PAiTM

materiały uzupełniające do ćwiczeń

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

studia inżynierskie

prowadzący: mgr inż. Sebastian Korczak

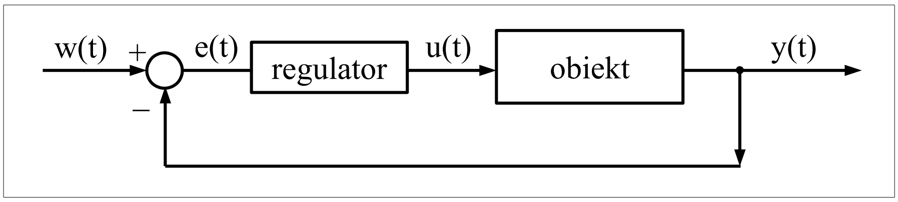
PODSTAWY AUTOMATYKI – CZĘŚĆ III

Zakres materiału na 4 kolokwium

1. Regulatory.
2. Ogólne kryterium stabilności.
3. Kryterium Hurwitz'a.

Regulatory

Najpowszechniejszy sposób sterowania automatycznego pewną wartością wyjściową z obiektu przy jednym sygnale wejściowym odbywa się według schematu.



Jest to tzw. sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym (sterowanie w układzie zamkniętym).

w(t) nazywamy wartością zadaną i chcielibyśmy aby wartość wyjściowa z obiektu y(t) osiągała wartość w(t) lub chociaż nie odbiegła od niej znacząco. Odejmując od wartości zadanej wartość aktualną otrzymujemy sygnał błędu sterowania e(t), który wprowadzamy do regulatora generującego odpowiedni sygnał sterowania u(t).

Dużą część prostych obiektów sterowanych możemy matematycznie odzwierciedlić (często przybliżając lub upraszczając) za pomocą prostych transmitancji (element proporcjonalny, inercyjny I rzędu, różniczkujący, całkujący, lub ich kombinacje).

Stosując własności schematów blokowych możemy powyższy schemat sprowadzić do transmitancji w postaci transmitancji $G_z(s)=\frac{G_R(s)G_O(s)}{1+G_R(s)G_O(s)}$, gdzie $G_R(s)$ jest transmitancją regulatora, a $G_O(s)$ transmitancją obiektu sterowanego (nazywana transmitancją ze względu na wartość zadaną).

Znając transmitancję $G_Z(s)$ możemy sprawdzać jak zachowa się układ przy zmianach wartości zadanej $w(t)$, np. zadając $w(t)$ w postaci skoku jednostkowego, liniowo narastającego sygnału, albo badając transmitancję widmową.

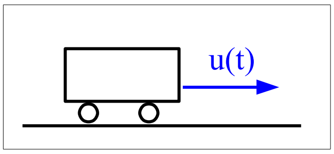
Zanim jednak zaczniemy badać cały układ sterowania należy zapoznać się z własnościami samych regulatorów. Najprostszymi stosowanymi regulatorami są obiekty o transmitancjach:

Regulator	Transmitancja	Odp. na wym. skokowe
P	k_p	na podst. materiałów z zajęc
I	$\frac{1}{T_i s}$	
D	$T_d s$	
D (rzeczywisty)	$\frac{T_d s}{T s+1}$	
PI	$k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$	
PD	$k_p(1+T_d s)$	
PID	$k_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right)$	

Charakterystyki regulatorów – na podstawie materiałów z wykładu + z książki str. 208-227

Zadanie 1 (sterowanie prędkością pojazdu - tempomat)

Obiektem sterowanym jest pojazd z przykładu 3 (materiały cz. II) – elementy inercyjny I rzędu o transmitancji $G_o(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{k_o}{Ts+1}$, gdzie wejściem u(t) traktujemy jako siłę napędową, a wyjściem jest prędkość pojazdu y(t). Zastosujmy układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym z regulatorem typu P o transmitancji $G_R(s)=k_P$. Zbadać zachowanie układu przy skokowo zmieniającej się wartości zadanej.



Transmitancja obiektu z układem sterowania ma postać:

$$G_z(s)=\frac{G_R(s)G_O(s)}{1+G_R(s)G_O(s)}=\frac{k_P k_O}{T s+1+k_P k_O}$$

Wymuszenie skokowe: $w(t)=a\cdot 1(t)$

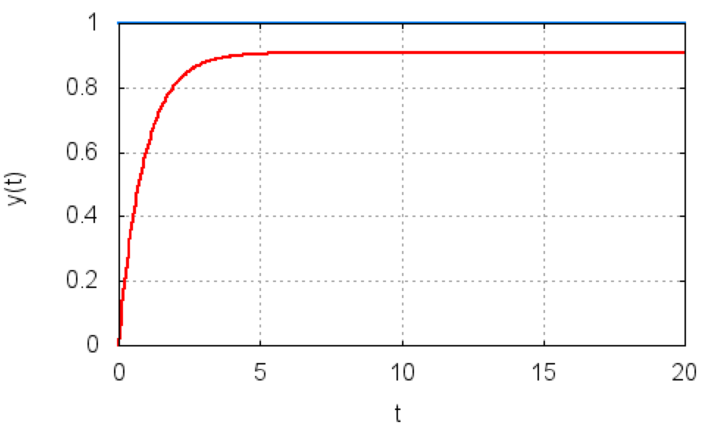
Transformata odpowiedzi na wymuszenie skokowe:

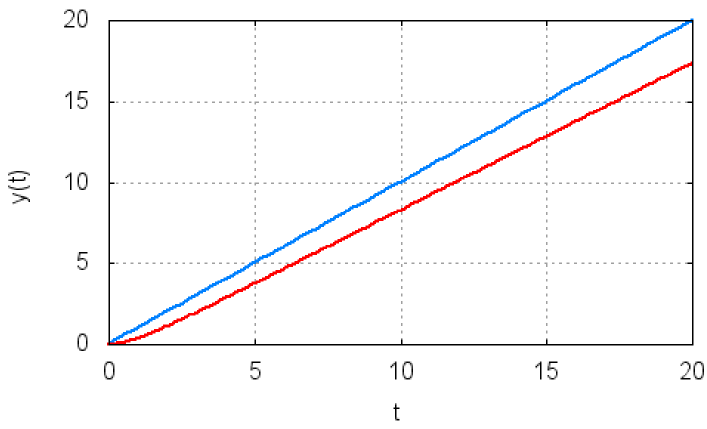
$$y(s)=w(s)\cdot G(s)=\frac{a k_P k_O}{s(T s+1+k_P k_O)}=\frac{a k_P k_O}{(1+k_P k_O)}\cdot\frac{\frac{1+k_P k_O}{T}}{s\left(s+\frac{1+k_P k_O}{T}\right)}$$

Odpowiedź układu na wymuszenie skokowe: $y(t)=\frac{a k_P k_O}{(1+k_P k_O)}\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{1+k_P k_O}{T}t\right)\right)$

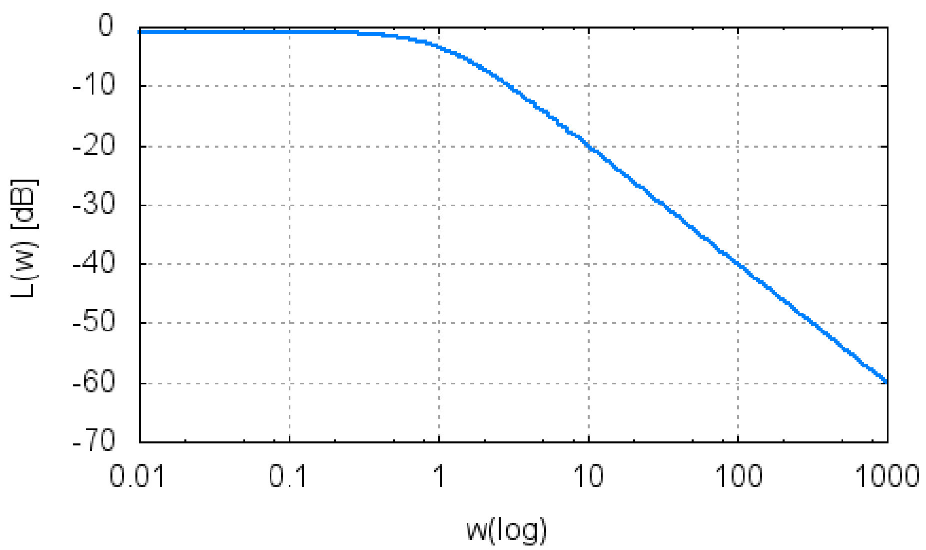
Od razu widzimy, że układ z regulatorem P nie jest w stanie osiągnąć dokładnie wartości zadanej (mówimy, że posiada uchyb regulacji), mogli byśmy osiągnąć wartość bardzo bliską zadanej poprzez bardzo duże wzmocnienie regulatora P.

Przykładowe wykresy dla $T=10,\ Ko=5,\ Kp=2,\ a=1$
odpowiedź na wymuszenie skokowe i liniowo narastające
(wymuszenie: niebieskie, odpowiedź: czerwone)





Warto również sprawdzić, co stanie się gdy zadamy wymuszeni harmoniczne – tak wygląda wykres amplitudowo-częstościowy dla podanych wyżej parametrów



$$G(s)=\frac{10}{10s+11},\ P(\omega)=\frac{110}{100\omega^2+121},\ Q(\omega)=\frac{-100\omega}{100\omega^2+121},\ A(\omega)=\frac{10}{\sqrt{100\omega^2+121}}$$

Przykład 2

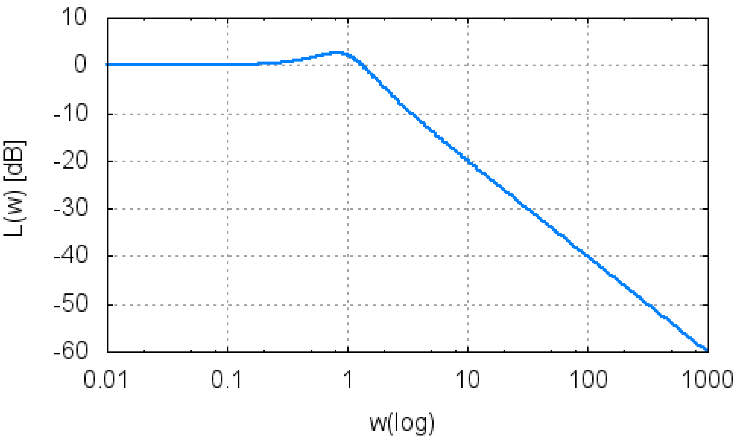
Obiektem sterowanym jest elementy inercyjny I rzędu o transmitancji $G_o(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{k_o}{Ts+1}$. Zastosujmy układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym z regulatorem typu PI o transmitancji $G_R(s) = k_P + k_i \frac{1}{s}$. Zbadać zachowanie układu przy skokowo zmieniającej się wartości zadanej.

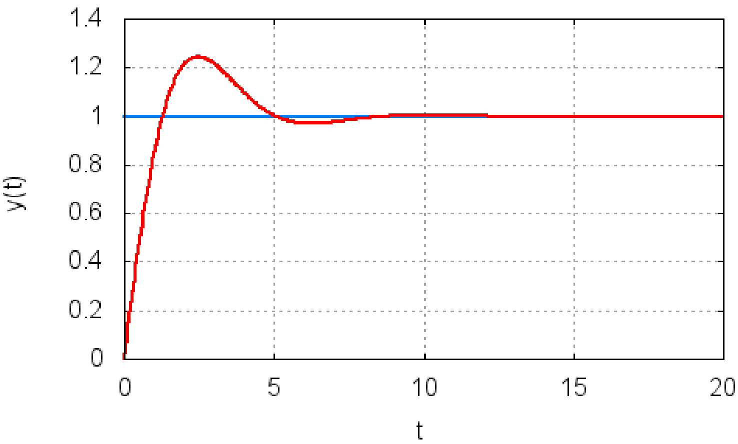
Transmitancja obiektu z układem sterowania ma postać:

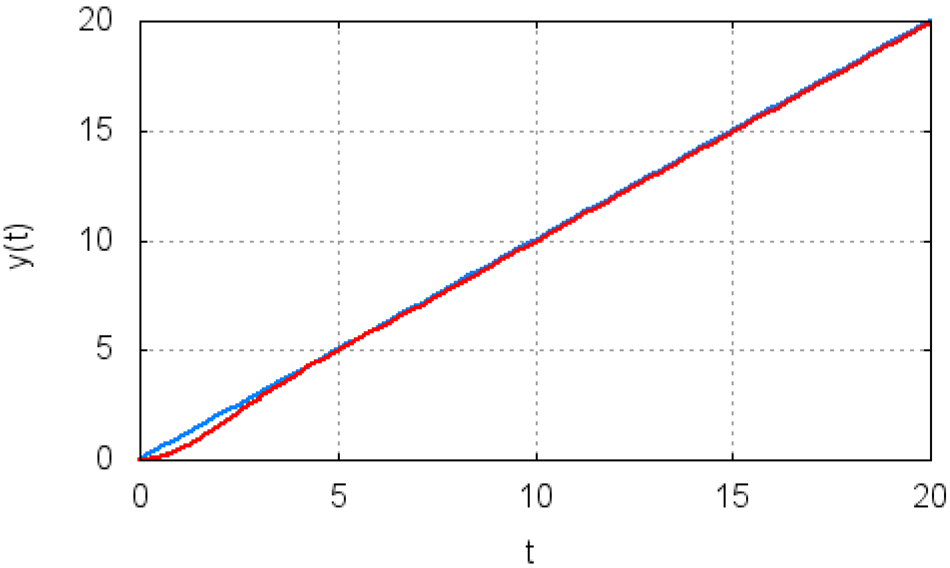
$$G_z(s) = \frac{G_R(s) G_O(s)}{1 + G_R(s) G_O(s)} = \frac{k_P k_O s + k_O k_i}{T s^2 + (1 + k_P k_O) s + k_O k_i}$$

Wykres amplitudowo-częstościowy, odpowiedź na wymuszenie skokowe oraz liniowo narastające dla przykładowych parametrów

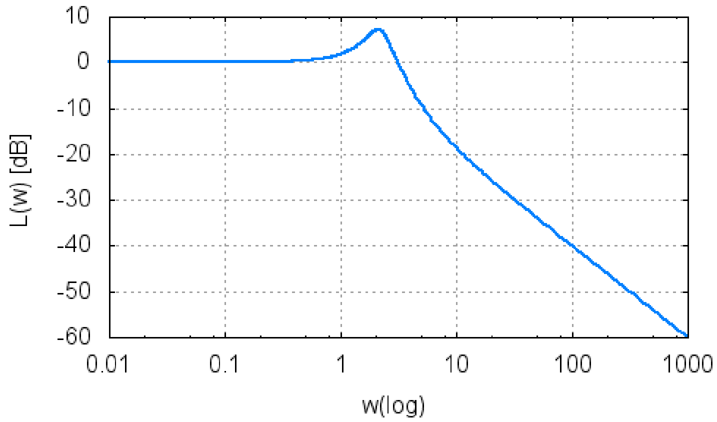
$$T = 10, k_o = 5, k_p = 2, k_i = 2$$

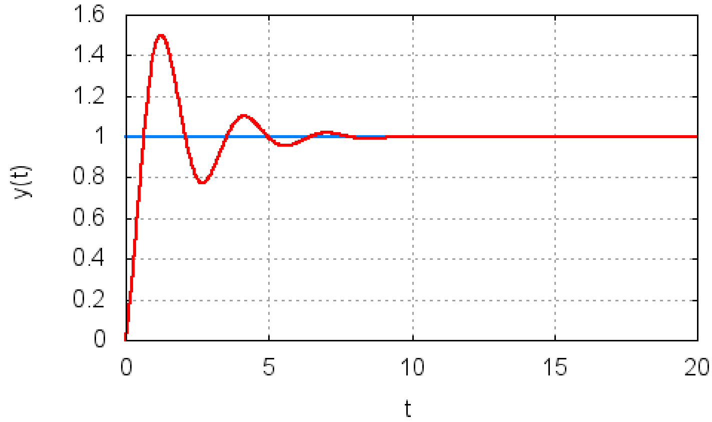


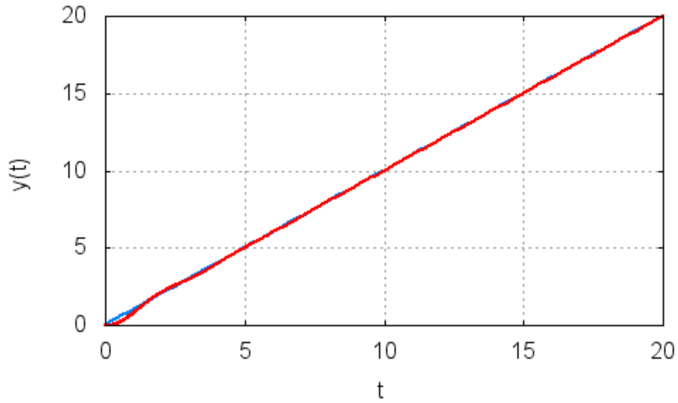




$T=10, k_o=5, k_p=2, k_i=10$ (większa stała k_i wzmocniła działanie całkujące)





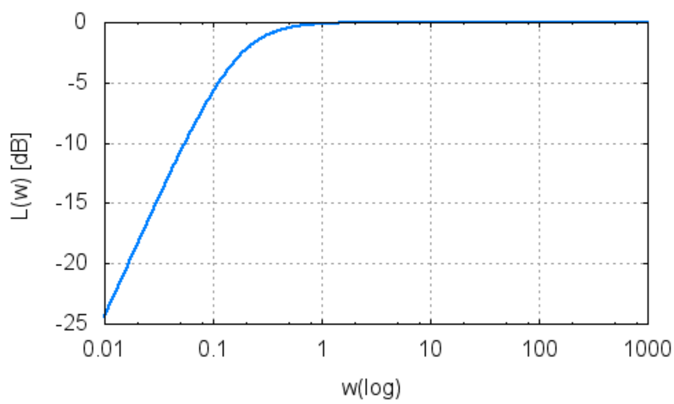


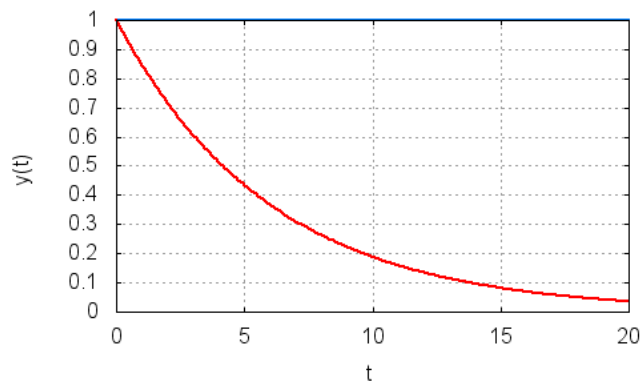
Przykład 3

Obiektem sterowanym jest elementy różniczkujący o transmitancji $G_o(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=k_o s$.

Zastosujmy układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym z regulatorem typu P o transmitancji $G_R(s)=K_P$

Wykres amplitudowo-częstościowy oraz odpowiedź na wymuszenie skokowe dla przykładowych parametrów $K_o=3, K_p=2$

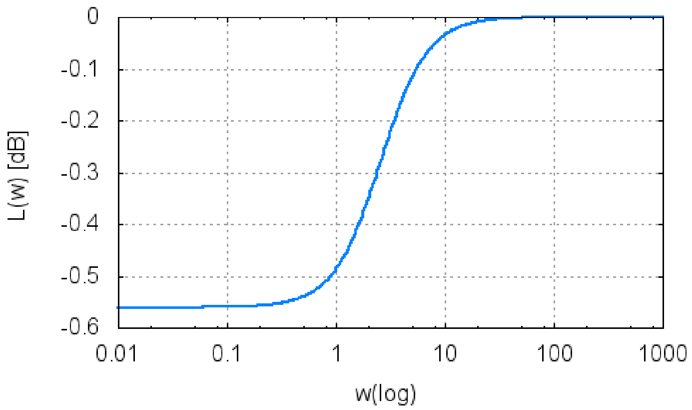


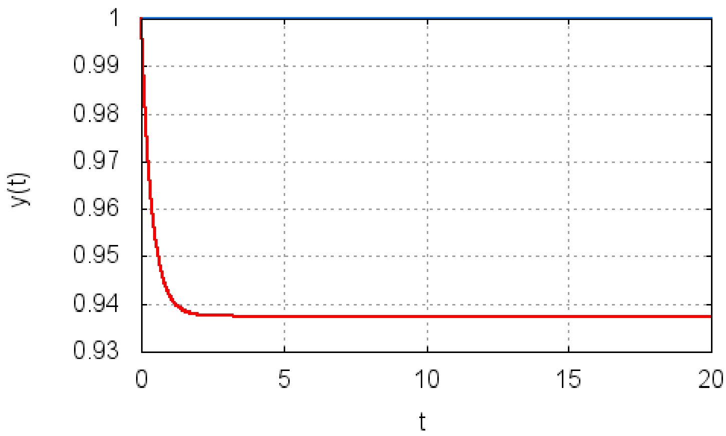


Powyższe wykresy pokazują, że regulator typu P nie będzie prawidłowo funkcjonował w przypadku stałego sygnału zadanego, i sprawdzić się może tylko przy sygnałach harmonicznych wysokiej częstotliwości.

Przykład 4

Obiektem sterowanym jest elementy różniczkujący o transmitancji $G_o(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=k_o s$. Zastosujmy układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym z regulatorem typu PI o transmitancji $G_R(s)=K_P+K_i\frac{1}{s}$. Wykresy dla parametrów: $K_o=3, K_p=2, K_i=5$





Przy wymuszeniu skokowym i niskich częstościach wymuszenia otrzymujemy niewielki uchyb sterowania, który nie występuje jednak przy wysokich częstościach.

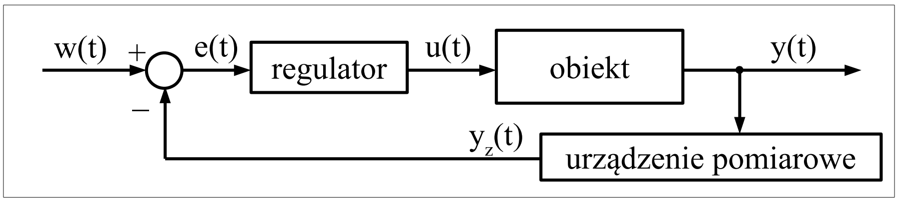
Inne informacje o regulatorach

W praktyce zdarzają się modyfikacje transmitancji regulatorów, np. powszechnie stosowany regulator PID bywa też budowany z transmitancją w postaci $k_p+k_i\frac{1}{s}+k_d s$. Regulator PID może być w dość łatwy sposób zrealizowany za pomocą analogowych układów elektrycznych, ale najprościej i tanio można zrealizować go cyfrowo za pomocą dowolnego mikrokontrolera.

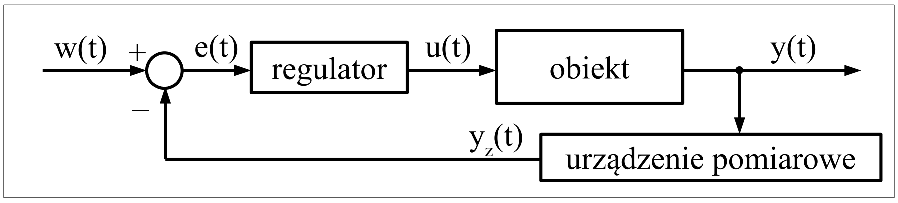
Realizację praktyczną algorytmu PID w pewnym układzie sterowania możemy opisać za pomocą pseudokodu:

```
dt = 0.1
p_błąd = 0
suma = 0
start:
  błąd = wartość_zadana - wartość_zmierzona
  suma = suma + błąd * dt
  pochodna = ( błąd - p_błąd) / dt
  wyjście = Kp* błąd + Ki*suma + Kd*pochodna
  p_błąd =  błąd
  wait(dt)
  goto start
```

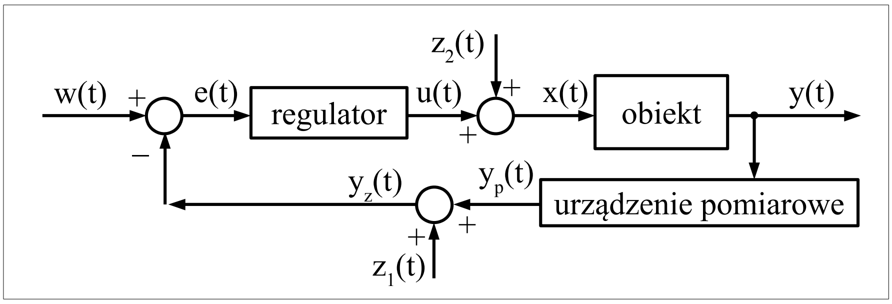
W celu dokładniejszego zbadania procesu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym istnieje często potrzeba uwzględnienia transmitancji elementu pomiarowego



W celu dokładniejszego zbadania procesu sterowania ze sprzężeniem zwrotnym istnieje często potrzeba uwzględnienia transmitancji elementu pomiarowego



Zdarzają się również sytuacje, w których ze względu na precyzję sterowania konieczne jest dodatkowe uwzględnienie wpływu sygnałów zakłócających np. proces pomiarowy czy też proces sterowania



Wypisując istniejące w powyższym układzie zależności

$$y(s)=x(s)G_o(s)\ ,\ y_z(s)=y_p(s)+z_1(s)\ ,\ y_p(s)=y(s)G_p(s)\ ,\ e(s)=w(s)-y_z(s)\ ,$$
$$u(s)=e(s)G_R(s)\ ,\ x(s)=u(s)+z_2(s)$$

możemy podać zależność na transformatę sygnału wyjściowego

$$y(s)=\frac{G_o}{(1+G_p G_R G_o)}((w-z_1)G_R+z_2)$$

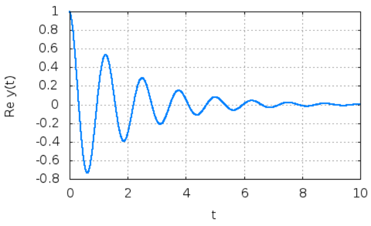
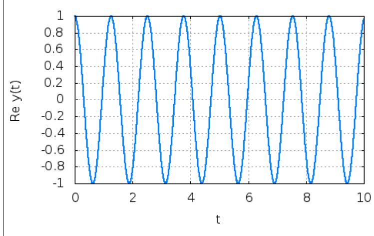
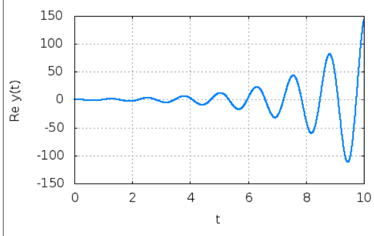
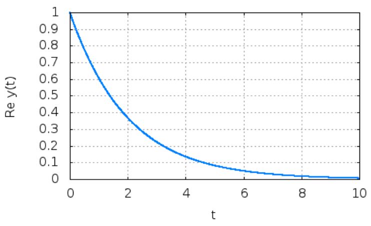
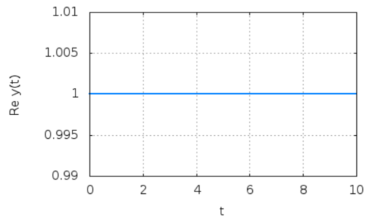
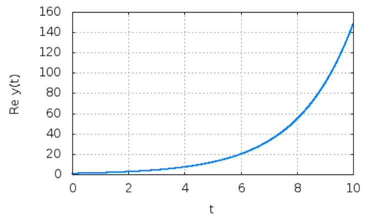
Badanie stabilności

W mechanice ogólnej spotykamy się z pojęciem **stateczności** – układ stateczny wraca do położenia równowagi po wytrąceniu go z tego położenia. W automatyce posługujemy się merytorycznie zbliżoną definicją **stabilności** – pewien układ liniowy jest stabilny, jeśli przy istnieniu ograniczonego wymuszenia (wejścia) otrzymujemy ograniczoną odpowiedź (wyjście). W szczególnym przypadku przy braku wymuszenia układ ma ograniczoną odpowiedź często zbiegającą do stałej wartości.
Badanie stabilności może dotyczyć zarówno pojedynczego obiektu z wejściem i wyjściem, jak również bardziej nas teraz interesującego układu automatycznej regulacji, gdzie wejściem jest wartość zadana lub sygnał zakłócenia, a wyjściem wartość regulowana.
Często rozpatruje się również stabilność układu automatycznej regulacji rozważając wpływ zakłócenia na pracę układu i jego zdolność do powracania do stanu ustalonego po zaniku zakłócenia.

W praktyce ocena stabilności wiąże się ze sprawdzeniem postaci **pierwiastków równania charakterystycznego** danego układu – równanie to powstaje poprzez przyrównanie do zera mianownika transmitancji układu.

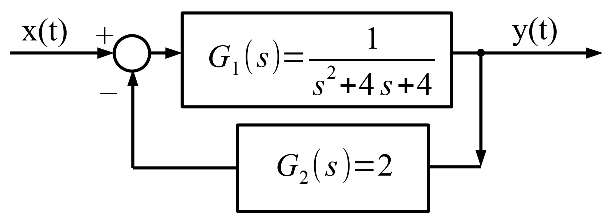
Układ o transmitancji $G(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{1}{s-s_1}$, gdzie s_1 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (nazywamy je biegunem). s_1 jest pewną stałą liczbą rzeczywistą lub zespoloną.
Odpowiedź tego układu na wymuszenie impulsem jednostkowym $x(t)=\delta(t)$ ma postać $y(t)=x(s)G(s)=L^{-1}\{\delta\}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-s_1}\right\}=1(t)e^{s_1 t}$
Po rozwinięciu na część rzeczywistą i urojoną i zastosowaniu wzoru Eulera otrzymujemy $y(t)=e^{(a_1+jb_1)t}=e^{a_1 t}e^{jb_1 t}=e^{a_1 t}(\cos b_1 t+j\sin b_1 t)$. Widzimy, że część urojona pierwiastka równania charakterystycznego odpowiada za oscylacje rozwiązania ogólnego, a część rzeczywista pierwiastka odpowiada za stabilność układu – układ jest stabilny, gdy $a_1<0$, a niestabilny, gdy $a_1>0$. Warunek ujemnych wartości części rzeczywistych pierwiastków równania charakterystycznego nazywamy **ogólnym warunkiem stabilności** (jest to warunek konieczny i wystarczający).

$\Re\, y(t) = e^{a_1 t} \cos b_1 t$

	$a_1 < 0$	$a_1 = 0$	$a_1 > 0$
$b_1 > 0$ $b_1 < 0$			
$b_1 = 0$			

Przykład 5

Zbadać stabilność zamkniętego układu ze sprzężeniem zwrotnym, zawierającego element inercyjny II rzędu oraz element proporcjonalny.



Transmitancja zastępcza całego układu:

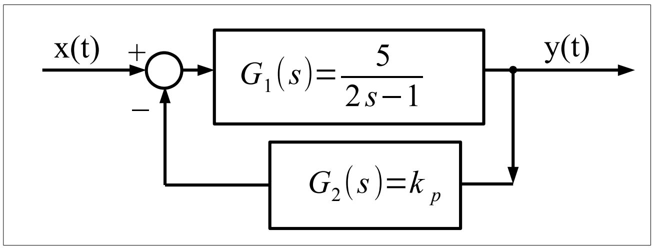
$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{1}{s^2 + 4s + 6} = \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Pierwiastki równania charakterystycznego: $s_1 = -2 - 2\sqrt{2}\, j, \;\; s_2 = -2 + \sqrt{2}\, j$

$\Re(s_1) < 0 \wedge \Re(s_2) < 0 \Rightarrow$ układ jest stabilny z ogólnego warunku stabilności.

Przykład 6

Podać warunek na wartość parametru k_p aby układ spełniał ogólny warunek stabilności.



Przekształcamy transmitancję $G(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{G_1}{1+G_1 G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$

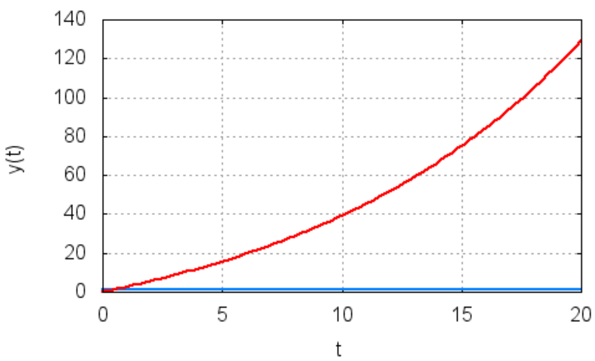
Pierwiastek równania charakterystycznego układu: $s_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$

Układ będzie stabilny, gdy $\Re(s_1)<0$, co nastąpi gdy $k_p>\frac{1}{5}$

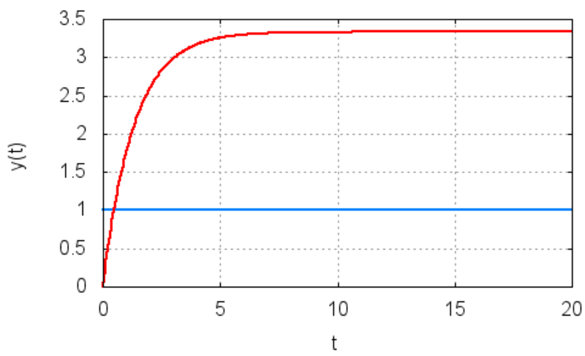
Warto zwrócić uwagę, że obiekt o transmitancji $G_1(s)$ jest sam w sobie niestabilny, a ujemne sprzężenie zwrotne poskutkowało stabilizacją tego układu.

Warto obejrzeć jak wygląda odpowiedź układu na wymuszenie skokowe dla przykładowych wartości k_p

$k_p=\frac{1}{6}$ (układ niestabilny)



$k_p=\frac{1}{2}$ (układ stabilny)



Kryterium stabilności Hurwitza

Ponieważ obliczanie pierwiastków wielomianu bywa kłopotliwe dla jego wyższych rzędów możemy posłużyć się **kryterium Hurwitza** – układ o równaniu charakterystycznym postaci $\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = 0$ ma ujemne części rzeczywiste pierwiastków tego równania, gdy dla rzędu równania n **wszystkie współczynniki** a_i **są dodatnie i wszystkie podwyznaczniki wyznacznika głównego** Δ_n **są większe od zera**

$$\Delta_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \left[a_{n-1} \right] \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{bmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{bmatrix} \quad \text{itd.}$$

Przykład 7

Sprawdzić stabilność układu o transmitancji $G(s) = \dfrac{5s+3}{10s^2+3s+1}$ z warunku Hurwitz'a.

Przykład 8

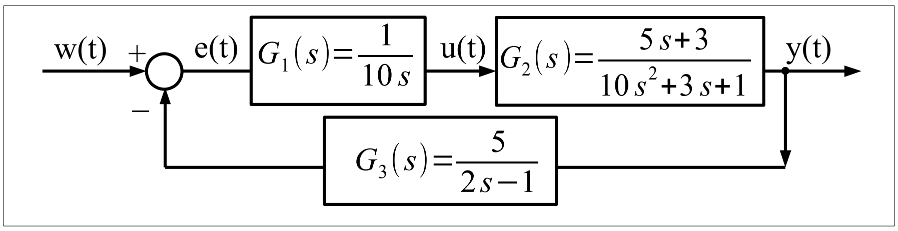
Sprawdzić stabilność obiektu o transmitancji $G(s) = \dfrac{3s-5}{s^3+4s^2+3s+10}$ z warunku Hurwitz'a.

Przykład 9

Sprawdzić stabilność obiektu o transmitancji $G(s) = \dfrac{1}{3s^4+4s^3+6s^2+4s+5}$ z warunku Hurwitz'a.

Przykład 10

Sprawdzić stateczność układu

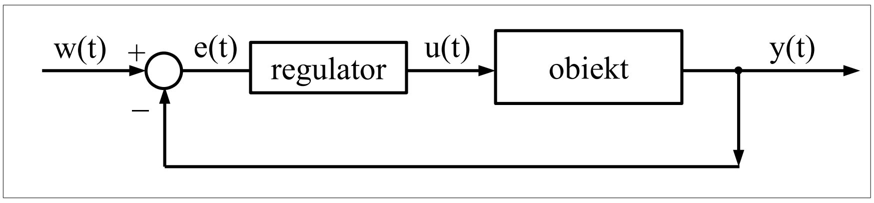


Kryterium stabilności Nyquista

Szczególne kryterium Nyquista: zamknięty układ ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeśli charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego omija punkt o współrzędnych zespolonych (-1, 0j) mając go po lewej stronie.

Kryterium to łatwo udowodnić. Dla układu zamkniętego transmitancja ma postać

$$G_z(s)=\frac{G_R(s)\,G_O(s)}{1+G_R(s)\,G_O(s)}$$

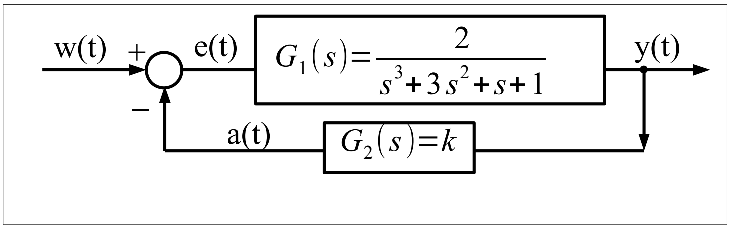


Układ będzie zatem niestabilny, gdy mianownik tej transmitancji będzie równy zero, a to ma miejsce gdy $G_R G_O = -1$. $G_R G_O$ jest transmitancją układu otwartego

$$G_{otw}(s)=\frac{y(s)}{w(s)}=G_R G_O$$

Przykład 11

Dobrać współczynnik k z warunku na stabilność według kryterium Nyquista.



$$G_{otw}(s)=\frac{a(s)}{w(s)}=G_1\,G_2=\frac{2\mathrm{k}}{s^3+3s^2+s+1}$$

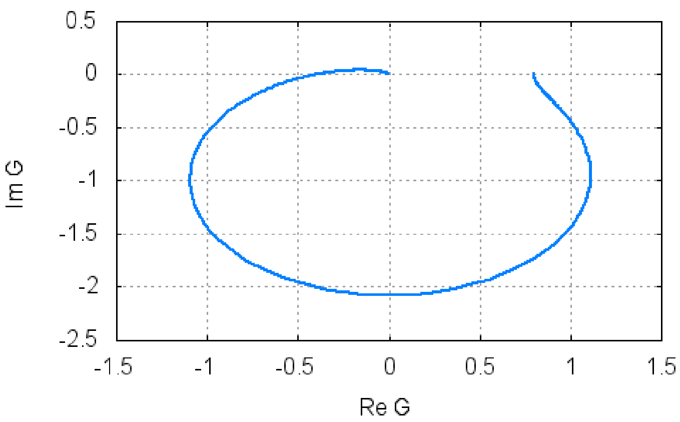
$$P(\omega)=\frac{2\mathrm{k}-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2} \qquad Q(\omega)=\frac{2\mathrm{k}\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$Q(\omega)=0 \;\; dla \;\; \omega=0 \;\; i \;\; \omega=1 \quad , \quad P\left(\omega=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$$

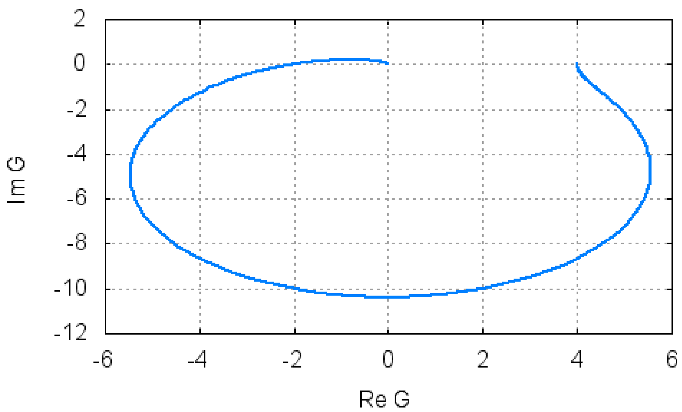
$P(\omega=1)=-k$, układ będzie stabilny, gdy $P(\omega=1)>-1$, czyli dla k < 1.

Przykładowe wykresy transmitancji widmowej układu otwartego:

k=0,5 (układ zamknięty stabilny)



k=2 (układ zamknięty niestabilny)



ZADANIA POWTÓRZENIOWE

Przykład 12

Sprawdzić stabilność układów z kryterium Hurwitz'a: $\dfrac{3s-5}{8s^3+4s^2+s+10}$

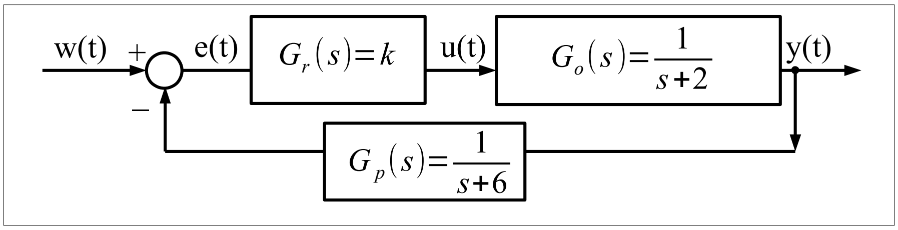
Przykład 13

Dobrać parametr *k* aby układ był stabilny z kryterium Hurwitz'a:

$\dfrac{ks}{4s^3+3s^2+ks+1}$, $\dfrac{2}{2s^3+ks^2+(1+k)s+3}$

Przykład 14

Dobrać współczynnik k stosując ogólny warunek stabilności.



$$G_z(s)=\frac{G_r G_o}{1+G_r G_o G_p}=...=\frac{ks+6k}{s^2+8s+12+k}$$

$\Delta=16-4\text{k}$

$\Delta>0 \;\; dla \;\; k<4$

$$s_1=\frac{-8-\sqrt{16-4k}}{2}=-4-\sqrt{4-k}$$ - część rzeczywista zawsze ujemna

$$s_2=\frac{-8+\sqrt{16-4k}}{2}=-4+\sqrt{4-k}$$ - część rzeczywista ujemna tylko gdy $k>-12$

podsumowując $k\in(-12,4)$

$\Delta=0 \;\; dla \;\; k=4$

$s_1=-4$ - część rzeczywista zawsze ujemna

podsumowując $k=4$

$\Delta<0 \;\; dla \;\; k>4$

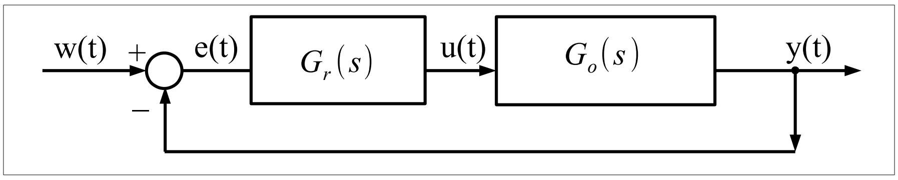
$$s_1=\frac{-8-\sqrt{16-4k}}{2}=-4-\sqrt{4-k}=-4-j\sqrt{k-4}$$ - część rzeczywista zawsze ujemna

$$s_1=\frac{-8+\sqrt{16-4k}}{2}=-4+\sqrt{4-k}=-4+j\sqrt{k-4}$$ - część rzeczywista zawsze ujemna

podsumowując k > 4

Podsumowując wszystkie warunki otrzymamy stabilność układu dla $k>-12$. Należy jednak zauważyć, że dla $k\in(-12,4)$ zachowanie układu ma postać eksponencjalną, a dla $k>4$ zachowanie ma charakter oscylacyjny.

Przykład 15



Stosując kryterium Hurwitza dobrać współczynnik T regulatora proporcjonalno-różniczkującego aby układ był stabilny.

$$G_r(s)=4\frac{s}{Ts+1} \qquad G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

$$G_z(s)=\frac{G_rG_o}{1+G_rG_oG_p}=\frac{4s}{a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

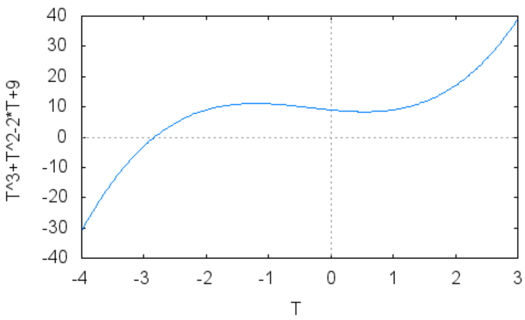
gdzie: $a_4=T\,,\ a_3=2\mathrm{T}+1,\ a_2=T+2,\ a_1=T+5,\ a_0=1$

Pierwszy warunek: $a_4>0,\ a_3>0,\ a_2>0,\ a_1>0,\ a_0>0$ będzie spełniony dla T>0.

$$\Delta_1=[a_3]>0 \quad \rightarrow 2\mathrm{T}+1>0 \rightarrow T>-\frac{1}{2}$$

$$\Delta_2=\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}=T^2+2>0 \quad \text{dla każdego T}$$

$$\Delta_3=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{bmatrix}=T^3+T^2-2T+9>0 \quad \text{dla T > 2,83}$$



Ostatecznie aby spełnione były wszystkie warunki stała T musi spełniać warunek T > 2,83.