DRGANIA MECHANICZNE

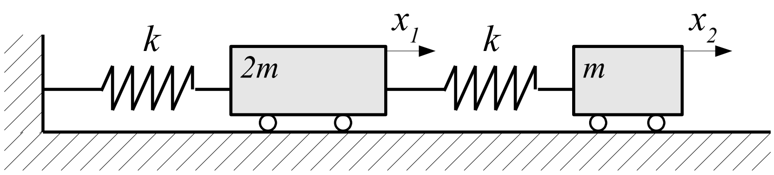
materiały uzupełniające do ćwiczeń

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
studia inżynierskie

prowadzący: mgr inż. Sebastian Korczak

część 6 – układy dyskretne o wielu stopniach swobody

PRZYKŁAD 1



Wyprowadzenie równania ruchu metodą Równań Lagrange'a II rodzaju i obliczenie postaci ogólnej rozwiązania drgań swobodnych układu (bez uwzględniania warunków początkowych).

Energia kinetyczna „wagoników" (punktów materialnych) oraz energia potencjalna sprężyn nieważkich i liniowych:

$$E_k=\frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \qquad E_p=\frac{1}{2}k x_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$$

pochodne niezbędne do ułożenia Równań Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{d}{dt}(2m\dot{x}_1)=2m\ddot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2}\right)=\frac{d}{dt}(m\dot{x}_2)=m\ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1}\right)=k x_1-k(x_2-x_1) \qquad \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_2}\right)=k(x_2-x_1)$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right)+\left(\dfrac{\partial E_p}{\partial x_1}\right)=0\\[2ex]\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2}\right)+\left(\dfrac{\partial E_p}{\partial x_2}\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2k\,x_1 - k\,x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - k\,x_1 + k\,x_2 = 0 \end{cases}$$

dla każdego z równań różniczkowych mamy jeszcze dwa warunki początkowe

$$x_1(t=0) = x_{10}\ ,\quad x_2(t=0) = x_{20}\,,\quad \dot{x}_1(t=0) = v_{10}\,,\quad \dot{x}_2(t=0) = v_{20}$$

Powyższe równania różniczkowe zapisujemy w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2\mathrm{m} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathrm{k} & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad lub\ \ \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = 0$$

Przewidujemy rozwiązanie – ruch harmoniczny obu ciał z różnymi amplitudami i niewiadomą jeszcze częstością (rozwiązanie ogólne równania jednorodnego; drgania swobodne nietłumione):

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad lub\ \ \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\sin(\omega t + \varphi)$$

Liczymy pochodne rozwiązania aby podstawić je do równań ruchu:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 \omega \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{x}_2 = A_2 \omega \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad lub\ \ \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{A}\omega\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -A_1 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{x}_2 = -A_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad lub\ \ \ddot{\boldsymbol{X}} = -\boldsymbol{A}\omega^2\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\begin{bmatrix} 2\mathrm{m} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\left(-\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)\right) + \begin{bmatrix} 2\mathrm{k} & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\sin(\omega t + \varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Upraszczamy pamiętając, że mnożenie macierzy nie jest przemienne

$$\left((-\omega^2)\begin{bmatrix} 2\mathrm{m} & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\mathrm{k} & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\sin(\omega t + \varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\mathrm{k} - 2\mathrm{m}\,\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\sin(\omega t + \varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aby powyższe było spełnione musi zerować się iloczyn macierzy, które oznaczymy jako B i A

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 0 \qquad (*)$$

Warunkiem zerowania powyższego iloczynu jest zerowy wyznacznik macierzy B
(lub inaczej, powyższe jest jednorodnym układem równań liniowych)

$$det\,\boldsymbol{B}=0$$

$$(2\mathrm{k}-2\mathrm{m}\,\omega^2)(k-m\,\omega^2)-k^2=0$$

wprowadzamy parametr $\lambda=\omega^2$ - interesują nas rzeczywiste nieujemne częstości w liczbie równej liczbie stopni swobody układu. Po uproszczeniu rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$2\,m^2\lambda^2-4\,k\,m\,\lambda+k^2=0$$

$$\lambda_1=\omega_1^2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\,\frac{k}{m}\approx 0{,}29\,\frac{k}{m} \qquad \omega_1\approx 0{,}54\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\lambda_2=\omega_2^2=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\,\frac{k}{m}\approx 1{,}7\,\frac{k}{m} \qquad \omega_2\approx 1{,}3\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Matematycznie pokazaliśmy, że dla proponowanego rozwiązania harmonicznego mogą wystąpić dwie częstości drgań układu. Układ ma tyle częstości drgań ile stopni swobody. Rozwiązanie równań ruchu musimy teraz zmodyfikować aby uwzględnić obie częstości:

$$\begin{cases} x_1=A_{11}\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_{12}\sin(\omega_2 t+\varphi_2) \\ x_2=A_{21}\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_{22}\sin(\omega_2 t+\varphi_2) \end{cases}$$

(uwaga, ponieważ ten plik przygotowany został w poprzednich latach to oznaczenia indeksów amplitud mogą różnić się od tych na zajęciach, ale nie ma to wpływu na wynik)

Rozwiązanie zawiera 6 niewiadomych, a dostępne są tylko 4 warunki początkowe. Skorzystamy zatem jeszcze raz z równania $(*)$ i podstawimy do niego znane już częstości:

$$\omega_1\Rightarrow * \quad \begin{bmatrix} 2\mathrm{k}-2\mathrm{m}\,\omega_1^2 & -k \\ -k & k-m\,\omega_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Po uproszczeniu otrzymujemy jednorodny układ równań liniowych z niewiadomymi amplitudami.

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2}\,k & -k \\ -k & \frac{\sqrt{2}}{2}\,k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Po przemnożeniu macierzy możemy zauważyć, że jest to układ nieoznaczony, jego wynikiem jest zależność między zmiennymi – proporcja między amplitudami drgań obu ciał z pierwszą częstością

$$\begin{cases} \sqrt{2}k\,A_{11} - k\,A_{21} = 0 \\ -k\,A_{11} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}k\,A_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{21} = \sqrt{2}\,A_{11}$$

Powtarzamy operację dla drugiej częstości:

$$\omega_2 \Rightarrow * \quad \begin{bmatrix} 2\mathrm{k} - 2\mathrm{m}\,\omega_2^2 & -k \\ -k & k - m\,\omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

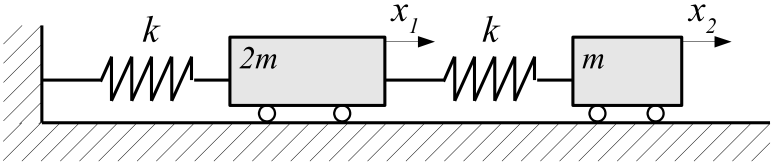
$$\begin{bmatrix} -\sqrt{2}k & -k \\ -k & \dfrac{-\sqrt{2}}{2}k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}\,k\,A_{12} - k\,A_{22} = 0 \\ -k\,A_{12} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}k\,A_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow A_{22} = -\sqrt{2}\,A_{12}$$

Korygujemy ostateczne rozwiązanie o wyznaczone zależności, posiada ono teraz tylko 4 niewiadome które znajdujemy z podstawienia konkretnych warunków początkowych.

$$\begin{cases} x_1(t) = A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) = \sqrt{2}\,A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - \sqrt{2}\,A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

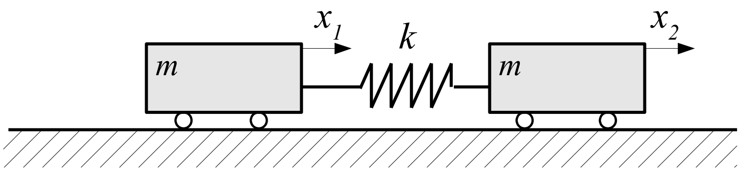
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} A_{11}\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} A_{12}\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$



Widzimy, że każdy z „wagoników” układu może drgać z dwiema częstościami, przy czym amplitudy drgań drugiego są większe (co wynika z jego mniejszej masy przy podobnych sztywnościach).
Układ może więc drgać z dwiema charakterystycznymi postaciami drgań o różnych częstościach. Pierwsza postać drgań to ruch obu wagoników w jedną stronę z częstością ω_1. Druga postać drgań to ruch harmoniczny wagoników w kierunkach przeciwnych z częstością ω_2.

-- tu proszę zajrzeć do materiałów z wykładu (postacie drgań, współczynniki wpływu) --

PRZYKŁAD 2



$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^{\,2} \qquad E_p = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_1) = m\ddot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2}\right) = \frac{d}{dt}(m\dot{x}_2) = m\ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1}\right) = k(x_1 - x_2) \qquad \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_2}\right) = -k(x_1 - x_2)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k x_1 - k x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - k x_1 + k x_2 = 0 \end{cases} \quad + \text{W.P.}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}(-\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)) + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\sin(\omega t + \varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left((-\omega^2)\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\sin(\omega t + \varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}\sin(\omega t + \varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad **$$

$$det\, \boldsymbol{B} = 0$$

$$\left(k - m\,\omega^2\right)\left(k - m\,\omega^2\right) - k^2 = 0$$

$$m^2\lambda^2 - 2\,k\,m\,\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = \omega_1^2 = 0$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 = 2\,\frac{k}{m}$$

Tu mamy do czynienia ze specyficzną sytuacją – zerowanie się częstości drgań własnych. Oznacza ona możliwość poruszania się układu jako ciało sztywne bez drgań. Nie możemy już zatem przewidzieć takiego rozwiązania:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}\,\xcancel{\sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right)} + A_{12}\sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) \\ x_2 = A_{21}\,\xcancel{\sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right)} + A_{22}\sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

Prawidłowe rozwiązanie ma postać:

$$\begin{cases} x_1 = A_{11}\left(1 + B\,t\right) + A_{12}\sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) \\ x_2 = A_{21}\left(1 + B\,t\right) + A_{22}\sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

Nadal mamy 6 niewiadomych a 4 warunki początkowe. Tak jak poprzednio podstawiamy częstości do układu i wyznaczymy proporcje między amplitudami.

$$\omega_1 \Rightarrow\ **\quad \begin{bmatrix} k - m\,\omega_1^2 & -k \\ -k & k - m\,\omega_1^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} k\,A_{11} - k\,A_{12} = 0 \\ -k\,A_{11} + k\,A_{12} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow\ A_{12} = A_{11}$$

$$\omega_2 \Rightarrow * \quad \begin{bmatrix} k - m\omega_2^2 & -k \\ -k & k - m\omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

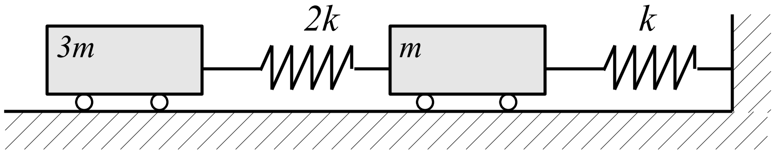
$$\begin{cases} -k\,A_{21} - k\,A_{22} = 0 \\ -k\,A_{21} - k\,A_{22} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \; A_{22} = -A_{21}$$

Po uwzględnieniu otrzymanych proporcji między amplitudami mamy ostateczną postać drgań:

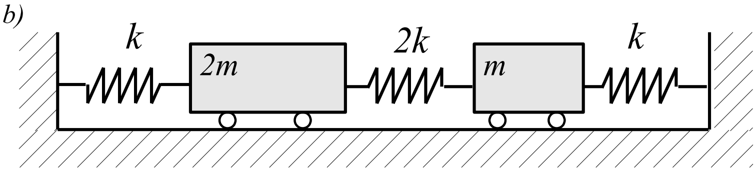
$$\begin{cases} x_1 = A_{11}(1 + B\,t) + A_{21}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2 = A_{11}(1 + B\,t) - A_{21}\sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

INNE PRZYKŁADY

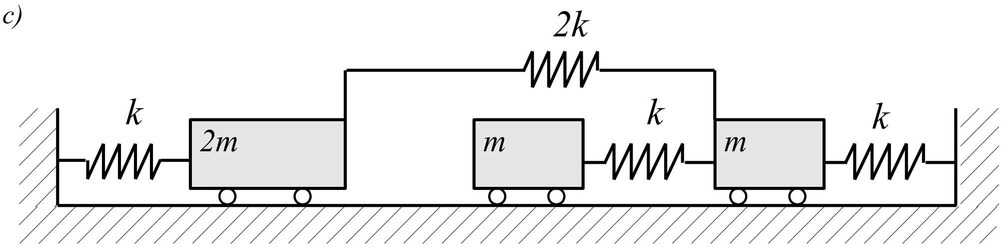
a)



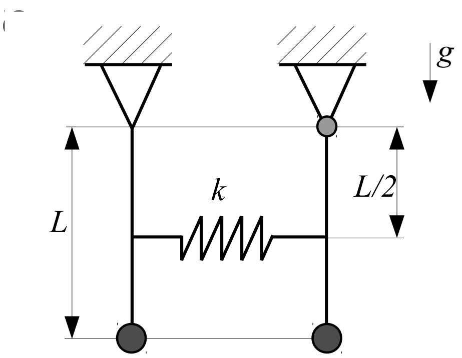
b)



c)



PRZYKŁAD 3



Przykład układania równań ruchu układu dwóch wahadeł matematycznych połączonych sprężyną, przy założeniu małych kątów.

Współrzędne uogólnione: kąty obrotu wahadeł względem pionowego położenia równowagi φ_1, φ_2

$$E_k=\frac{1}{2}m(\dot{\varphi}_1 L)^2+\frac{1}{2}m(\dot{\varphi}_2 L)^2=\frac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}_1{}^2+\frac{1}{2}mL^2\dot{\varphi}_2{}^2$$

$$E_p=E_{ps}+E_{pg}$$

dla energii potencjalnej sprężyny założono od razu małe kąty podczas jej odkształcania:

$$E_{ps}=\frac{1}{2}k\left(\varphi_1\frac{L}{2}-\varphi_2\frac{L}{2}\right)^2=\frac{1}{8}kL^2(\varphi_1-\varphi_2)^2$$

dla energii potencjalnej grawitacji nie wolno od razu zakładać małych kątów:

$$E_{pg}=mgL(1-\cos\varphi_1)+mgL(1-\cos\varphi_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}_1}\right)=mL^2\ddot{\varphi}_1{}^2 \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}_2}\right)=mL^2\ddot{\varphi}_2{}^2$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial\varphi_1}\right)=\frac{1}{4}kL^2(\varphi_1-\varphi_2)+mgL\sin\varphi_1$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial\varphi_1}\right)=-\frac{1}{4}kL^2(\varphi_1-\varphi_2)+mgL\sin\varphi_2$$

Po linearyzacji dla małych kątów $\sin\varphi_1\approx\varphi_1$, $\sin\varphi_2\approx\varphi_2$

$$\begin{cases} mL^2\ddot{\varphi}_1+(\frac{kL^2}{4}+mgL)\varphi_1-\frac{kL^2}{4}\varphi_2=0 \\ mL^2\ddot{\varphi}_2-\frac{kL^2}{4}\varphi_1+(\frac{kL^2}{4}+mgL)\varphi_2=0 \end{cases} + \text{W.P.}$$

$$\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & mL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} kL^2/4+mgL & -kL^2/4 \\ -kL^2/4 & kL^2/4+mgL\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Dla układów o dużej liczbie stopni swobody wykorzystujemy już tylko zapis macierzowy.

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{X} = 0$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\sin(\omega t + \varphi)$$

$$\boldsymbol{M}(-\omega^2)\boldsymbol{A}\sin(\omega t+\varphi) + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A}\sin(\omega t+\varphi) = 0$$

$$\left(-\omega^2\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{A}\sin(\omega t+\varphi) = 0$$

$$\left(\boldsymbol{K} - \lambda\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{A} = 0$$

$det\left(\boldsymbol{K} - \lambda\boldsymbol{M}\right) = 0$ lub $wartości\ własne\ macierzy\left(\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{M}^{-1}\right)$

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(\boldsymbol{K} - \lambda_1\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{A_1} = 0\\ \left(\boldsymbol{K} - \lambda_2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{A_2} = 0\\ \quad\ldots\ldots\end{array}\right\}\ \text{lub}\quad wektory\ własne\ macierzy\left(\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{M}^{-1}\right)$$

$$\boldsymbol{A_1},\ \boldsymbol{A_2},\ \ldots$$

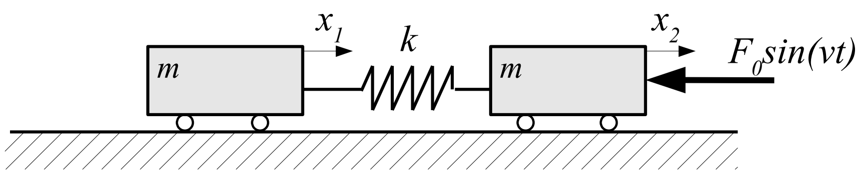
dla $\lambda_i \neq 0$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A_1}\sin\left(\sqrt{\lambda_1}\,t + \varphi_1\right) + \boldsymbol{A_2}\sin\left(\sqrt{\lambda_2}\,t + \varphi_2\right) + \ldots$$

Obliczanie częstości drgań i postaci drgań można zastąpić matematycznymi operacjami szukania wartości własnych i wektorów własnych macierzy KM^{-1}. W programach do obliczeń matematycznych funkcje te odnajdziemy pod nazwami np. *eigenvalues*(...), *eigenvectors*(...).

PRZYKŁAD 4

Układ z wymuszeniem siłą harmoniczną.



$$E_k=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^{\,2} \qquad E_p=\frac{1}{2}k\left(x_1-x_2\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right)=\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_1\right)=m\ddot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2}\right)=\frac{d}{dt}\left(m\dot{x}_2\right)=m\ddot{x}_2$$

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial x_1}\right)=k\left(x_1-x_2\right) \qquad \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_2}\right)=-k\left(x_1-x_2\right)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1+k\,x_1-k\,x_2=0 \\ m\ddot{x}_2-k\,x_1+k\,x_2=-F_0\sin\nu t \end{cases} \quad \text{+ W.P.}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 \end{bmatrix}\sin\left(\nu t\right) \quad (***)$$

Pełne rozwiązanie ruchu tego układu składa się z rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (drgania swobodne, spełnienie warunków początkowych) i rozwiązania szczególnego równania pełnego (drgania ustalone spowodowane wymuszeniem).

$$\boldsymbol{X}\left(t\right)=\boldsymbol{X}_{og.jedn.}\left(t\right)+\boldsymbol{X}_{sz.peł.}\left(t\right)$$

Rozwiązanie ogólne znamy z poprzedniego zadania:

$$\boldsymbol{X}_{og}=\begin{bmatrix} A_{11}\left(1+B\,t\right)+A_{21}\sin\left(\omega_2 t+\varphi_2\right) \\ A_{11}\left(1+B\,t\right)-A_{21}\sin\left(\omega_2 t+\varphi_2\right) \end{bmatrix} \qquad \omega_2^2=\sqrt{2\frac{k}{m}}$$

Rozwiązanie ustalone przewidujemy w tej samej postaci funkcji harmonicznej co wymuszenie, ale o różnych amplitudach drgań obu ciał i z możliwością opóźnienia w czasie odpowiedzi układu względem wymuszenia.

$$\boldsymbol{X}_{sz}\left(t\right)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}\sin\left(\nu t+\delta\right)$$, ale w układzie bez tłumienia $\delta=0$

Rozwiązanie szczególne musi spełniać równania ruchu układu, zatem podstawiamy je do (***)

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}(-\nu^2 \sin(\nu t)) + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}\sin(\nu t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 \end{bmatrix}\sin(\nu t)$$

$$\begin{bmatrix} k - m\nu^2 & -k \\ -k & k - m\nu^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 \end{bmatrix}$$

Mamy teraz do rozwiązania niejednorodny układ równań liniowych postaci:

$$\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}$$

Skorzystamy z metody wyznaczników – wzorów Cramera

(można też użyć np. metody eliminacji Gaussa):

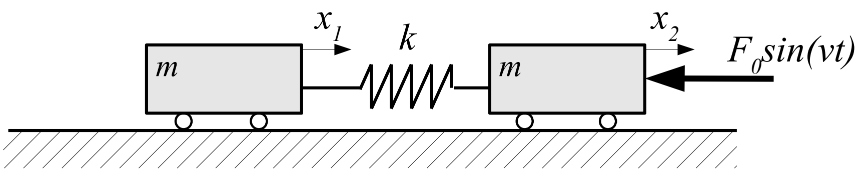
$$\Delta = det\,\boldsymbol{S} = (k - m\nu^2)(k - m\nu^2) - k^2 =$$
$$= k^2 - 2\mathrm{km}\,\nu^2 + m^2\nu^4 - k^2 = m^2\nu^2\left(\nu^2 - \frac{2\mathrm{k}}{m}\right)$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -k \\ -F_0 & k - m\nu^2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-F_0 k}{\Delta} = \frac{-F_0 k}{m^2\nu^2(\nu^2 - 2\mathrm{k}/m)}$$

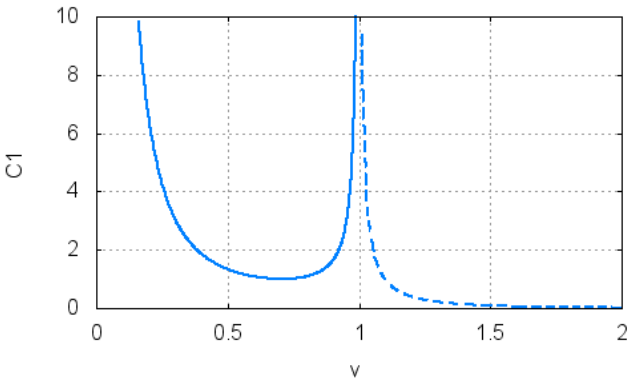
$$C_2 = \frac{\begin{vmatrix} k - m\nu^2 & 0 \\ -k & -F_0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-F_0(k - m\nu^2)}{\Delta} = \frac{-F_0(k - m\nu^2)}{m^2\nu^2(\nu^2 - 2\mathrm{k}/m)}$$

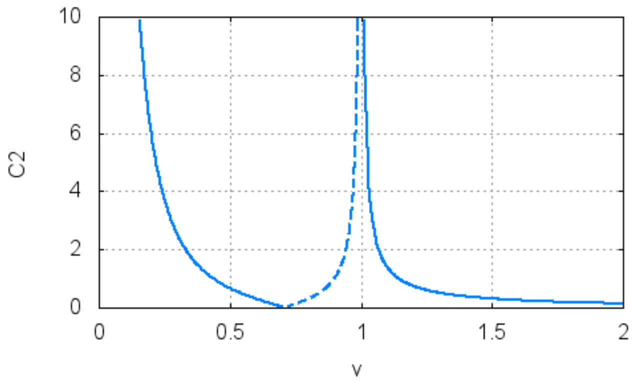
Ostatecznie rozwiązanie ustalone możemy zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{X}_{sz}(t) = \frac{-F_0}{m^2\nu^2(\nu^2 - 2\mathrm{k}/m)}\begin{bmatrix} k \\ k - m\nu^2 \end{bmatrix}\sin(\nu t)$$



Tak przedstawiają się wartości współczynników C w funkcji częstości wymuszenia (dla przykładowej wartości drugiej częstości drgań własnych tego układu równej 1:





Często kreśli się wykresy wartości bezwzględnej współczynników C, czyli amplitud drgań obu wagoników z przykładu. Ciągłą linią oznaczono fragmenty gdzie wartości współczynników są ujemne - występują drgania układu w przeciwfazie do wymuszenia.

Zapis pełnego rozwiązania drgań tego układu:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A_{11}(1+Bt) + \begin{bmatrix} A_{21} \\ -A_{21} \end{bmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\, t + \varphi_2\right) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \dfrac{-F_0 k}{m^2 \nu^2 (\nu^2 - 2k/m)} \\ \dfrac{-F_0 (k - m\nu^2)}{m^2 \nu^2 (\nu^2 - 2k/m)} \end{bmatrix} \sin(\nu t)$$

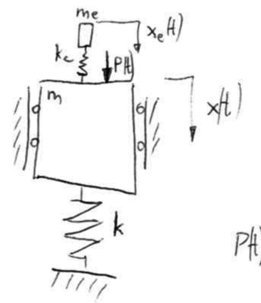
Dopiero teraz możemy wykorzystać warunki początkowe:

$$x_1(0) = x_{10}\,,\quad x_2(0) = x_{20}\,,\quad \dot{x}_1(0) = v_{10}\,,\quad \dot{x}_2(0) = v_{20}$$

PRZYKŁAD 5

<u>Przykład</u> – drgania wymuszone bez tłumienia

Dynamiczny eliminator drgań



$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_e \dot{x}_e^2$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} k_e (x_e - x)^2$$

$$P(t) = P \cdot \sin \nu t$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial x} = P(t) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_e}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial x_e} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx - k_e(x_e - x) = P \cdot \sin \nu t \\ m_e \ddot{x}_e + k_e(x_e - x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (k + k_e)x - k_e x_e = P \sin \nu t \\ m_e \ddot{x}_e - k_e x + k_e x_e = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k + k_e & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \sin \nu t \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}$$

Wyznaczamy tylko rozwiązanie szczególne (ustalone).
Przewidujemy je w postaci:

$$x = B \sin(\nu t + \varphi), \qquad \varphi = 0, \ \varphi_e = 0 \text{ bo nie ma tłumienia!}$$
$$x_e = B_e \sin(\nu t + \varphi_e)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \sin \nu t$$

I podstawiamy do układu:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B_e \end{bmatrix} (-\nu^2 \sin \nu t) + \begin{bmatrix} k_e + k & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B_e \end{bmatrix} \sin \nu t = \begin{bmatrix} P \sin \nu t \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(-\nu^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_e + k & -k_e \\ -k_e & k_e \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} B \\ B_e \end{bmatrix} \cancel{\sin \nu t} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \cancel{\sin \nu t}$$

$$\begin{bmatrix} -m\nu^2 + k_e + k & -k_e \\ -k_e & -\nu^2 m_e + k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (-\nu^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{B} = \mathbf{F}$$

Układ równań z niewiadomymi B i B_e.
Ponieważ prawa strona $\neq 0$ możemy rozwiązać metodą wyznaczników (wzory Cramera). Wyznacznik główny $\neq 0$.

$$B = \frac{\det\begin{bmatrix} p & -k_e \\ 0 & -\nu^2 m_e + k_e \end{bmatrix}}{\Delta} \qquad B_e = \frac{\det\begin{bmatrix} -m\nu^2 + k_e + k & p \\ -k_e & 0 \end{bmatrix}}{\Delta}$$

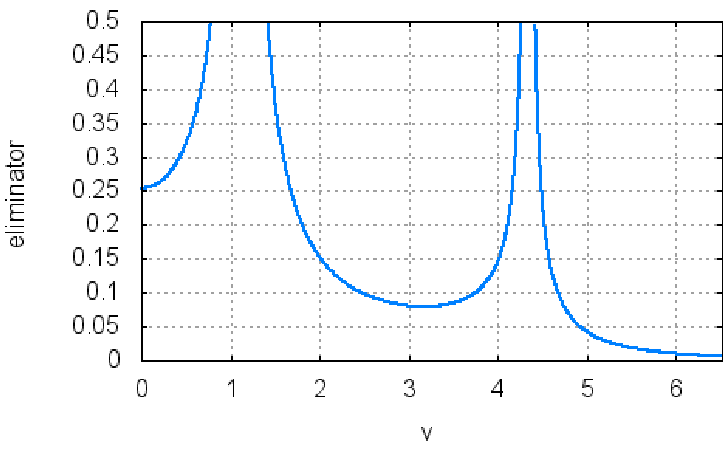
$$\Delta = \det\begin{bmatrix} -m\nu^2 + k_e + k & -k_e \\ -k_e & -\nu^2 m_e + k_e \end{bmatrix} = m m_e \nu^4 - m k_e \nu^2 - m_e k_e \nu^2 - \nu^2 k m_e + k k_e - k_e^2 =$$

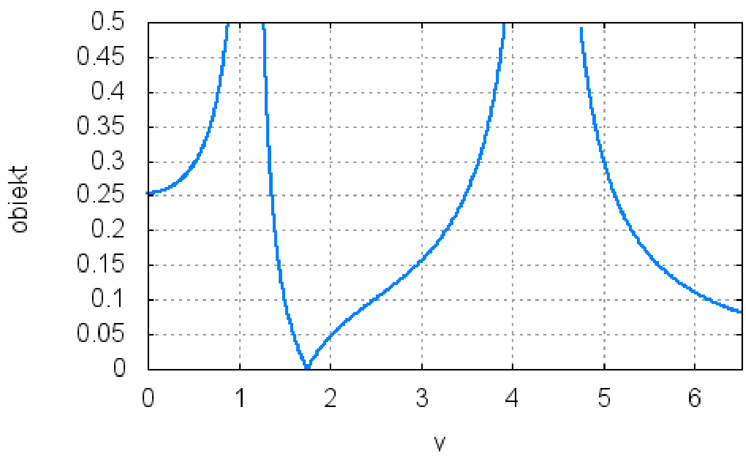
$$= m m_e {\nu^2}^2 - (m k_e + m_e k_e + m_e k)\nu^2 + k k_e - k_e^2 = m m_e (\nu^2 - \nu_1^2)(\nu^2 - \nu_2^2)$$

$$\nu_1 = \frac{m k_e + m_e k_e + m_e k - \sqrt{\delta}}{2 m m_e} \qquad \delta = (m k_e + m_e k_e + m_e k)^2 - 4 m m_e (k k_e - k_e^2)$$

$$\nu_2 = \frac{m k_e + m_e k_e + m_e k + \sqrt{\delta}}{2 m m_e}$$

$$B = \frac{p(k_e - \nu^2 m_e)}{m m_e (\nu^2 - \nu_1^2)(\nu^2 - \nu_2^2)} \qquad B_e = \frac{p k_e}{m m_e (\nu^2 - \nu_1^2)(\nu^2 - \nu_2^2)}$$





Powyższe wykresy amplitudy drgań tego układu pokazują, że istnieje pewna częstość wymuszenia, przy której oddziaływanie dynamiczne eliminatora równoważą siłę wymuszającą drgania obiektu co prowadzi do zerowych amplitud jego drgań.

proszę zwrócić uwagę na wpływ tłumienia na charakterystyki amplitudowe, co było na wykładzie

Sebastian Korczak, 17.05.2013

aktualizacja: 16.05.2014

aktualizacja: 21.05.2015