

# PAiTM

materiały uzupełniające do ćwiczeń

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

studia inżynierskie

prowadzący: mgr inż. Sebastian Korczak

*Poniższe materiały tylko dla studentów uczęszczających na zajęcia.  
Zakaz rozpowszechniania i powielania bez zgody autora.*

## PODSTAWY AUTOMATYKI – CZĘŚĆ I

### Zakres materiału na 3 kolokwium lub pracę domową

1. Równania elementów automatyki i ich transmitancje operatorowe. Elementy: proporcjonalny, inercyjny I-go rzędu, całkujący, różniczkujący, oscylacyjny i opóźniający. Odpowiedzi na wymuszenie skokowe oraz charakterystyki częstotliwościowe.
2. Algebra schematów blokowych. Połączenia elementów automatyki szeregowo, równoległe i ze sprzężeniem zwrotnym.

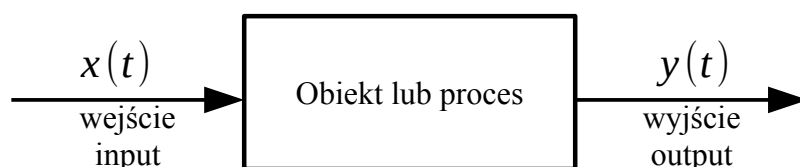
### WSTĘP TEORETYCZNY

*Proszę w pierwszej kolejności zapoznać się z materiałem z wykładu*

Przed przystąpieniem do zadania automatycznego sterowania obiektami lub procesami należy zapoznać się ze sposobem opisu stosowanym w teorii automatyki i sterowania.

W przedmiocie skupimy się na rozważaniu obiektów, dla których wyróżniamy jedną zmienną wejściową (sygnał wejściowy, wymuszenie układu, zazwyczaj będziemy mogli je zmieniać) oraz jedną zmienną wyjściową (sygnał wyjściowy, wpływamy na niego poprzez zmianę sygnału wejściowego).

### Single Input Single Output (SISO)



Podstawowa teoria sterowania zajmuje się układami liniowymi niezależnymi od czasu (ozn. LTI od *linear time-invariant system*).

Jeśli  $x(t)$  to sygnał wejściowy, a funkcja  $h(\cdot)$  opisuje działanie układu, tak że wyjście możemy obliczyć jako  $y(t)=h(x(t))$ , to układ nazywamy liniowym, gdy spełnia własność skalowalności  $\alpha y(t)=\alpha h(x(t))=h(\alpha x(t))$ .

Układ jest niezależny od czasu jeśli dla zależności wyjście/wejście  $y(t)=h(x(t))$  spełniona jest

również zależność  $y(t-\tau)=h(x(t-\tau))$  dla dowolnego  $\tau$  (czyli funkcja  $h(\cdot)$  nie zależy jawnie od czasu).

Badając zachowanie obiektów posługujemy się kilkoma typowymi funkcjami wejściowymi:

- sygnał zerowy (brak sygnału wejściowego):  $x(t)=0$
- impuls jednostkowy (delta Dirac'a, należy kojarzyć to bardzo krótkim pobudzeniem układu, np. uderzeniem układu młotkiem):

$$\delta(t)=\begin{cases} 0, & t < 0 \\ \infty, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

- skok jednostkowy (funkcja Heaviside'a):  $1(t)=\begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$  oznaczana też:  $H(t), 1_+(t)$
- liniowy przyrost sygnału (funkcja *Ramp*):  $x(t)=\begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t > 0 \end{cases}$
- funkcja harmoniczna:  $x(t)=a_x \sin(\omega t)$

## Transformata Laplace'a

Dana jest ciągła funkcja  $x(t)$  lokalnie całkowalna dla  $t \in \langle 0, \infty \rangle$  i taka, że dla  $t < 0$   $x(t)=0$

Transformatę Laplace'a funkcji  $x(t)$  definiujemy jako  $\int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$  i oznaczamy  $L\{x(t)\}=X(s)$ , gdzie  $s \in \mathbb{C}$  jest liczbą zespoloną ( $s=\sigma+j\omega$ ,  $j=\sqrt{-1}$ )

### Przykład 1

$$x(t)=e^{-2t}, t \geq 0. X(s)=?$$

$$\text{Rozwiązanie: } X(s)=L\{e^{-2t}\}=\int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(2+s)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-(2+s)t}}{-(2+s)} \right]_0^T = \frac{1}{s+2} \quad (s > -2)$$

## TABELA TRANSFORMAT LAPLECE'A

$f(t), t \geq 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ impuls jednostkowy	1
$1(t)$ skok jednostkowy	$\frac{1}{s}$
$\text{sgn}(t)$ signum	$\frac{2}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-bt}$	$\frac{1}{s+b}$
$1 - e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(s)$
$x(t) + y(t)$	$X(s) + Y(s)$
$x(t) * y(t)$ splot	$X(s) \cdot Y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s) - y(0)$
$\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$	$s^2 Y(s) - s y(0) - \frac{dy(0)}{dt}$
$\frac{d^n y(t)}{dt^n}$	$s^n Y(s) - \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}} - s \frac{d^{n-2} y(0)}{dt^{n-2}} - \dots - s^{n-1} y(0)$

## Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe z zastosowaniem Transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t), \quad \frac{dy(0)}{dt} = 2, \quad y(0) = 3, \quad t \geq 0$$

Po transformacji całego równania równanie różniczkowe zmienia się w wielomian ze zmienną zespoloną  $s$ , możemy od razu napisać  $Y(s) = \frac{1-7s+3s^2}{s(s-1)(s-2)}$

Aby otrzymać rozwiązanie w dziedzinie czasu korzystamy z odwrotnej transformaty Laplace'a. Aby wykorzystać tabelę gotowych wzorów rozkładamy  $Y(s)$  na czynniki  $Y(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + 3 \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{s-2}$

Po wykorzystaniu tabeli otrzymujemy rozwiązanie  $y(t) = \frac{1}{2} 1(t) + 3e^t - \frac{1}{2} e^{2t}$ .

## Transmitancja (funkcja przejścia układu, transfer function)

Dla układu liniowego niezależnego od czasu, o jednym wyjściu i wejściu opisanego równaniem ogólnym

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + b_m x(t)$$

po transformacji Laplace'a przy zerowych warunkach początkowych

$$s^n Y(s) + a_1 s^{n-1} Y(s) + \dots + a_{n-1} s Y(s) + a_n Y(s) = s^m X(s) + b_1 s^{m-1} X(s) + \dots + b_{m-1} s X(s) + b_m X(s)$$

możemy napisać zależność między transformatą wyjścia i wejścia, którą nazywamy transmitancją

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

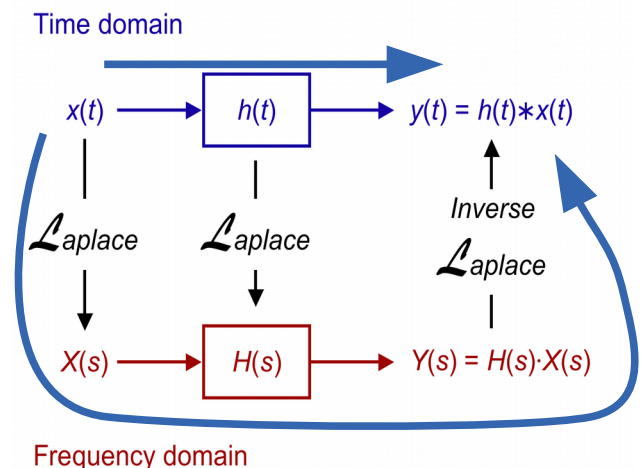
Znając transmitancję możemy szybko obliczyć sygnał wyjściowy z układu przy dowolnym sygnale wejściowym (odpowieź układu na dowolne wymuszenie) korzystając z zależności

$$Y(s) = G(s) X(s)$$

(transformata wyjścia =  
transmitancja \* transformata wejścia)

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\}$$

Rysunek obok pokazuje dwie drogi liczenia odpowiedzi układu  $y(t)$  na wymuszenie  $x(t)$ . Droga krótsza wymaga konieczności rozwiązania równania różniczkowe lub dokonania operacji splotu (ozn. gwiazdką), droga dłuższa wymaga korzystania z tablic i operowania na wielomianach.



źródło: wikipedia

Transmitancję zapisać możemy również w postaci  $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$

I wtedy  $z_1, z_2, \dots, z_m$  nazywamy „zerami” transmitancji, a  $p_1, p_2, \dots, p_n$  „biegunami” (uwaga, zera i bieguny mogą być liczbami zespolonymi).

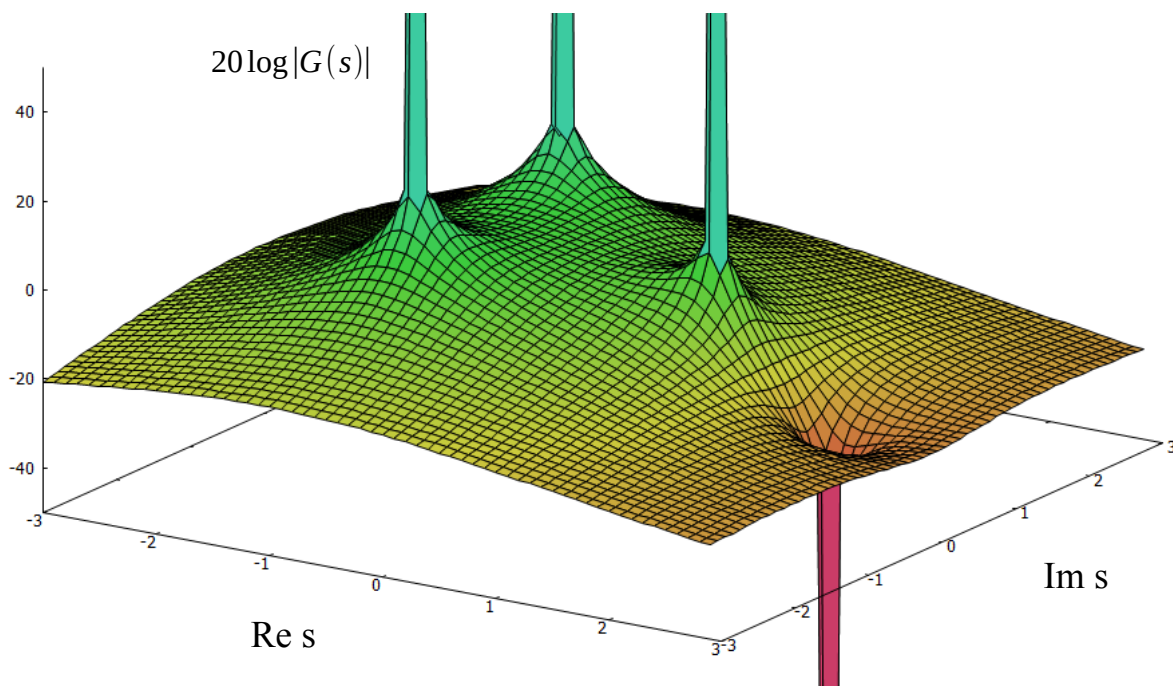
### **Przykład 3**

Obejrzyjmy przykładową transmitancję  $G(s) = \frac{2-s}{s^3+s^2-2}$

Po znalezieniu pierwiastków wielomianu z mianownika możemy transmitancję zapisać w formie

$$G(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s+j+1)(s-i+1)}, \text{ gdzie bieguny } p_1=1, p_2=-1-i, p_3=-1+i \text{ i zero } z_1=2.$$

Ponieważ jest to funkcja zespolona, aby przedstawić ją na wykresie musiałby być to wykres czterowymiarowy. Wykreślmy zatem wykres modułu transmitancji w funkcji parametru zespolonego  $s$  w skali logarytmicznej (skala log. konieczna ze względu na bardzo duży zakres wartości).



Dla  $s=z_1$  wartość modułu transmitancji wynosi zero (czyli  $-\infty$  dla skali log.), dla  $s=p_1, p_2$  lub  $p_3$  (czyli w biegunach) transmitancja ma wartość  $+\infty$ .

Ponieważ potraktowaliśmy jako niewiadome zarówno wejście jak i wyjście do układu, to transmitancja operatorowa w pełni opisuje jego działanie dla dowolnych sygnałów.

Zachęcam do przypomnienia sobie o liczbach zespolonych np. z [wikipedii](https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczby zespolone).

## Transmitancja widmowa

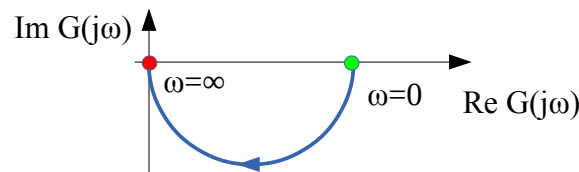
Transmitancja widmowa charakteryzuje zachowanie ustalone układu liniowego przy wymuszeniu harmonicznym (sinusoidalnym), przy czym moduł transmitancji wyznacza stosunek amplitud sygnału wyjściowego do wejściowego, a argument transmitancji wyznacza przesunięcie fazowe sygnału wyjściowego względem wejściowego.

Transmitancję widmową wyznaczamy poprzez podstawienie do transmitancji operatorowej  $s=j\omega$ .

Transmitancję widmową przedstawiamy na wykresie nazywanym charakterystyką amplitudowo-częstościową (wykresem Nyquista). Aby sporządzić ten wykres transmitancję widmową rozkładamy na część rzeczywistą i urojoną:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

i przyjmując za parametr częstość wejściowego sygnału harmonicznego  $\omega$  za współrzędne punktów wykresu przyjmujemy części rzeczywistą i urojoną transmitancji, np.:



Wiele informacji niosą też inne wykresy:

$$\text{amplitudowo-częstościowy } A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

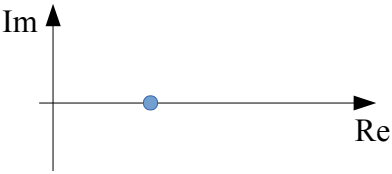
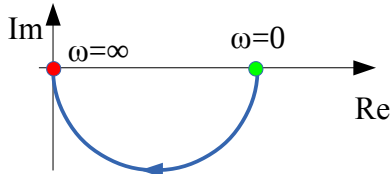
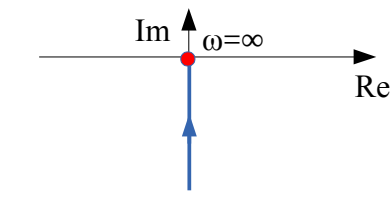
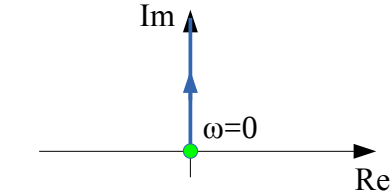
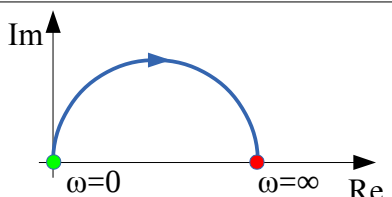
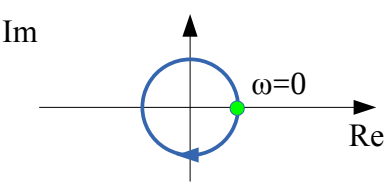
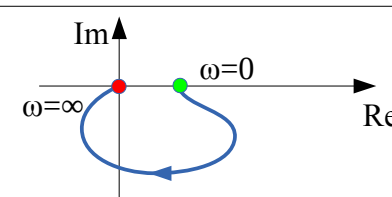
$$\text{logarymiczna charakterystyka amplitudowo-częstościowa } L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\text{fazowo-częstościowy } \delta(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Zatem dla sygnału harmonicznego wejściowego  $x(t) = x_0 \sin \omega t$  wyjście układu ma postać  $y(t) = x_0 A(\omega) \sin(\omega t + \delta(\omega))$

Charakterystyka amplitudowo-częstościowa odzwierciedla wzmocnienie sygnału po przejściu przez układ, a charakterystyka fazowo-częstościowa opisuje opóźnienie sygnału wyjściowego względem wejściowego.

W ramach podstaw teorii automatyki niezwykle ważne jest poznanie kilku podstawowych transmitancji i ich charakterystyk, gdyż wykorzystuje się je do opisu bardzo wielu układów/procesów/zjawisk. W oparciu o te podstawowe transmitancje buduje się również układy sterowania automatycznego.

Element	Równanie elementu	Transmitancja	Wykres Nyquist'a
proporcjonalny ( <i>proportional</i> )	$y(t) = ku(t)$	$k$	
inercyjny I-go rzędu ( <i>first order</i> )	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{Ts+1}$	
całkujący ( <i>integrator</i> )	$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t)$ lub $y(t) = k \int_0^t u(t) dt$	$\frac{k}{s}$	
różniczkujący idealny ( <i>derivative</i> )	$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	$ks$	
różniczkujący rzeczywisty ( <i>derivative with inertia</i> )	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	$\frac{ks}{Ts+1}$	
opóźniający ( <i>delay</i> )	$y(t) = u(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$	
inercyjny II-go rzędu, oscylacyjny ( <i>second order, oscillator</i> )	$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$	

Wykres Nyquist'a	Przykładowa charakterystyka Bodego	
