DRGANIA MECHANICZNE

materiały uzupełniające do ćwiczeń

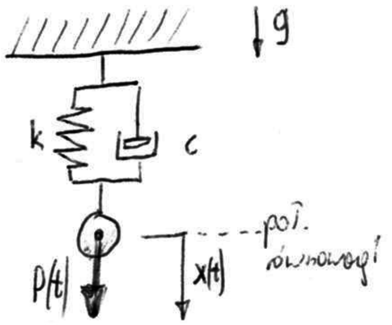
Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
studia inżynierskie

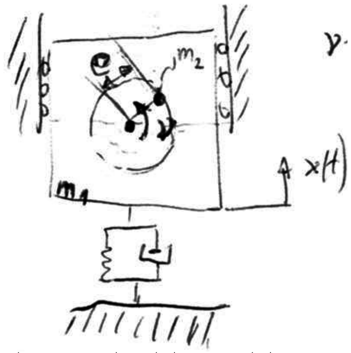
prowadzący: mgr inż. Sebastian Korczak

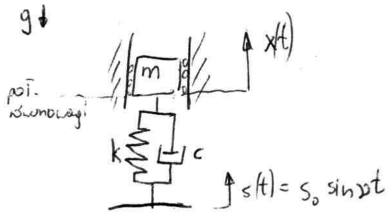
część 4 – zadania różne

DRGANIA WYMUSZONE – UOGÓLNIENIE

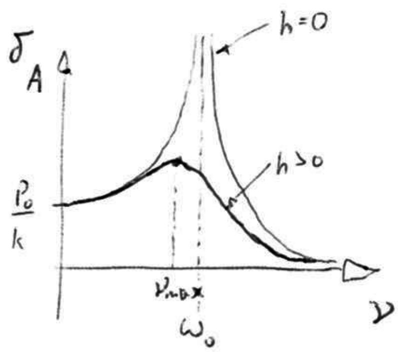
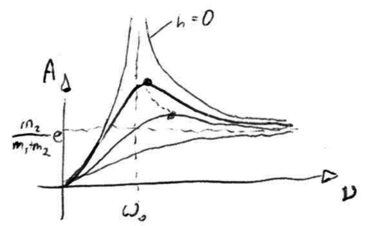
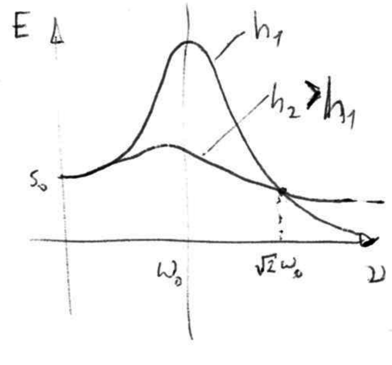
Jak widać z wcześniejszych przykładów, sposób obliczeń przy wymuszeniu siłą harmoniczną, siłą odśrodkową i przy wymuszeniu kinematycznym, jest matematycznie analogiczny, zmienia się tylko postać amplitudy siły wymuszającej, a co za tym idzie różny jest przebieg krzywej rezonansowej układu. Porównajmy to:

<table>
<tr><td>Wymuszenie siłą harmoniczną</td><td>Wymuszenie siłą odśrodkową</td><td>Wymuszenie kinematyczne</td></tr>
<tr><td>

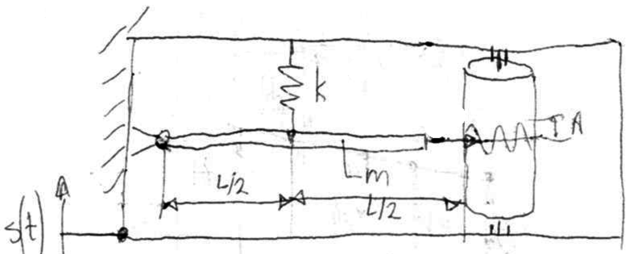
$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+k\,x(t)=P_0\sin(\nu t)$</td><td>

$(m_1+m_2)\ddot{x}(t)+c\,\dot{x}(t)+$
$+k\,x(t)=m_2 e\nu^2\sin(\nu t)$</td><td>

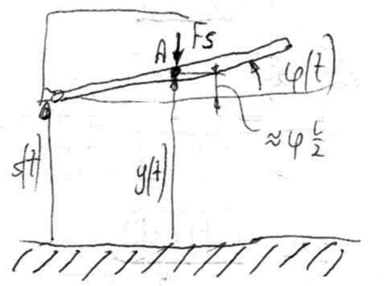
$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+k\,x(t)=$
$=c\,\dot{s}(t)+k\,s(t)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\ddot{x}(t)+2\mathrm{h}\,\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=F\sin(\nu t+\varphi)$</td></tr>
<tr><td>$F=\frac{P_0}{m}$
$\varphi=0$</td><td>$F=\frac{m_2}{m_1+m_2}e\nu^2$
$\varphi=0$</td><td>$F=\frac{s_0}{m}\sqrt{k^2+c^2\nu^2}$
$\varphi=atan\frac{c\nu}{k}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Przewidujemy rozwiązanie dla $\nu\neq\omega_0$ i $h<\omega_0$

$$x(t)=e^{-ht}(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t)+A\sin(\nu t+\varphi+\delta)\ ,\ \omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2}\ ,$$
$$A=\frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2+4h^2\nu^2}}\ ,\ \delta=atan\left(\frac{-2h\nu}{\omega_0^2-\nu^2}\right)$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

PRZYKŁAD
Obliczyć amplitudę drgań harmonicznych podłoża zarejestrowanych sejsmografem, wiedząc, że zaobserwowano drgania ustalone o amplitudzie A.



$s(t) = s_0 \sin \nu t$



rozł. małych kątów

Przemieszczenie środka masy:

$$y(t) = s(t) + \frac{L}{2}\sin\varphi(t) \approx s(t) + \frac{L}{2}\varphi(t)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{s}(t) + \frac{L}{2}\dot{\varphi}(t)$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}I_A\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{s} + \frac{L}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}mL^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{s} + L\dot{s}\dot{\varphi} + \frac{L^2}{4}\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{24}mL^2\dot{\varphi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{s} + \frac{L}{2}m\dot{s}\dot{\varphi} + \left(\frac{1}{8}mL^2 + \frac{1}{24}mL^2\right)\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{s} + \frac{L}{2}m\dot{s}\dot{\varphi} + \frac{1}{6}mL^2\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{L}{2}m\dot{s} + \frac{1}{3}mL^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{L}{2}m\ddot{s} + \frac{1}{3}mL^2\ddot{\varphi}$$

$$E_p = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\varphi\right)^2 = \frac{1}{8}kL^2\varphi^2 \qquad \frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = \frac{1}{4}kL^2\varphi$$

Dane:
$m = 0{,}1\,kg$
$k = 1000\,N/m$
$L = 0{,}1\,m$
$\nu = 10\ 1/s$
$A = 0{,}01\,m$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_k}{\partial\dot{\varphi}}\right) + \frac{\partial E_p}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{L}{2}m\ddot{s} + \frac{1}{3}mL^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{4}kL^2\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{4}\frac{k}{m}\varphi = -\frac{3}{2L}\ddot{s} \qquad \text{ale } \ddot{s} = -s_0\nu^2\sin\nu t$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{3}{2L}s_0\nu^2\sin\nu t \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{4m}}$$

Rozwiązanie ustalone: $\varphi(t) = \frac{3}{2L}s_0\nu^2\frac{1}{\omega_0^2-\nu^2}\sin\nu t$

Amplituda drgań wskaźnika: amplituda $\varphi(t)\cdot L$

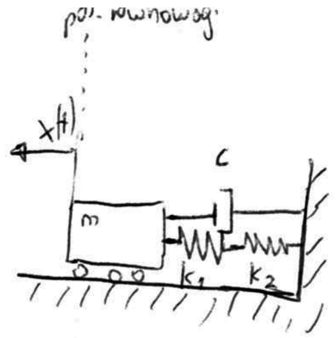
$$\text{zatem } A = \frac{3}{2}s_0\nu^2\frac{1}{\omega_0^2-\nu^2} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{4m}} \approx 86{,}6\ \frac{1}{s} \quad (13{,}78\,Hz)$$

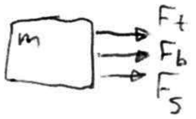
$$s_0 = \frac{2}{3}A\frac{\omega_0^2-\nu^2}{\nu^2} = \frac{2}{3}A\left(\left(\frac{\omega_0}{\nu}\right)^2 - 1\right) \approx 0{,}49\,m$$

PRZYKŁAD – DRGANIA SWOBODNE

Zadanie 4

Wyprowadź równanie ruchu przedstawionego układu. Dane: $k_1 = 3$, $k_2 = 7$, $m = 2$, $c = 1$. Ile wynosi okres drgań tłumionych tego układu? Jak wydłużyć ten okres dwukrotnie zmieniając współczynnik c?





$$F_b + F_t + F_s = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}} = \frac{1}{\frac{k_2}{k_1k_2}+\frac{k_1}{k_1k_2}} = \frac{1}{\frac{k_2+k_1}{k_1k_2}} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$$

$$2\ddot{x} + \dot{x} + \frac{3\cdot 7}{3+7}x = 0$$

$$2\ddot{x} + \dot{x} + 2{,}1x = 0$$

$$\ddot{x} + 0{,}5\dot{x} + 1{,}05x = 0$$

$$\ddot{x} + 2h + \omega_0^2 x = 0$$

$$\boxed{h = 0{,}25} \quad \omega_0 = \sqrt{1{,}05} \approx 1{,}025 \qquad h < \omega_0$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2} = \sqrt{1{,}05 - 0{,}0625} \cong 0{,}9937$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \cong 6{,}323$$

T wzrośnie dwukrotnie gdy ω zmaleje dwukrotnie, liczymy nowe h_2

$$\sqrt{\omega_0^2 - h_2^2} = \frac{1}{2}\omega$$

$$\omega_0^2 - h_2^2 = \frac{1}{4}\omega^2$$

$$h_2^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\omega^2$$

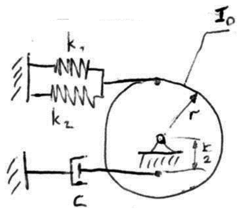
$$h_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\omega^2} = \sqrt{1{,}05 - \frac{1}{4}\,0{,}9937^2} \simeq \boxed{0{,}896}$$

$$\text{Nowe } c_2 = 2h_2m = 2\cdot 0{,}896\cdot 2 = 3{,}584$$

	c	h	ω	T
stare	1	0,25	0,99	6,323
nowe	3,584	0,896	0,497	12,64

PRZYKŁAD – DRGANIA SWOBODNE

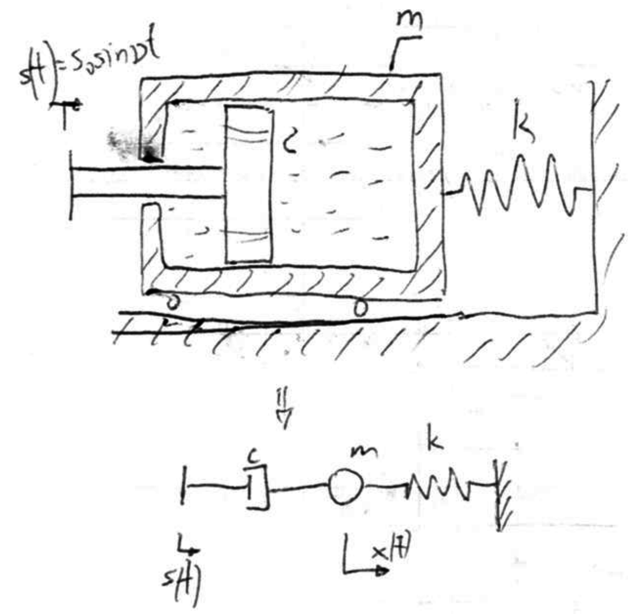
Wyprowadzić równanie ruchu przedstawionego układu (na symbolach). Interesują nas małe drgania wokół położenia równowagi.
Podstawić dane: $r=2,\ I_0=2,\ c=4,\ k_1=2,\ k_2=3.$
Ile wynosi logarytmiczny dekrement tłumienia układu? Jaki jest procentowy stosunek amplitudy drgań swobodnych układu w chwili $t+T$ do amplitudy w chwili t ?
Jaką wartość musi mieć sztywność sprężyny k_1 aby uzyskać tłumienie o charakterze krytycznym?



$k_1=2$ $r=2$
$k_2=3$
$I_0=2$ (moment bezwładności)
$c=4$

zadanie rozwiązane było na zajęciach

PRZYKŁAD
Obliczyć amplitudę drgań obudowy tłumika wymuszonych kinematycznie. Dla jakiej częstości otrzymamy maksymalną amplitudę i ile ona wynosi?



Dane:

$$m=10\text{kg}\ ,\ k=250\text{N}/m\ ,\ \omega=4\frac{1}{s}$$

$$s_0=0{,}01\,m,\ \nu=6\frac{1}{s}\ ,\ s(t)=s_0\sin\nu t$$

Równanie ruchu:

$$m\ddot{x}+c(\dot{x}-\dot{s})+kx=0$$

po przekształceniach:

$$\ddot{x}+2h\dot{x}+\omega_0^2x=2hs_0\nu\cos\nu t$$

Rozwiązanie ustalone drgań:

$$x(t)=A\cos(\nu t+\delta)\ ,\ gdzie\ \ A=\frac{2hs_0\nu}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2+4h^2\nu^2}}$$

Podstawiając dane otrzymamy:

$$\omega_0=5\frac{1}{s}$$

$$h=3\frac{1}{s}$$

oraz amplitudę drgań $A=9{,}56\,mm$

Maksimum amplitudy szukamy z warunku $\frac{dA}{d\nu}=0$

Amplituda ma wartość maksymalną dla $\nu=\omega_{0,}$ przy czym wynosi ona $s_{0.}$

PRZYPOMNIENIE WZORÓW

$\sin(-x)=-\sin(x) \qquad \cos(-x)=\cos(x) \qquad \cos(x)=\sin(x+\pi/2)$

dla $n=0, 1, 2, 3...:$ $\sin(2\pi n)=0, \quad \cos(2\pi n)=1, \quad \sin(\pi n)=0$

$$\cos(\pi n) = \begin{cases} 1, & dla\ n=0, 2, 4, ... \\ -1, & dla\ n=1, 3, 5, ... \end{cases}$$

$$A\cos\omega t+B\sin\omega t=C\sin(\omega t+\varphi)\ ,\ C=\sqrt{A^2+B^2}\ ,\ \varphi=atan\frac{A}{B}$$

$$\sum_i a_i \sin(\omega t+\varphi_i) = C\sin(\omega t+\Phi)\ ,\ gdzie:\ A=\sum_i a_i \sin\varphi_i\ ,\ B=\sum_i a_i\cos\varphi_i\ ,\ C=\sqrt{A^2+B^2}\ ,\ \Phi=atan\frac{A}{B}$$

$$x(t) = x(t+T) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t))\ ,\ gdzie:\ \omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi f$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)dt \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)dt$$

równoległe połączenie sprężyn / tłumików: $k=\sum_i k_i$

szeregowe połączenie sprężyn / tłumików: $\frac{1}{k}=\sum_i \frac{1}{k_i}$

Oscylator harmoniczny tłumiony, drgania swobodne:

$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0\ ,\ x(0)=x_0\ ,\ \dot{x}(0)=w_0$

$\ddot{x}(t)+2h\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=0$

dla $h<\omega_0$ przewidujemy rozwiązanie w postaci:

$x(t)=e^{-ht}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)\ ,\ \omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2},$ A i B obliczamy z podstawienia warunków początkowych

Oscylator harmoniczny tłumiony, drgania wymuszone harmonicznie:

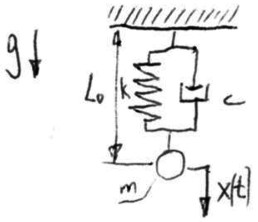
$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=P\sin(\nu t)\ ,\ x(0)=x_0\ ,\ \dot{x}(0)=w_0$, P nie musi być stałą

$\ddot{x}(t)+2h\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=F\sin(\nu t)$

dla $h<\omega_0$ i $\nu\neq\omega_0$ przewidujemy rozwiązanie w postaci:

$$x(t)=e^{-ht}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)+G\sin(\nu t+\delta)\ ,\ \omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2}\ ,\ G=\frac{F}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2+4h^2\nu^2}}\ ,\ \delta=atan\left(\frac{-2h\nu}{\omega_0^2-\nu^2}\right)$$

UWAGA NA TEMAT GRAWITACJI



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = mg$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = g$$

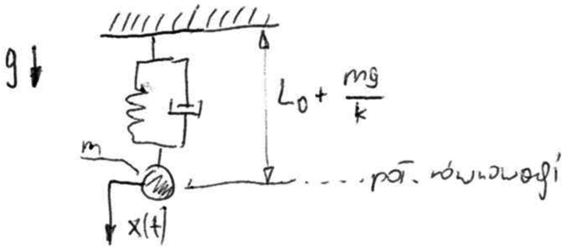
$$x(t) = e^{-ht}(A\cos\omega t + B\sin\omega t) + C$$

podst. rozw. szcz. do rów. ruchu:

$$\omega_0^2 C = g$$

$$C = \frac{g}{\omega_0^2} = g \cdot \frac{m}{k} = \frac{mg}{k}$$

Tylko dla układów liniowych!



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k\left(x + \frac{mg}{k}\right) = mg$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \cancel{mg} = \cancel{mg}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Z powyższych dwóch modeli wynika, że możemy pominąć występowanie grawitacji gdy zachodzą następujące warunki:

– układ jest liniowy (elementy sprężyste i tłumiące są liniowe)
– układ współrzędnych w układzie przyjmiemy w położeniu równowagi statycznej
– energia potencjalna grawitacji zależy w sposób liniowy od współrzędnej ruchu (w praktyce nie pomijamy wpływu grawitacji tam gdzie występuje ruch obrotowy)

Sebastian Korczak, 27.04.2012
aktualizacja: 21.03.2013
aktualizacja: 9.01.2014
aktualizacja: 21.04.2014
aktualizacja: 02.05.2015