DRGANIA MECHANICZNE

materiały uzupełniające do ćwiczeń

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
studia inżynierskie

prowadzący: mgr inż. Sebastian Korczak

część 5 – płaszczyzna fazowa

MODEL MATEMATYCZNY pewnego układu opisany za pomocą równań ruchu oraz warunków początkowych możemy rozwiązać w dziedzinie czasu i dokonać analizy tego rozwiązania. Alternatywną metodą jest przejście do zmiennych fazowych - zmienna zależna od czasu i jej prędkość. Metodę płaszczyzny fazowej stosujemy głównie do układów o jednym stopniu swobody.

W układzie autonomicznym czas nie występuje jawnie w równaniach ruchu, np.:

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+k_1 x(t)+k_2 x^3(t)=0$$

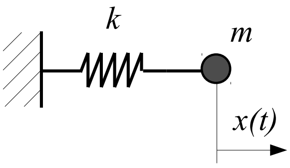
Przykład układu nieautonomicznego:

$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=A\cos(\omega t+fi)$$

Układ zachowawczy to taki, który w czasie ruchu zachowuje swoją całkowitą energię, zatem w układzie nie ma tłumienia i sił zewnętrznych. Ogólna postać takiego układu:

$$\ddot{x}(t)+F(x)=0$$

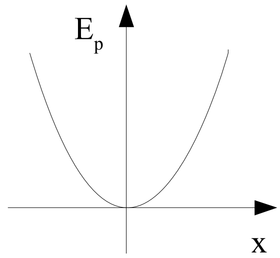
OSCYLATOR HARMONICZNY NIETŁUMIONY
reprezentacja drgań na płaszczyźnie fazowej



$$m\ddot{x}(t)+k\,x(t)=0.\ \ m>0.\ \ k>0$$

Liczymy energię potencjalną układu całkując siłę potencjalną sprężystości po odkształceniu (czyli liczymy pracę wykonaną podczas rozciągania lub ściskania sprężyny, a praca ta zamienia się w energię zmagazynowaną w sprężynie):

$$E_p=\int_0^x k\,x\,dz=\left[k\frac{z^2}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2}k\,x^2$$



Zauważamy przy okazji, że siła w sprężynie jest pochodną energii potencjalnej układu $F_s=kx=\frac{dE_p}{dx}=K_p'$

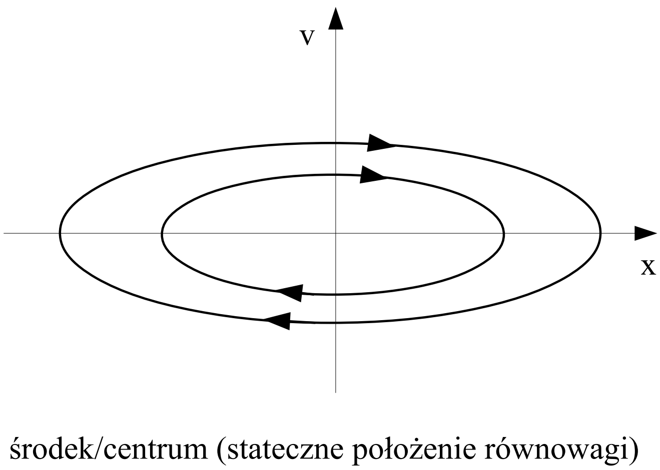
Podobnie postępujemy wyznaczając energię kinetyczną układ - licząc pracę siły bezwładności (dla uproszczenia użyto tu całki nieoznaczonej i pominięto stałą całkowania)

$$E_k=\int m\,\ddot{x}\,dx=m\int\dot{v}\,dx=m\int\frac{dv}{dt}dx=m\int v\,dv=\frac{1}{2}m\,v^2$$

Ponieważ układ ten jest zachowawczy, możemy zapisać:

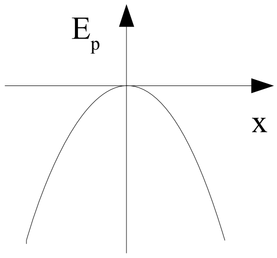
$$E_k=E_p=const \qquad \frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\,x^2=B \qquad \frac{v^2}{2\frac{B}{m}}+\frac{x^2}{2\frac{B}{k}}=1$$

Stała B jest całkowitą energią układu i zależy od warunków początkowych. Ruch układu przedstawić zatem możemy na płaszczyźnie fazowej (przemieszczenie, prędkość). Dla wybranych warunków początkowych otrzymujemy trajektorie eliptyczne parametryzowane czasem.

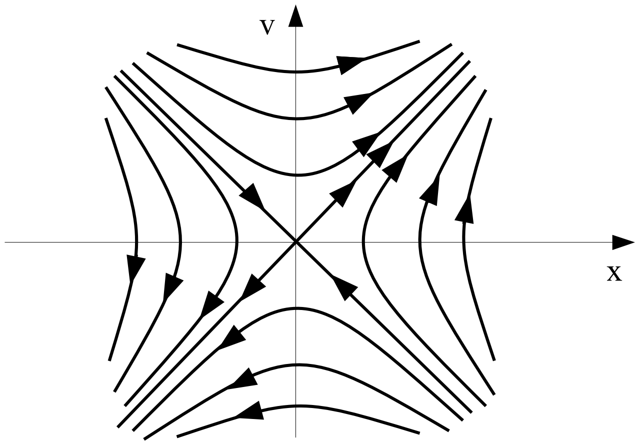


środek/centrum (stateczne położenie równowagi)

$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=0,\ \ m>0,\ \ k<0$$



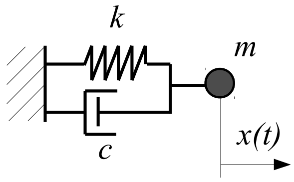
Analogicznie jak w poprzednim przykładzie otrzymamy trajektorie opisane wzorem $\dfrac{v^2}{2\frac{B}{m}}-\dfrac{x^2}{2\frac{B}{k}}=1$



siodło (niestateczne położenie równowagi)

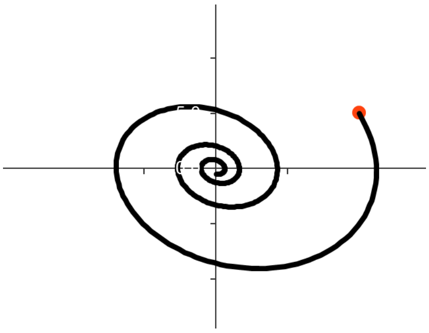
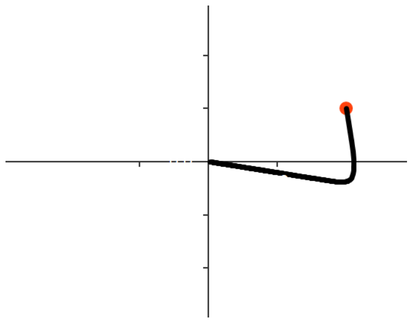
Przy okazji zwracamy uwagę, że trajektorie fazowe mają pewne szczególne właściwości:
- górna półpłaszczyzna zawiera trajektorie o dodatniej prędkości, dlatego też trajektorie muszą tam być skierowane w prawo,
- dolna półpłaszczyzna zawiera trajektorie o ujemnej prędkości, dlatego też trajektorie muszą tam być skierowane w lewo,
- dla prędkości równej zero (oś pozioma) nie zmienia się przemieszczenie, dlatego też trajektorie przecinają oś poziomą przemieszczenia pod kątem prostym.

OSCYLATOR HARMONICZNY TŁUMIONY

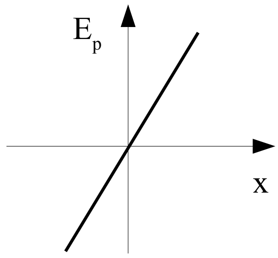
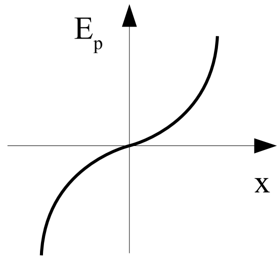
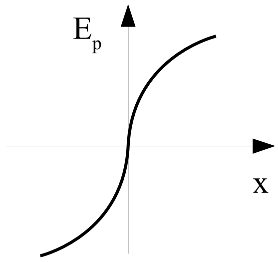
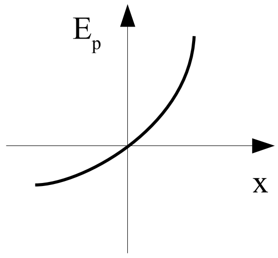


$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0,\ \ m>0,\ \ c>0,\ \ k>0$$

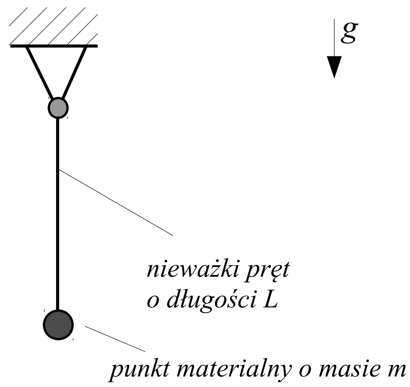
$$\ddot{x}(t)+2h\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=0$$

$h<\omega_0$ tłumienie podkrytyczne ognisko, stateczne położenie równowagi (spirala logarytmiczna) *przykładowa trajektoria* 	$h\geqslant\omega_0$ tłumienie krytyczne i nadkrytyczne węzeł, stateczne położenie równowagi  *przykładowa trajektoria*

RÓŻNE RODZAJE SPRĘŻYN

liniowa $F(x)=kx\ ,\ k>0$ 	progresywna $F(x)=k_1x+k_2x^3\ ,\ k_1>0\ ,\ k_2>0$ 
degresywna $F(x)=k_1x-k_2x^3\ ,\ k_1>k_2>0$ 	niesymetryczna $F(x)=k_1x+k_2x^2\ ,\ k_1>k_2>0$ 

WAHADŁO MATEMATYCZNE BEZ OGRANICZENIA MAŁYCH KĄTÓW



Równanie ruchu: $\ddot{\varphi}(t)+\frac{g}{L}\sin\varphi=0$

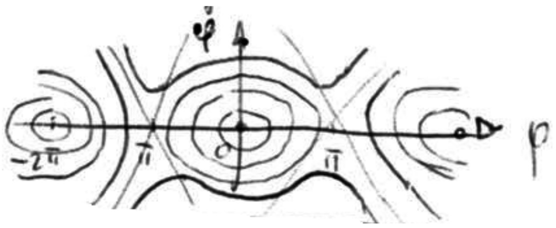
$$\frac{dE_p}{dx}=\frac{g}{L}\sin\varphi$$

$$E_p=-\frac{g}{L}\cos\varphi$$

Minimum energii potencjalnej dla:
$\varphi=-4\pi,\ -2\pi,\ 0,\ 2\pi,\ 4\pi,...$
- będą to stateczne położenia równowagi (wahadło w dolnym położeniu).

Maksimum energii potencjalnej dla: $\varphi=-3\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 3\pi,...$
- będą to niestateczne położenia równowagi (wahadło w górnym położeniu.

Po połączeniu, pełen portret fazowy układu:



Zagadka: jak wygląda portret fazowy dla układu: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)=0,\ m>0,\ c>0$

OSCYLATOR HARMONICZNY NIETŁUMIONY ZE SPRĘŻYNĄ NIELINIOWĄ

$m\ddot{x}(t)+k_1x(t)+k_2x^3(t)=0$ - tego typu zadania nie rozwiążemy matematycznie w sposób ścisły (w sensie wyznaczenia rozwiązania ogólnego x(t)). Możemy jednak napisać energię całkowitą układu: $\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k_1x^2+\frac{1}{4}k_2x^4=C$ i dokonać analizy trajektorii na płaszczyźnie fazowej.

PRZYKŁAD 1

$$m\ddot{x}+k_1x-k_2x^3=0$$

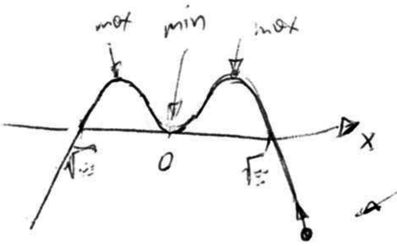
$$E_p=\int_0^x(k_1z-k_2z^3)dz=\frac{1}{2}k_1x^2-\frac{1}{4}k_2x^4$$

$$E_p=x^2\left(\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{4}k_2x^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}k_2\cdot x^2\left(x^2-2\frac{k_1}{k_2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}k_2\cdot x^2\left(x-\sqrt{2\frac{k_1}{k_2}}\right)\left(x+\sqrt{2\frac{k_1}{k_2}}\right)$$

$$E_p=0 \iff x=0 \text{ (dwukrotny)} \vee x=\sqrt{2\frac{k_1}{k_2}} \vee x=-\sqrt{2\frac{k_1}{k_2}}$$



rosnący z dołu

położenie min i max znajdujemy z warunku $E_p'=0$

$$E_p'=k_1x-k_2x^3$$

W dalszej analizie będziemy korzystać z faktu, że przebieg energii potencjalnej układu odzwierciedla charakter przebiegu trajektorii fazowych.

$$E_p' = k_1 x - k_2 x^3 = x(k_1 - k_2 x^2) = -x(k_2 x^2 - k_1) = -k_2 \cdot x\left(x^2 - \frac{k_1}{k_2}\right) =$$
$$= -k_2 \cdot x\left(x - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right)$$

$$E_p' = 0 \iff \underline{x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \ \vee \ x = -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}}$$

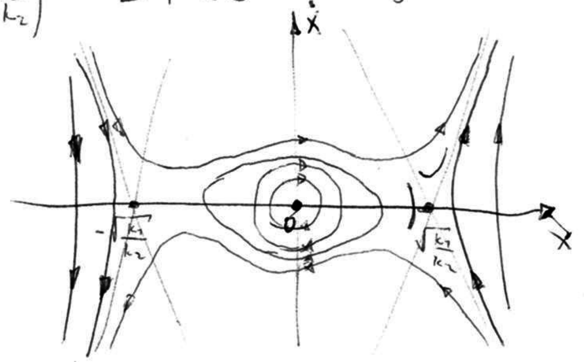
są to położenia równowagi (punkty nieosobliwe na płaszczyźnie fazowej)

Sprawdźmy stateczność punktów równowagi poprzez analizę ekstremów funkcji energii potencjalnej.

$$E_p'' = (k_1 x - k_2 x^3)' = k_1 - 3k_2 x^2$$

$E_p''(x=0) = k_1 > 0 \rightarrow$ położenie równowagi dla $x=0$ jest stateczne (środek)

$$\left.\begin{array}{l} E_p''\left(x = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right) = k_1 - 3k_2 \frac{k_1}{k_2} = -2k_1 < 0 \\ E_p''\left(x = -\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\right) = -2k_1 < 0 \end{array}\right\}$$ te poł. równowagi są niestateczne (siodła)



PRZYKŁAD 2

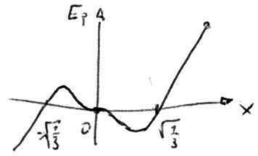
Narysować wykres energii potencjalnej układu o równaniu ruchu $\ddot{x} + 5x^4 - x^2 = 0$. Znaleźć położenia równowagi i zbadać ich stateczność. Narysować portret fazowy.

$E_p' = 5x^4 - x^2$

$E_p = \int (5x^4 - x^2)\,dx = 5\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} = x^5 - \frac{1}{3}x^3 = x^3\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = x^3\left(x - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$

$E_p = 0 \iff x = 0$ (3-krotny) $\vee\ x = \sqrt{\frac{1}{3}} \ \vee\ x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

wykres E_p



Położenia równowagi:

$E_p' = 0 \ \rightarrow\ 5x^4 - x^2 = 0 \ \rightarrow\ x^2(5x^2 - 1) = 0$

$\rightarrow\ 5x^2\left(x^2 - \frac{1}{5}\right) = 0 \ \rightarrow\ 5x^2\left(x - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{1}{5}}\right) = 0 \ \rightarrow\ \underline{x = 0} \ \vee\ \underline{x = \sqrt{\frac{1}{5}}} \ \vee\ \underline{x = -\sqrt{\frac{1}{5}}}$

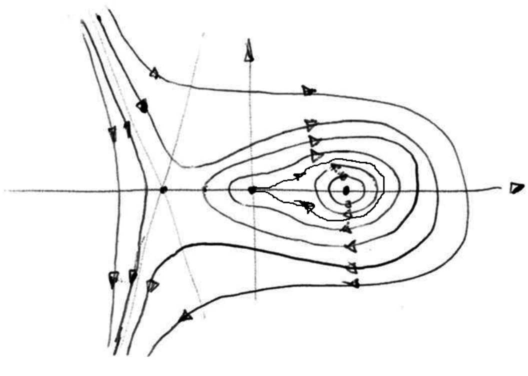
Spr. stateczności:

$E_p'' = (5x^4 - x^2)' = 20x^3 - 2x$

$E_p''(x=0) = 0 \ \rightarrow$ niestateczne

$E_p''\left(x = \sqrt{\frac{1}{5}}\right) = 20\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 - 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = 20\cdot\frac{5}{25\cdot 5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{5} > 0$ położenie stateczne (środek)

$E_p''\left(x = -\sqrt{\frac{1}{5}}\right) = 20\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^3 - 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = -20\cdot\frac{5\sqrt{5}}{25\cdot 5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{2\sqrt{5}}{5} < 0$ położenie niestateczne (siodło)



Sebastian Korczak, 13.05.2012
aktualizacja: 21.05.2014
aktualizacja: 10.05.2015