Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Podstawy automatyki i teorii maszyn

semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 13

Ogólny warunek stabilności.
Kryterium Hurwitza.
Kryterium Nyquista.
Zapas modułu i zapas fazy.
Korekcja układów automatyki.

STABILNOŚĆ UKŁADÓW AUTOMATYKI

Stabilność

W matematyce:

- teoria stabilności
- stabilność metod numerycznych
- stabilność w geometrii teoretycznej

W naukach inżynierskich:

- stabilność wejście-wyjście
- stabilność lotu
- stabilność statków

Stabilność

Teoria stabilności (matematyka) – badanie stabilności rozwiązań równań różniczkowych, czyli ich zachowania przy małych zaburzeniach warunków początkowych

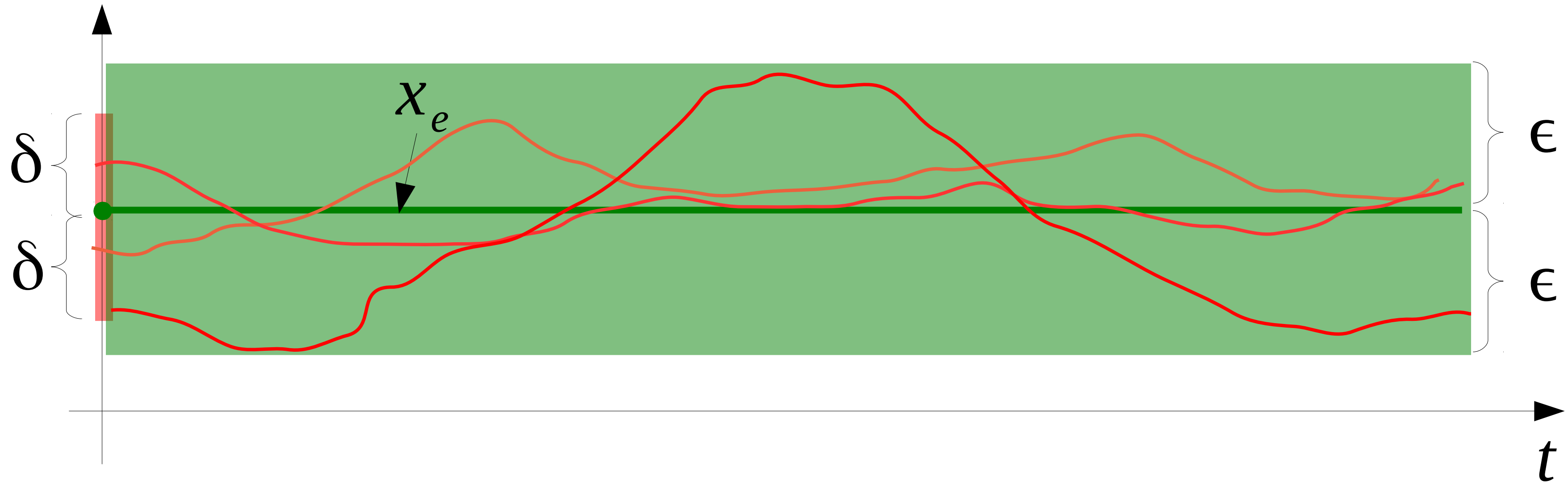
Rodzaje stabilności:

- Lapunowa
- asymptotyczna
- orbitalna
- strukturalna

Stabilność w sensie Lapunowa

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

$f(x_e) = 0,\ x_e$ - położenie równowagi

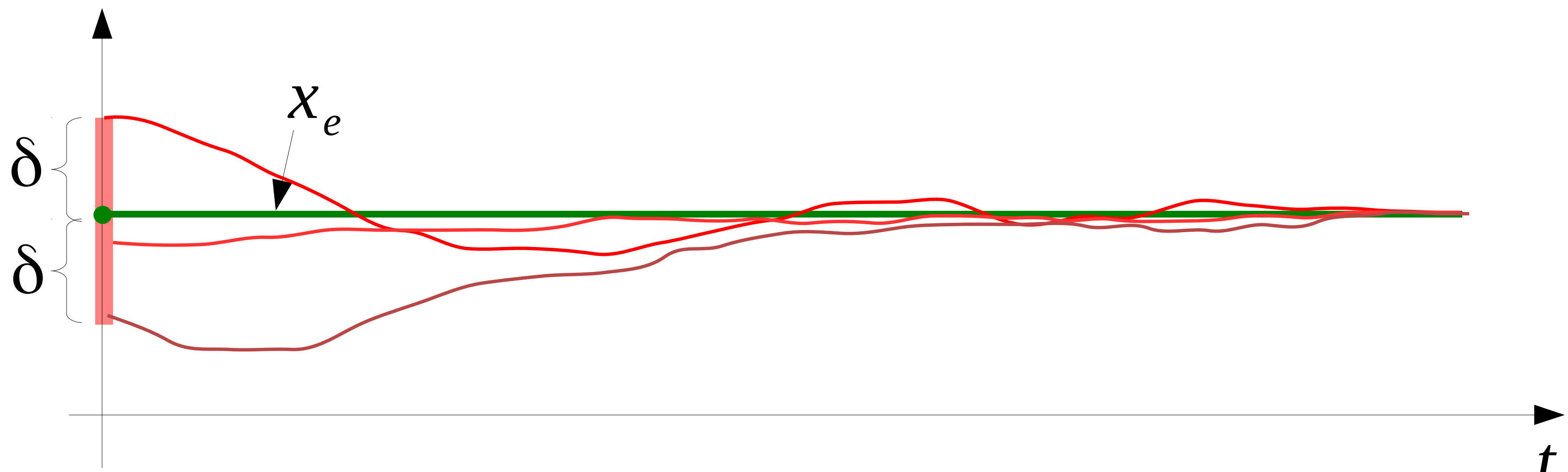


$$\underset{t \geqslant 0}{\forall}\ \underset{\epsilon > 0}{\forall}\ \underset{\delta > 0}{\exists}\quad \text{jeżeli } \|x(0) - x_e\| < \delta, \text{ to } \|x(t) - x_e\| < \epsilon$$

Stabilność asymptotyczna

$$\dot{x}(t)=f(x(t))$$

$f(x_e)=0,\ x_e$ - położenie równowagi



$$\underset{t\geqslant 0}{\forall}\ \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\quad \text{jeżeli } \|x(0)-x_e\|<\delta,\ \text{to } \lim_{t\to\infty}\|x(t)-x_e\|=0$$

Stabilność BIBO

Bounded Input, Bounded Output stability (w teorii sterowania)

Układ liniowy jest BIBO stabilny jeśli jego wyjście pozostaje ograniczone przy ograniczonym wejściu.

$x(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

$$\underset{0<A<\infty}{\exists} \quad \underset{0<B<\infty}{\exists} \quad \underset{t\geqslant 0}{\forall} \quad \text{jeżeli } |x(t)|\leqslant A\text{, to } |y(t)|\leqslant B$$

Kryteria stabilności

Ogólny warunek stabilności

Kryterium Hurwitz

Kryterium Nyquista

Ogólny warunek stabilności

Ogólny warunek stabilności

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1}$$

biegun transmitancji

Wymuszenie impulsowe: $x(t)=\delta(t),\ X(s)=1$

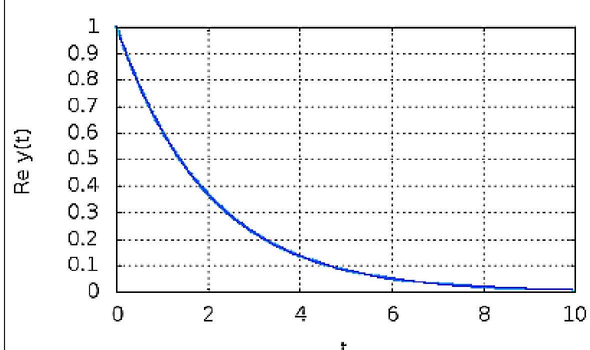
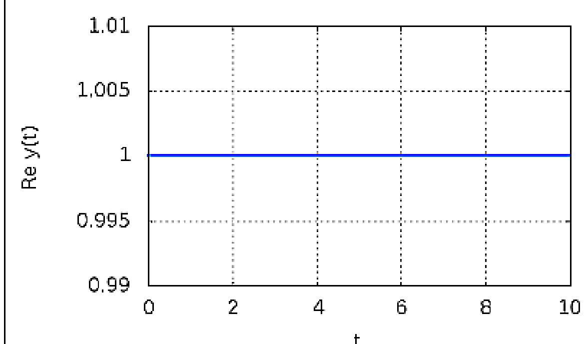
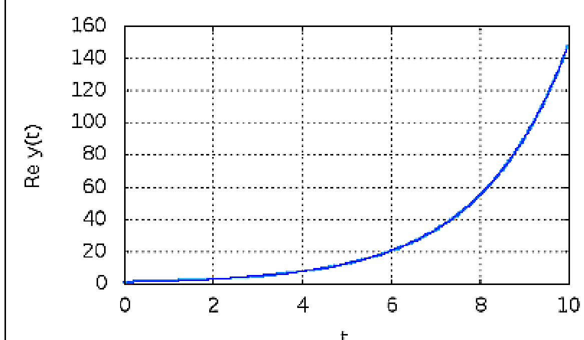
Odpowiedź impulsowa: $y(t)=L^{-1}\{x(s)G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_1}\right\}=e^{p_1 t}$

$$y(t)=e^{(a_1+j b_1)t}=e^{a_1 t}e^{j b_1 t}=e^{a_1 t}\left(\cos b_1 t+j\sin b_1 t\right)$$

$$\mathrm{Re}\, y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t$$

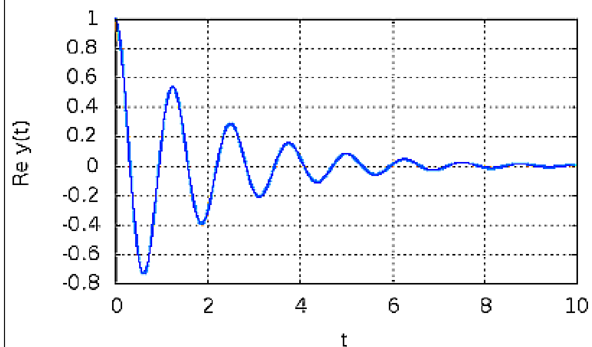
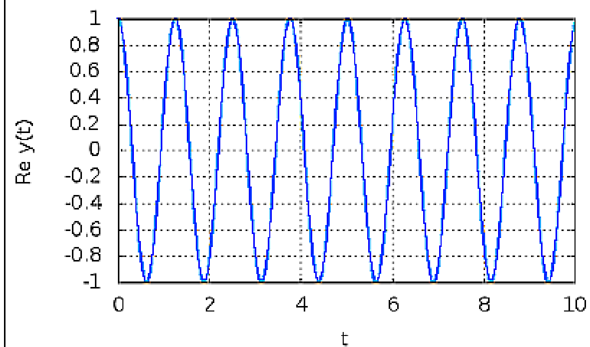
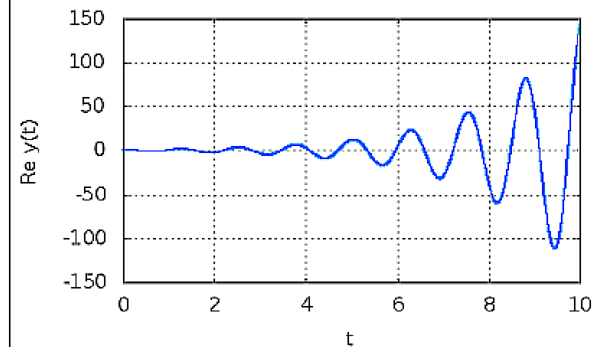
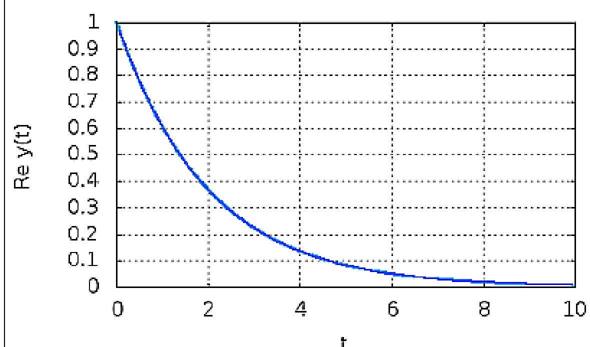
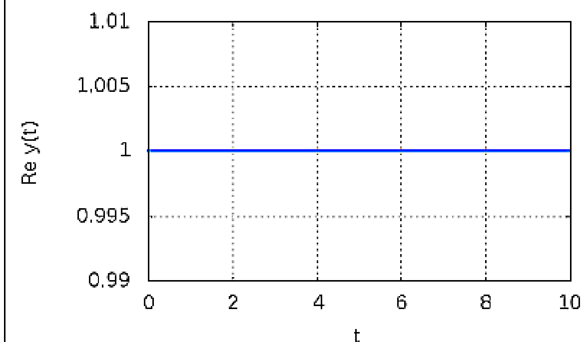
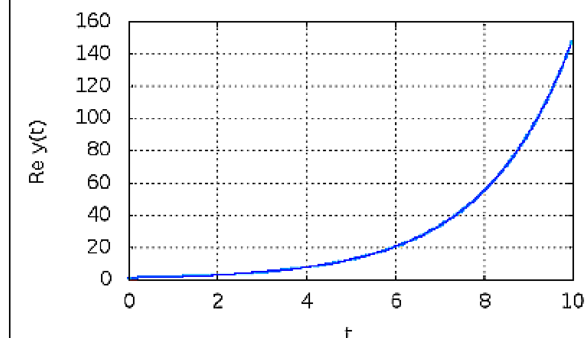
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1} \qquad y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t$$

$$\mathrm{Re}(p_1)=a_1$$
$$\mathrm{Im}(p_1)=b_1$$

<table>
<tr><td></td><td>$a_1<0$</td><td>$a_1=0$</td><td>$a_1>0$</td></tr>
<tr><td>$b_1>0$
$b_1<0$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$b_1=0$</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

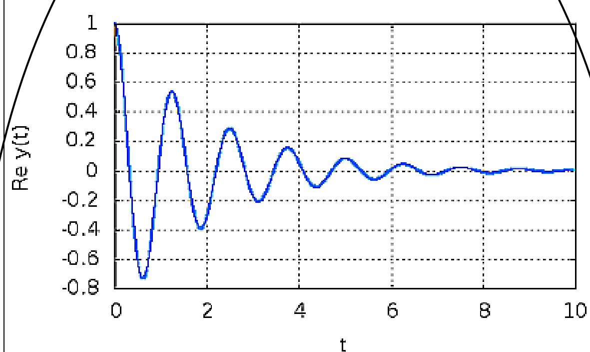
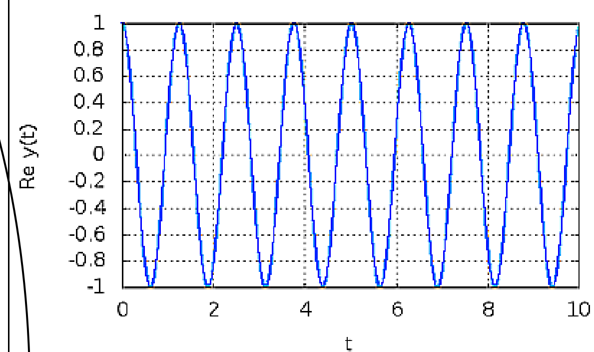
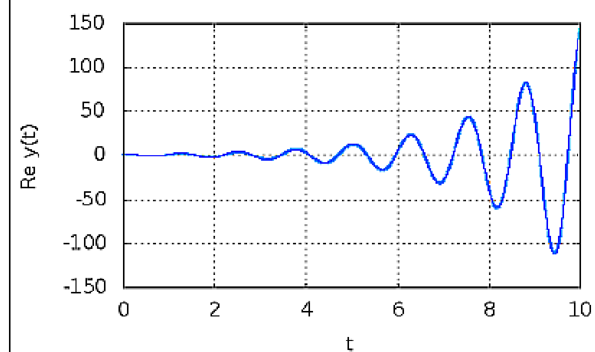
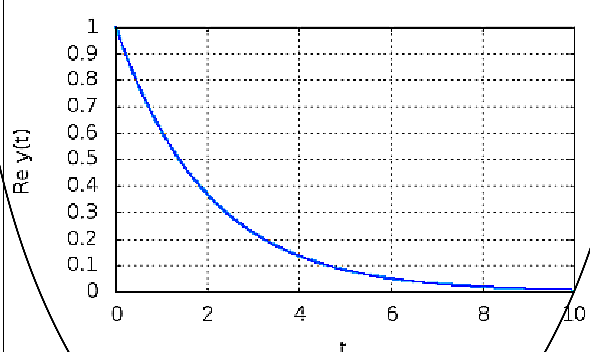
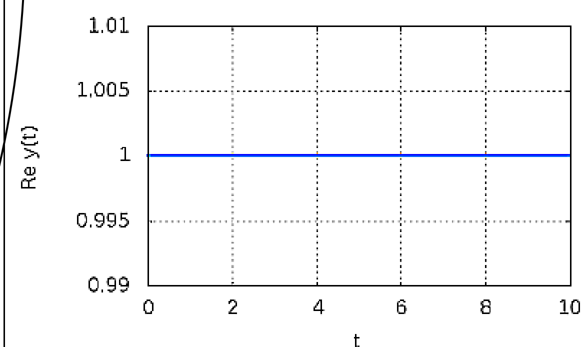
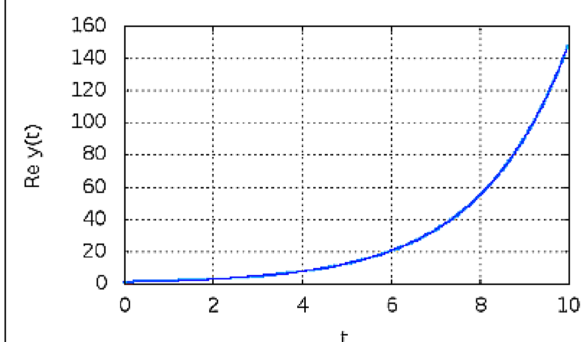
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1} \qquad y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t$$

$$\mathrm{Re}(p_1)=a_1$$
$$\mathrm{Im}(p_1)=b_1$$

	$a_1<0$	$a_1=0$	$a_1>0$
$b_1>0$ $b_1<0$			
$b_1=0$			

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1} \qquad y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t$$

$$\mathrm{Re}(p_1)=a_1$$
$$\mathrm{Im}(p_1)=b_1$$

	$a_1<0$	$a_1=0$	$a_1>0$
$b_1>0$ $b_1<0$			
$b_1=0$			

stabilne asymptotycznie $\mathrm{Re}(p_1)<0$

Ogólny warunek stabilności – definicja

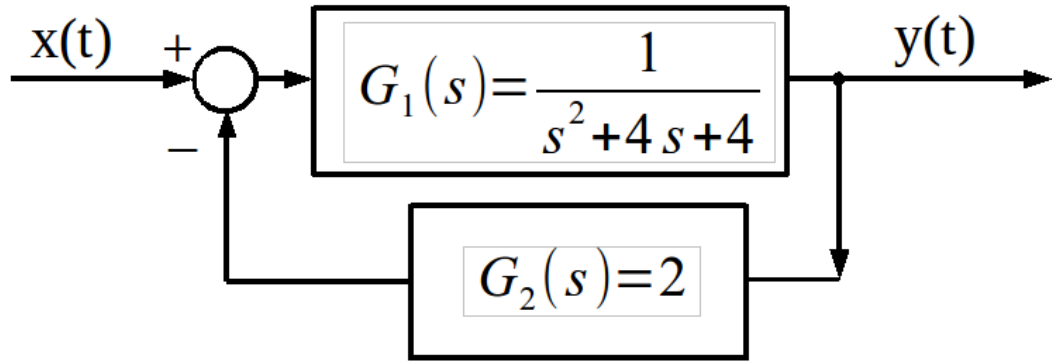
Układ liniowy o jednym wejściu i jednym wyjściu jest stabilny, jeśli części rzeczywiste wszystkich biegunów jego transmitancji są mniejsze od zera.

$$G(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$$\mathrm{Re}\, p_1<0 \ \wedge\ \mathrm{Re}\, p_2<0 \ \wedge\dots\wedge\ \mathrm{Re}\, p_n<0$$

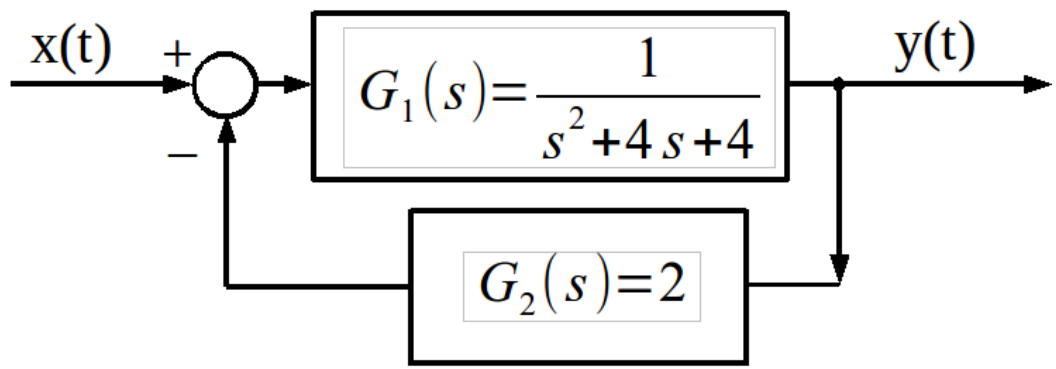
Przykład 1

Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności



Przykład 1

Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności



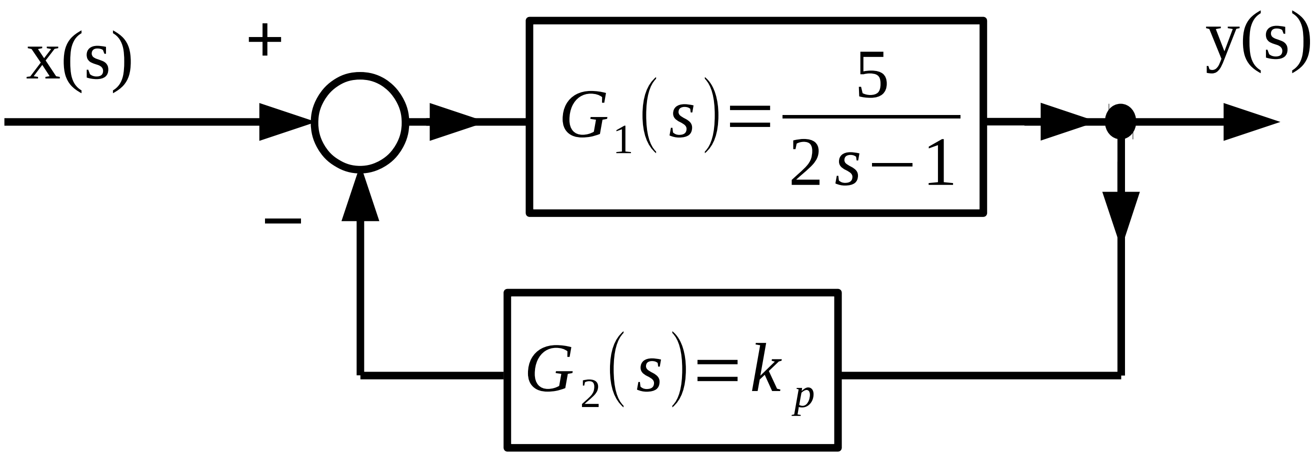
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{1}{s^2+4s+6}=\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$p_1=-2-2\sqrt{2}\,j\,,\quad p_2=-2+\sqrt{2}\,j$$

$$\Re(p_1)<0\ \wedge\ \Re(p_2)<0\ \Rightarrow$$ układ jest stabilny z ogólnego warunku stabilności

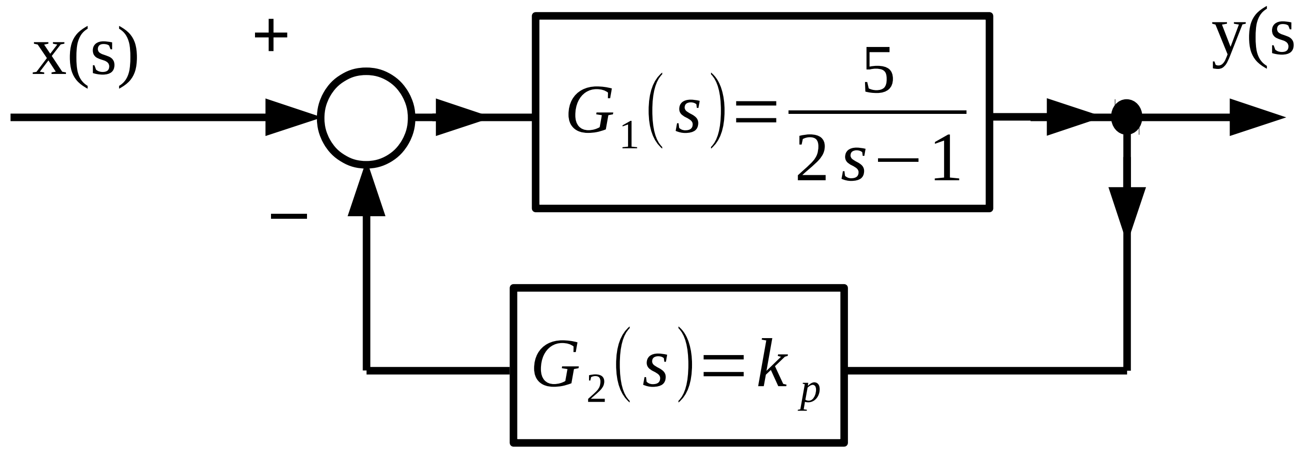
Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



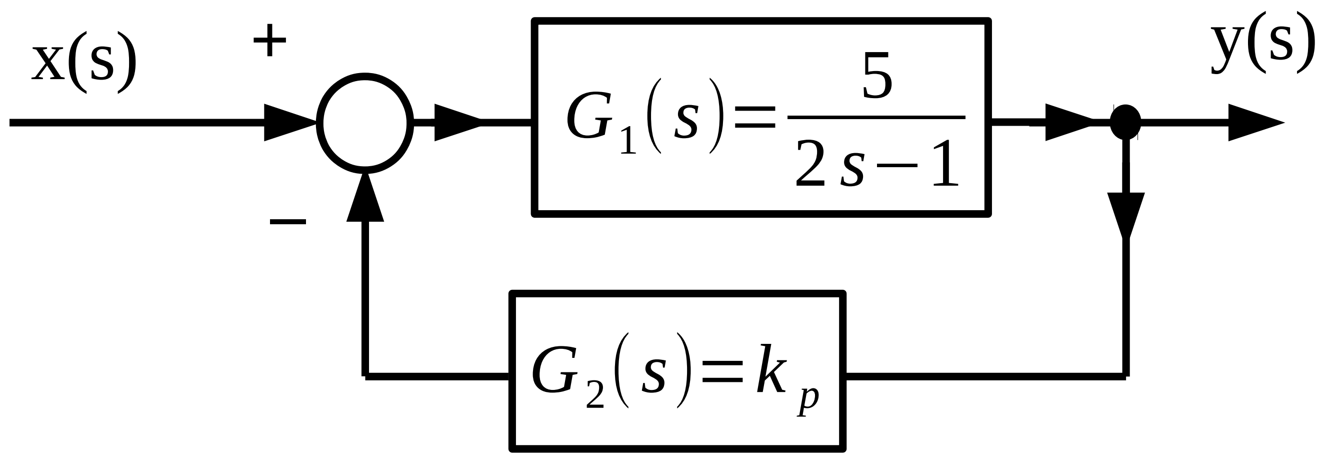
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



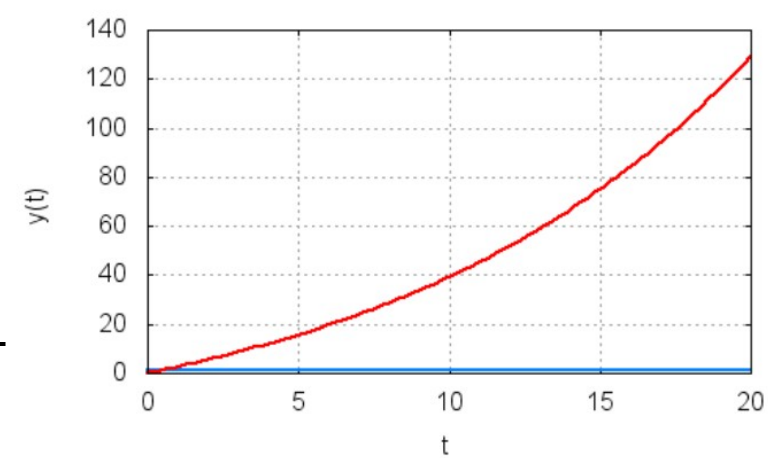
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

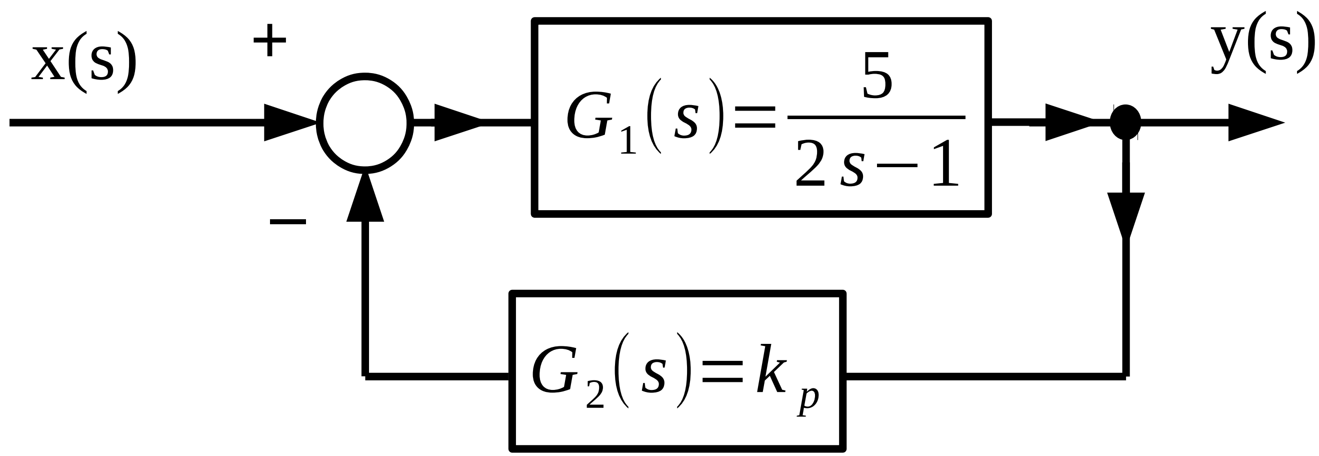
Odp. na wymuszenie skokowe:

$k_p=\frac{1}{6}$ (układ niestabilny)



Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



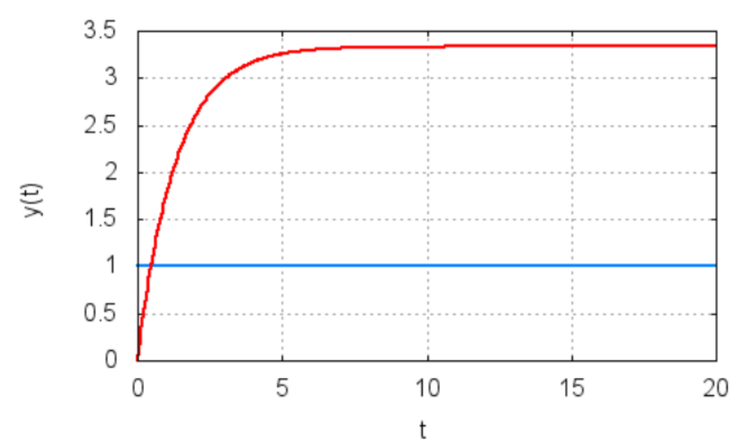
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

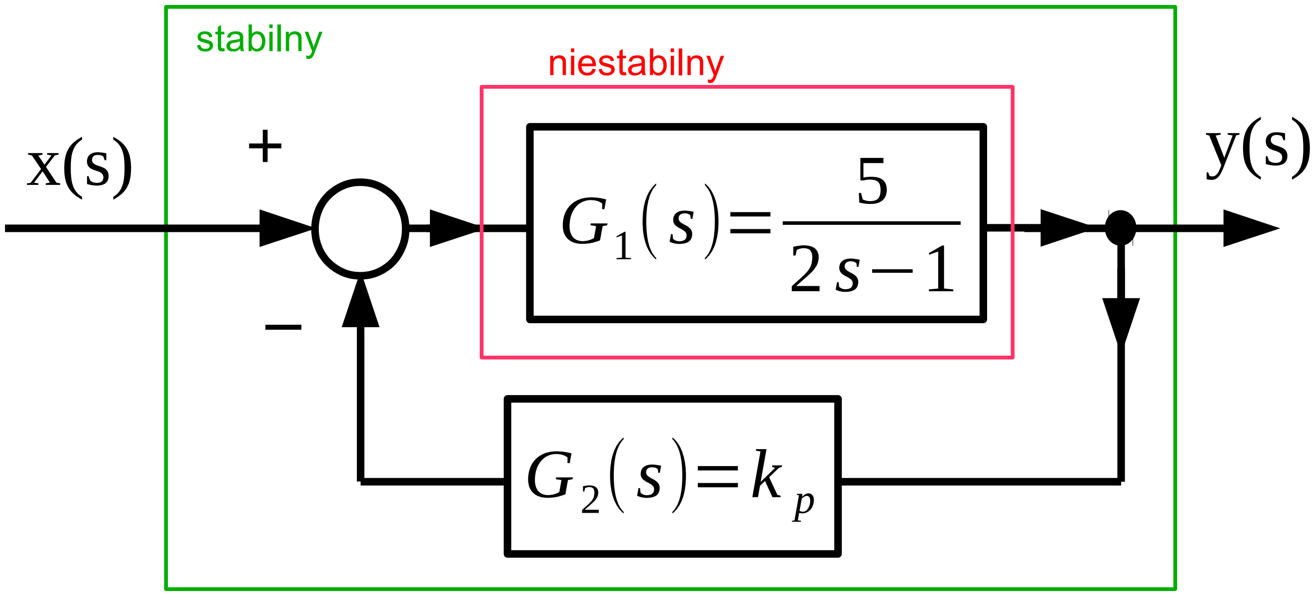
Odp. na wymuszenie skokowe:

$k_p=\frac{1}{2}$ (układ stabilny)



Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

Kryterium Hurwitza

W matematyce

Warunek konieczny i wystarczający na położenie wszystkich pierwiastków wielomianu w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej

W teorii sterowania

Warunek konieczny i wystarczający na ujemną część rzeczywistą wszystkich biegunów transmitancji operatorowej obiektu

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1} s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1} s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

1 $a_n>0\,,\ \ a_{n-1}>0\,,\ \ \ldots\,,\ \ a_1>0\,,\ \ a_0>0$

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

1 $a_n>0,\ a_{n-1}>0,\ \ldots,\ a_1>0,\ a_0>0$

2

Macierz Hurwitza

$$M_{nxn}=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

1. $a_n>0,\ \ a_{n-1}>0,\ \ \ldots,\ \ a_1>0,\ \ a_0>0$

2. $\Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_{n-1}$

$$M_{nxn}=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Δ_i *- wiodące minory główne i-tego rzędu macierzy Hurwitza*

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

1 $a_n > 0,\ \ a_{n-1} > 0,\ \ \ldots,\ \ a_1 > 0,\ \ a_0 > 0$

2 $\det \Delta_2 > 0$

$\det \Delta_3 > 0$

$\ldots$

$\det \Delta_{n-1} > 0$

Δ_2 Δ_3 Δ_{n-1}

$$M_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Δ_i *- wiodące minory główne i-tego rzędu macierzy Hurwitza*

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

sprawdzamy od n>2

nie sprawdzamy det Δ_n bo: $\det \Delta_n = a_0 \det \Delta_{n-1}$

1. $a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \ldots, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

2. $\det \Delta_2 > 0$

   $\det \Delta_3 > 0$

   $\ldots$

   $\det \Delta_{n-1} > 0$

$$M_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Δ_2, Δ_3, Δ_{n-1}

Δ_i *- wiodące minory główne i-tego rzędu macierzy Hurwitza*

Kryterium Hurwitza – definicja

Macierz Hurwitza

$$M_{nxn}=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitza

n	*G(s)*	*Warunki stabilności*
1	$\dfrac{L(s)}{a_1 s+a_0}$	$a_1>0\,,\ \ a_0>0$
2	$\dfrac{L(s)}{a_2 s^2+a_1 s+a_0}$	$a_2>0\,,\ \ a_1>0\,,\ \ a_0>0$
3	$\dfrac{L(s)}{a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0}$	$a_3>0\,,\ \ a_2>0\,,\ \ a_1>0\,,\ \ a_0>0$ $\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix}>0$
4	$\dfrac{L(s)}{a_4 s^4+a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0}$	$a_4>0\,,\ a_3>0\,,\ a_2>0\,,\ a_1>0\,,\ a_0>0$ $\det\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}>0$ $\quad \det\begin{bmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{bmatrix}>0$

Kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza ≠ Kryterium Routh’a
(1895) (1876)

Kryterium Liénard’a–Chipart’a – modyfikacja kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza

Przykład 1

$$G(s)=\frac{5s+3}{10s^2+3s+1}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 2

$$G(s)=\frac{2s}{2s^3+s+20}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 3

$$G(s)=\frac{3s-5}{s^3+4s^2+3s+10}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 4

$$G(s)=\frac{1}{3s^4+4s^3+6s^2+4s+5}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 5

Dobrać parametr k aby spełnić kryterium Hurwitza

$$\frac{k\,s}{4\,s^3+3\,s^2+k\,s+1}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 6

Dobrać parametr k aby spełnić kryterium Hurwitza

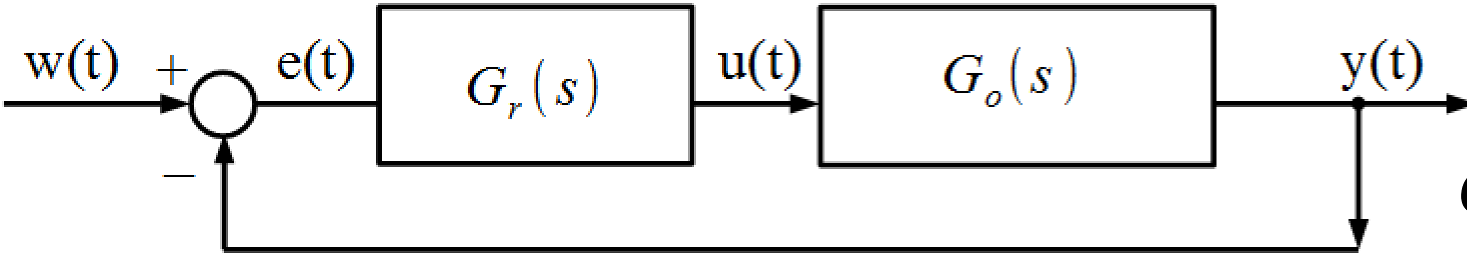
$$\frac{2}{2s^3+ks^2+(1+k)s+3}$$

Do samodzielnego rozwiązania

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



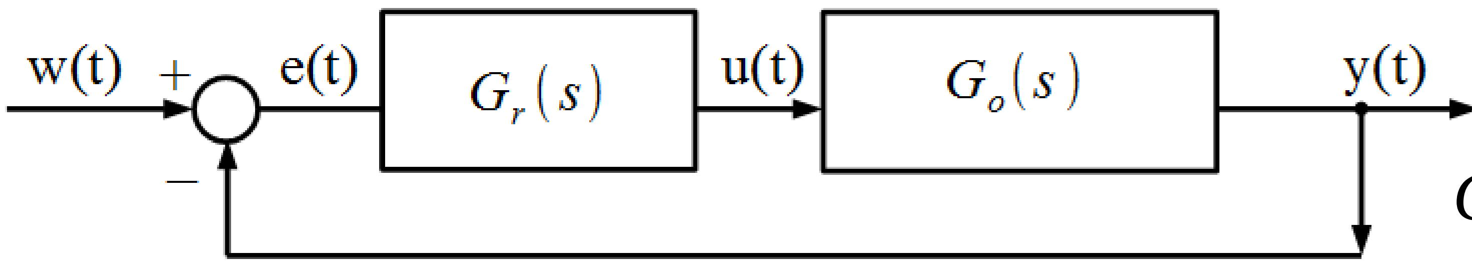
$$G_r(s)=\frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_r(s)=\frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

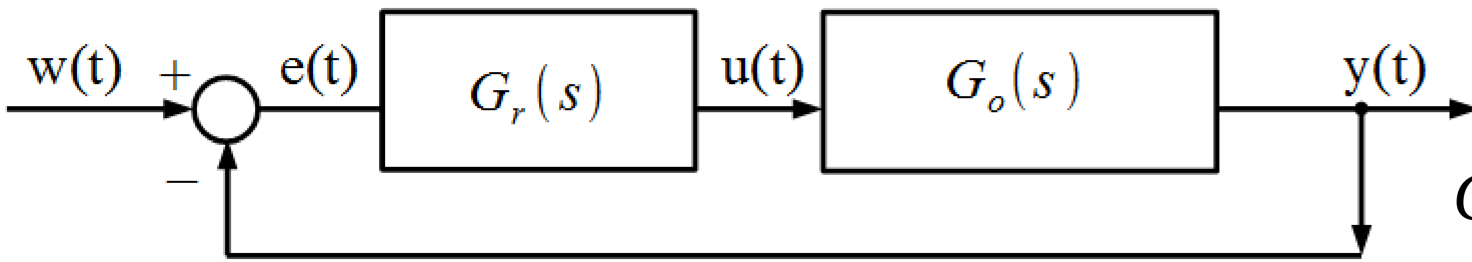
$$G_z(s)=\frac{G_r G_o}{1+G_r G_o}=\frac{4s}{a_4 s^4+a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0}$$

$$a_4=T\ ,\ a_3=2T+1,$$
$$a_2=T+2\ ,\ a_1=T+5\ ,\ a_0=1$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_r(s)=\frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

$$G_z(s)=\frac{G_r G_o}{1+G_r G_o}=\frac{4s}{a_4 s^4+a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0}$$

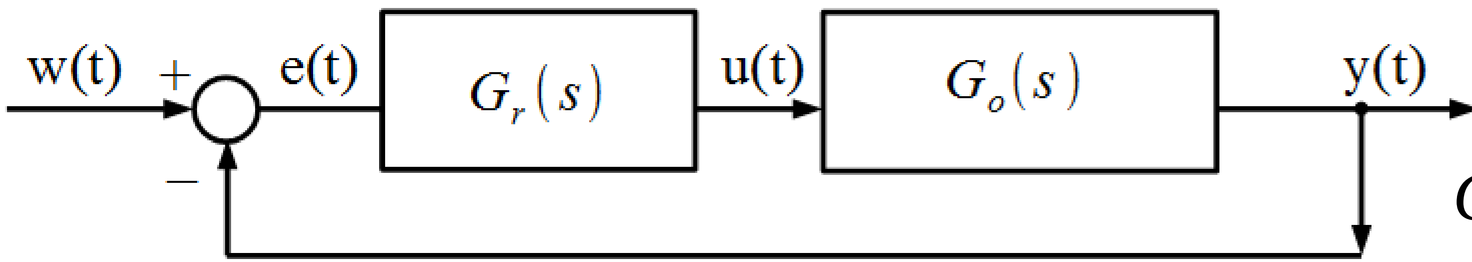
$a_4=T\ ,\ a_3=2T+1,$
$a_2=T+2\ ,\ a_1=T+5\ ,\ a_0=1$

$a_4>0\ ,\ a_3>0\ ,\ a_2>0\ ,\ a_1>0\ ,\ a_0>0 \rightarrow T>0$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_r(s)=\frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

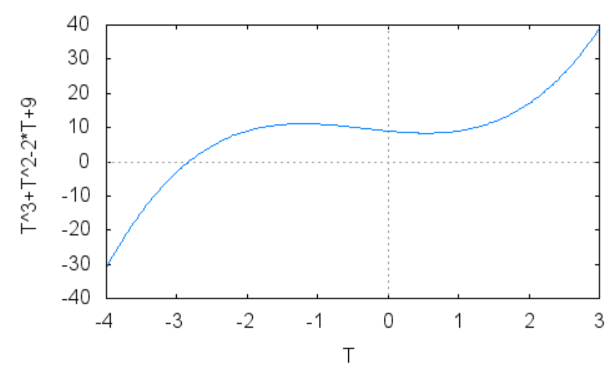
$$G_z(s)=\frac{G_r G_o}{1+G_r G_o}=\frac{4s}{a_4 s^4+a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0}$$

$$a_4=T\,,\ a_3=2T+1,$$
$$a_2=T+2\,,\ a_1=T+5\,,\ a_0=1$$

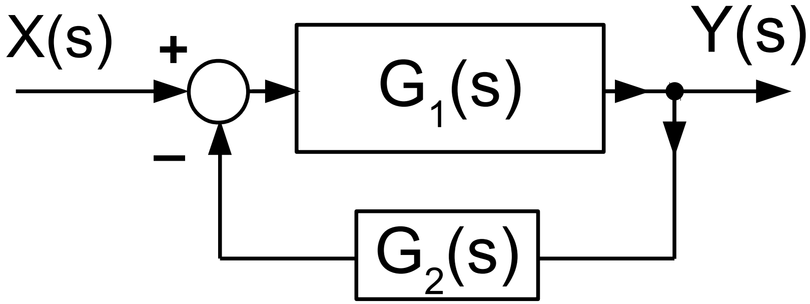
$$a_4>0\,,\ a_3>0\,,\ a_2>0\,,\ a_1>0\,,\ a_0>0\ \rightarrow\ T>0$$

$$\Delta_2=\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}=T^2+2>0\quad T\in\mathbb{R}$$

$$\Delta_3=\begin{bmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{bmatrix}=T^3+T^2-2T+9>0\ \rightarrow\ T>-2.83$$

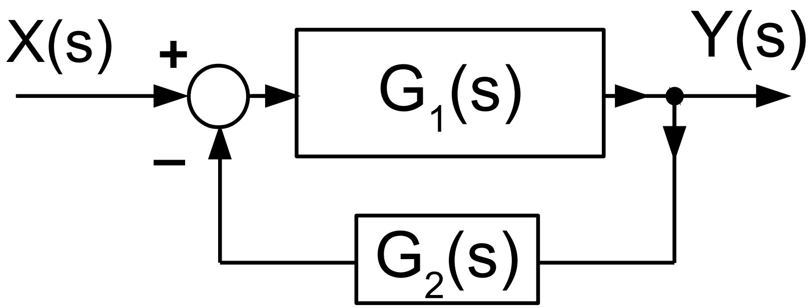


Kryterium Nyquista – idea



$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

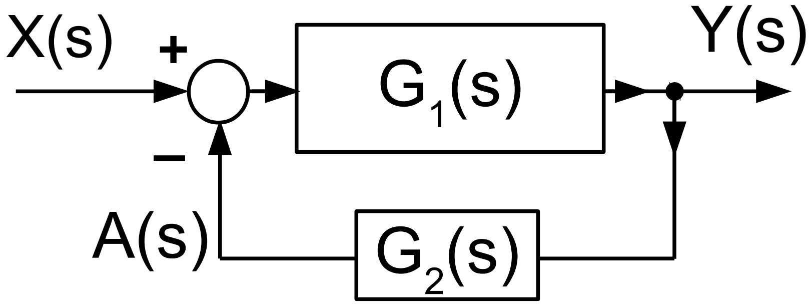
Kryterium Nyquista – idea



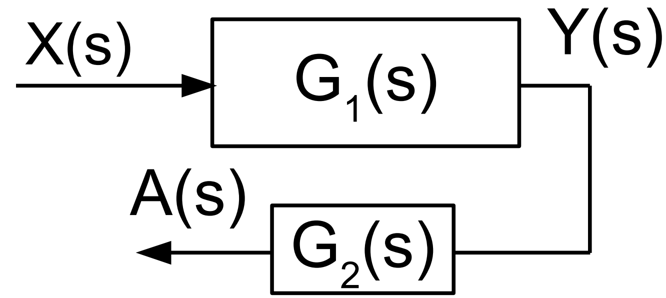
$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s) G_2(s)}$$

Niestabilny, gdy: $G_1 G_2 = -1$

Kryterium Nyquista – idea



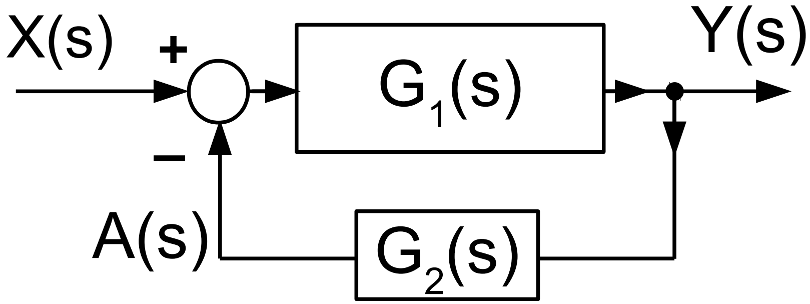
$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$



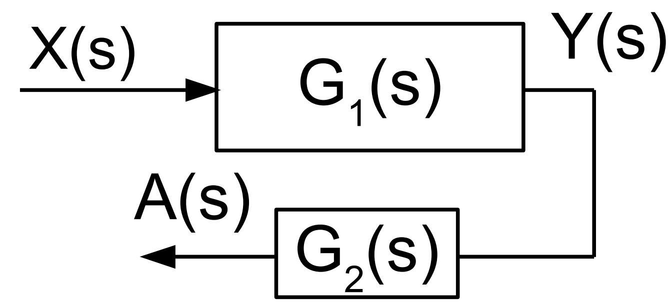
$$G_{otw}(s) = \frac{A(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

Niestabilny, gdy: $\boxed{G_1 G_2} = -1$

Kryterium Nyquista – idea

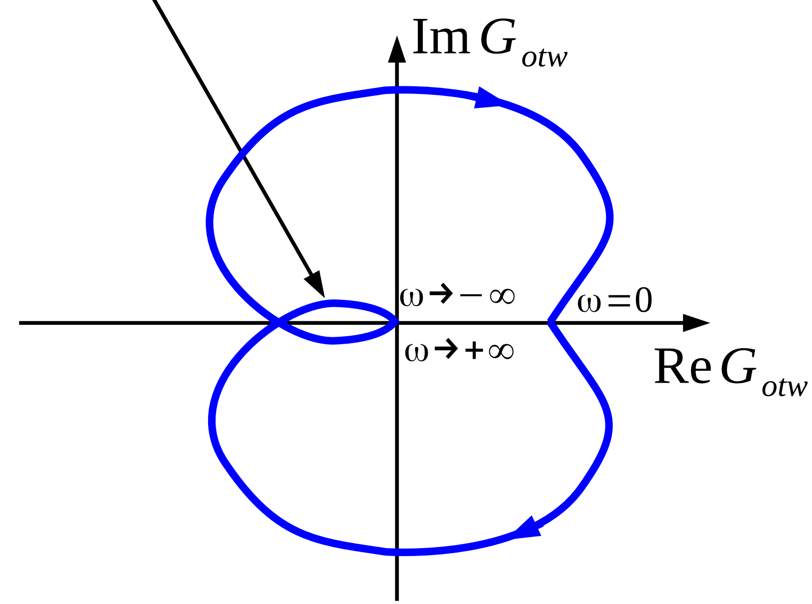


$$G_z(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

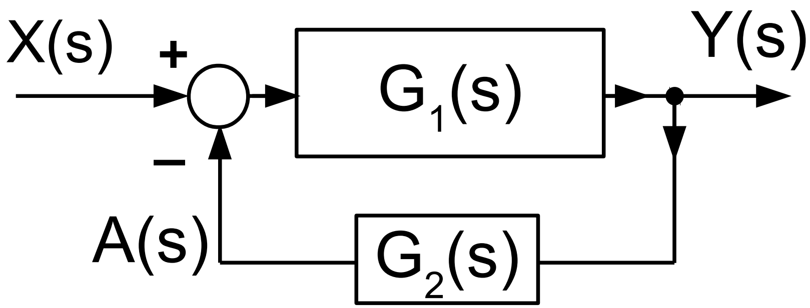


$$G_{otw}(s)=\frac{A(s)}{X(s)}=G_1(s)G_2(s)$$

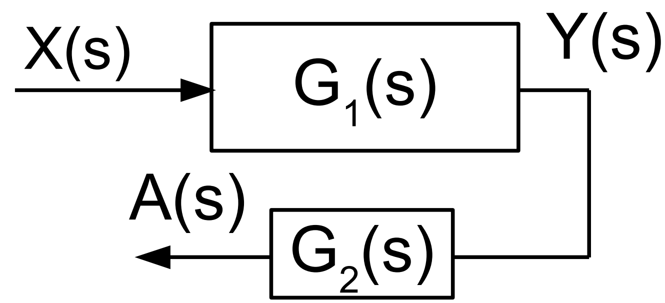
Niestabilny, gdy: $\boxed{G_1 G_2} = -1$



Kryterium Nyquista – idea

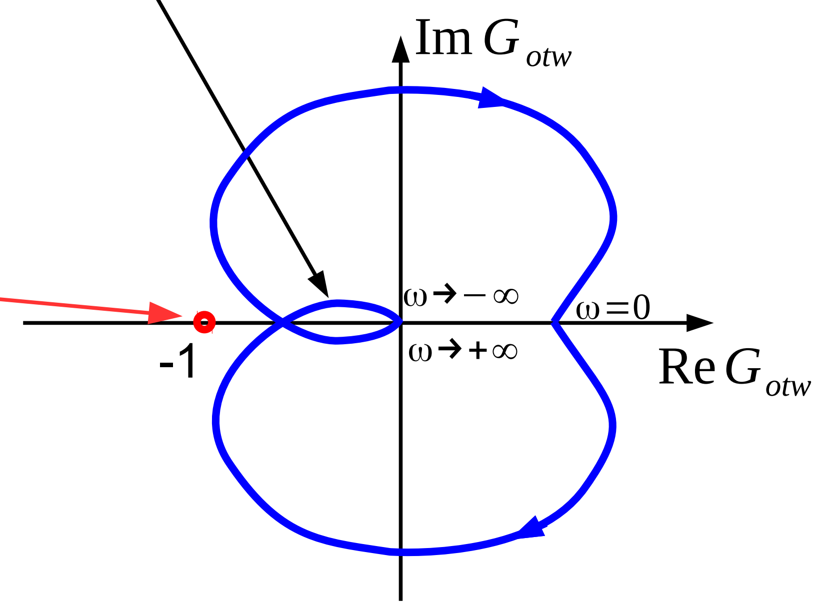


$$G_z(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$



$$G_{otw}(s)=\frac{A(s)}{X(s)}=G_1(s)G_2(s)$$

Niestabilny, gdy: $\boxed{G_1 G_2} = \boxed{-1}$



Kryterium Nyquista – idea

animacja

Kryterium Nyquista (szczególne) – definicja

Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:
1) układ otwarty jest stabilny i
2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu (-1,j0).
// punkt (-1,j0) jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //

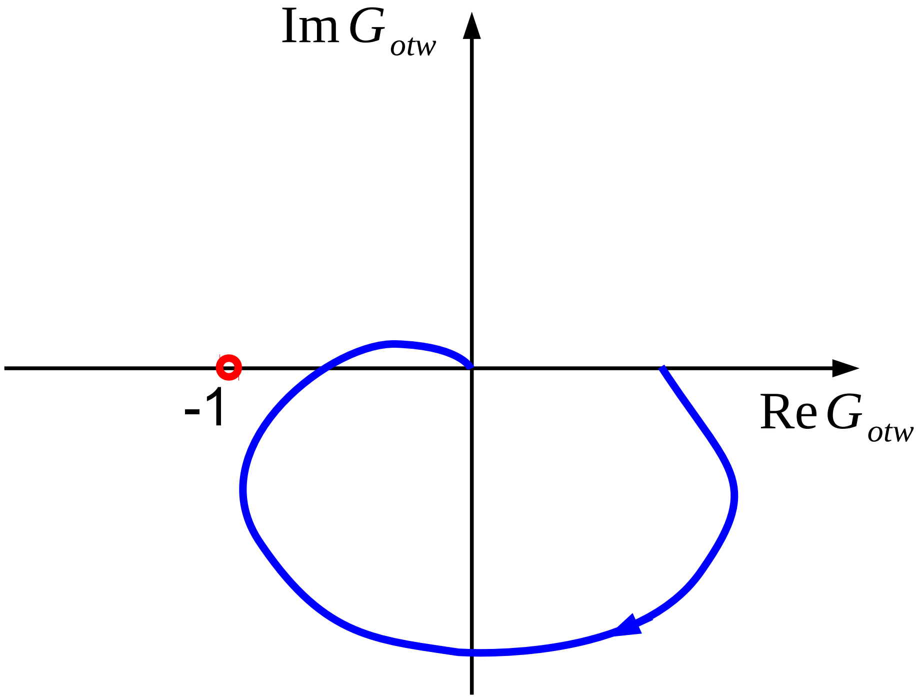
Kryterium Nyquista (szczególne) – definicja

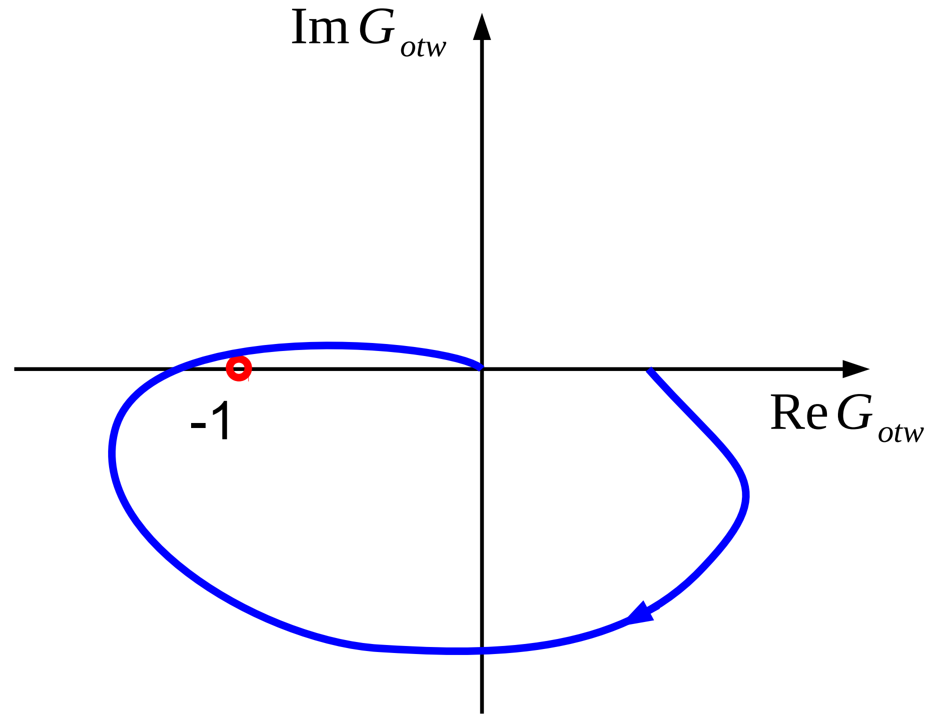
Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:

1) układ otwarty jest stabilny i

2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu (-1,j0).

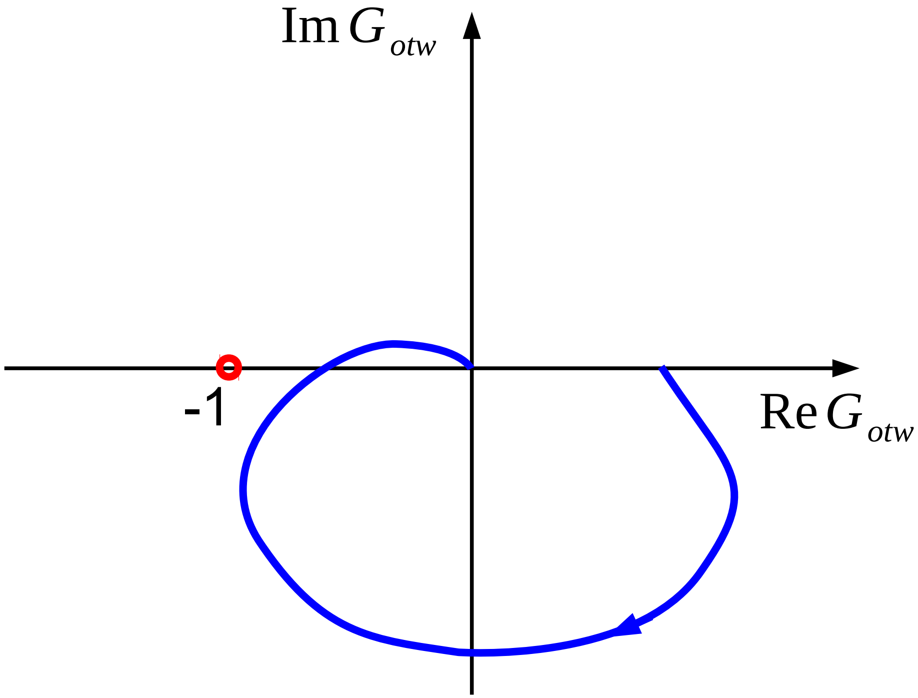
// punkt (-1,j0) jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //



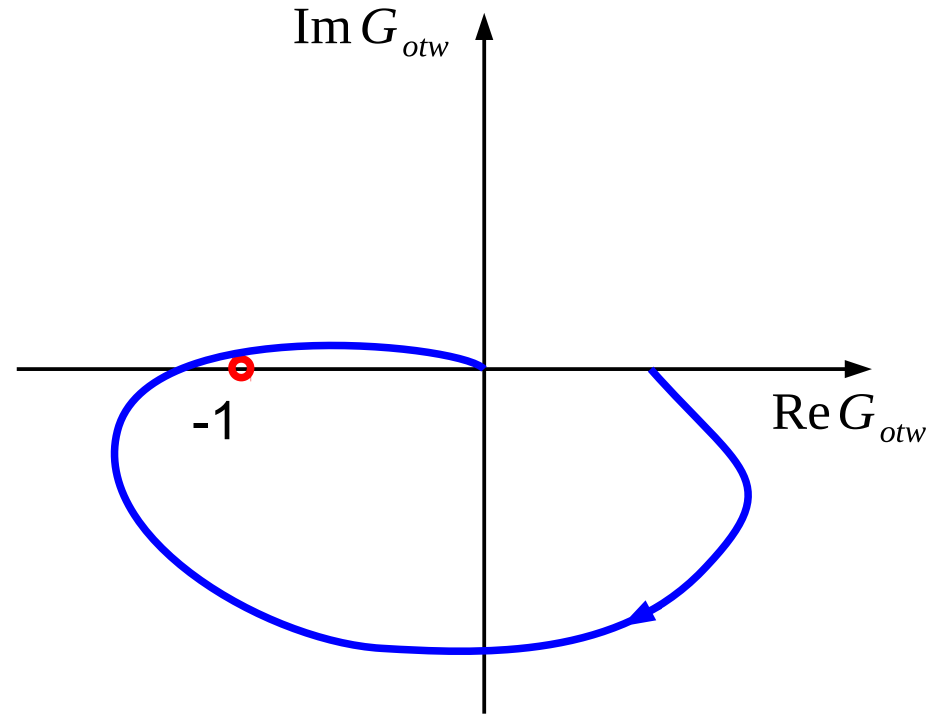


Kryterium Nyquista (szczególne) – definicja

Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:
1) układ otwarty jest stabilny i
2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu (-1,j0).
// punkt (-1,j0) jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //



układ
zamknięty
stabilny

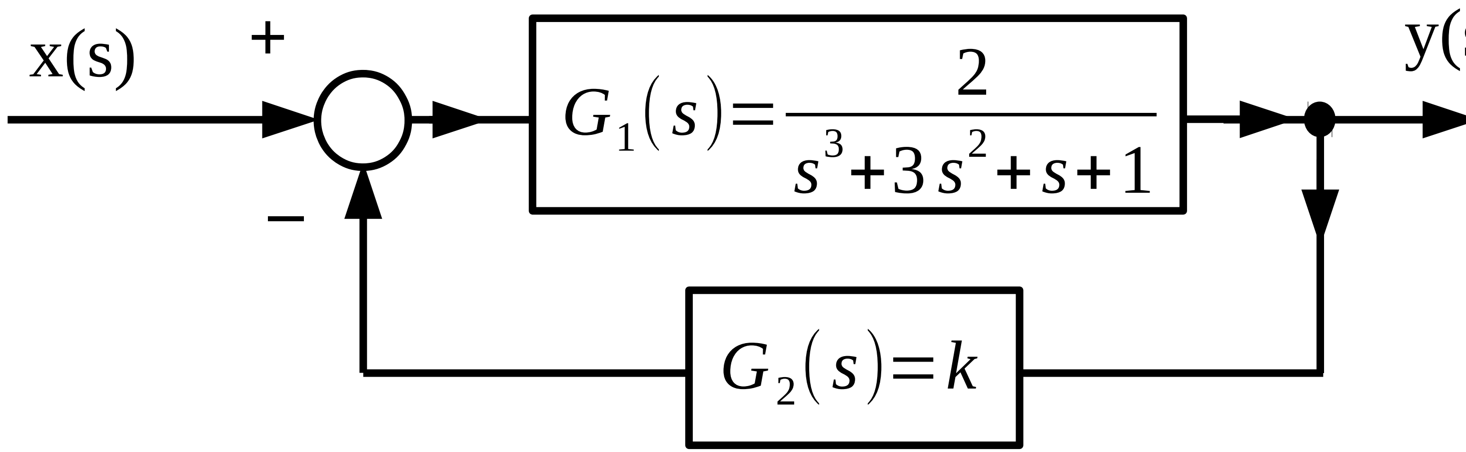


układ
zamknięty
niestabilny

Kryterium Nyquista

Przykład 8

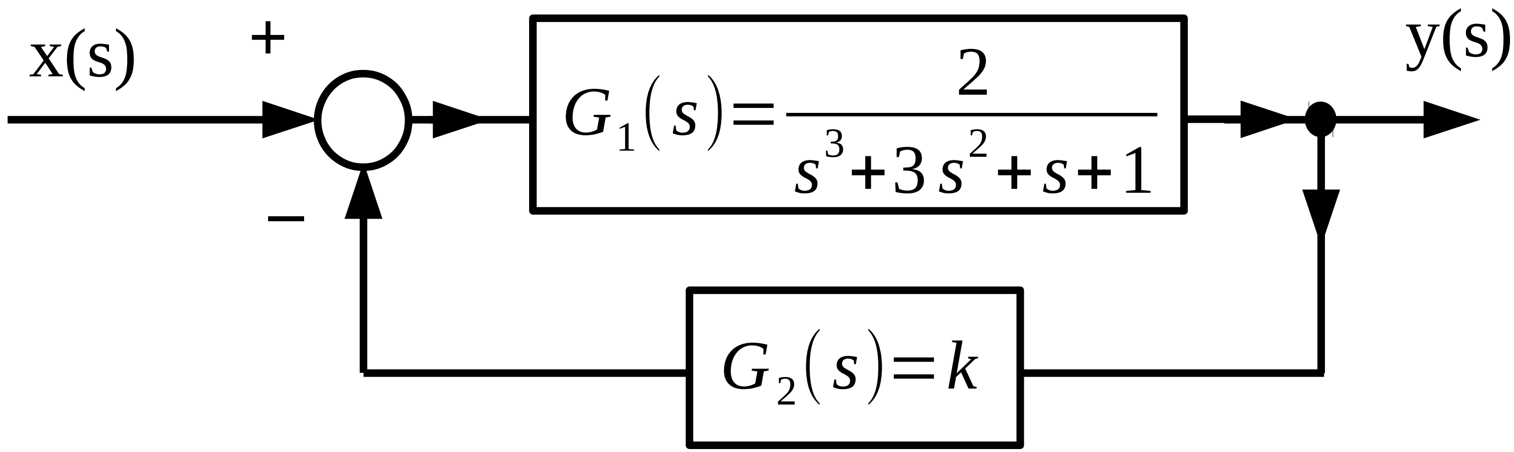
Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista



Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista

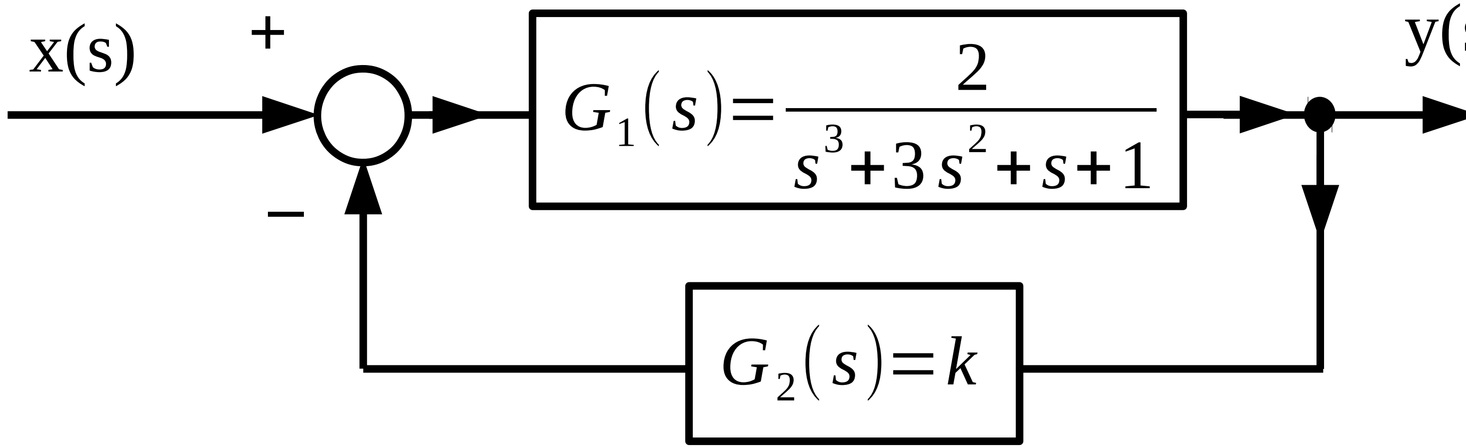


$$G_{otw}(s)=G_1G_2=\frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista

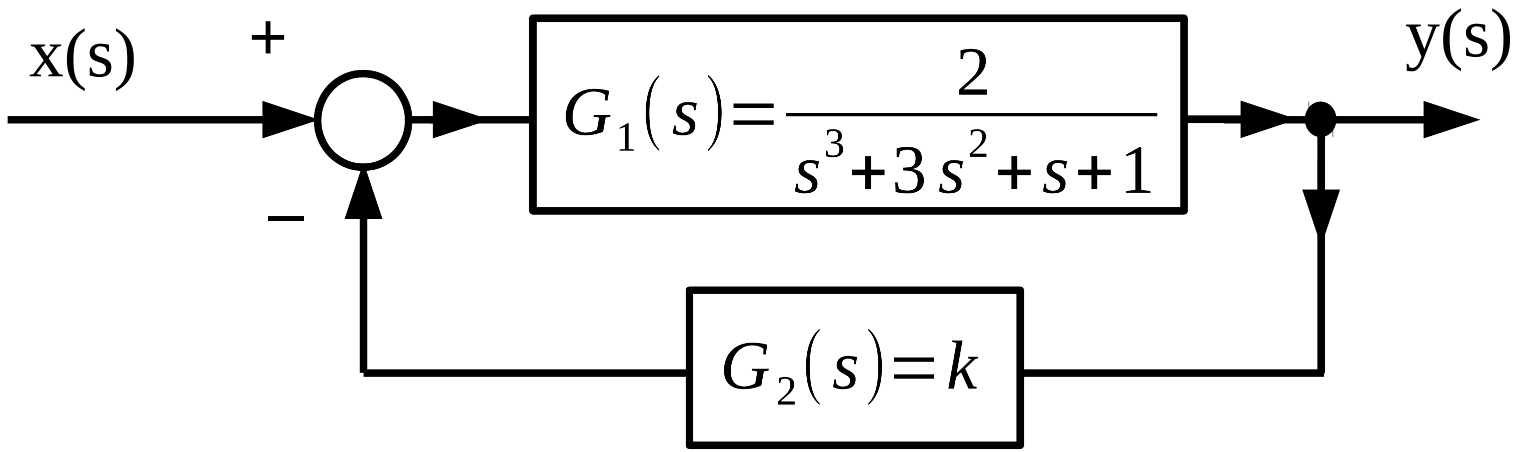


$$G_{otw}(s)=G_1 G_2=\frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$$ - stabilny z kryterium Hurwitza

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista



$$G_{otw}(s)=G_1G_2=\frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$$ - stabilny z kryterium Hurwitza

$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

Kryterium Nyquista

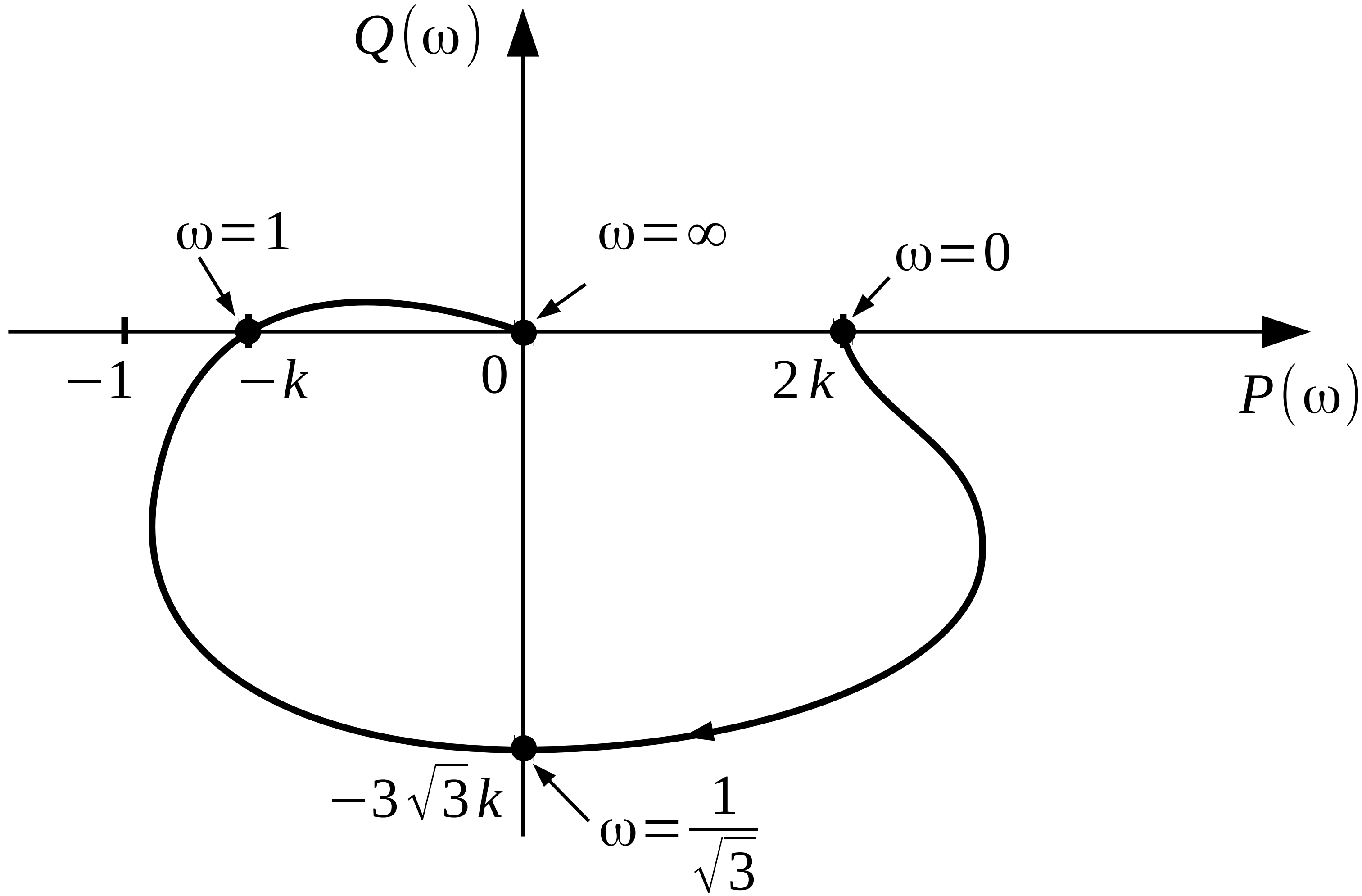
Przykład 8

$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

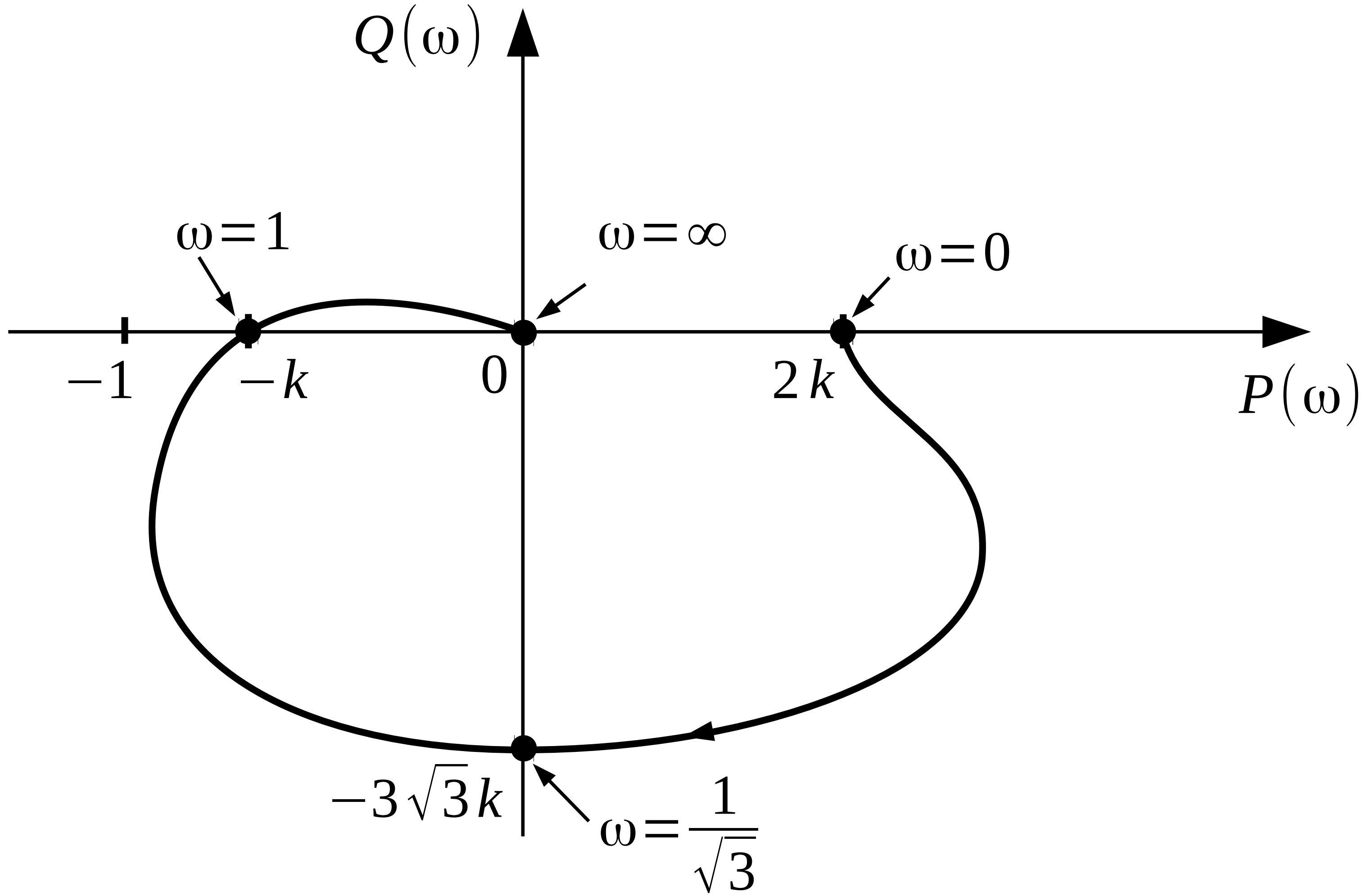
$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$



Kryterium Nyquista

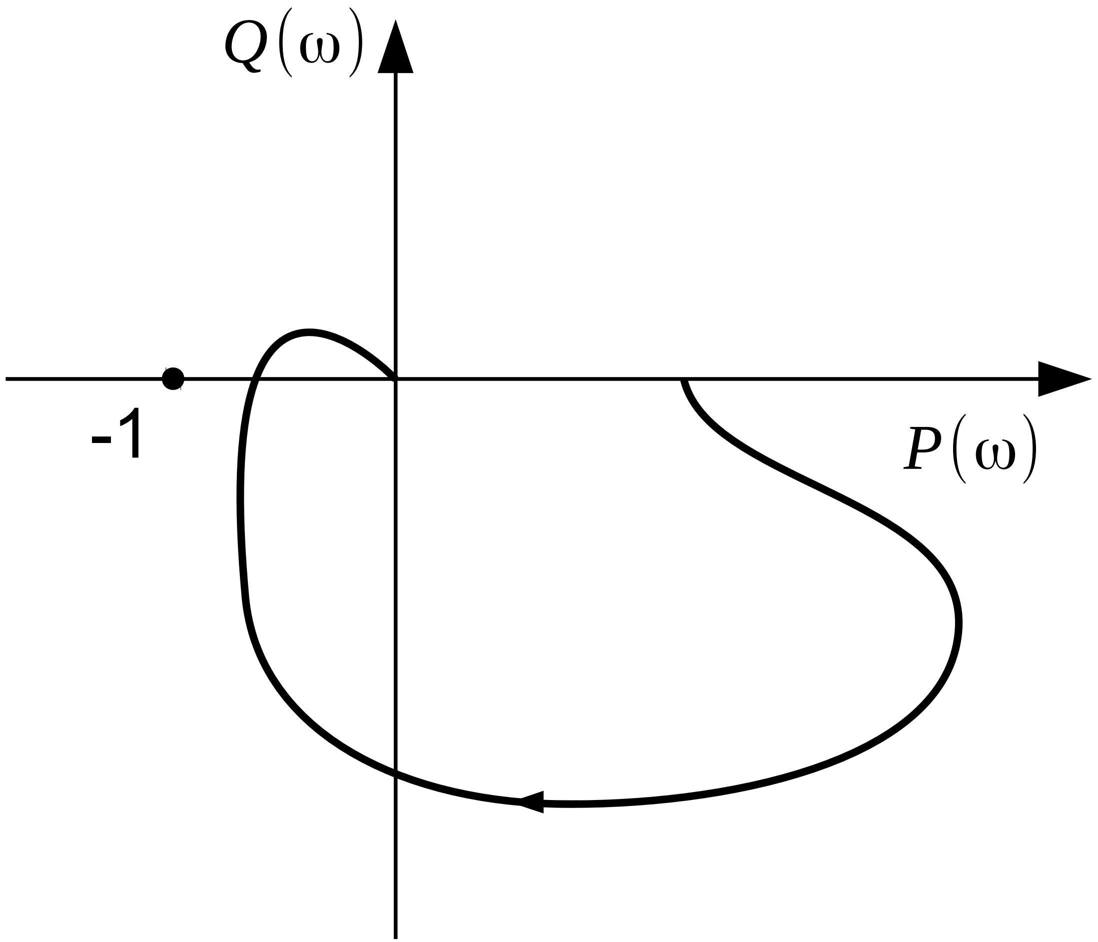
Przykład 8

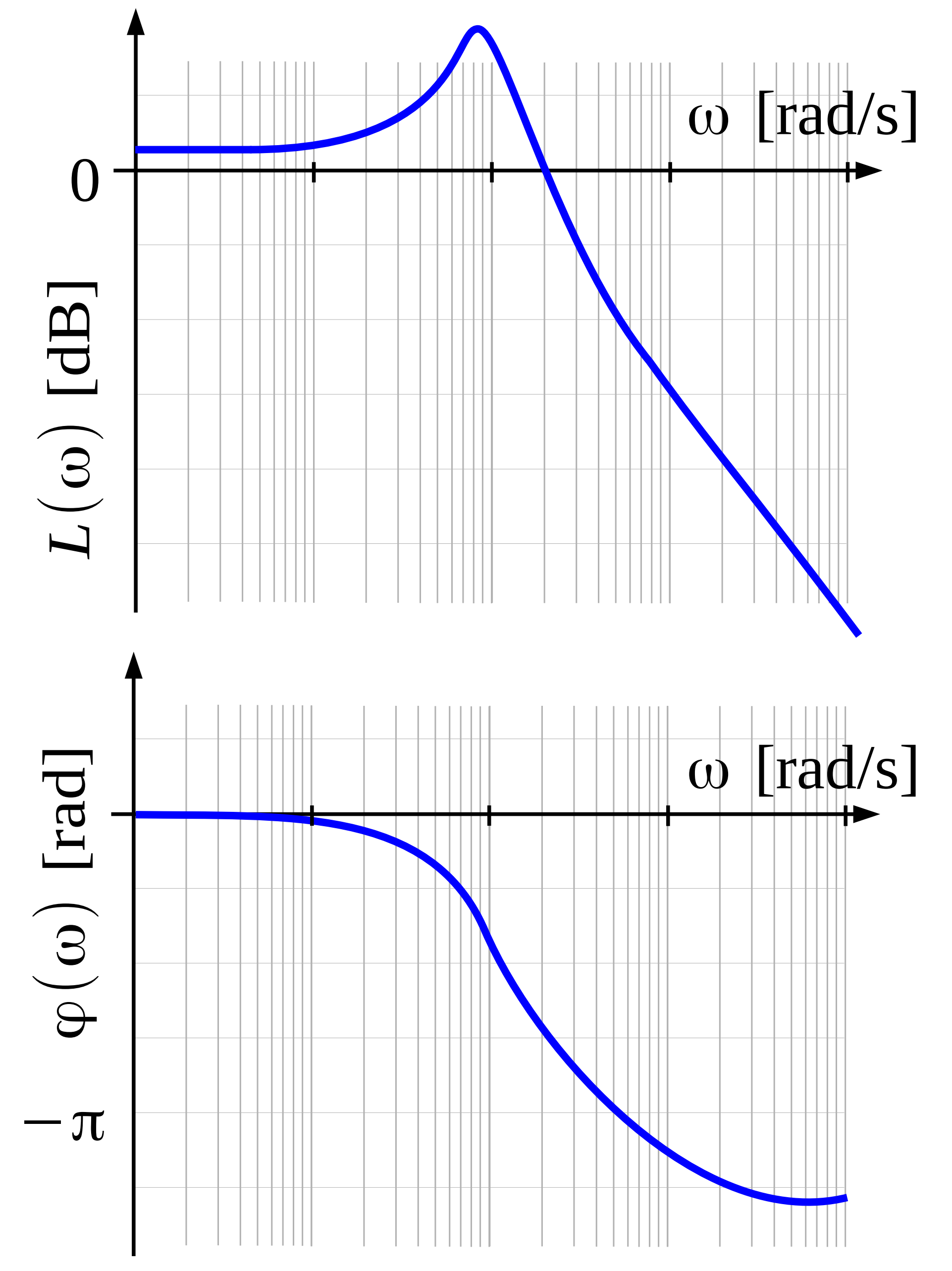
$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$



układ zamknięty stabilny dla $0 < k < 1$

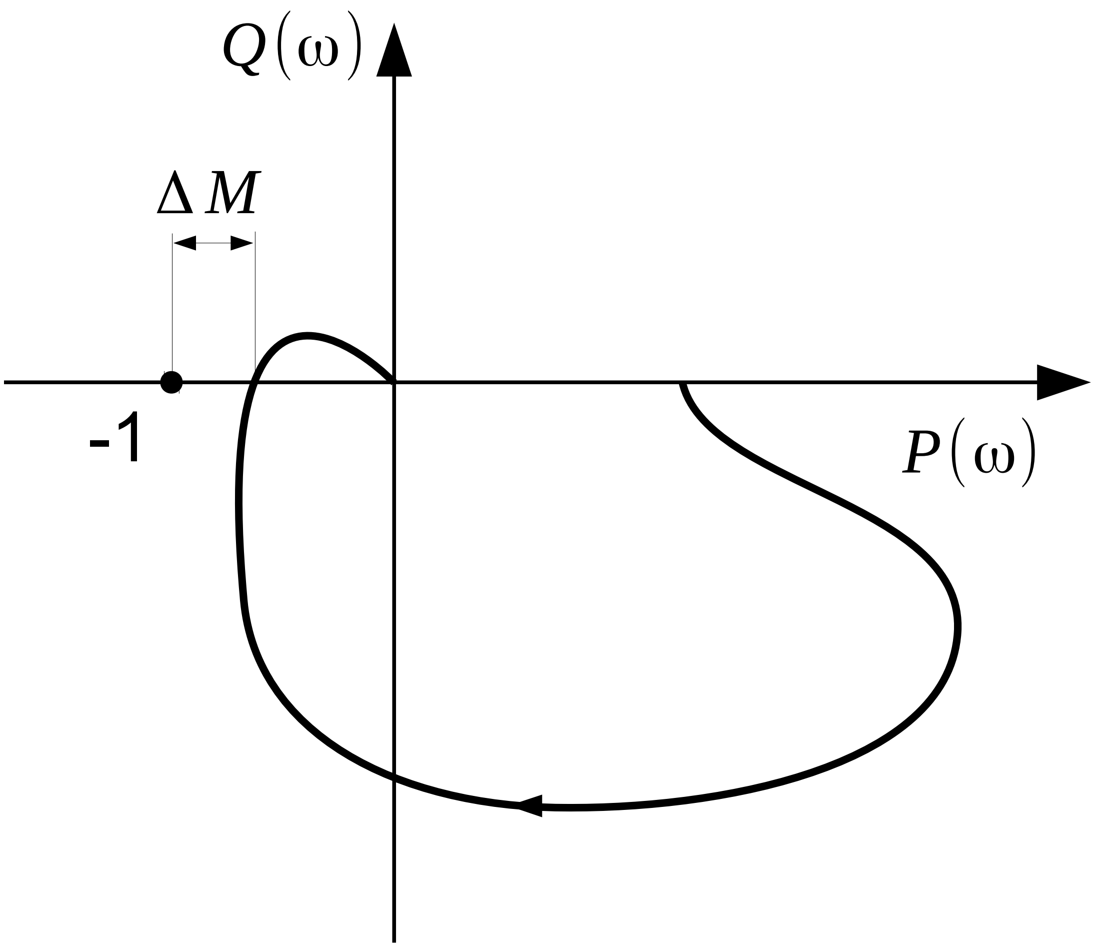
Zapas modułu

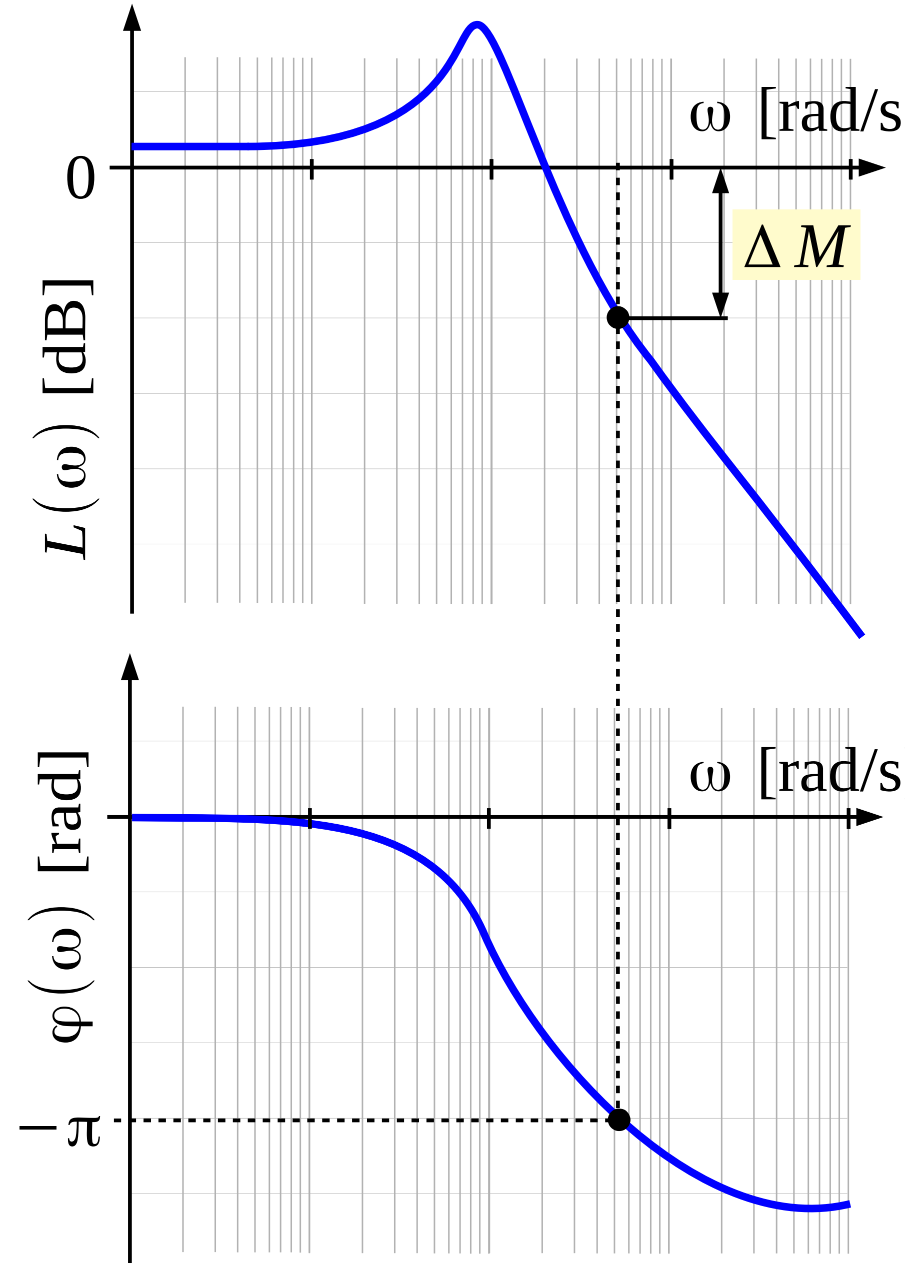




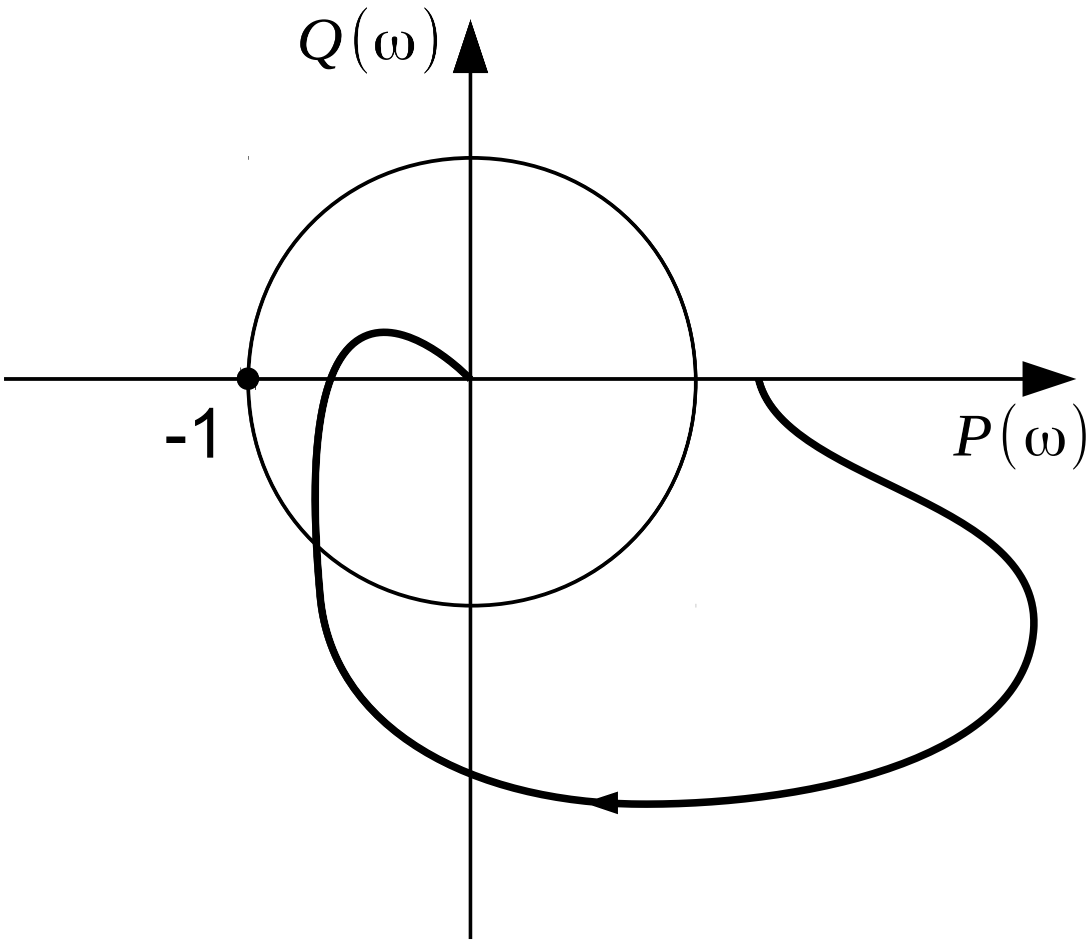
Zapas modułu

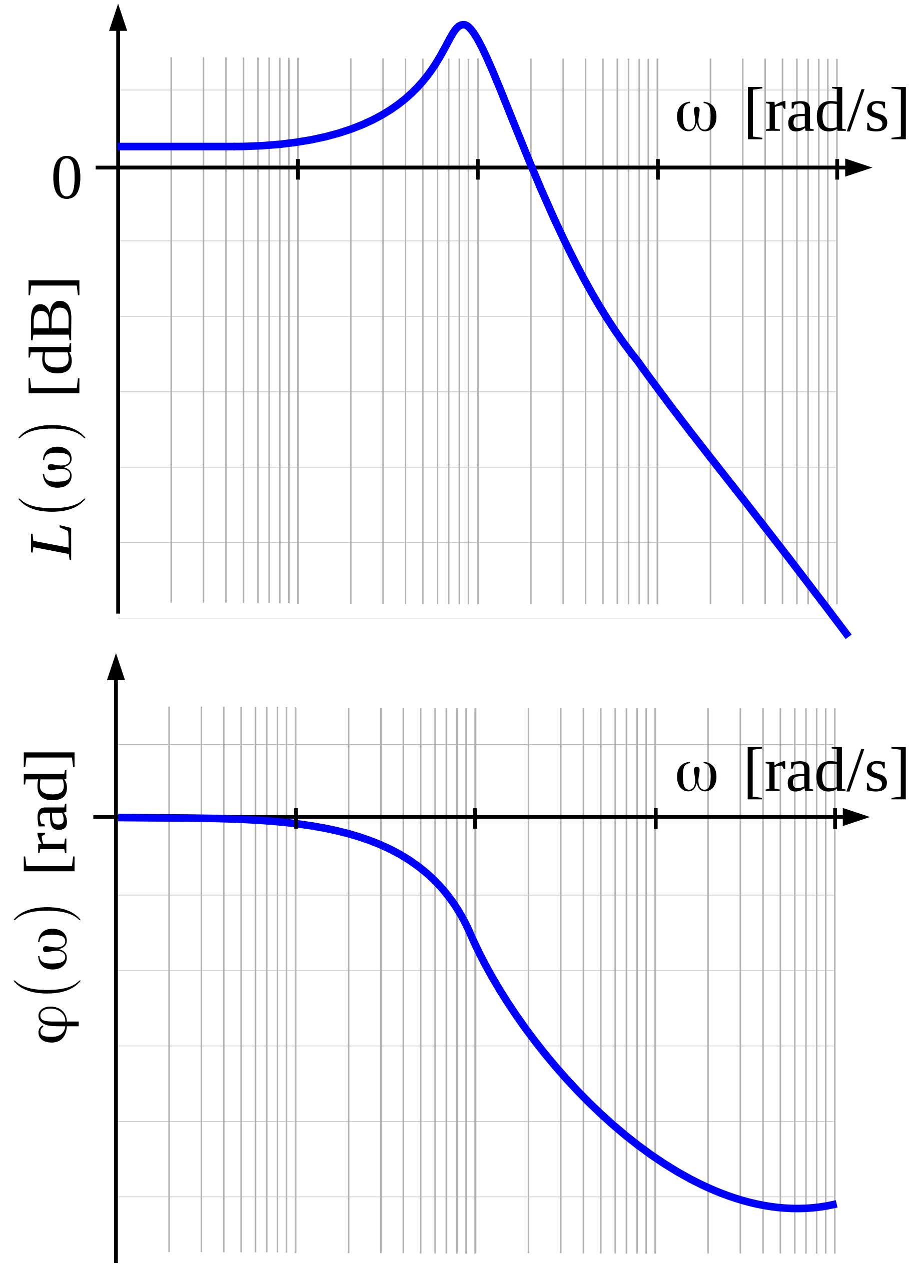
Dodanie do układu (szeregowo) wzmocnienia o wartości zapasu modułu spowoduje utratę jego stabilności w czasie pracy ze sprzężeniem zwrotnym.





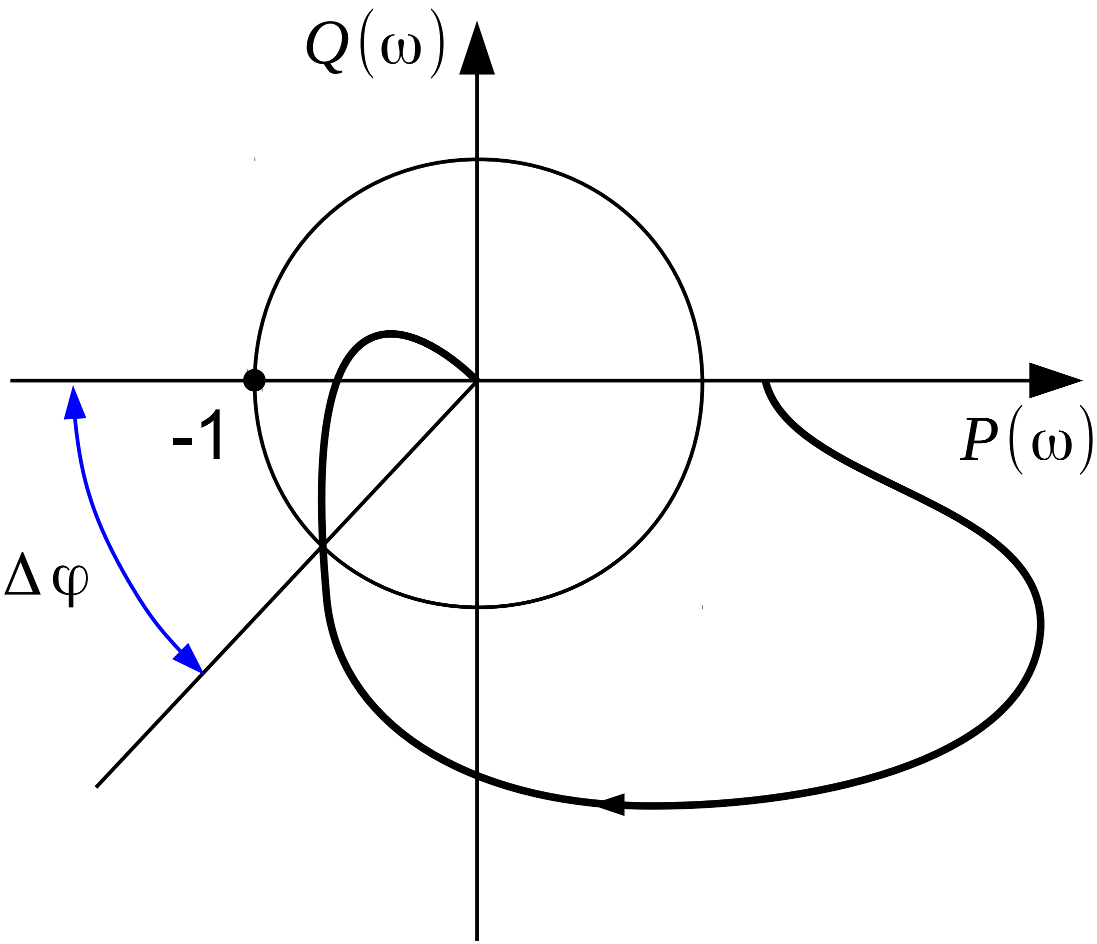
Zapas fazy

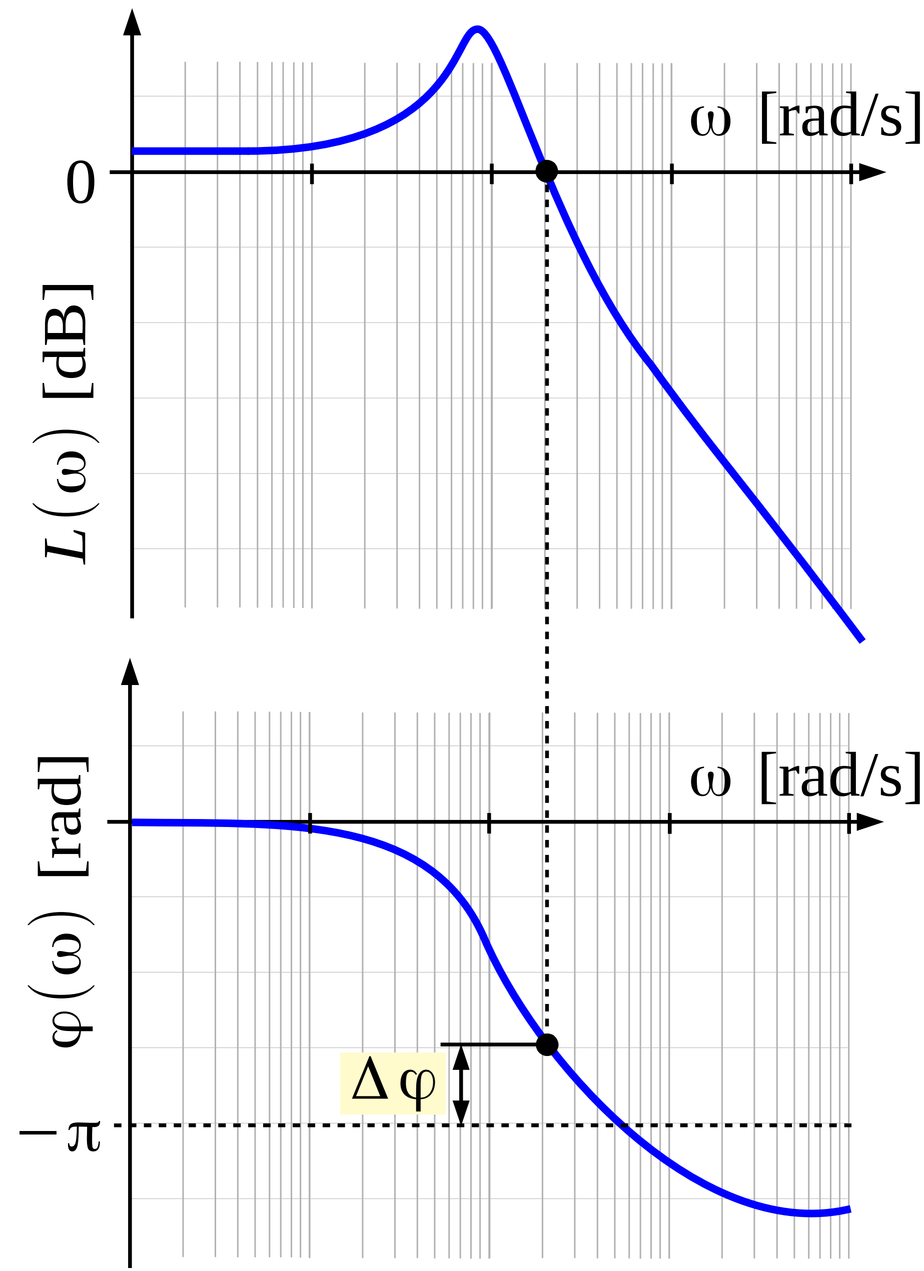




Zapas fazy

Dodanie do układu (szeregowo) obiektu opóźniającego o wartości zapasu fazy spowoduje utratę jego stabilności w czasie pracy ze sprzężeniem zwrotnym.



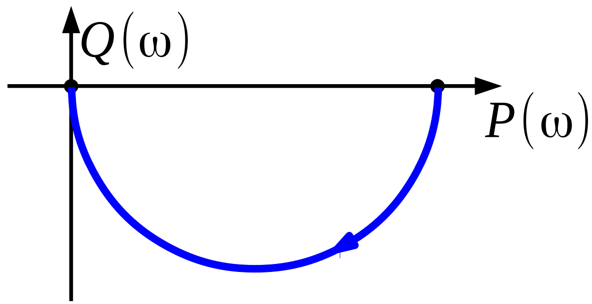


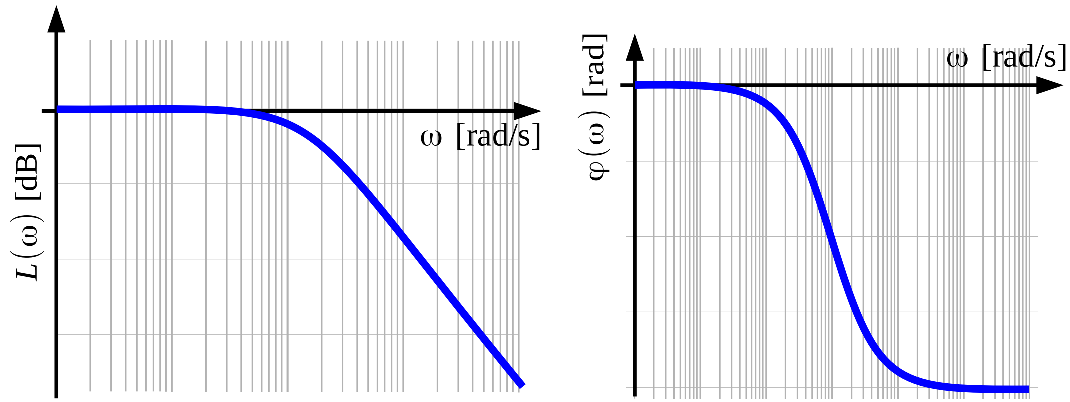
Stabilność układu a charakterystyka Bodego

<u>Charakterystyki Bodego (wzmocnienie + opóźnienie) nie ma interpretacji fizycznej dla układu niestabilnego!</u>

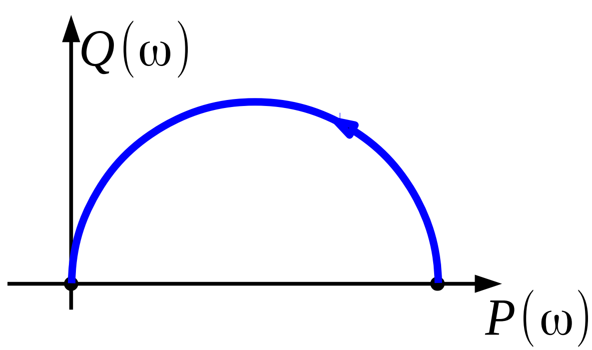
Przykład:

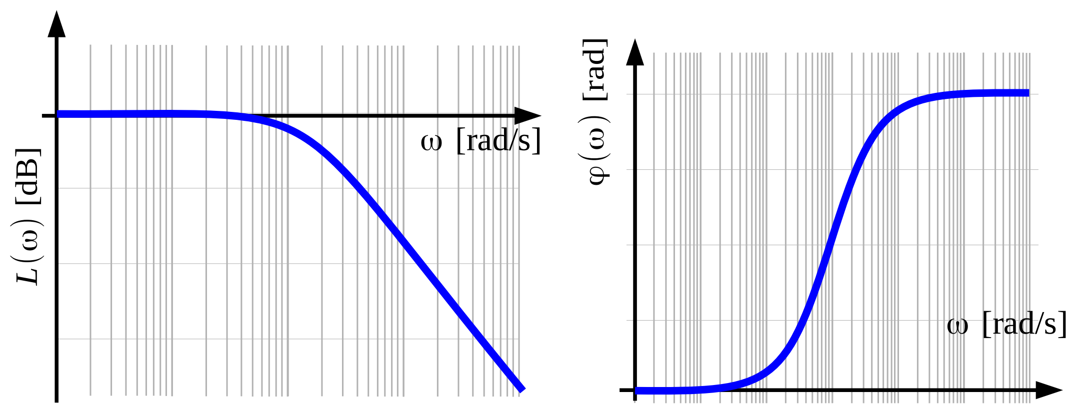
$$G(s)=\frac{1}{s+1}$$





$$G(s)=\frac{1}{s-1}$$





Dodawanie charakterystyk Bodego

Dodawanie charakterystyk Bodego

$$G(s)=G_1(s)G_2(s)$$

$$G(j\omega)=G_1(j\omega)G_2(j\omega)$$

$$|G(j\omega)|e^{j\,\mathrm{Arg}\,G(j\omega)}=|G_1(j\omega)|e^{j\,\mathrm{Arg}\,G_1(j\omega)}\cdot|G_2(j\omega)|e^{j\,\mathrm{Arg}\,G_2(j\omega)}$$

$$|G(j\omega)|e^{j\,\mathrm{Arg}\,G(j\omega)}=|G_1(j\omega)|\cdot|G_2(j\omega)|\cdot e^{j(\mathrm{Arg}\,G_1(j\omega)+\mathrm{Arg}\,G_2(j\omega))}$$

Wzmocnienie: $|G(j\omega)|=|G_1(j\omega)|\cdot|G_2(j\omega)|\cdot|G_3(j\omega)|$

Wzmocnienie [dB]: $20\log(|G_1(j\omega)|)+20\log(|G_2(j\omega)|)$

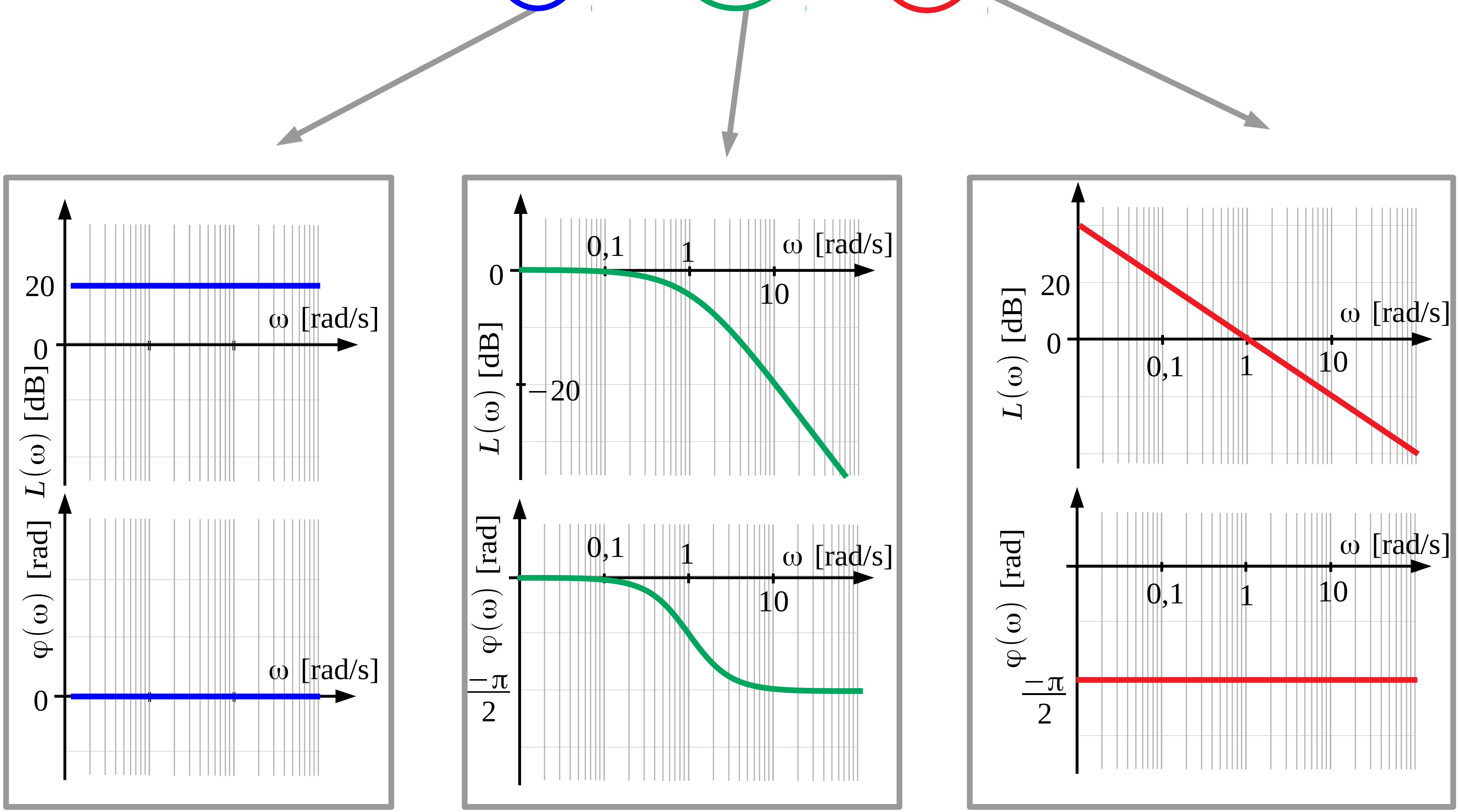
Faza: $\mathrm{Arg}\,G(j\omega)=\mathrm{Arg}\,G_1(j\omega)+\mathrm{Arg}\,G_2(j\omega)$

Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2+s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

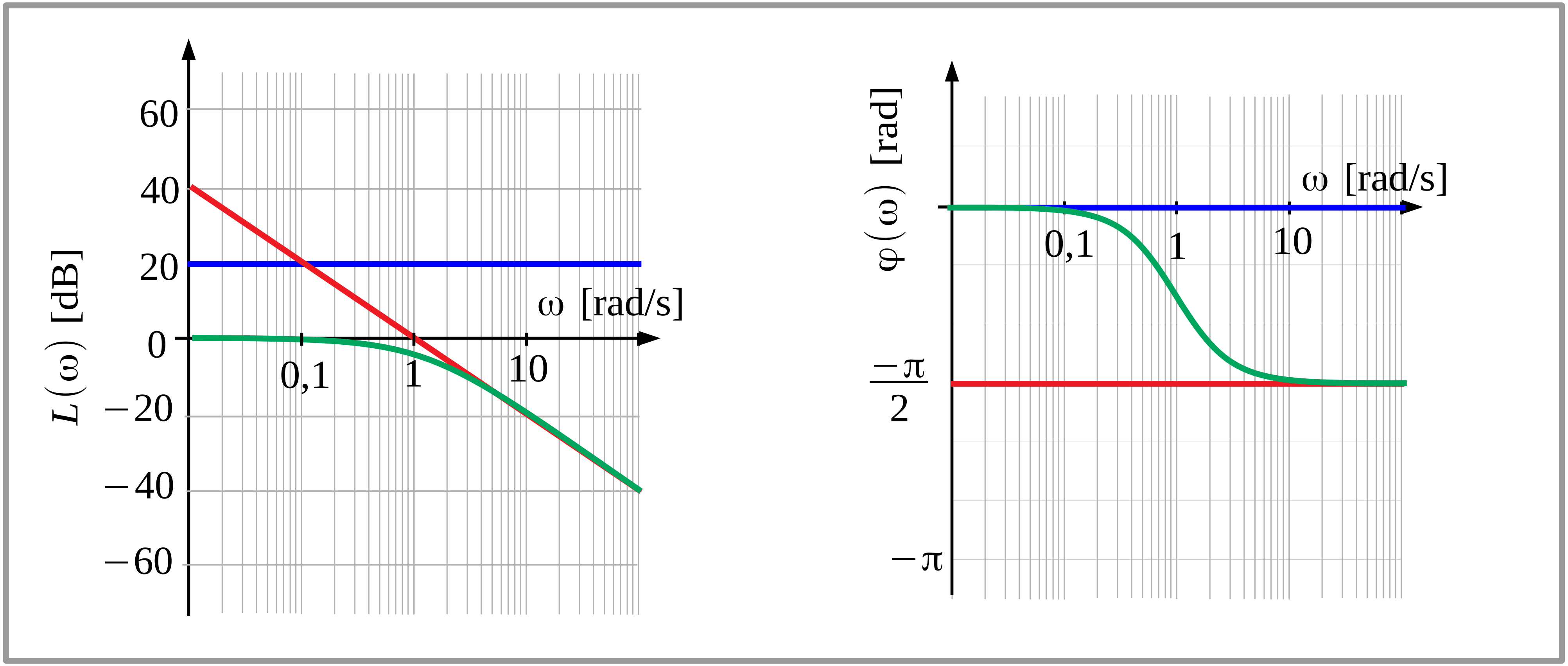
Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2+s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$



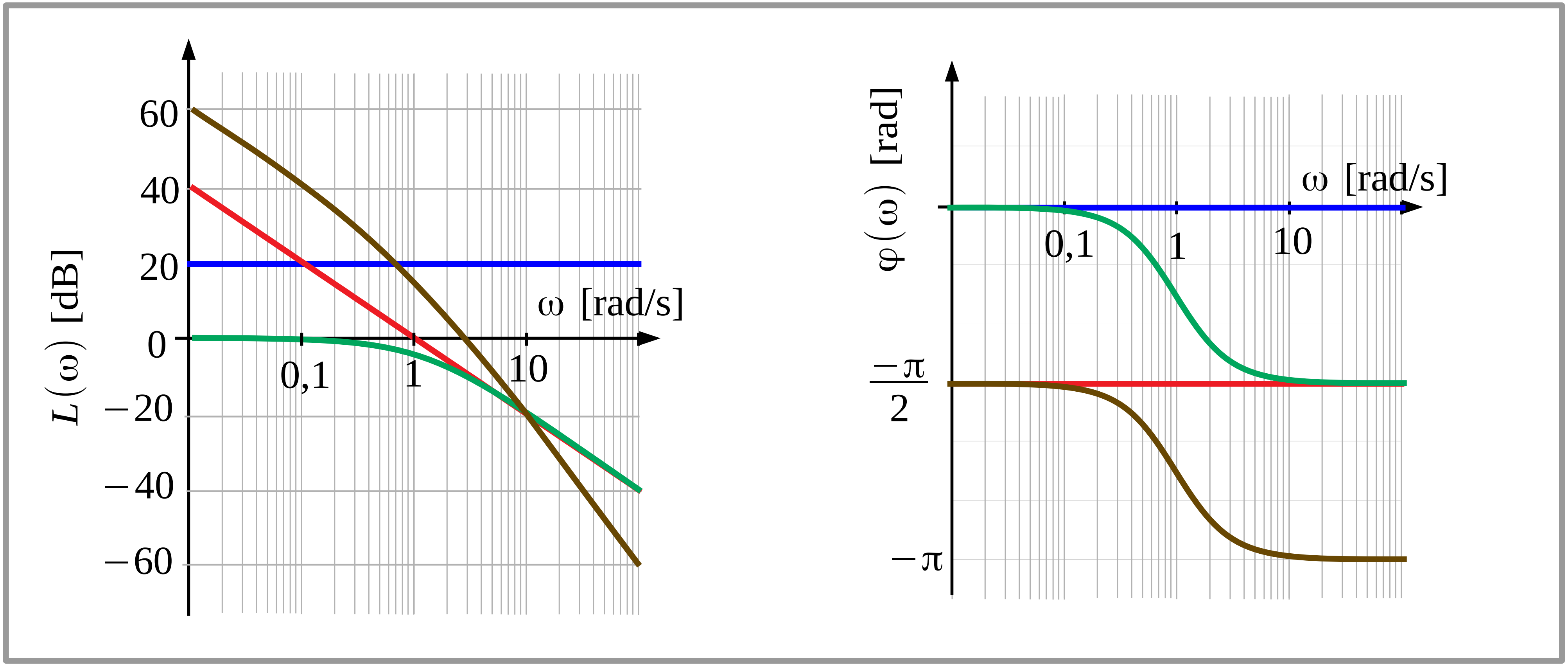
Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2+s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$



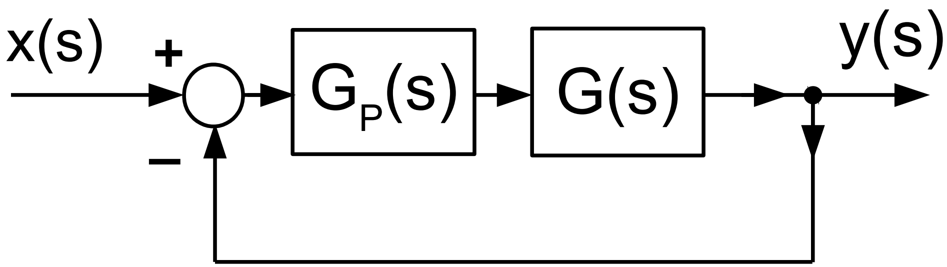
Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2+s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P



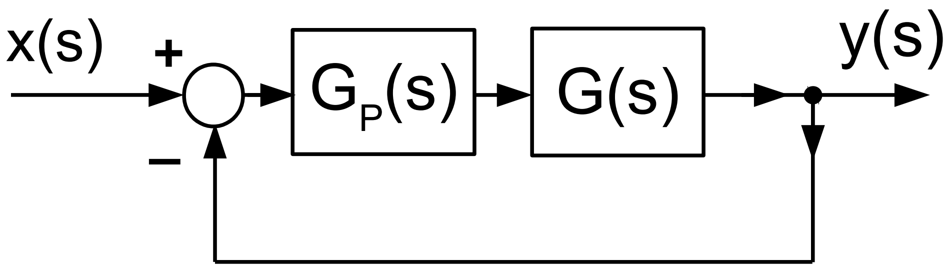
$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

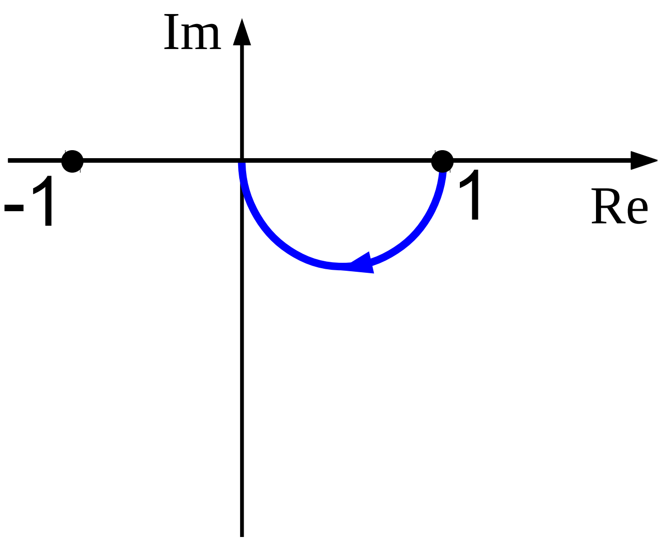


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

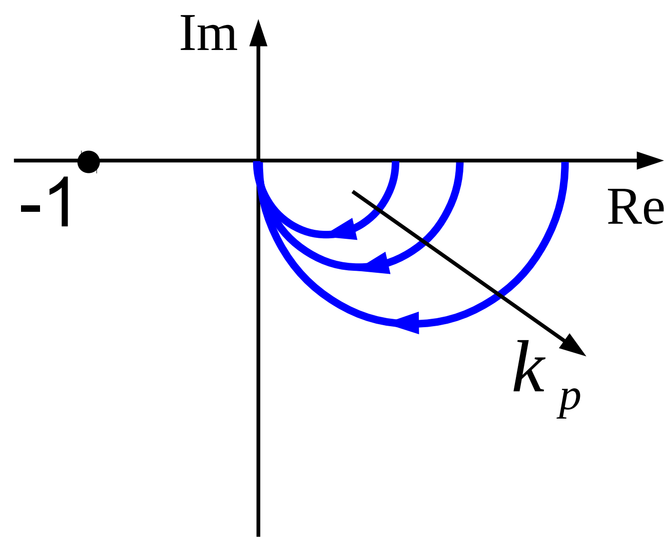
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$



$$G_{otw}(s)=k_p\frac{1}{Ts+1}$$



G_{otw} zawsze stabilny,

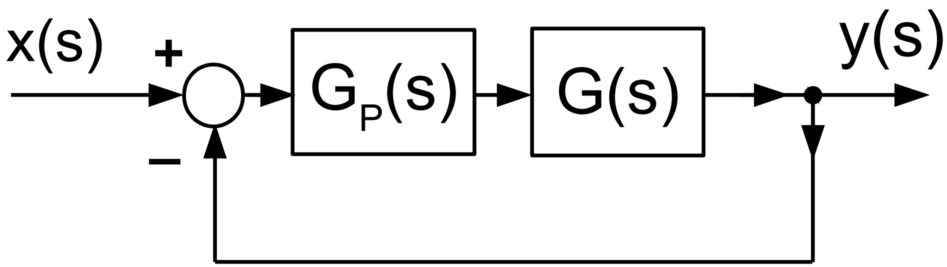
G_{zam} zawsze stabilny.

Błąd w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P+1}x_{st}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

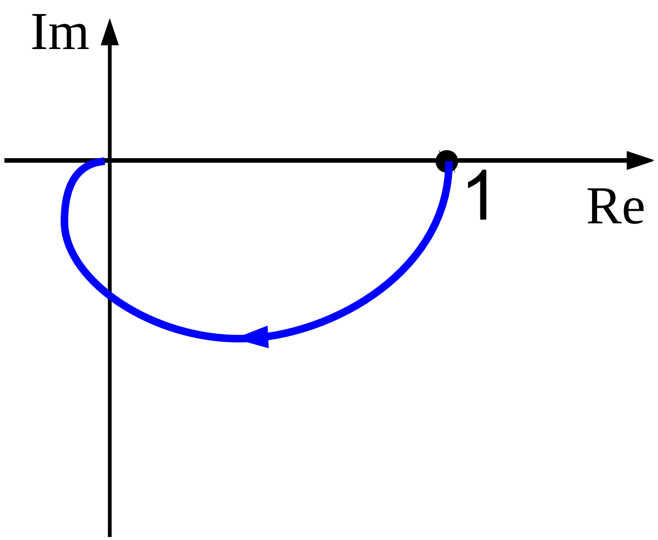


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

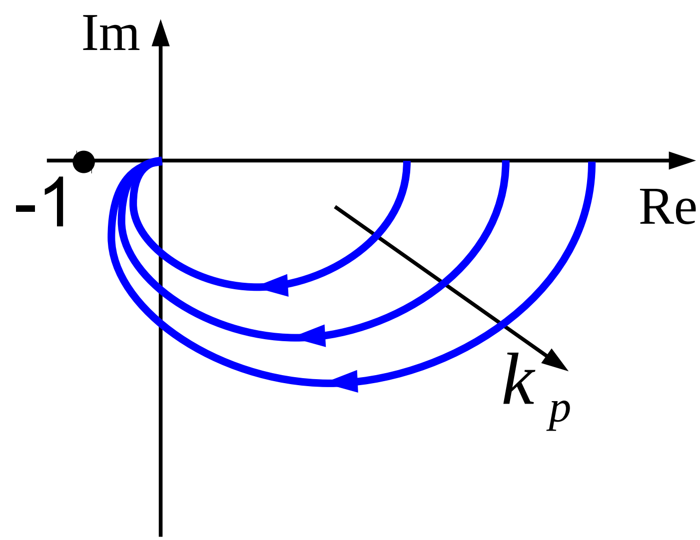
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_1^2 s^2+T_2 s+1}$$



$$G_{otw}(s)=\frac{k_p}{T_1^2 s^2+T_2 s+1}$$



G_{otw} zawsze stabilny,

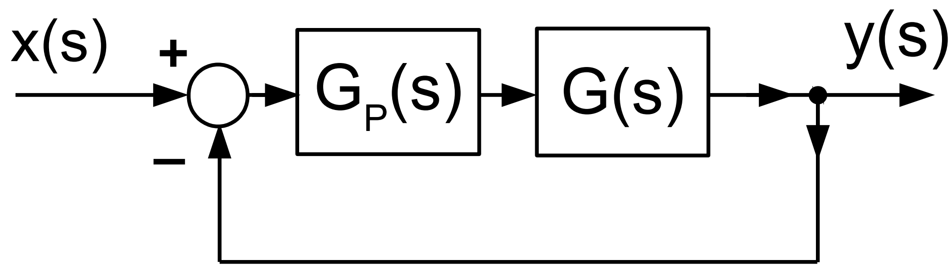
G_{zam} zawsze stabilny.

Błąd w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P+1}x_{st}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

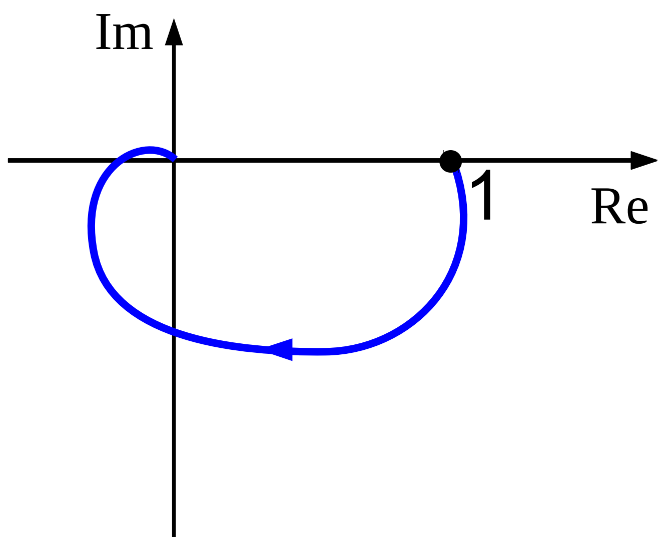


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

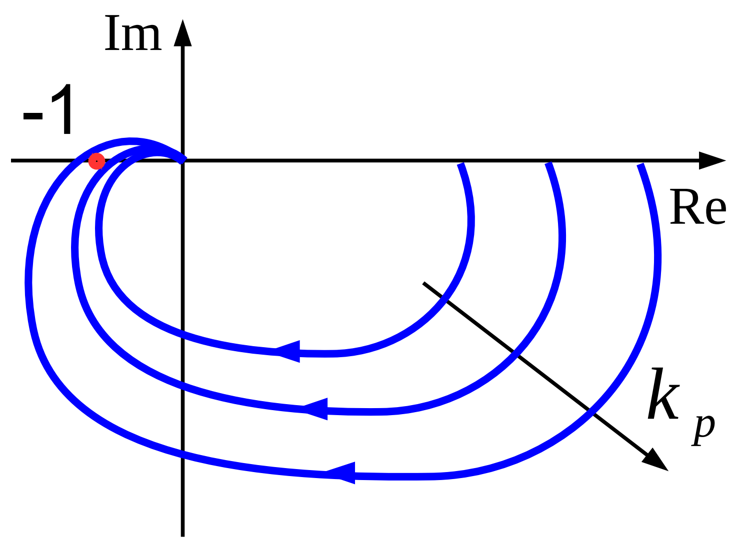
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$



$$G_{otw}(s)=\frac{k_p}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$



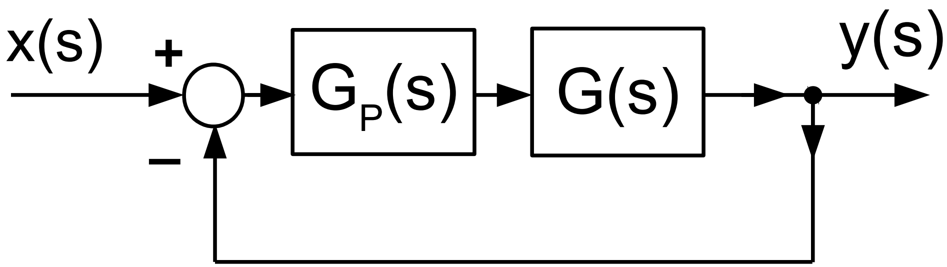
G_{otw} może być stabilny lub niestabilny i może obejmować punkt (-1,j0)

Błąd w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P+1}x_{st}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P



$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

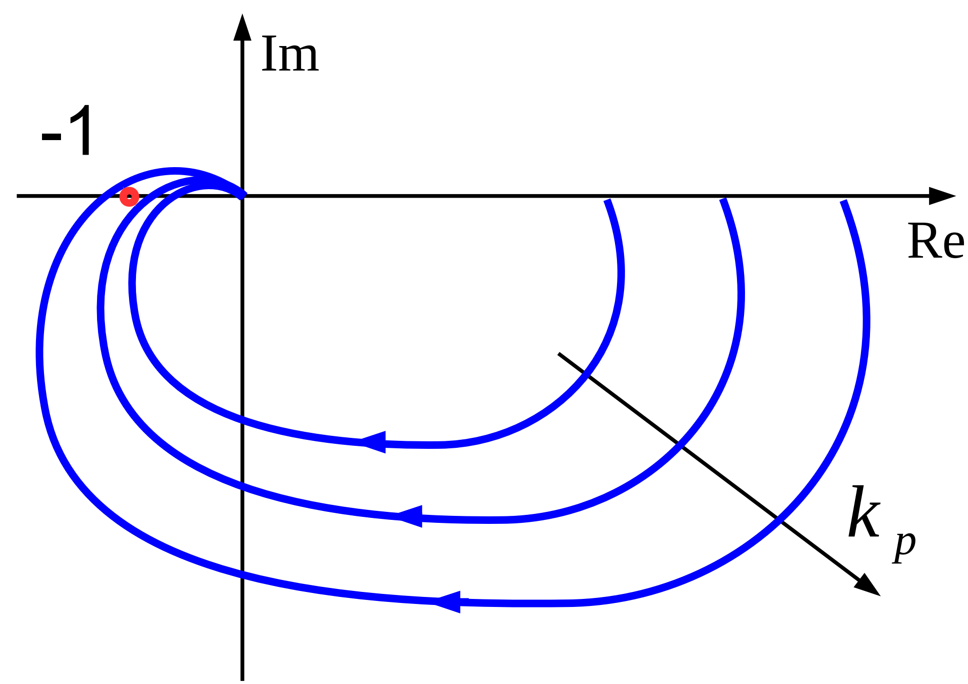
$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_3^2s^3+T_2^2s^2+T_1s+1}$$

podsumowanie:

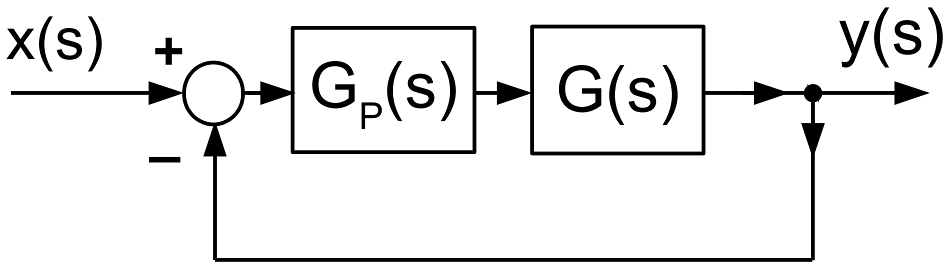
większy kp → mniejszy błąd w stanie ustalonym

mniejszy kp → większy zapas modułu



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem PI

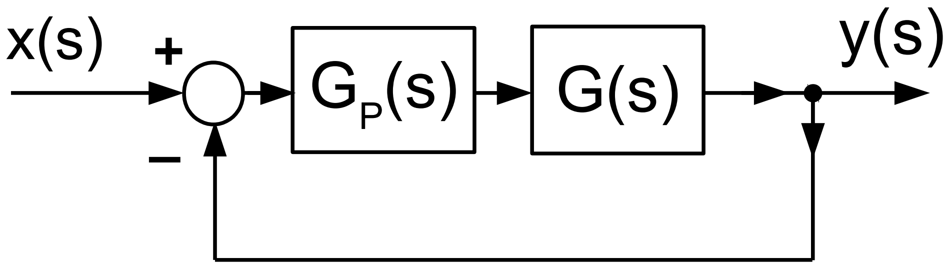


$$G_P(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)\,G(s)$$

Kryterium Nyquista

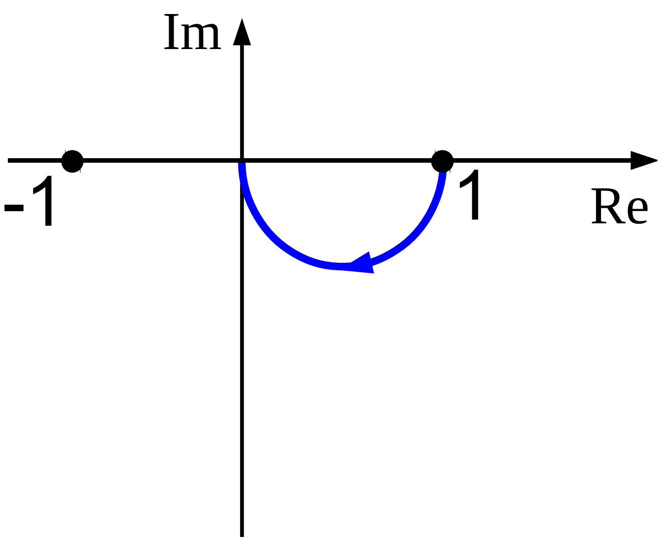
Układ sterowania z regulatorem PI



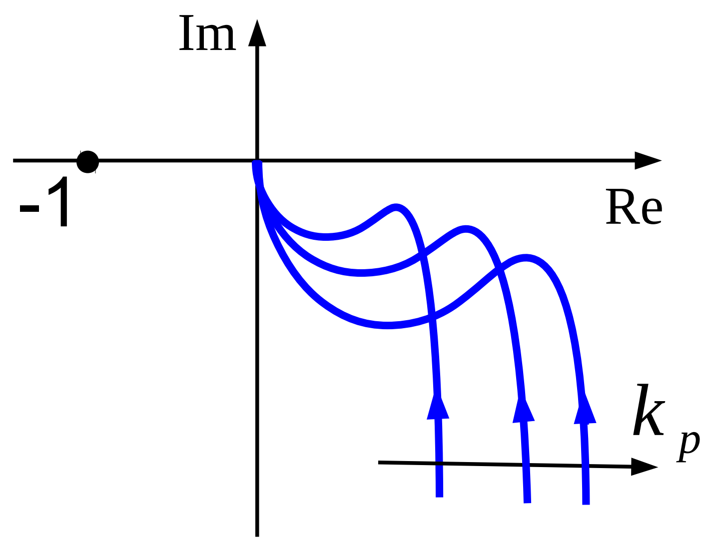
$$G_P(s)=k_P\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$



$$G_{otw}(s)=k_p\frac{T_i s+1}{T_i T s^2+T_i s}$$



G_{otw} jest na granicy stabilności,

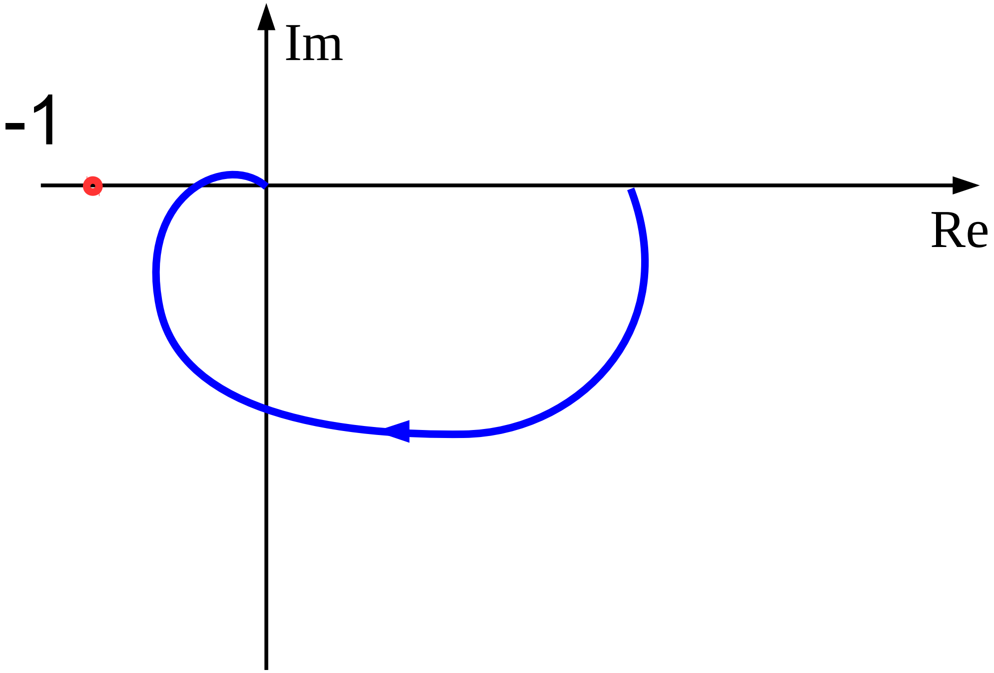
G_{zam} jest stabilny

$G_{otw}(\omega=0)\rightarrow\infty$ więc błąd w stanie ustalonym $\rightarrow 0$

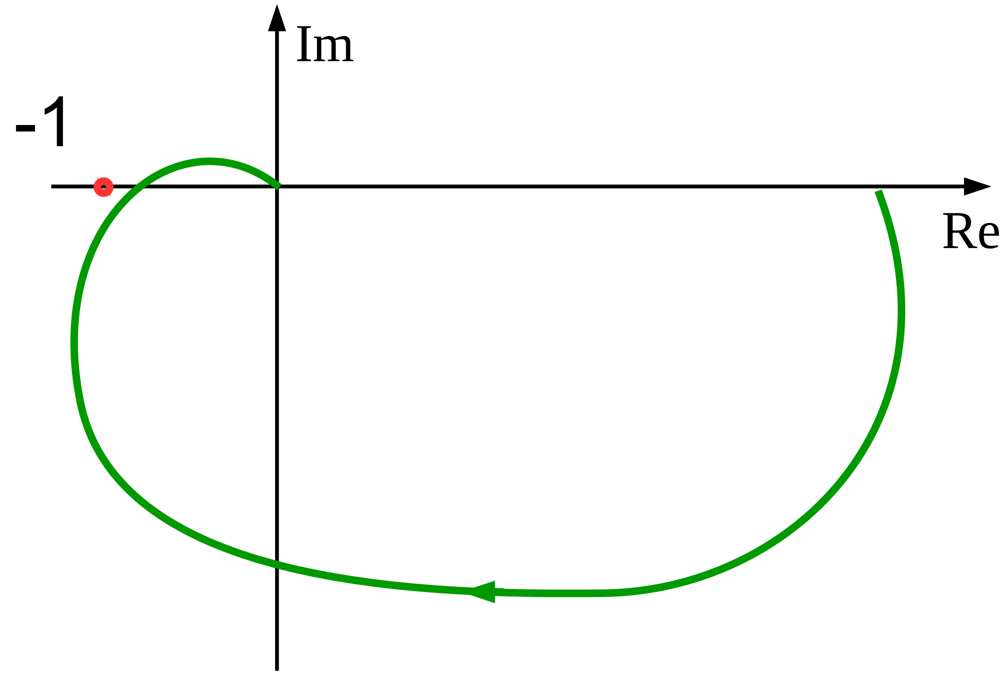
Korecja

Wpływ dodatkowego wzmocnienia na układ

$$G(s)$$



$$k \cdot G(s)$$



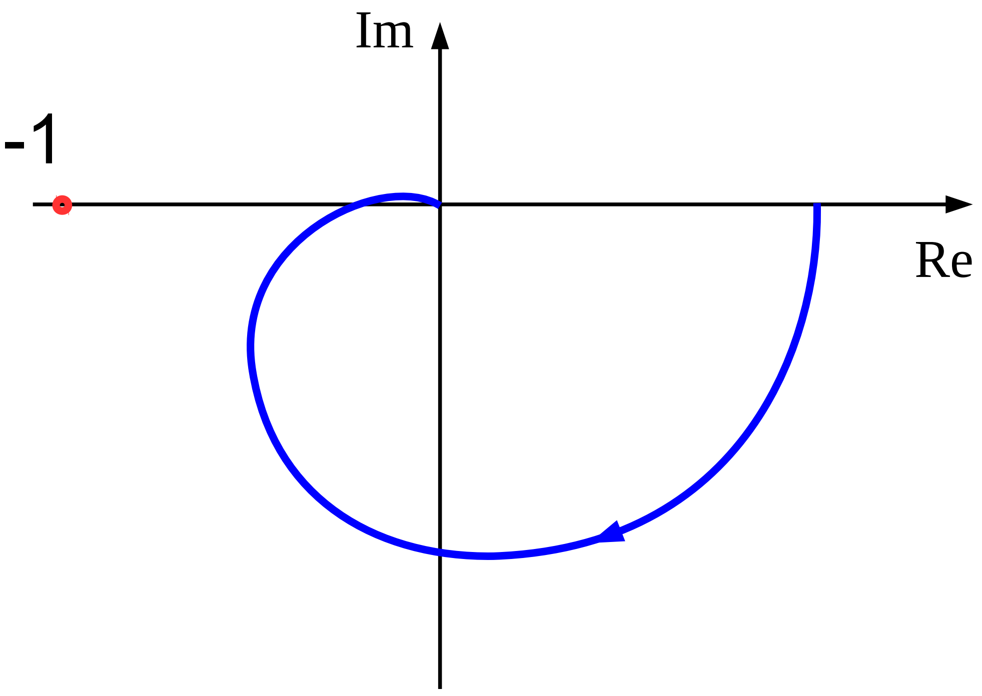
Większy zapas modułu i fazy,
Większy błąd w stanie ustalonym

Mniejszy zapas modułu i fazy,
Mniejszy błąd w stanie ustalonym

Korekcja

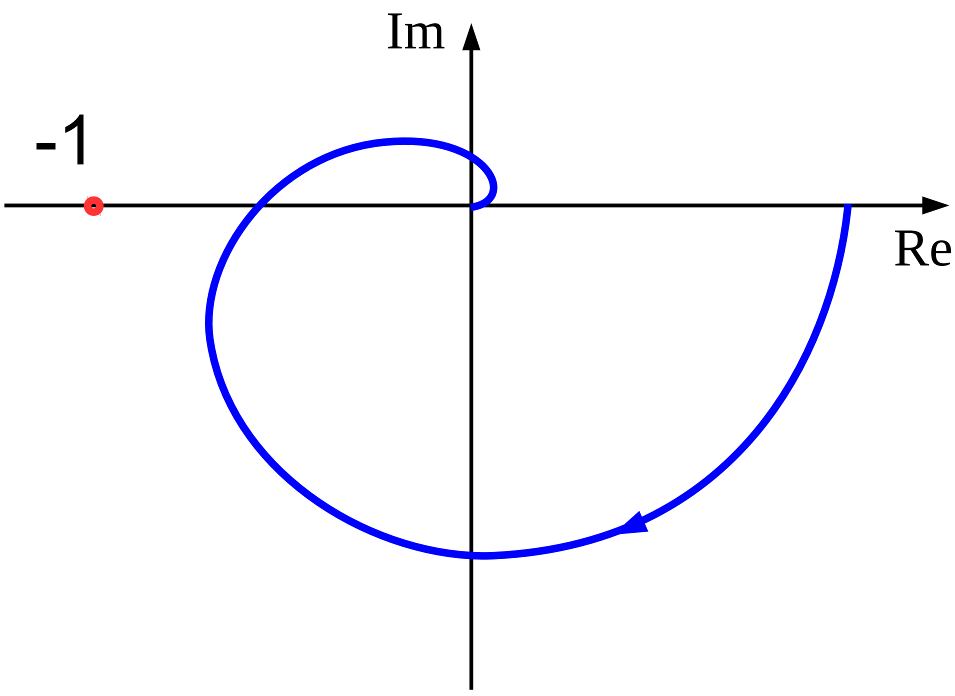
Wpływ opóźnienia na układ

$G(s)$



Większy zapas
modułu i fazy

$G(s) \cdot e^{-\tau s}$



Mniejszy zapas
modułu i fazy

Korekcja

Przez opóźnienie $$K(s)=\frac{1+Ts}{1+as+bs^2}$$

Układem PD $$K(s)=k_P\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1},\ \alpha<1$$

Przez całkowanie $$K(s)=1+\frac{k}{1+Ts}$$

Układem PI $$K(s)=\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1},\ \alpha>1$$

Układem PID $$K(s)=k(T_d s+1)\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$$

Materiał na egzamin – wykłady od 1 do 14
(ponad 1100 slajdów...)

Wykład 14 – współczesne problemy teorii
sterowania, konsultacje

Wykład 15 – powtórzenie materiału,
informacje o egzaminie,
ankiety, konsultacje