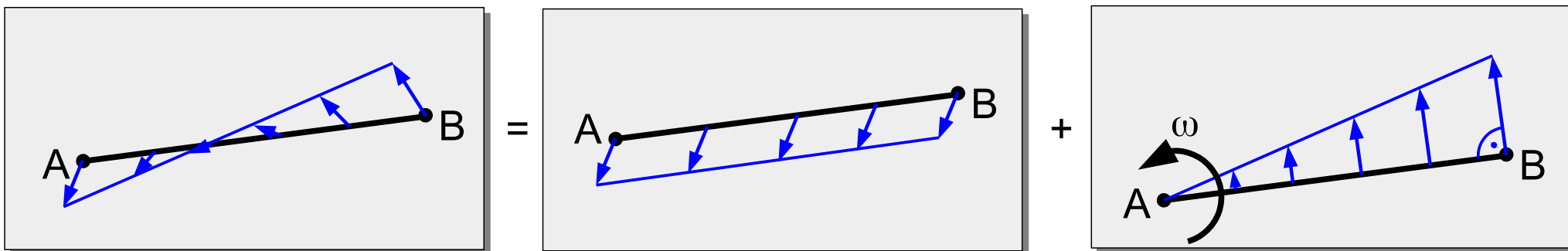
- metoda rzutów prędkości,
- metoda chwilowego środka obrotu,
- metoda chwilowego środka przyspieszeń,
- metoda prędkości obróconych,
- metoda rozkładu prędkości,
- metoda rozkładu przyspieszeń,
- metoda planu prędkości,
- metoda planu przyspieszeń.

## Metoda analityczna

# Metoda rozkładu prędkości

*Dowolny ruch płaski bryły sztywnej możemy przedstawić za pomocą sumy ruchu postępowego i obrotowego.*

## Przykład 2



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

Prędkość  
bezwzględna  
punktu B

Prędkość ruchu  
postępowego całej bryły

Prędkość ruchu  
obrotowego punktu B  
względem punktu A

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

# Metoda planu prędkości

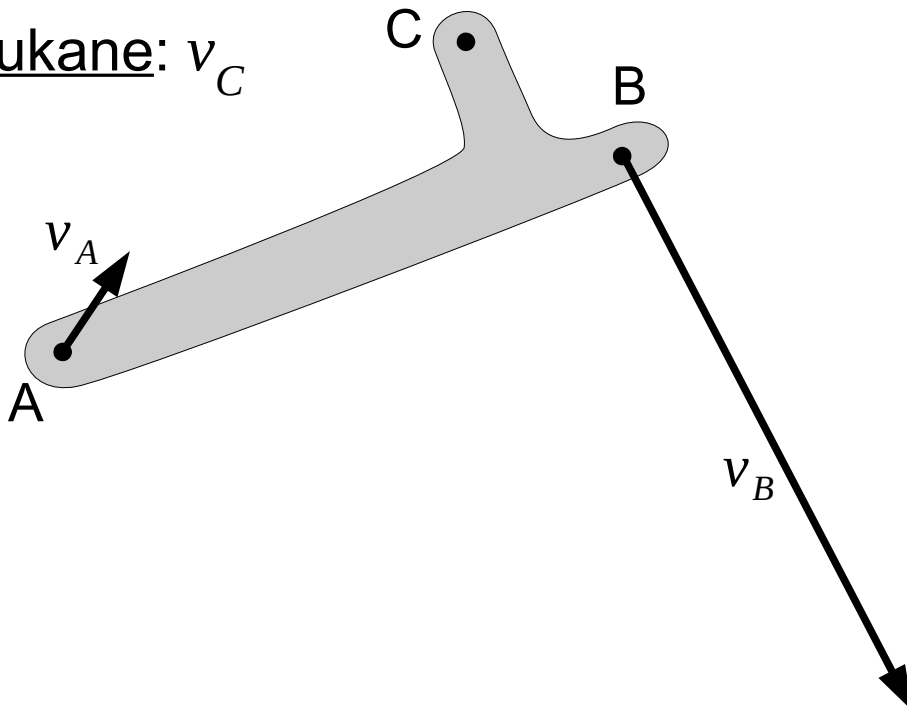
*Planem prędkości członu sztywnego nazywamy miejsce geometryczne końców wektorów prędkości bezwzględnych członu odłożonych z punktu zwanego biegunem planu prędkości. Plan prędkości członu jest do niego podobny pod względem konfiguracji punktów i obrócony o kąt  $90^\circ$  zgodnie ze zwrotem chwilowej prędkości kątowej członu.*

# Metoda planu prędkości

## Przykład

Dane: geometria,  $v_A$  i  $v_B$

Szukane:  $v_C$

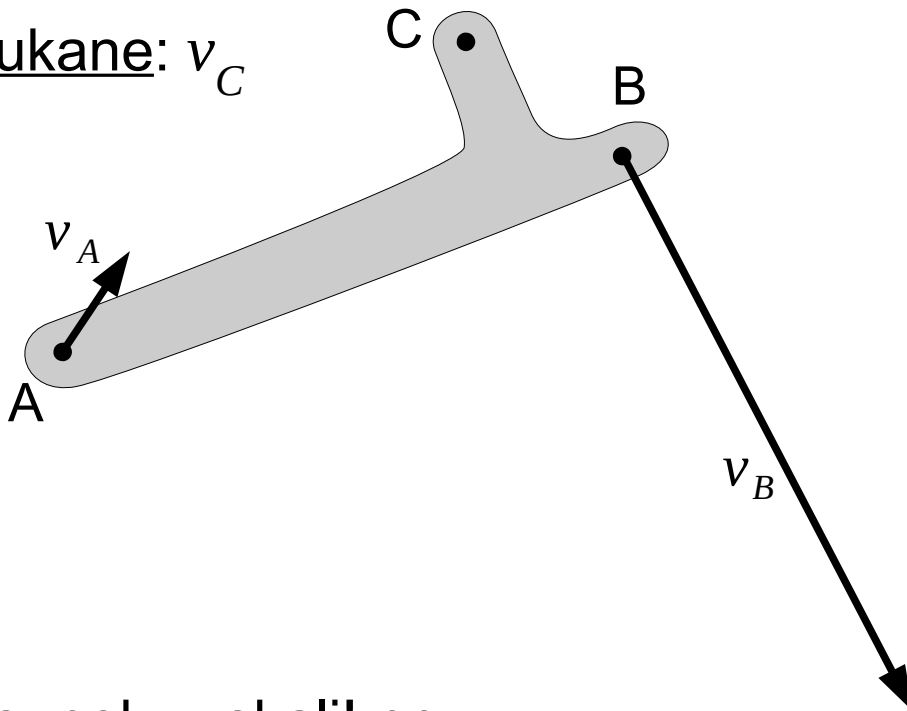


# Metoda planu prędkości

## Przykład

Dane: geometria,  $v_A$  i  $v_B$

Szukane:  $v_C$



Rysunek w skali! np.

Podziałka geometrii: 1cm  $\rightarrow$  10cm

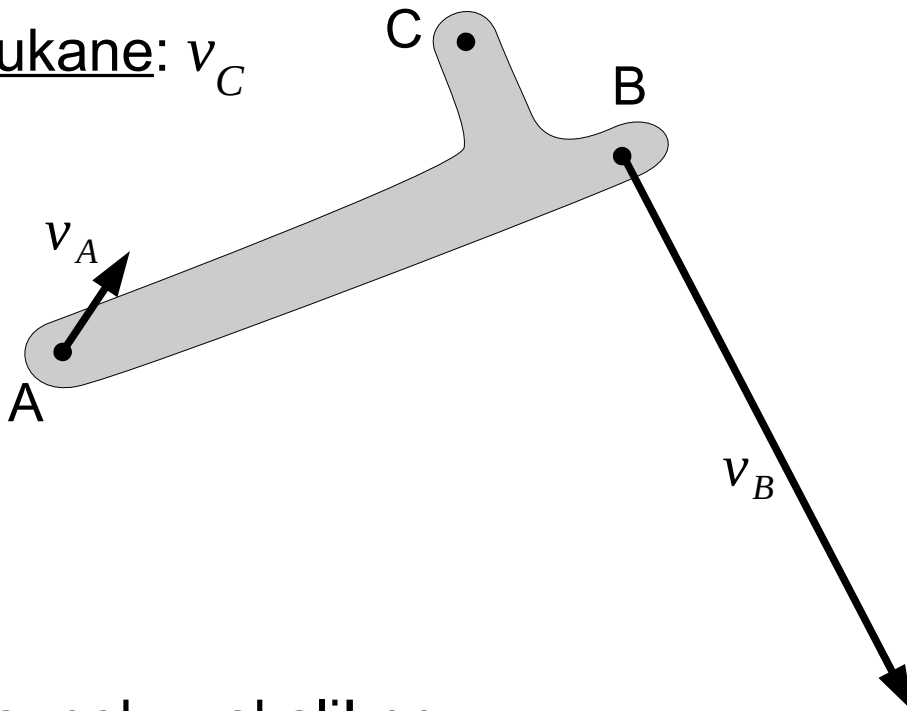
Podziałka wektorów: 1cm  $\rightarrow$  1m/s

# Metoda planu prędkości

## Przykład

Dane: geometria,  $v_A$  i  $v_B$

Szukane:  $v_C$



$O_v$

Rysunek w skali! np.

Podziałka geometrii: 1cm  $\rightarrow$  10cm

Podziałka wektorów: 1cm  $\rightarrow$  1m/s

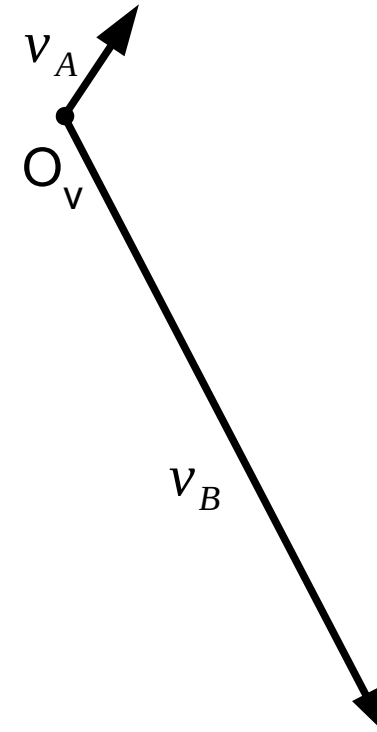
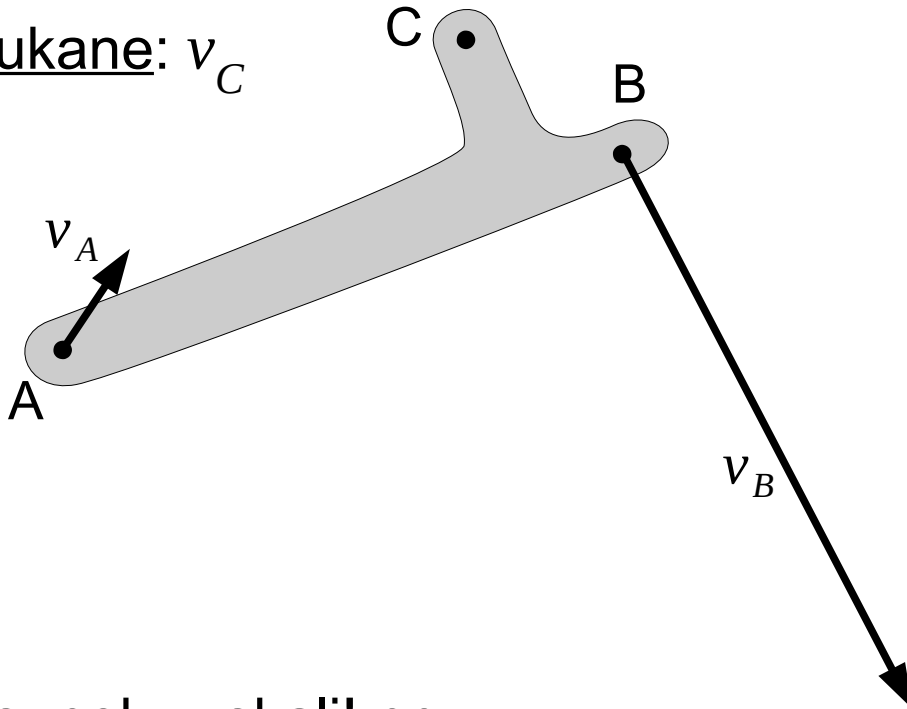


# Metoda planu prędkości

## Przykład

Dane: geometria,  $v_A$  i  $v_B$

Szukane:  $v_C$



Rysunek w skali! np.

Podziałka geometrii: 1cm  $\rightarrow$  10cm

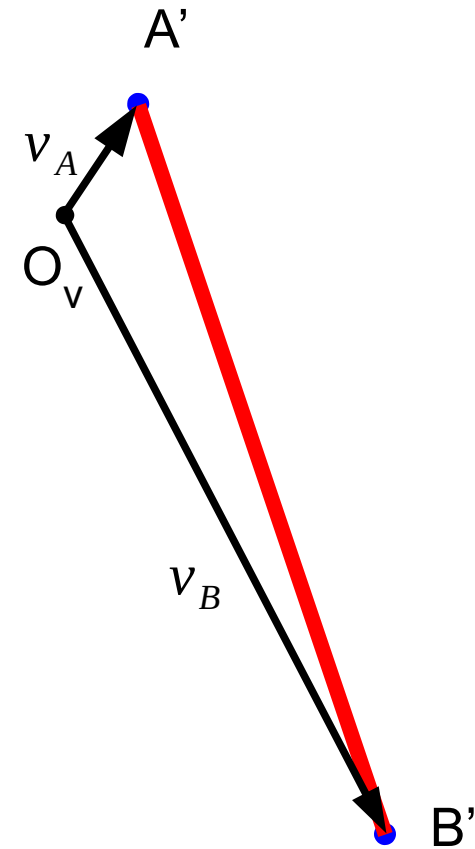
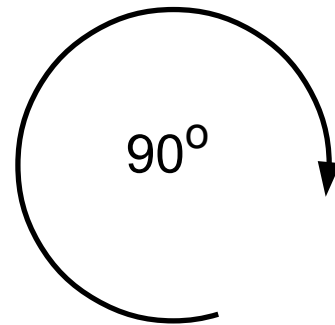
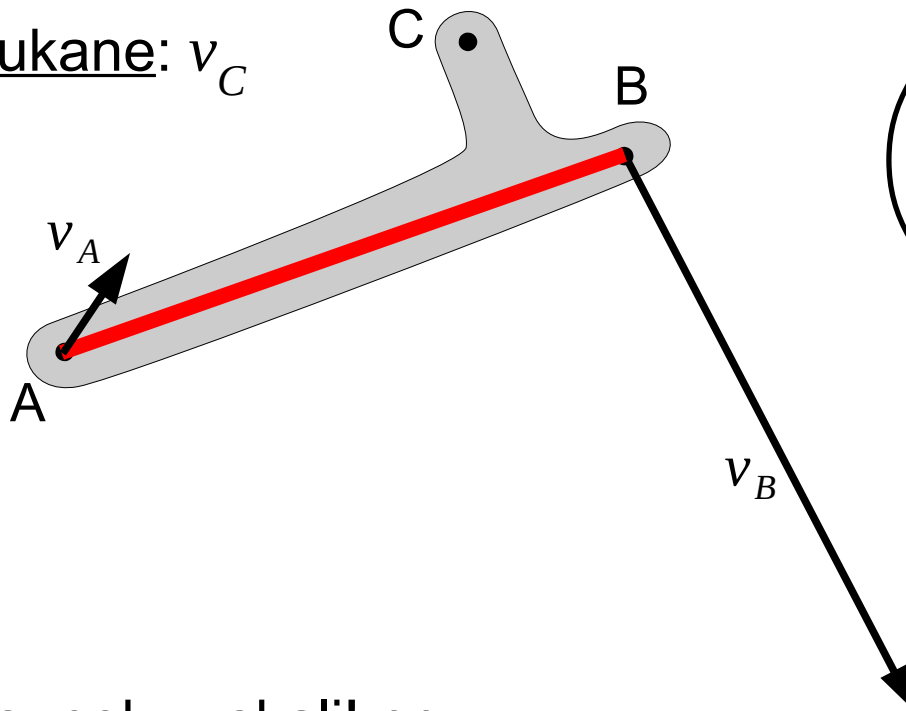
Podziałka wektorów: 1cm  $\rightarrow$  1m/s

# Metoda planu prędkości

## Przykład

Dane: geometria,  $v_A$  i  $v_B$

Szukane:  $v_C$



Rysunek w skali! np.

Podziałka geometrii: 1cm  $\rightarrow$  10cm

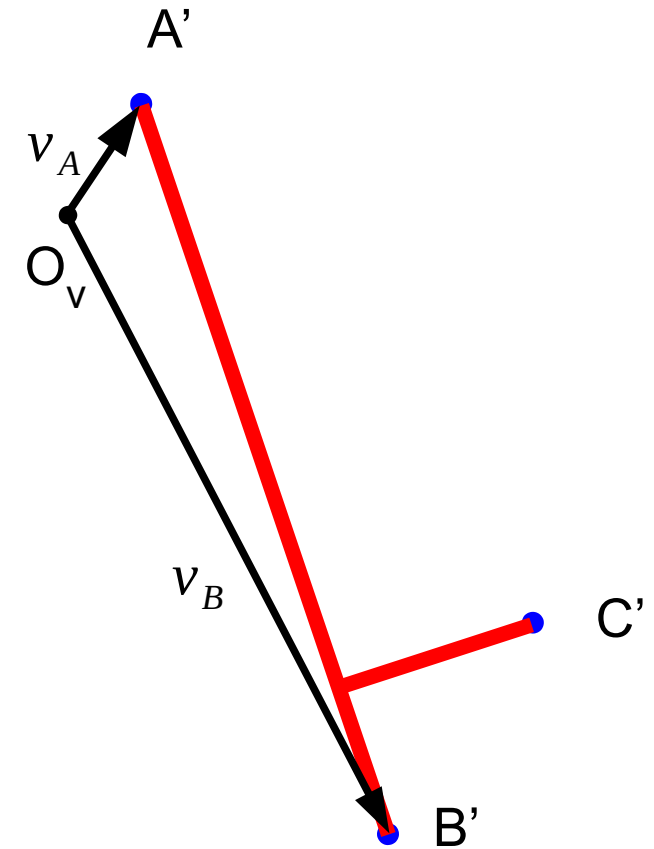
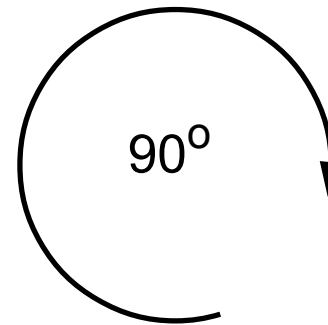
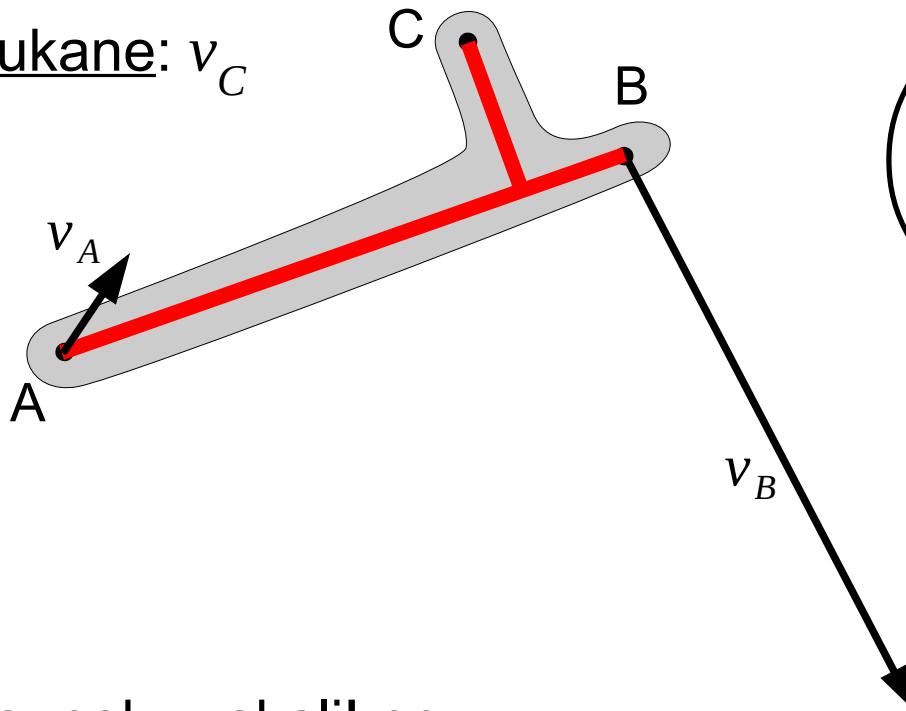
Podziałka wektorów: 1cm  $\rightarrow$  1m/s

# Metoda planu prędkości

## Przykład

Dane: geometria,  $v_A$  i  $v_B$

Szukane:  $v_C$



Rysunek w skali! np.

Podziałka geometrii: 1cm  $\rightarrow$  10cm

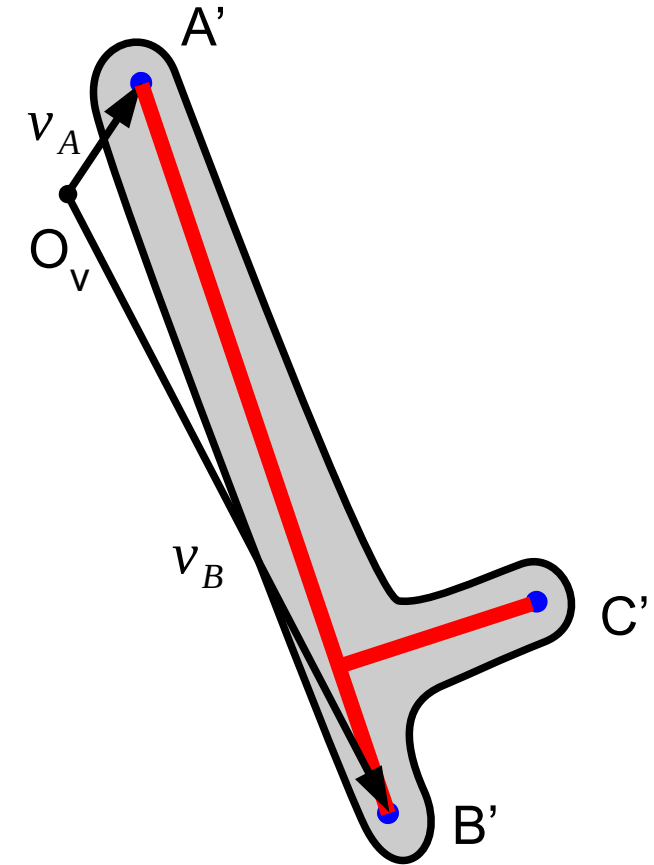
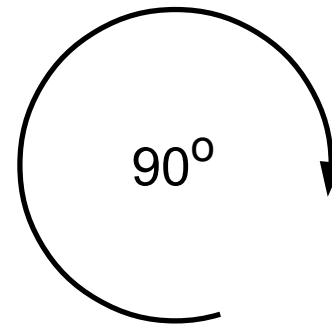
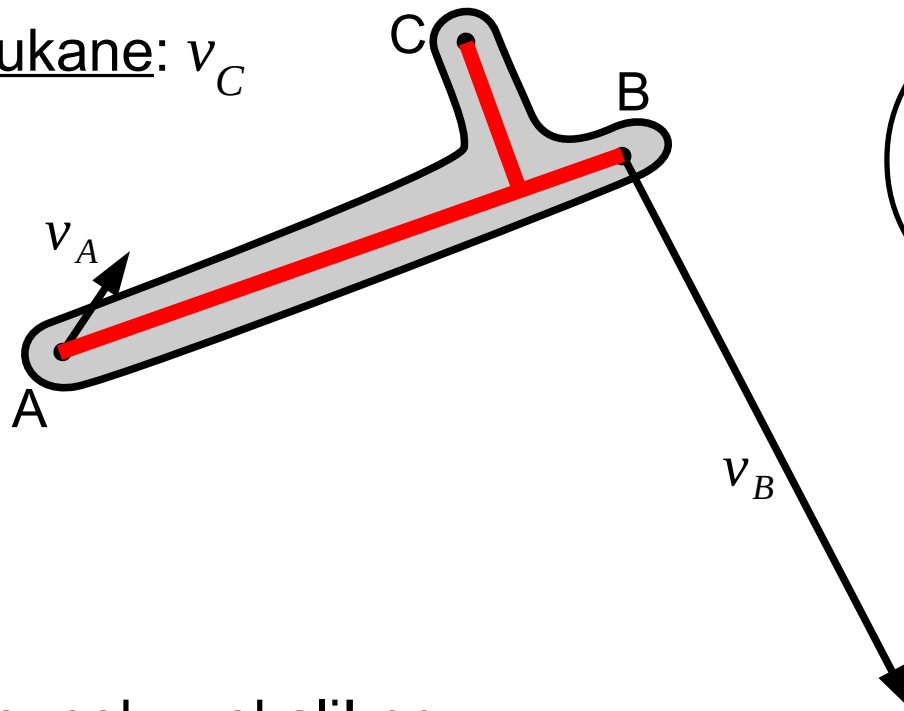
Podziałka wektorów: 1cm  $\rightarrow$  1m/s

# Metoda planu prędkości

## Przykład

Dane: geometria,  $v_A$  i  $v_B$

Szukane:  $v_C$



Rysunek w skali! np.

Podziałka geometrii: 1cm  $\rightarrow$  10cm

Podziałka wektorów: 1cm  $\rightarrow$  1m/s

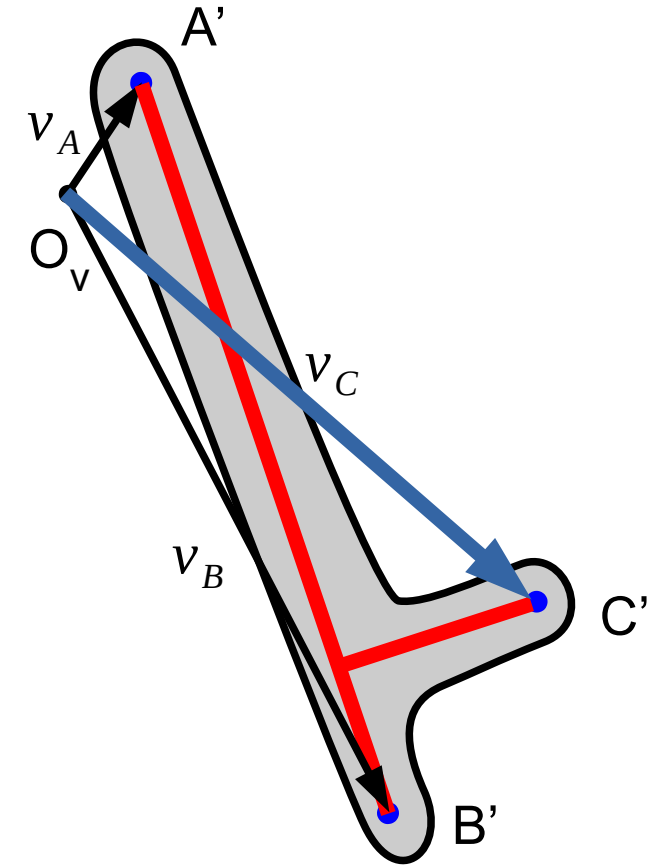
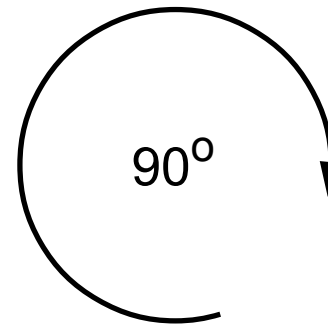
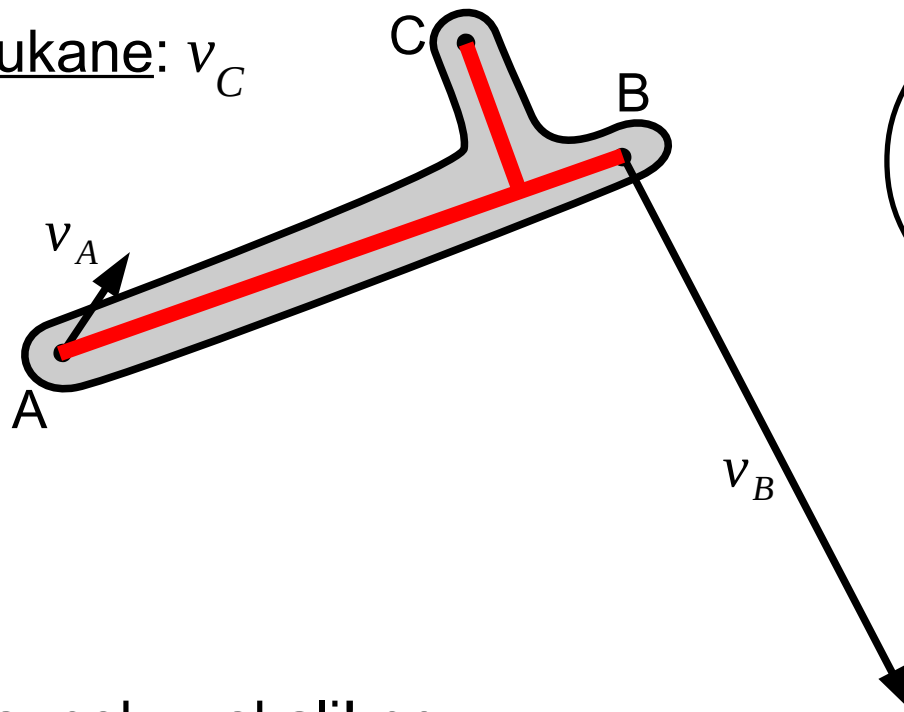
Inna podziałka geometrii!

# Metoda planu prędkości

## Przykład

Dane: geometria,  $v_A$  i  $v_B$

Szukane:  $v_C$



Rysunek w skali! np.

Podziałka geometrii: 1cm → 10cm

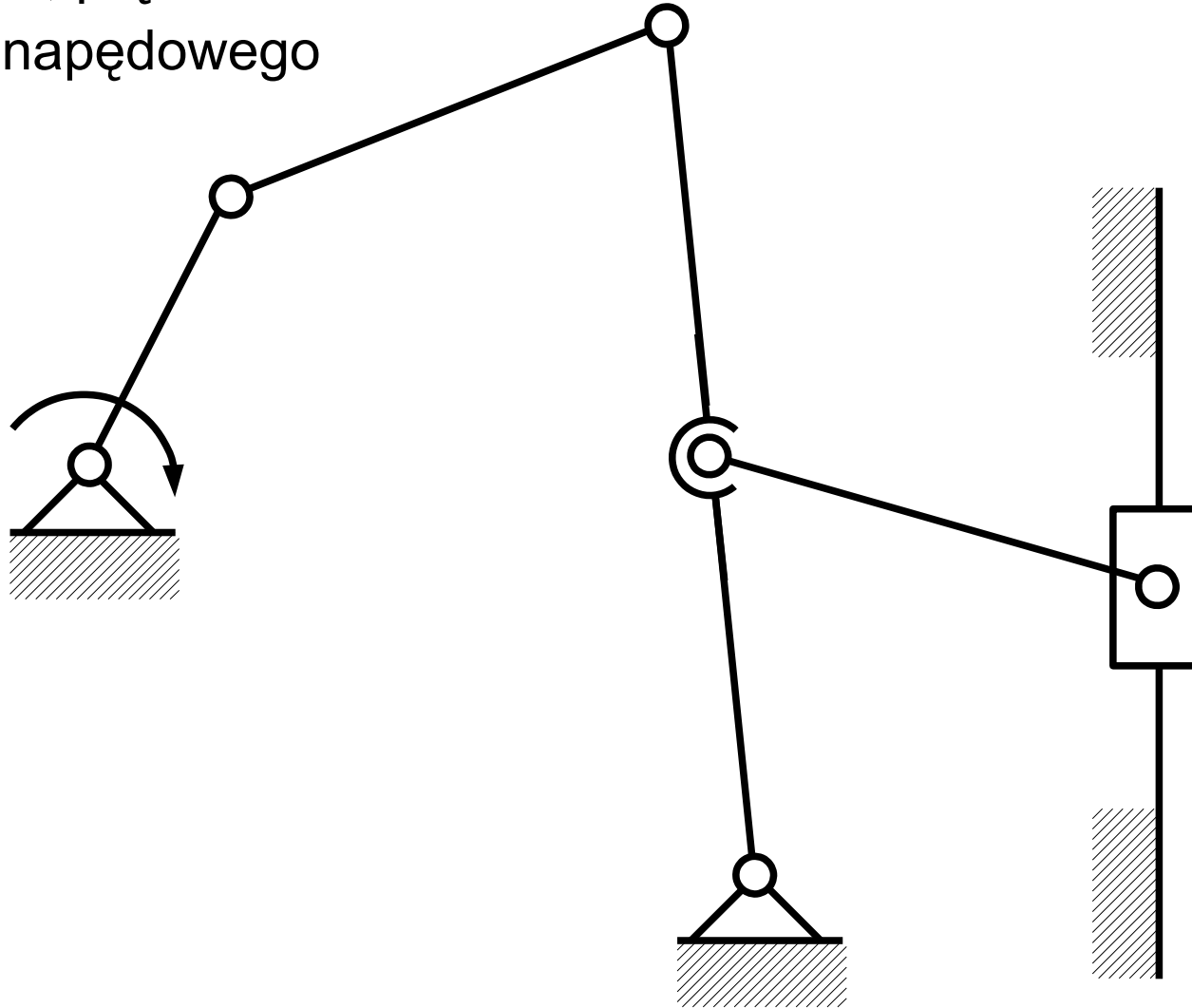
Podziałka wektorów: 1cm → 1m/s

Inna podziałka geometrii!

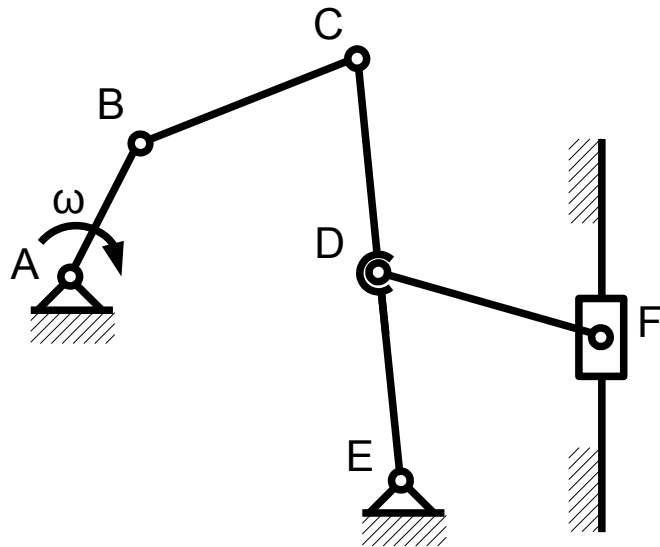
# Metody wyznaczania prędkości mechanizmów płaskich

## Przykład

Dane: geometria, prędkość  
kątowna członu napędowego



# Metody wyznaczania prędkości mechanizmów płaskich



Przykład

# Metody wyznaczania prędkości i przyspieszeń mechanizmów

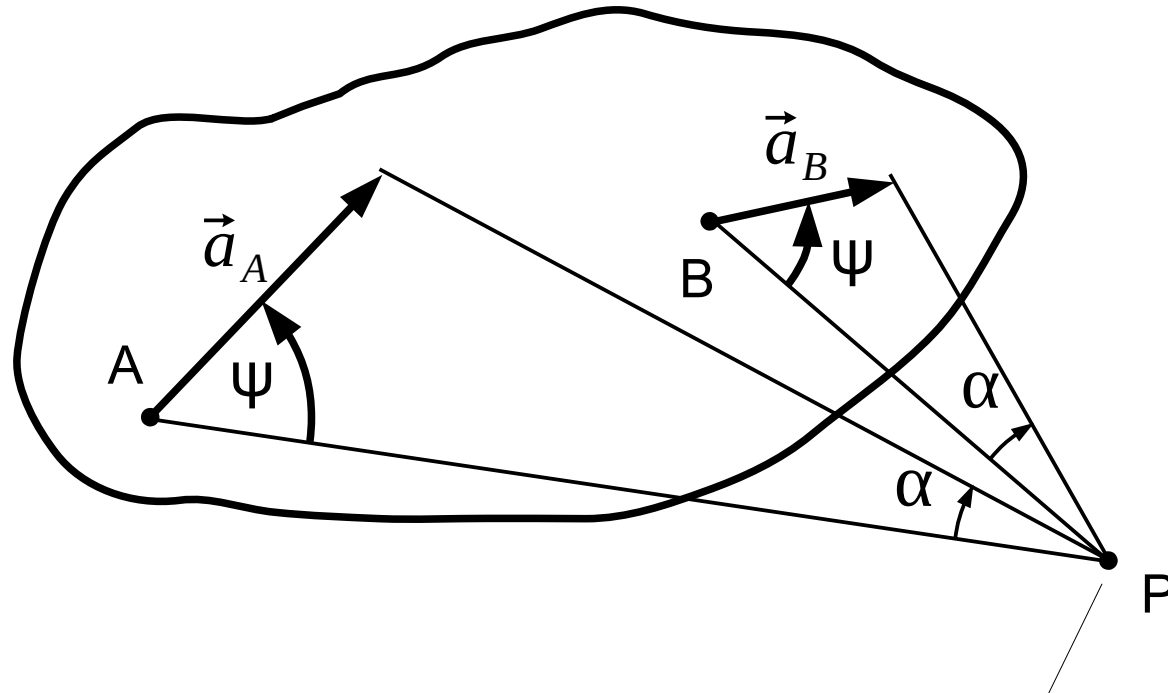
## Metody wykreślne

- metoda rzutów prędkości,
- metoda chwilowego środka obrotu,
- metoda chwilowego środka przyspieszeń,
- metoda prędkości obróconych,
- metoda rozkładu prędkości,
- metoda rozkładu przyspieszeń,
- metoda planu prędkości,
- metoda planu przyspieszeń.

## Metoda analityczna



# Chwilowy środek przyspieszeń



środek przyspieszeń

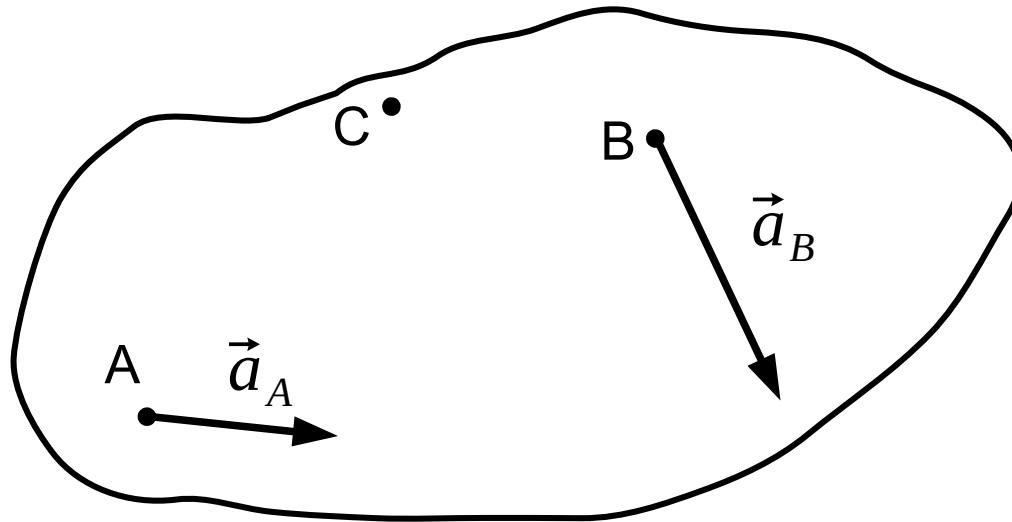
$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\bar{a}_A$  i  $\bar{a}_B$

Szukane:  $\bar{a}_C$



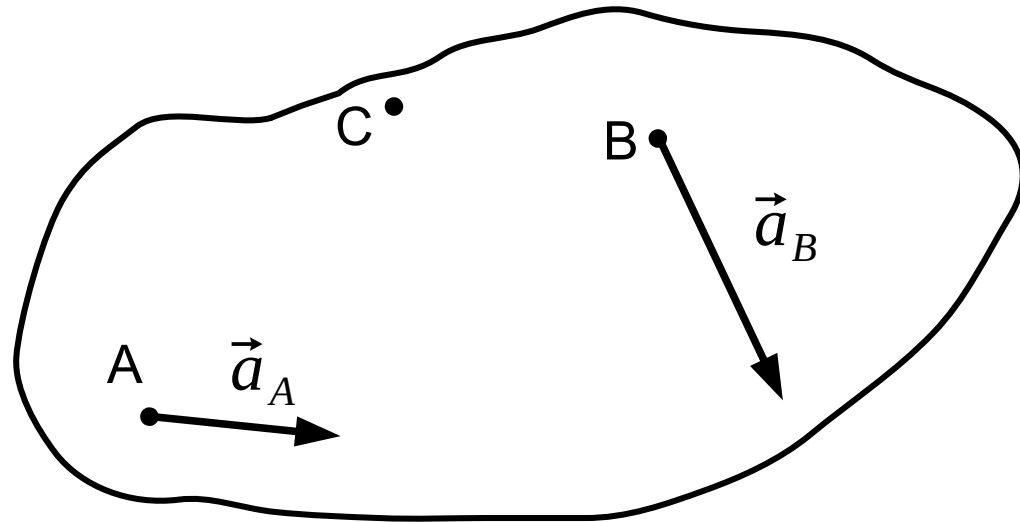
# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\bar{a}_A$  i  $\bar{a}_B$

Szukane:  $\bar{a}_C$

1. krok:  
konstrukcja  $\psi$



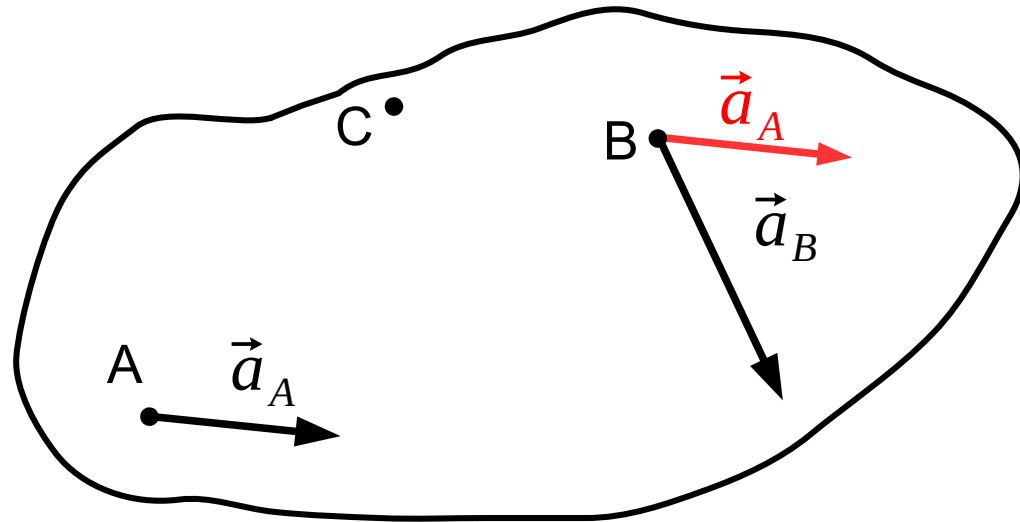
# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\bar{a}_A$  i  $\bar{a}_B$

Szukane:  $\bar{a}_C$

1. krok:  
konstrukcja  $\psi$



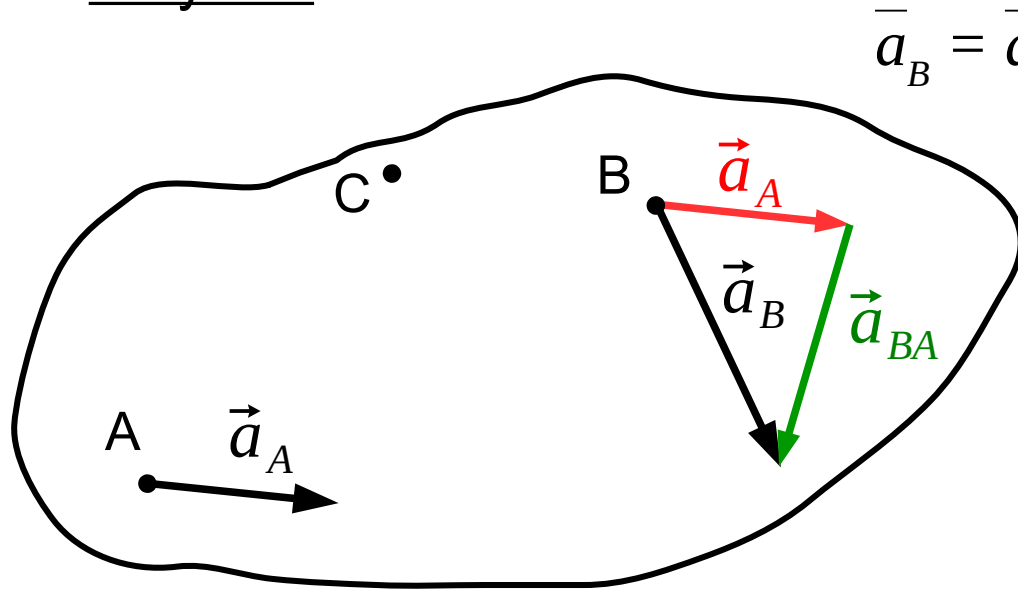
# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$

Szukane:  $\vec{a}_C$

1. krok:  
konstrukcja  $\psi$



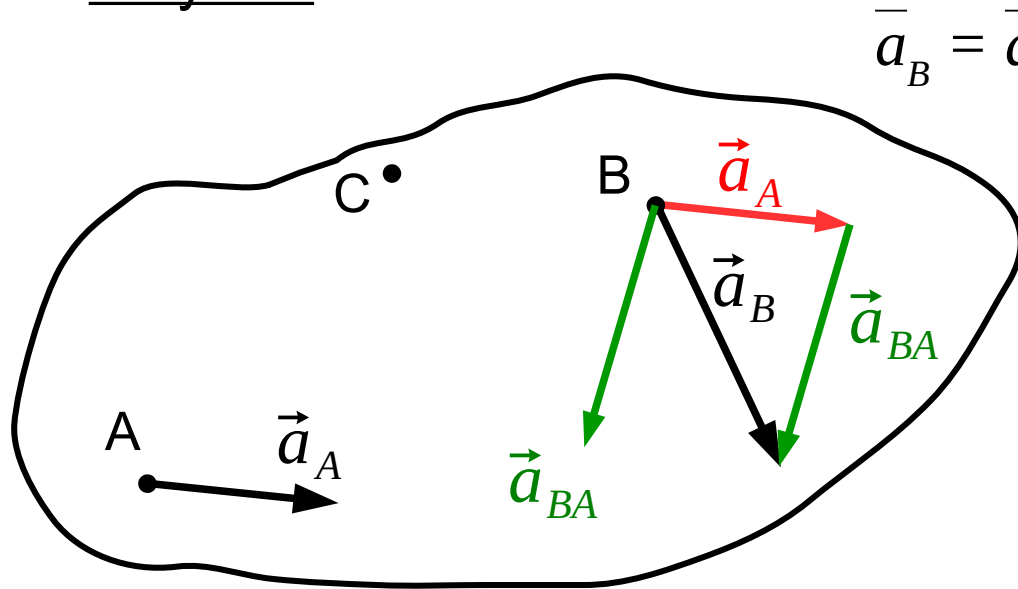
# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$

Szukane:  $\vec{a}_C$

1. krok:  
konstrukcja  $\psi$



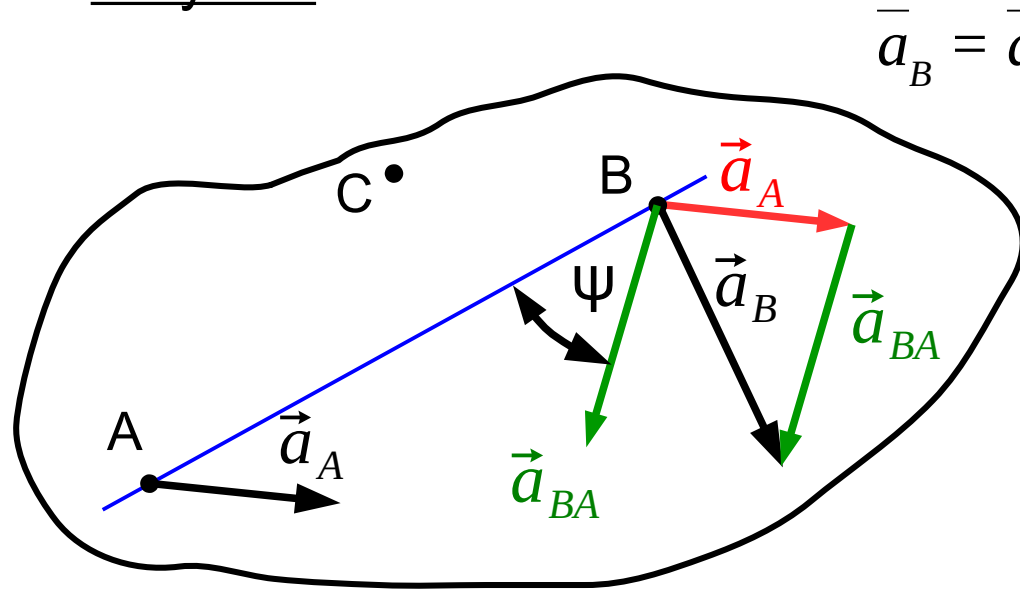
# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$

Szukane:  $\vec{a}_C$

1. krok:  
konstrukcja  $\psi$



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

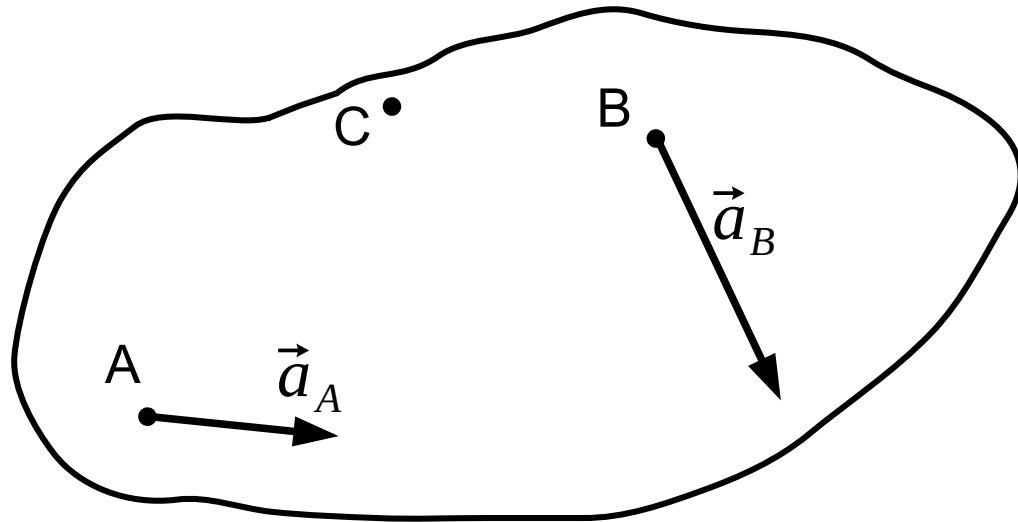
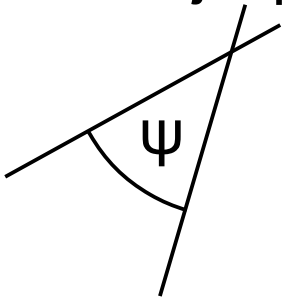
## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$

Szukane:  $\vec{a}_C$

1. krok:

konstrukcja  $\psi$





# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

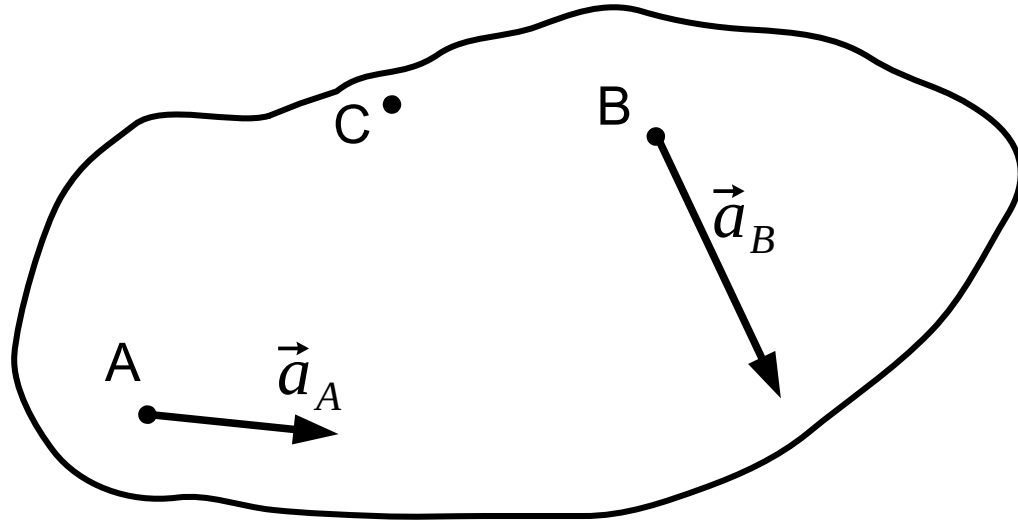
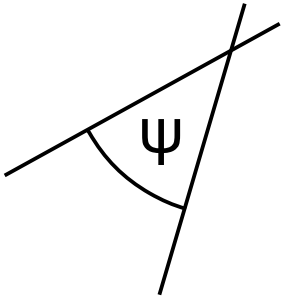
## Przykład

Dane:  $\bar{a}_A$  i  $\bar{a}_B$

Szukane:  $\bar{a}_C$

1. krok:

konstrukcja  $\psi$



2. krok: znalezienie  
środka przyspieszeń

# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

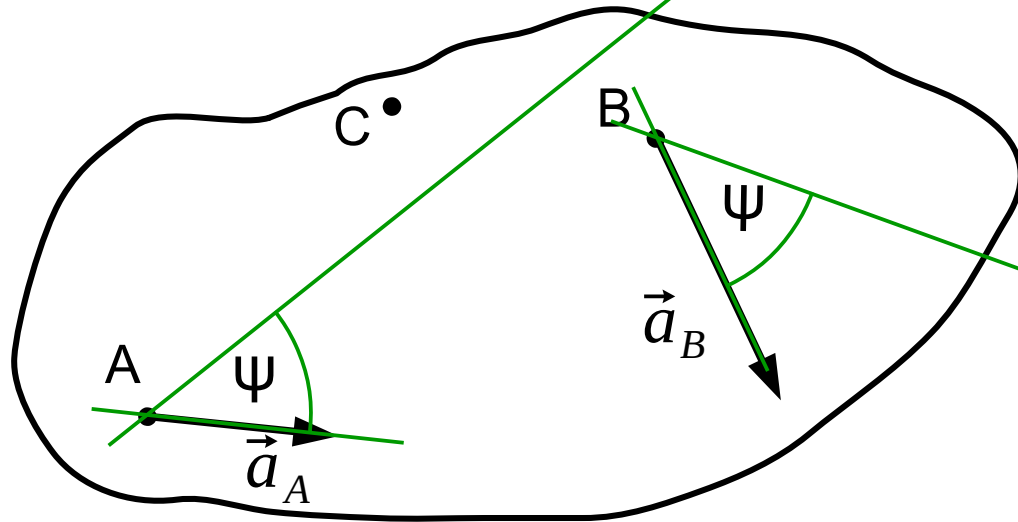
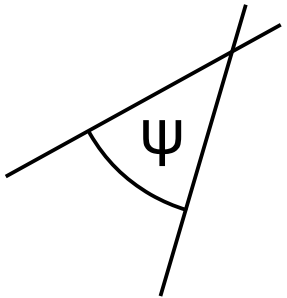
## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$

Szukane:  $\vec{a}_C$

1. krok:

konstrukcja  $\psi$



2. krok: znalezienie  
środka przyspieszeń

# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

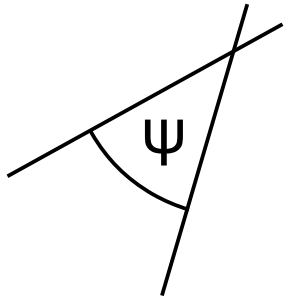
## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$

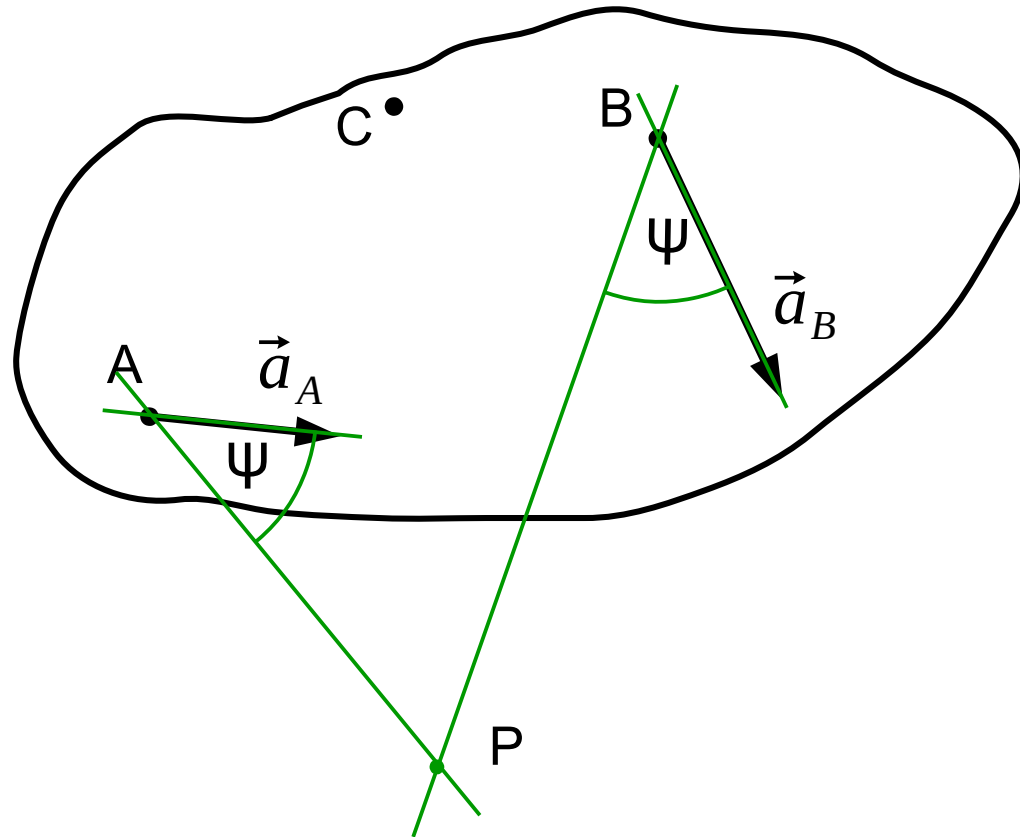
Szukane:  $\vec{a}_C$

1. krok:

konstrukcja  $\psi$



2. krok: znalezienie  
środka przyspieszeń



# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

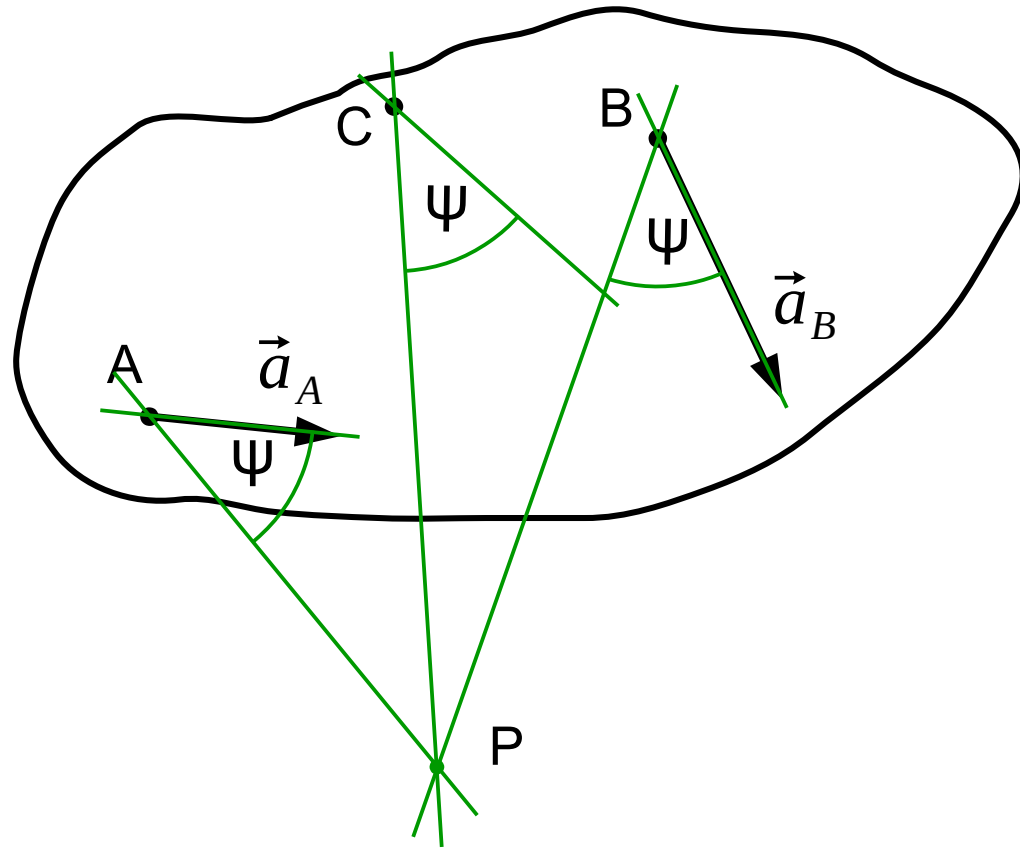
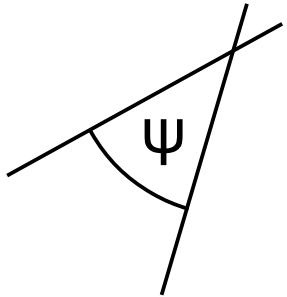
## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$

Szukane:  $\vec{a}_C$

1. krok:

konstrukcja  $\psi$



2. krok: znalezienie  
środka przyspieszeń

3. krok: konstrukcja  $\vec{a}_C$

# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

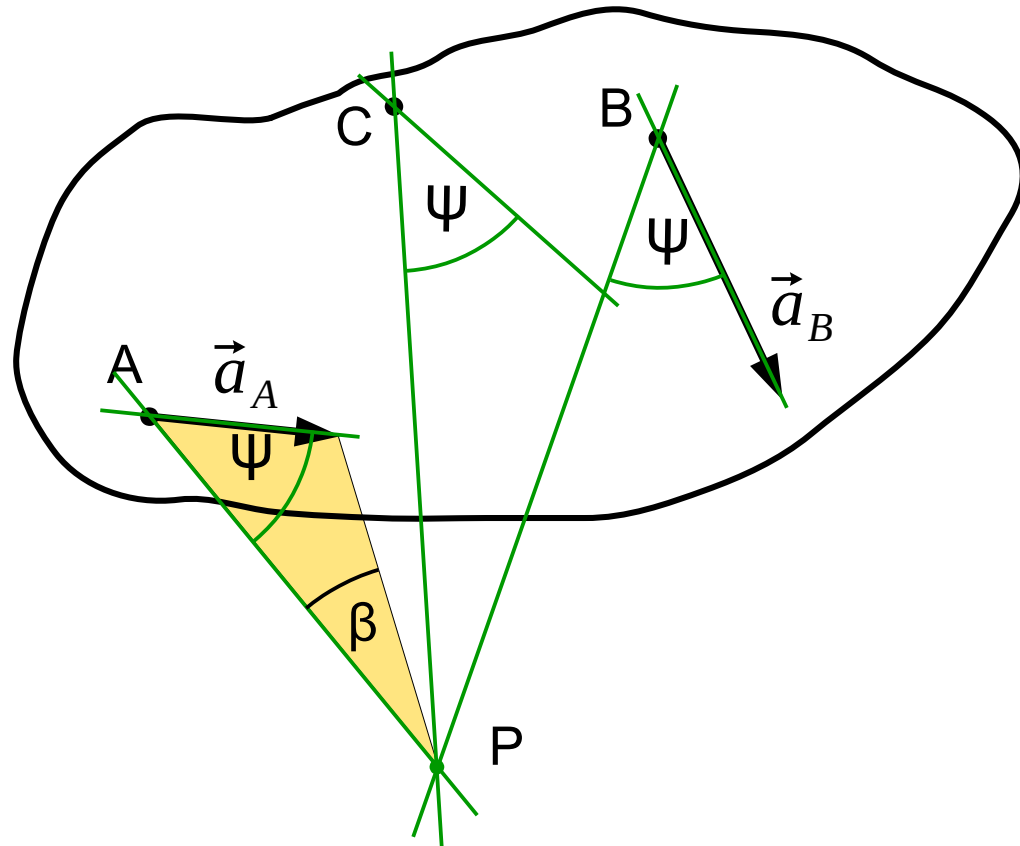
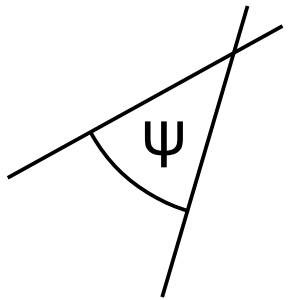
## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$

Szukane:  $\vec{a}_C$

1. krok:

konstrukcja  $\psi$



2. krok: znalezienie  
środka przyspieszeń

3. krok: konstrukcja  $\vec{a}_C$

# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

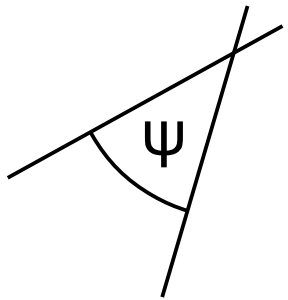
## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$  i  $\vec{a}_B$

Szukane:  $\vec{a}_C$

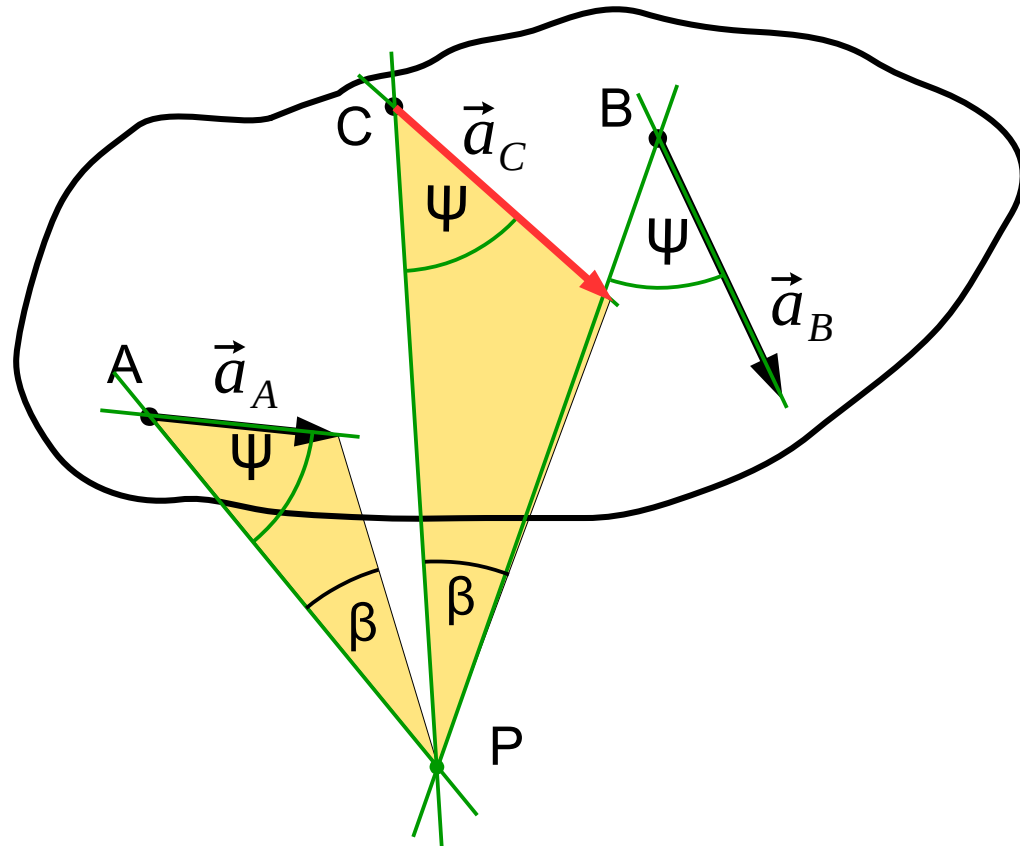
1. krok:

konstrukcja  $\psi$



2. krok: znalezienie  
środka przyspieszeń

3. krok: konstrukcja  $\vec{a}_C$

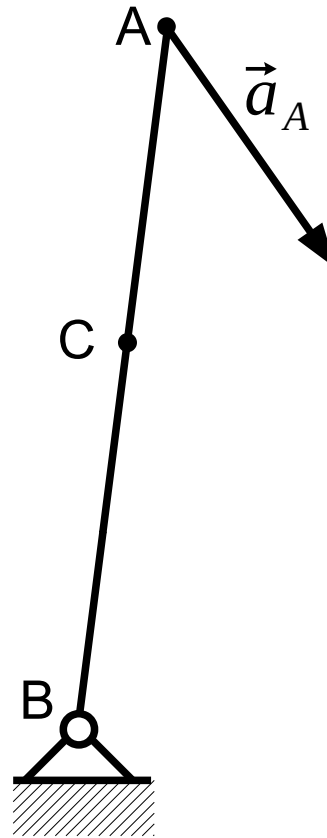


# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

## Przykład 2

Dane:  $\vec{a}_A$

Szukane:  $\vec{a}_C$

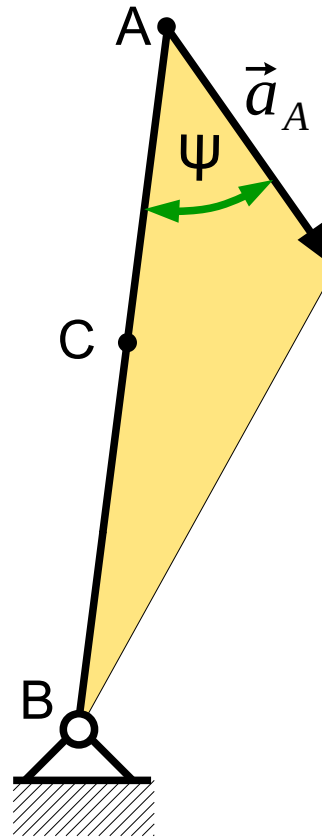


# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

## Przykład 2

Dane:  $\vec{a}_A$

Szukane:  $\vec{a}_C$



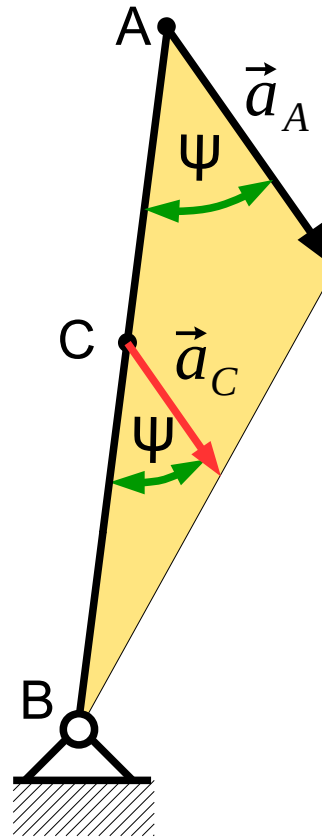


# Metoda chwilowego środka przyspieszeń

## Przykład 2

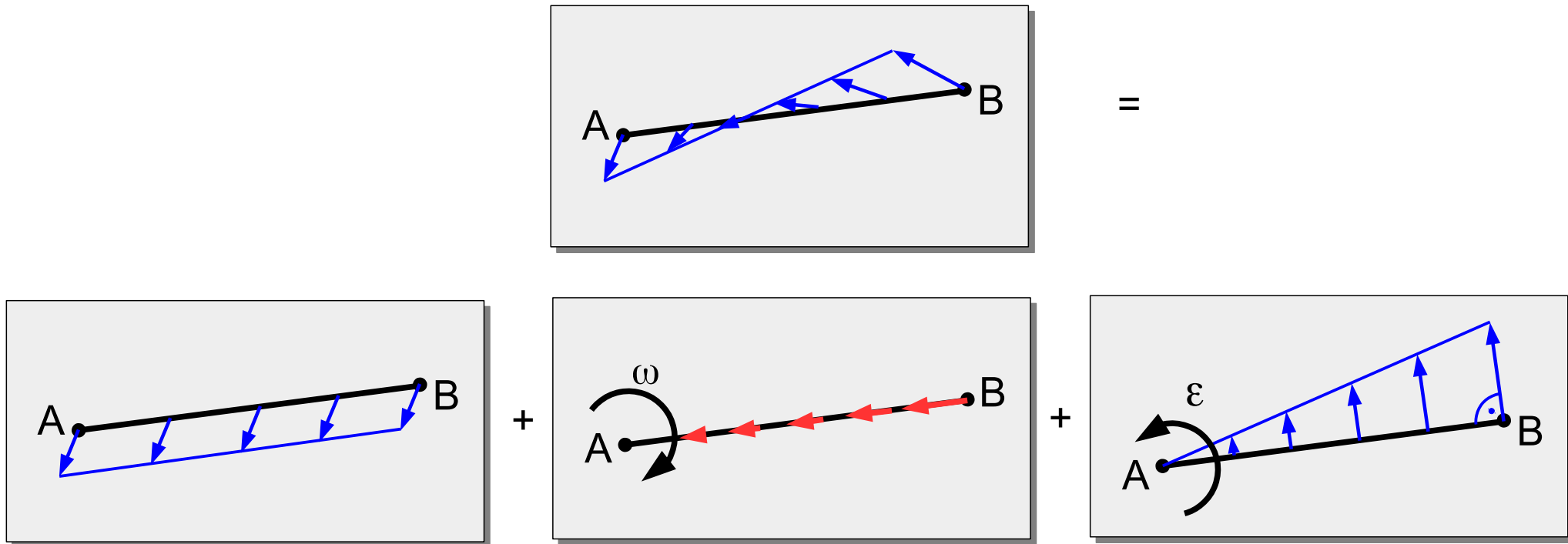
Dane:  $\vec{a}_A$

Szukane:  $\vec{a}_C$



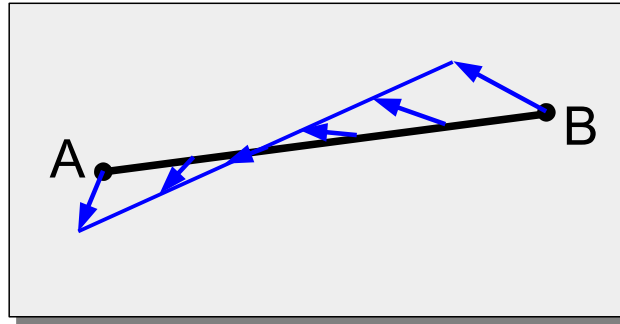
# Metoda rozkładu przyspieszeń

## Przykład

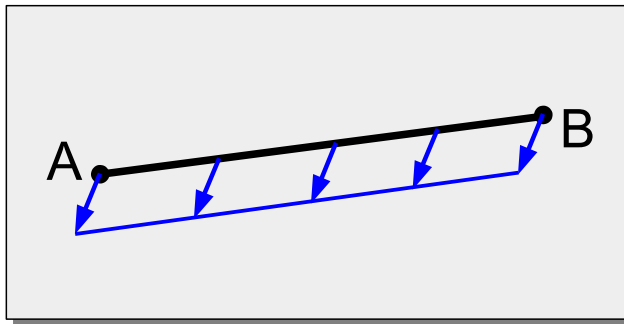


# Metoda rozkładu przyspieszeń

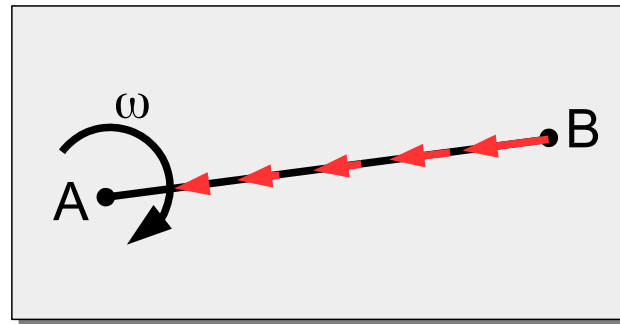
## Przykład



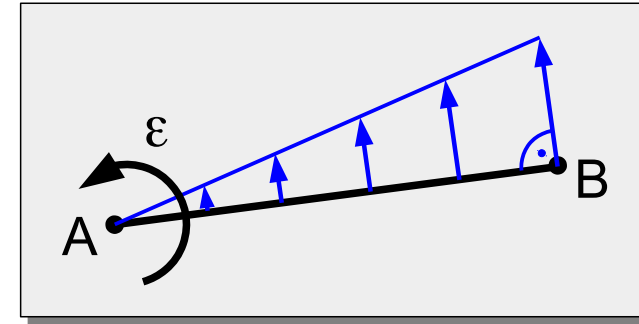
=



+



+



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

Przyspieszenie  
bezwzględne punktu B

Przyspieszenie bryły w  
ruchu postępowym

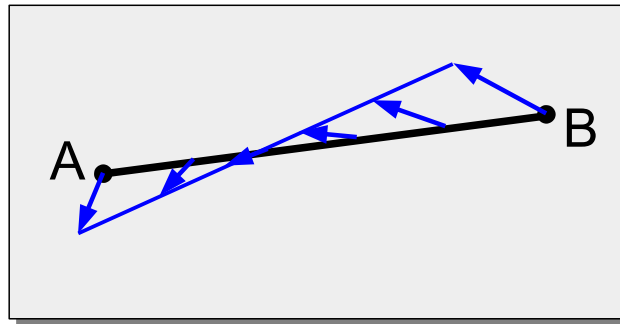
Przyspieszenie punktu B w  
ruchu obrotowym względem A.

Przyspieszenie  
styczne

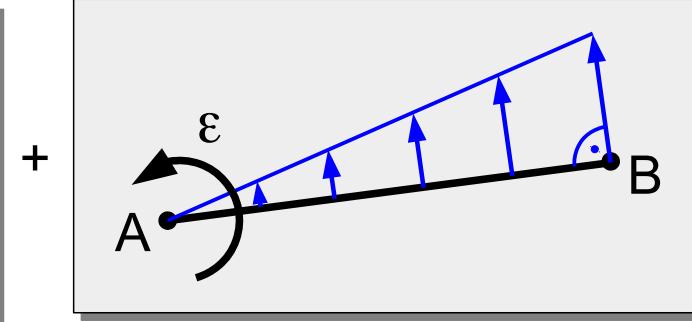
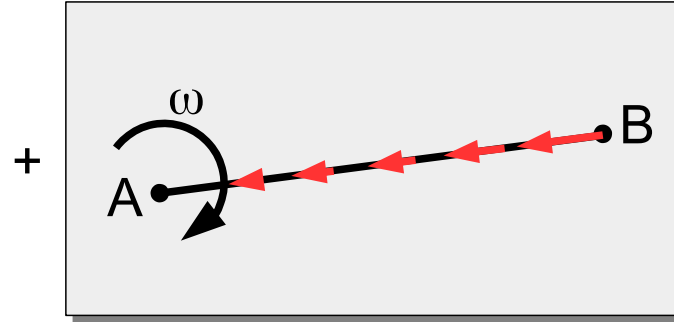
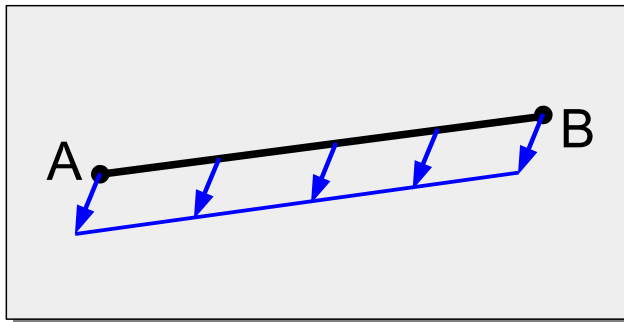
Przyspieszenie  
dośrodkowe (normalne)

# Metoda rozkładu przyspieszeń

## Przykład



=



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t$$

Przyspieszenie  
dośrodkowe (normalne)

Przyspieszenie  
styczne

$$\vec{a}_{BA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{AB}$$

$$\vec{a}_{BA} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{AB}) = -\omega^2 \vec{AB}$$

# Plan przyspieszeń

*Planem przyspieszeń członu sztywnego nazywamy miejsce geometryczne końców wektorów przyspieszeń bezwzględnych członu odłożonych z punktu zwanego biegunem planu przyspieszeń.*

*Plan przyspieszeń członu jest do niego podobny pod względem konfiguracji punktów i obrócony o kąt  $(180^\circ - \psi)$  w kierunku:*

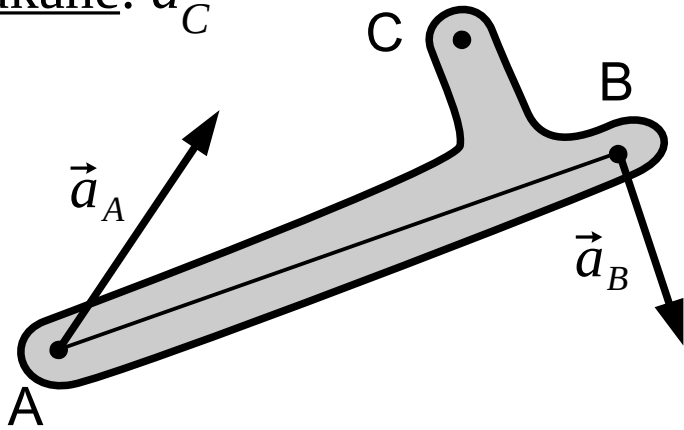
- zgodnym ze zwrotem chwilowej prędkości kątowej członu, jeżeli jednakowe są zwroty wektorów  $\omega$  i  $\varepsilon$ ,*
- przeciwnym do zwrotu chwilowej prędkości kątowej członu, jeżeli przeciwne są zwroty wektorów  $\omega$  i  $\varepsilon$ .*

# Metoda planu przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A, \vec{a}_B$  + geometria

Szukane:  $\vec{a}_C$

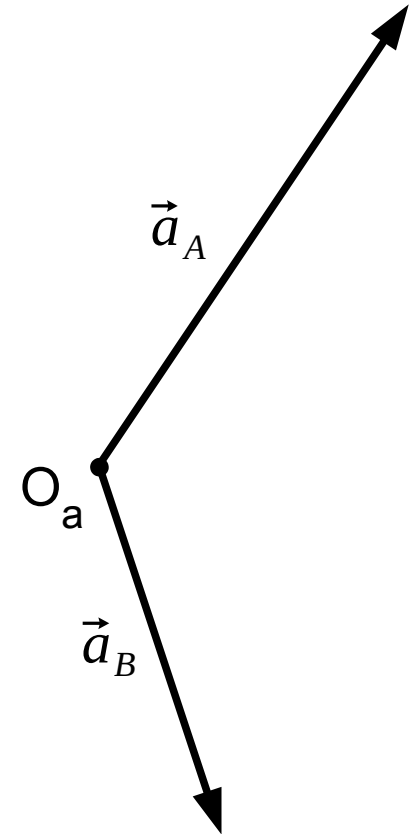
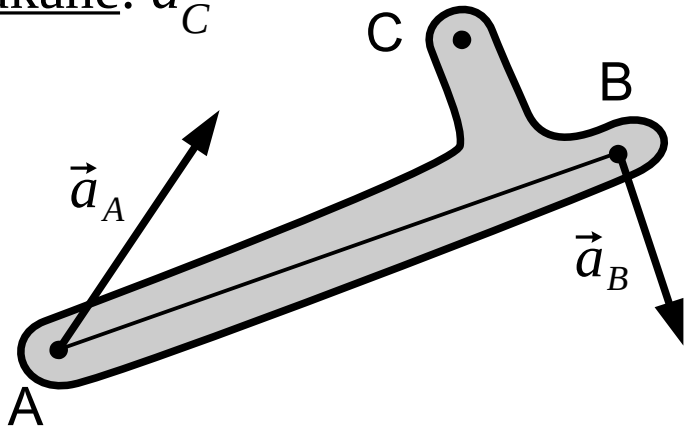


# Metoda planu przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A$ ,  $\vec{a}_B$  + geometria

Szukane:  $\vec{a}_C$



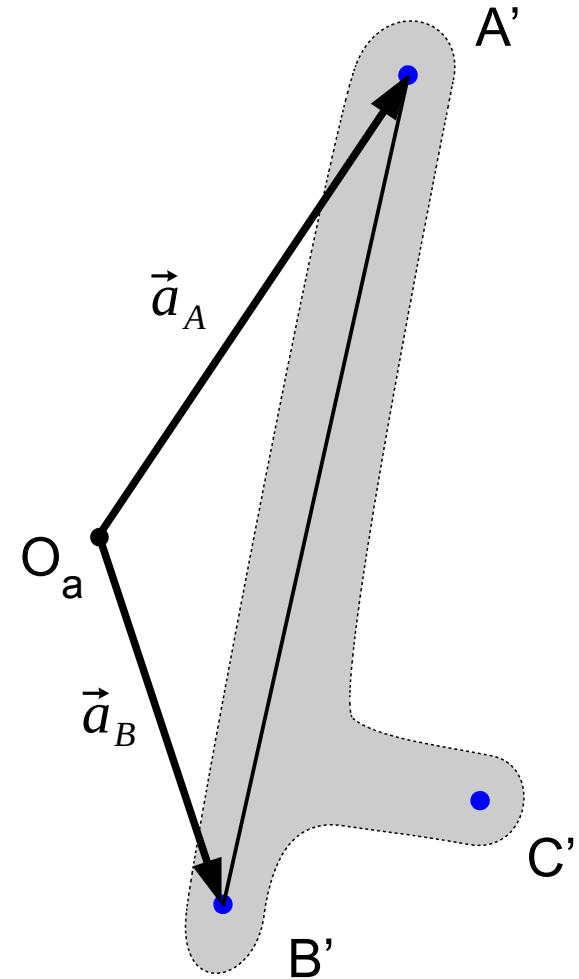
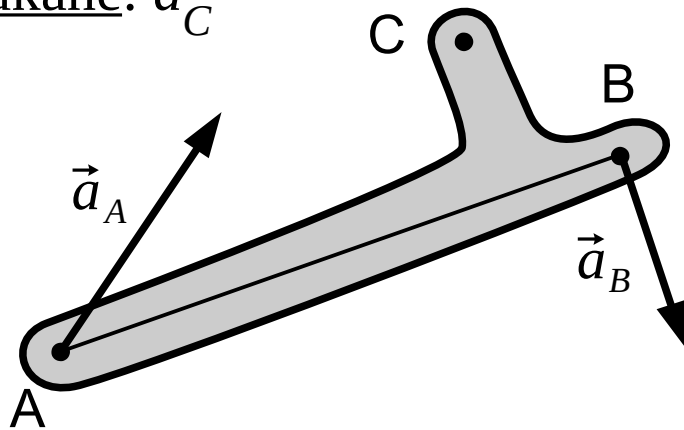
Przyspieszenia w skali, np.: 1cm  $\rightarrow$  1m/s<sup>2</sup>

# Metoda planu przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A, \vec{a}_B$  + geometria

Szukane:  $\vec{a}_C$



Przyspieszenia w skali, np.: 1cm  $\rightarrow$  1m/s<sup>2</sup>  
Geometria w skali względem rozmiarów rzeczywistych

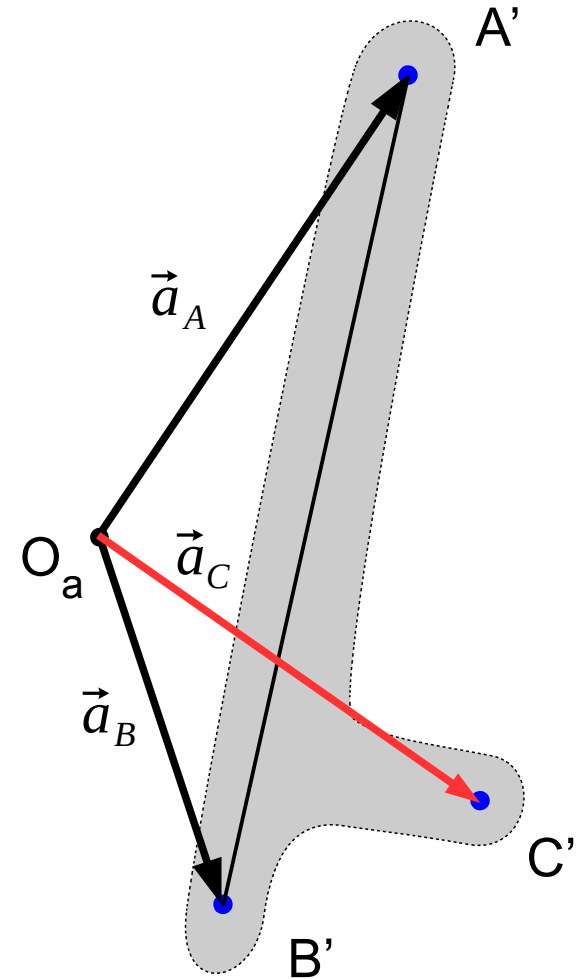
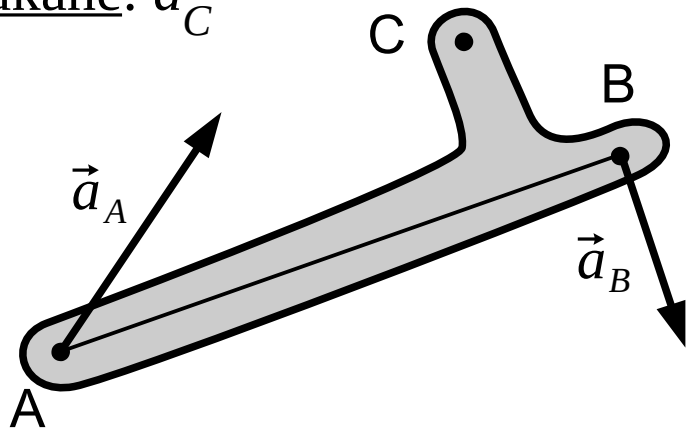


# Metoda planu przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A, \vec{a}_B$  + geometria

Szukane:  $\vec{a}_C$



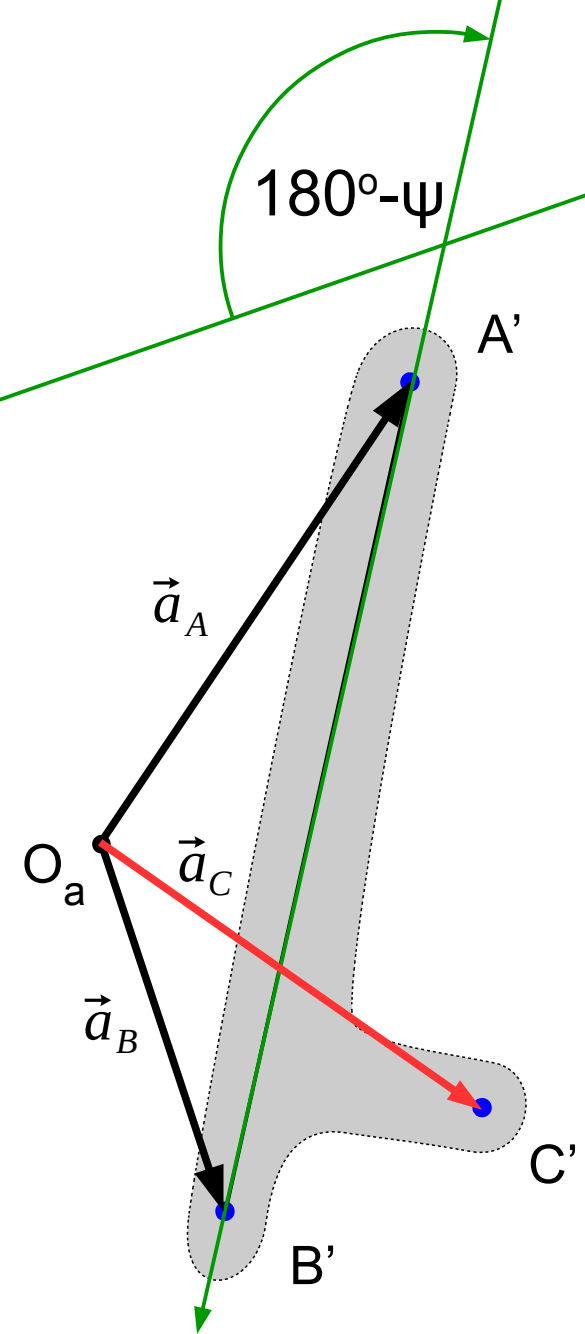
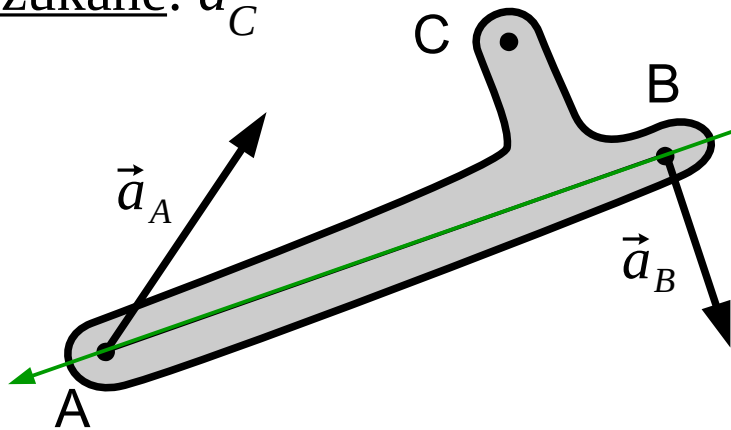
Przyspieszenia w skali, np.: 1cm  $\rightarrow$  1m/s<sup>2</sup>  
Geometria w skali względem rozmiarów rzeczywistych

# Metoda planu przyspieszeń

## Przykład

Dane:  $\vec{a}_A, \vec{a}_B$  + geometria

Szukane:  $\vec{a}_C$

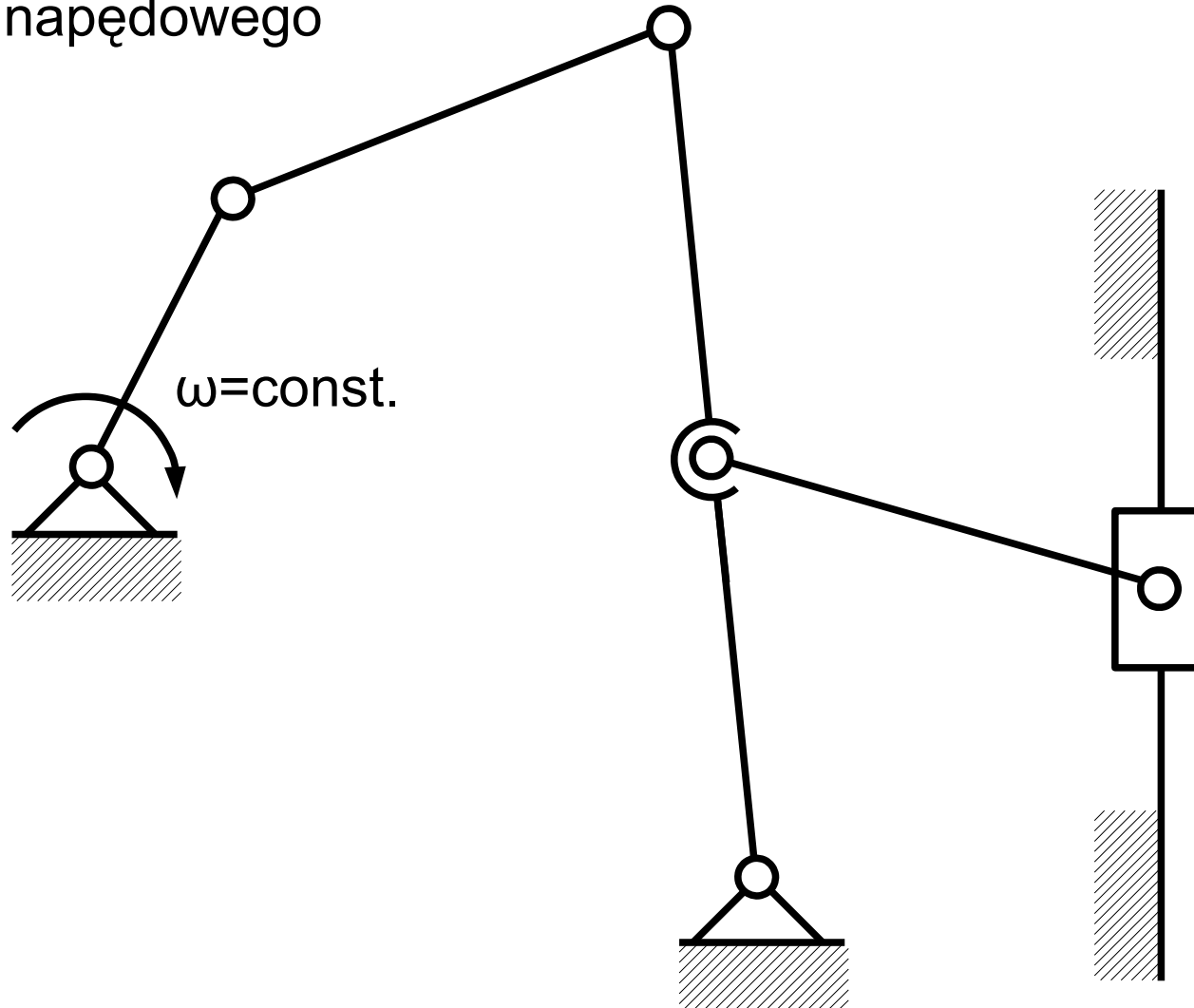


Przyspieszenia w skali, np.: 1cm  $\rightarrow$  1m/s<sup>2</sup>  
Geometria w skali względem rozmiarów rzeczywistych

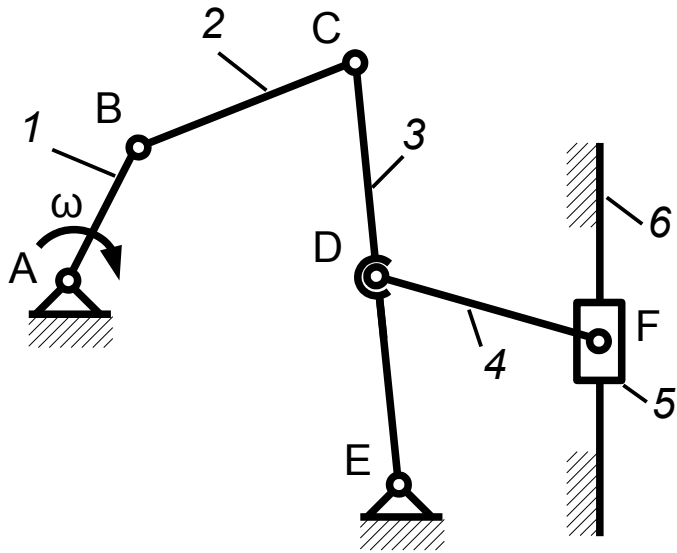
# PRZYKŁAD

## metody rozkładu oraz planu dla prędkości i przyspieszeń

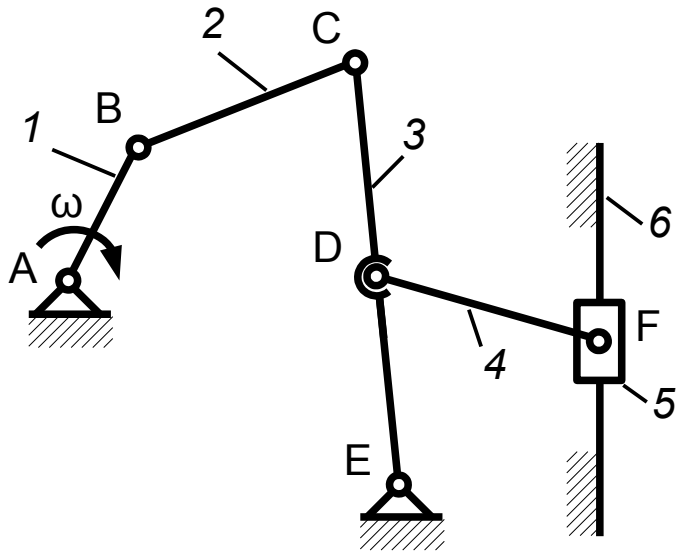
Dane: geometria, stała prędkość  
kątowna członu napędowego



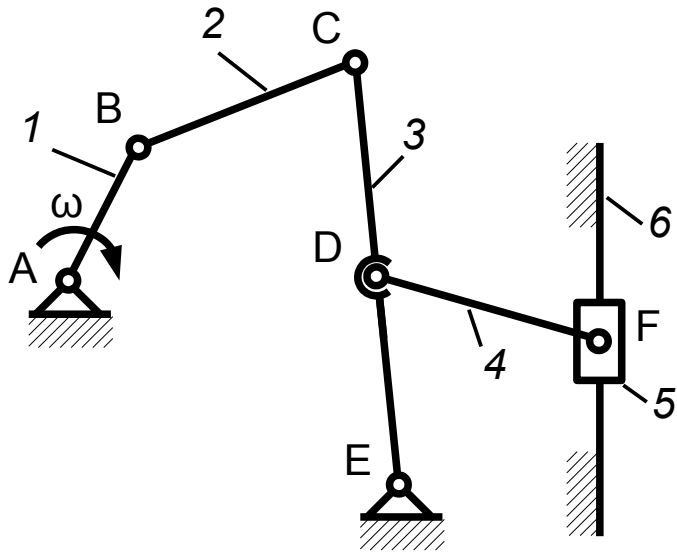
# PRZYKŁAD



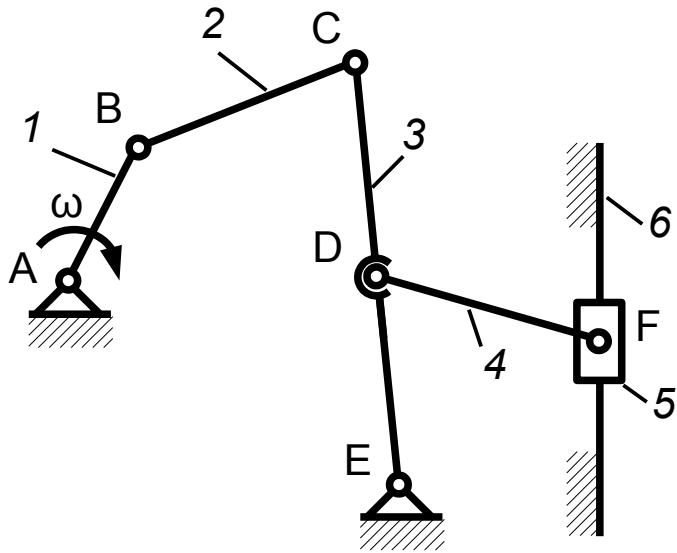
# PRZYKŁAD



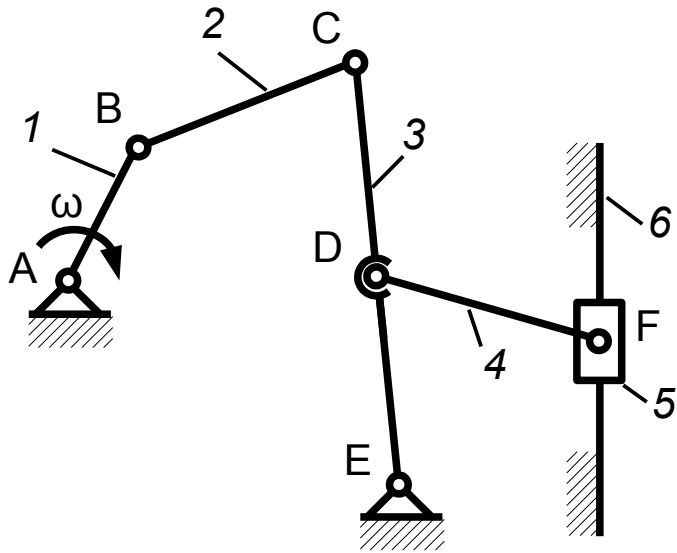
# PRZYKŁAD



# PRZYKŁAD

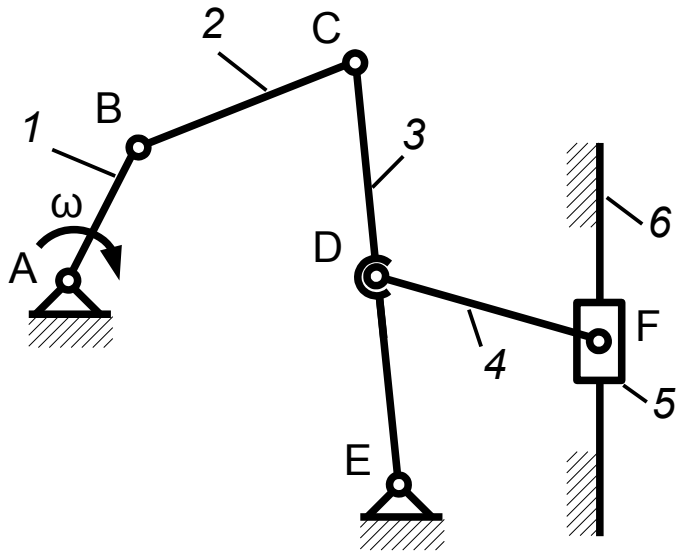


# PRZYKŁAD

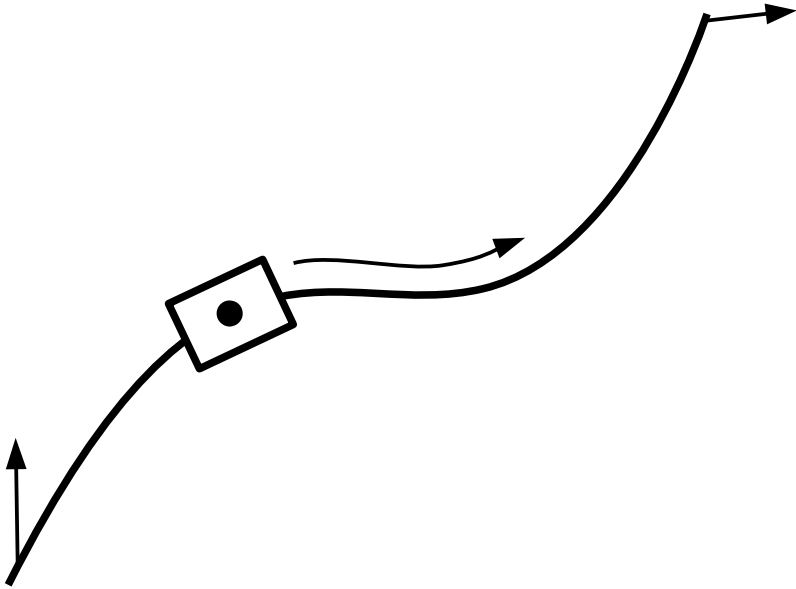




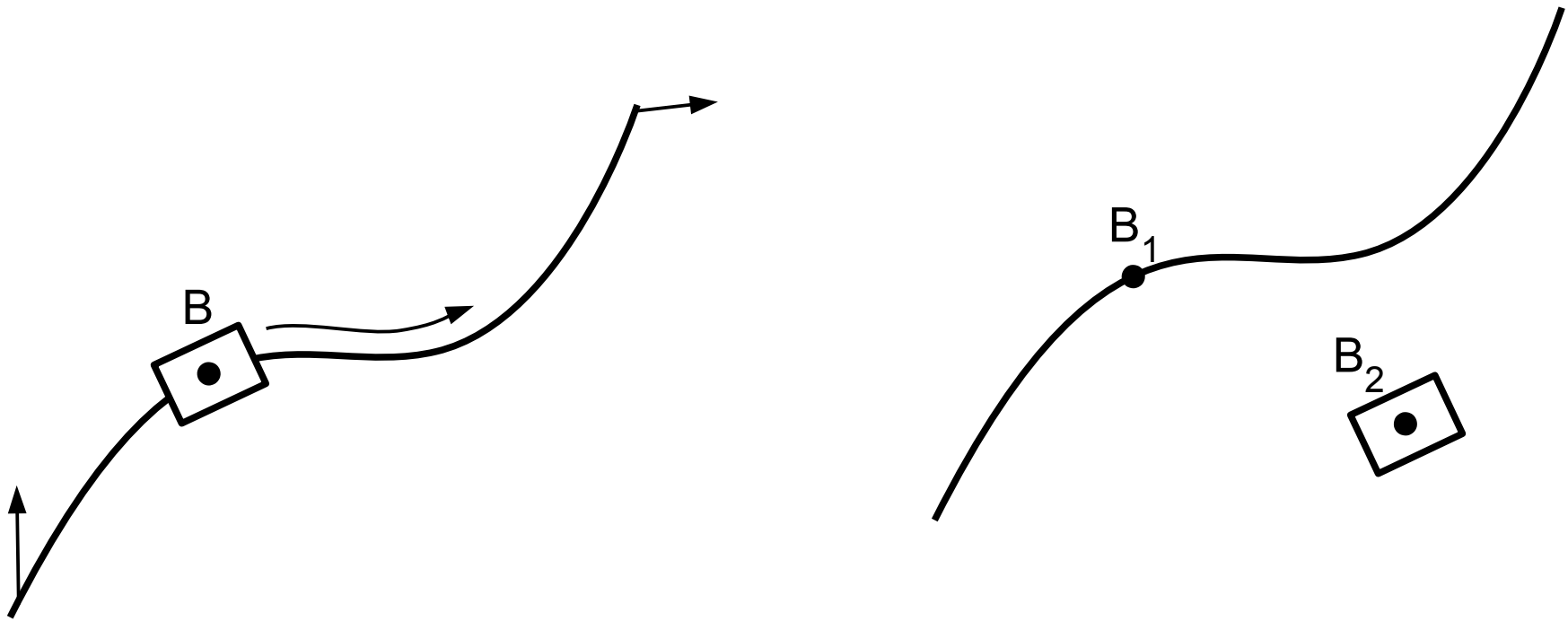
# PRZYKŁAD



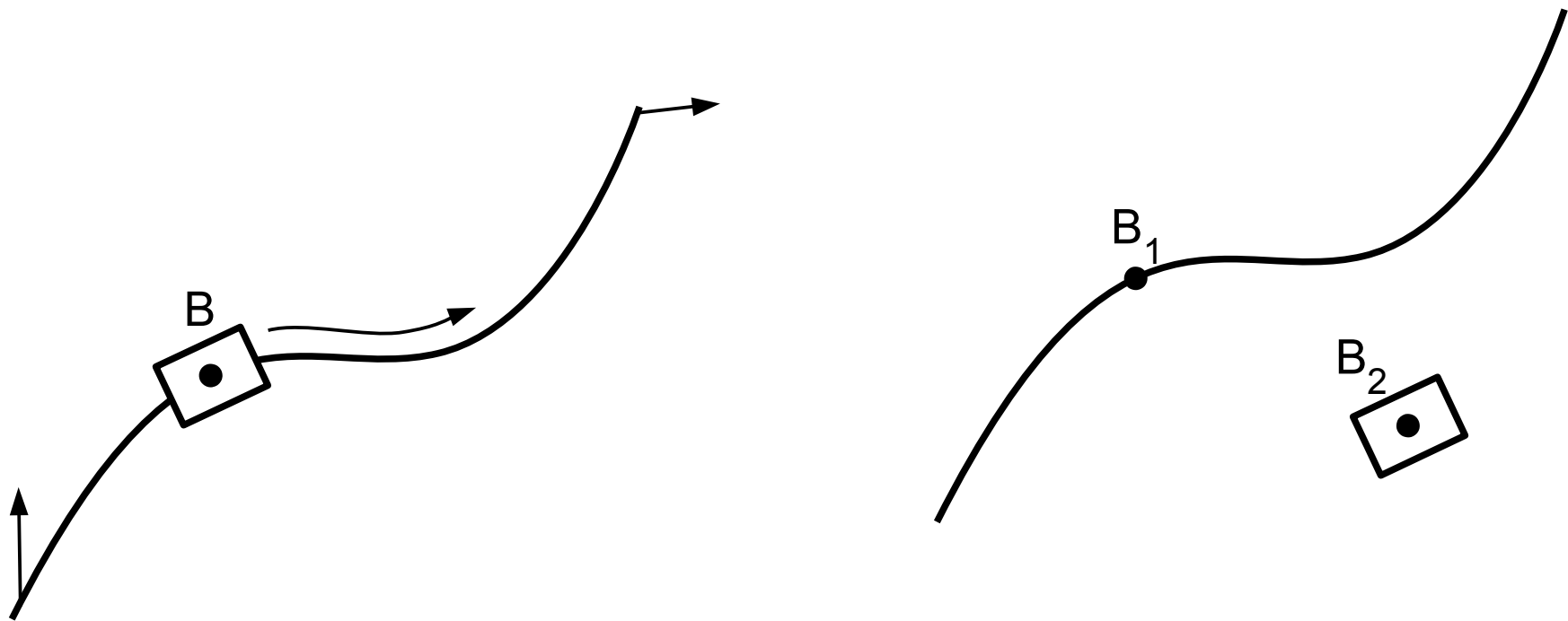
# Prędkości w ruchu złożonym



# Prędkości w ruchu złożonym



# Prędkości w ruchu złożonym



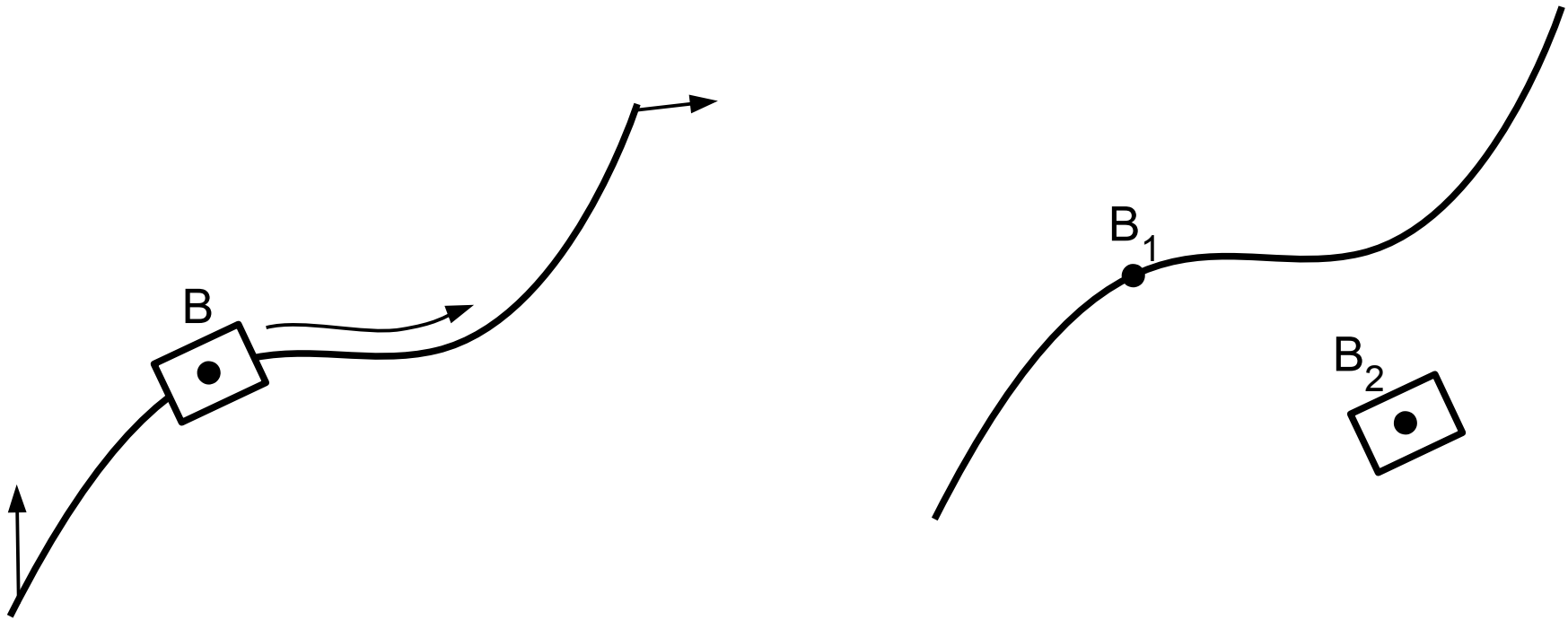
$$\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_{B_1} + \vec{v}_{B_2 B_1}$$

Prędkość  
bezwzględna  
punktu  $B_2$

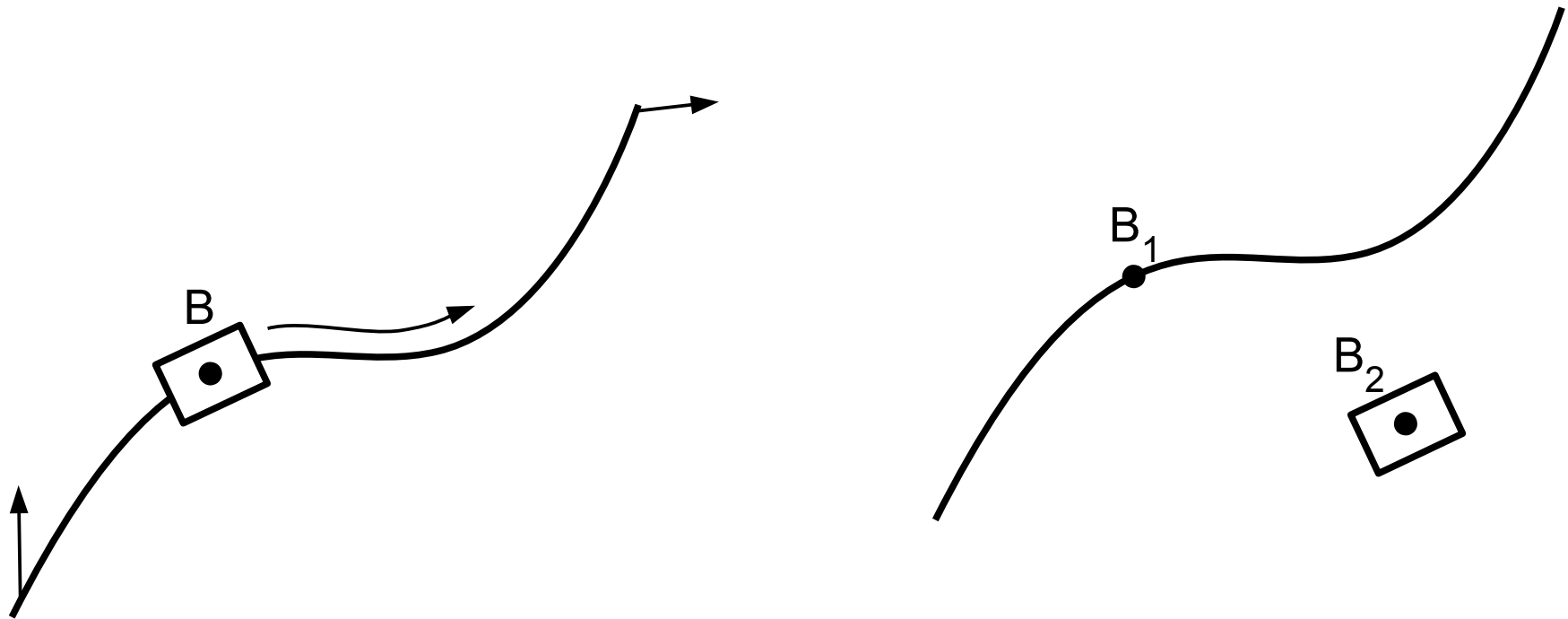
Prędkość  
unoszenia  
(prędkość  
bezwzględna  
punktu  $B_1$ )

Prędkość  
względna

# Przyspieszenia w ruchu złożonym



# Przyspieszenia w ruchu złożonym



$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B1}^u + \vec{a}_{B2B1}^w + \vec{a}^c$$

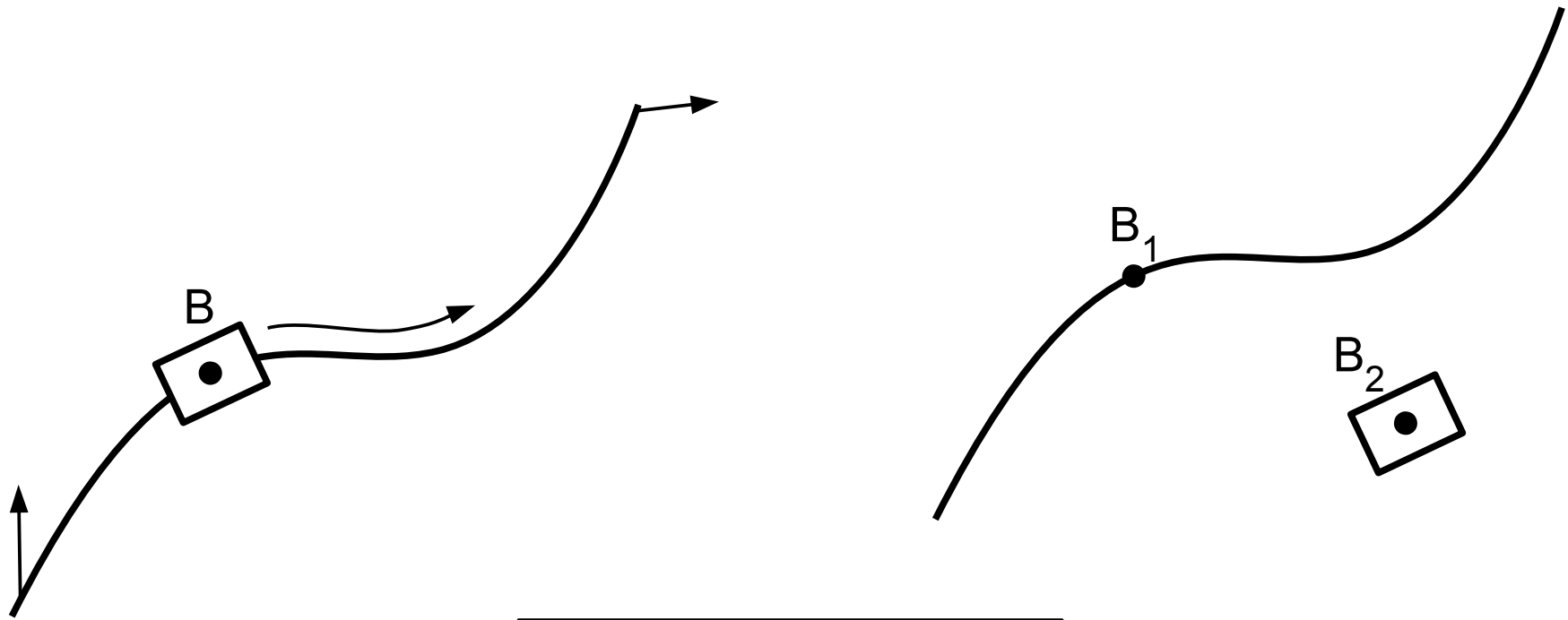
Bezwzględne przyspieszenie punktu B2

Przyspieszenie unoszenia (bezwzględne przyspieszenie punktu B1)

Przyspieszenie względne

Przyspieszenie Coriolisa

# Przyspieszenia w ruchu złożonym



$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B1}^u + \vec{a}_{B2B1}^w + \vec{a}^c$$

Bezwzględne przyspieszenie punktu B2

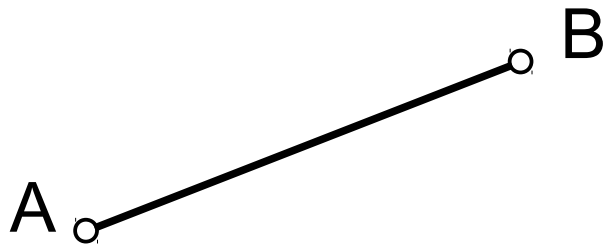
Przyspieszenie unoszenia (bezwzględne przyspieszenie punktu B1)

Przyspieszenie względne

Przyspieszenie Coriolisa

$$\vec{a}^c = 2 \vec{\omega}_u \times \vec{v}_{B2B1}$$

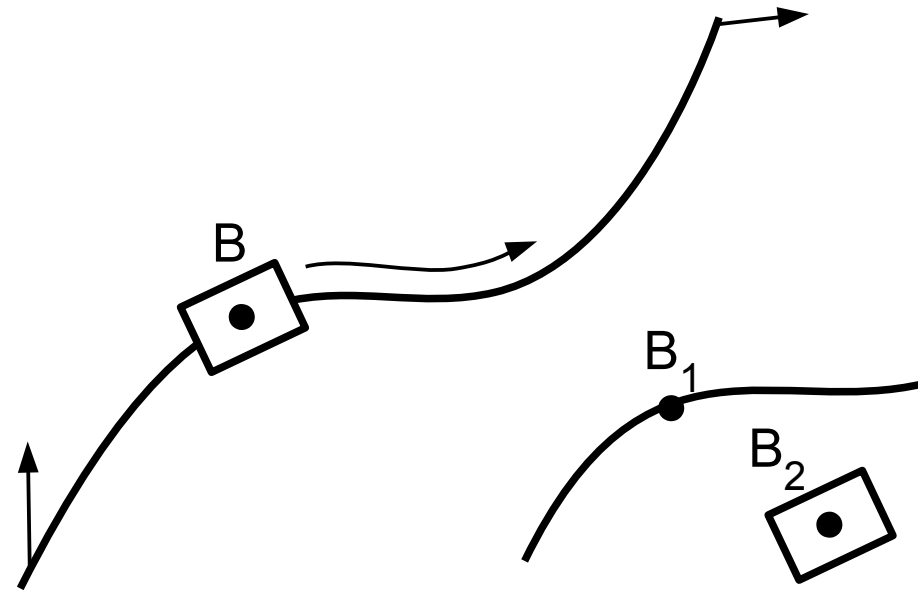
# Metody rozkładu ruchu płaskiego



$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

# Ruch złożony



$$\vec{v}_{B2} = \vec{v}_{B1} + \vec{v}_{B2B1}$$

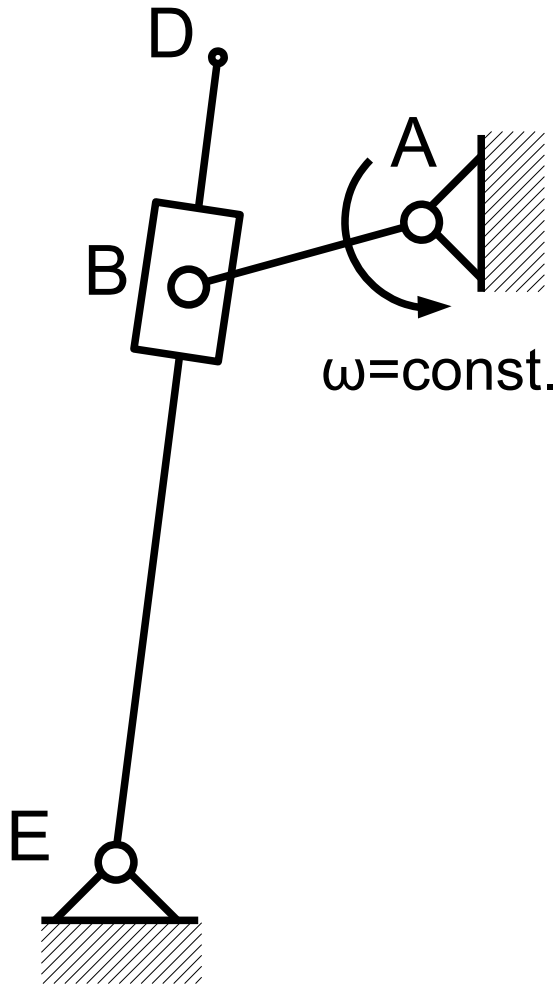
$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B1}^u + \vec{a}_{B2B1}^w + \vec{a}^c$$



# Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

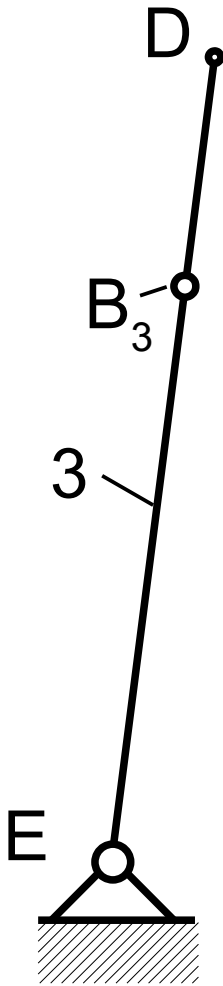
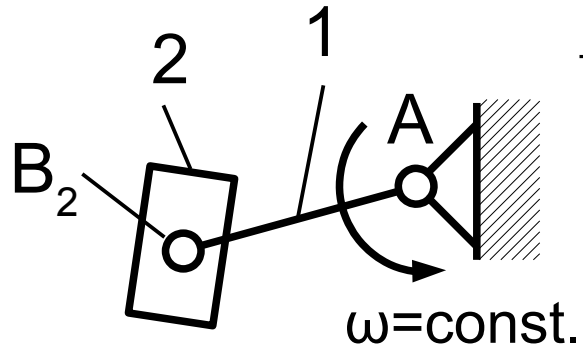
## Przykład

Dane: geometria, prędkość  
kątowna członu napędowego



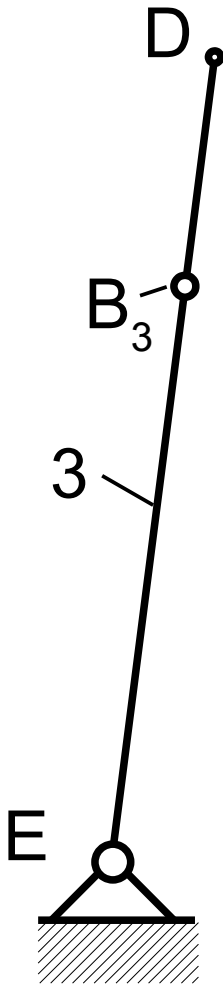
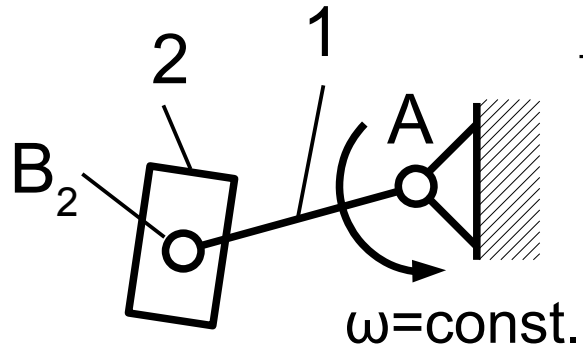
# Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

Przykład



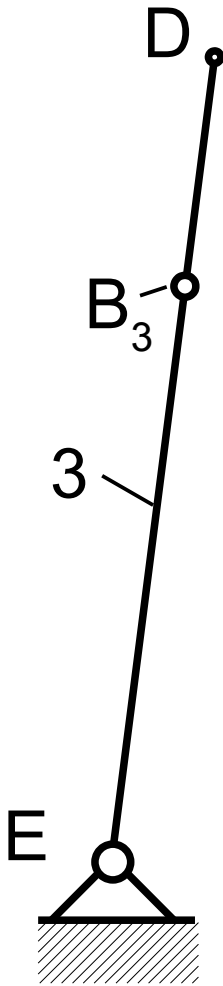
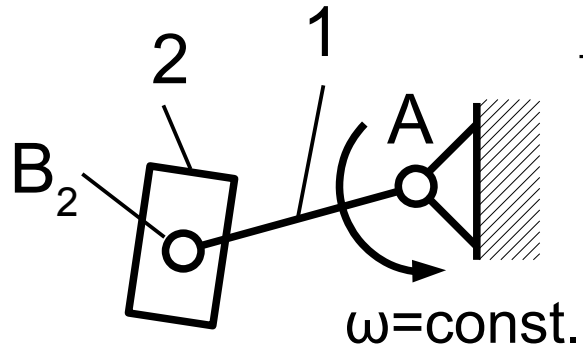
# Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

Przykład



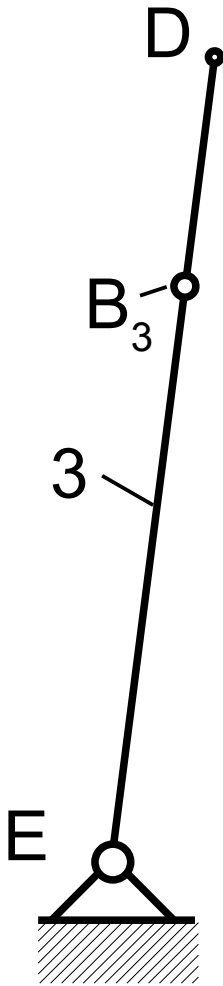
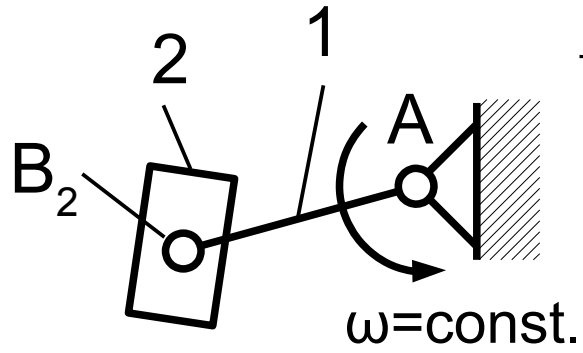
# Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

Przykład



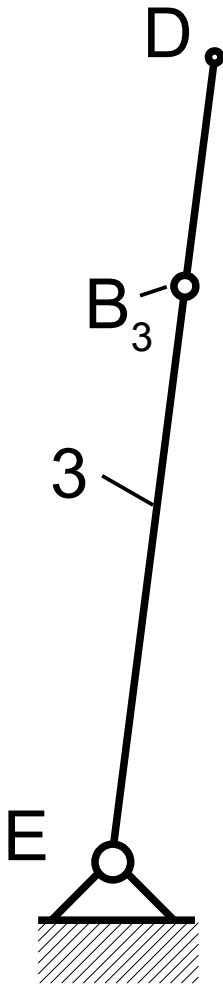
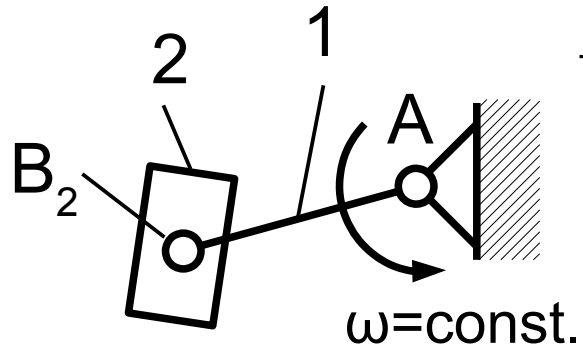
# Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

Przykład



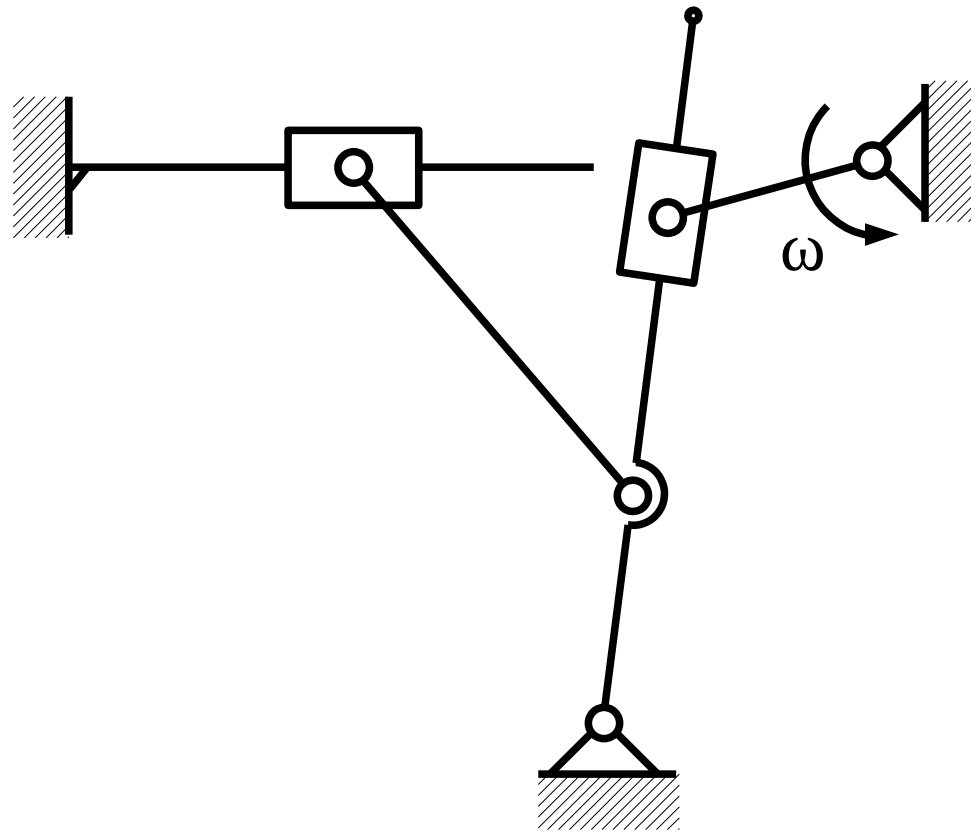
# Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

Przykład



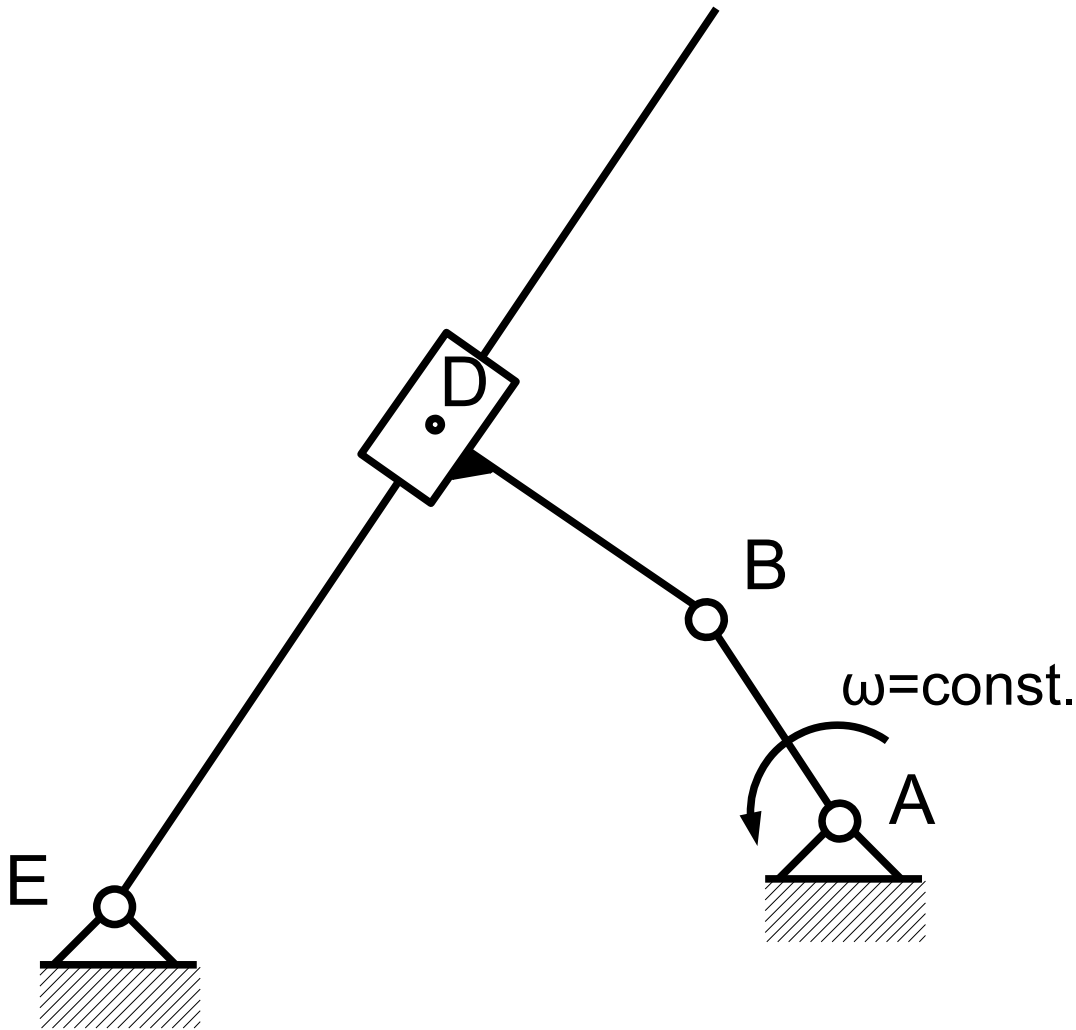
# Prędkości i przyspieszenia

Przykład do projektów – rozwiązany w dodatku 1



# Metoda rozszerzania członu

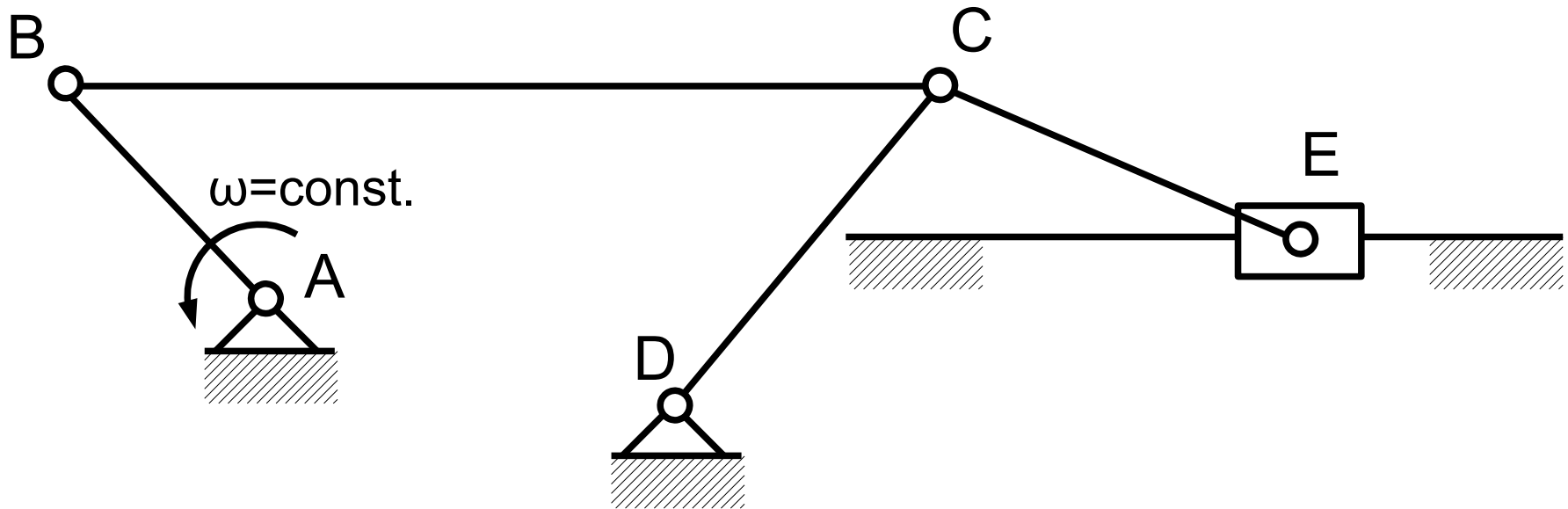
Przykład do projektów – rozwiązany w dodatku 2





# Prędkości i przyspieszenia

Przykład – do ćwiczenia w domu



# Prędkości i przyspieszenia

Przykład – do ćwiczenia w domu

