DRGANIA MECHANICZNE

materiały uzupełniające do ćwiczeń

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

studia inżynierskie

prowadzący: mgr inż. Sebastian Korczak

część 3 – drgania wymuszone siłą harmoniczną

drgania wymuszone siłą odśrodkową

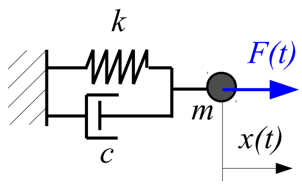
drgania wymuszone kinematycznie

DRGANIA WYMUSZONE

Wymuszenie siłą harmoniczną, impulsową, poliharmoniczną, stochastyczną, dowolną.
Wymuszenie siłą odśrodkową. Wymuszenie kinematyczne.

Drgania oscylatora harmonicznego tłumionego wymuszonego siłą harmoniczną

Równanie ruchu: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=P(t)$



$$\ddot{x}(t)+2h\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=\frac{P(t)}{m}$$

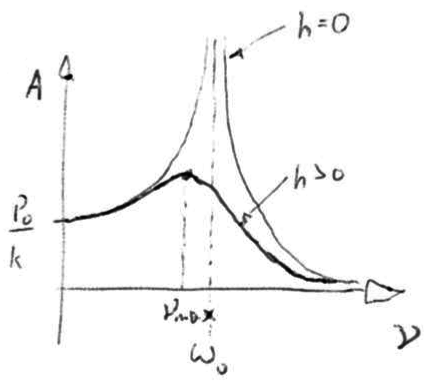
Dla $P(t)=P_0\sin\nu t$ i $h<\omega_0$

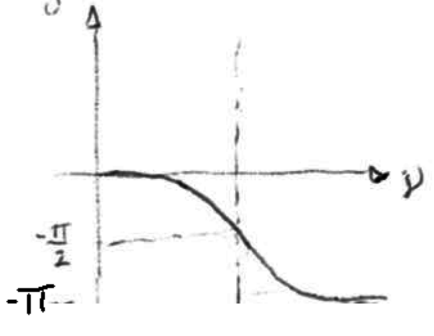
rozwiązanie ma postać sumy rozwiązania ogólnego równania jednorodnego (drgania swobodne gasnące) i rozwiązania szczególnego równania pełnego (drgań ustalone)

$$x(t)=e^{-ht}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)+A\sin(\nu t+\delta)$$

Podstawiając $A\sin(\nu t+\delta)$ do równania ruchu otrzymujemy układ równań z którego wyznaczamy parametry A i δ :

$$A=\frac{P_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2+4h^2\nu^2}} \qquad \delta=arctg\left(\frac{-2h\nu}{\omega_0^2-\nu^2}\right)$$





$$\nu_{max}=\sqrt{\omega_0^2-2h^2}$$

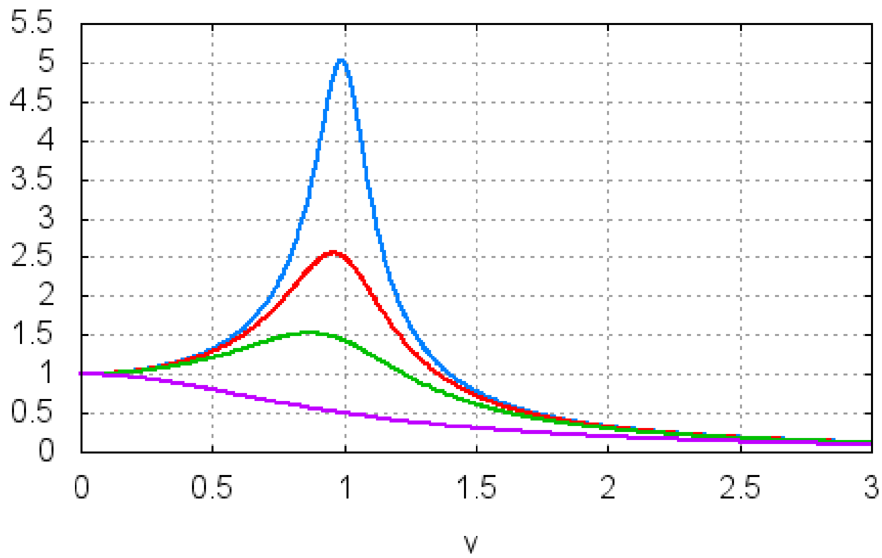
Stałe A i B wyznaczamy z warunków początkowym ale z uwzględnieniem całej postaci rozwiązania.

REZONANS HARMONICZNY, czyli widoczny w powyższym przykładzie wzrost amplitudy drgań ustalonych przy wymuszeniu zbliżonym do częstości drgań własnych, jest najistotniejszym zjawiskiem powodującym potrzebę analizy drgań układów mechanicznych.

WYKRESY AMPLITUDY DRGAŃ USTALONYCH dla $\omega_0 = 1$

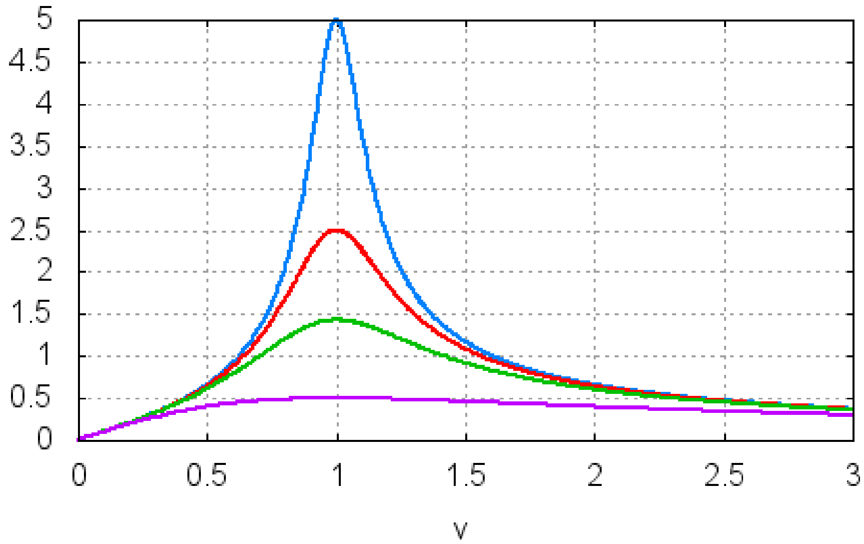
$$\frac{1}{\sqrt{\left(w_0^2 - v^2\right)^2 + 4\,h^2\,v^2}}$$

Wymuszenie harmoniczne (dla przemieszczenia)



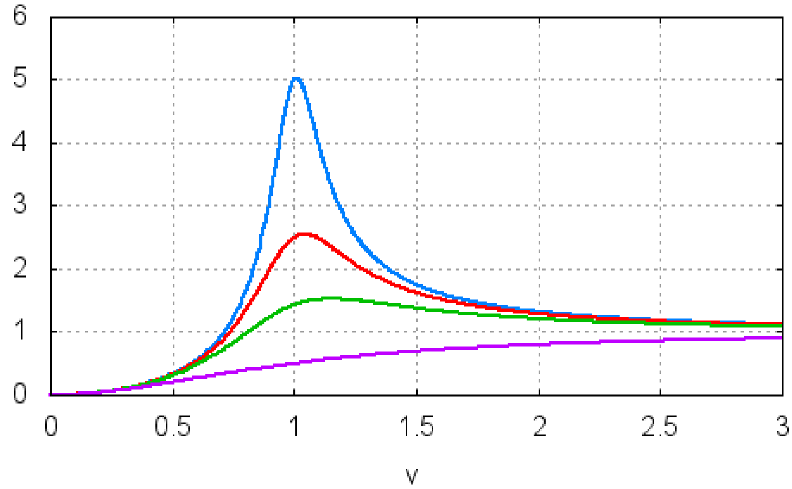
$$\frac{v}{\sqrt{\left(w_0^2 - v^2\right)^2 + 4\,h^2\,v^2}}$$

Wymuszenie harmoniczne (dla prędkości)



$$\frac{v^2}{\sqrt{\left(w_0^2 - v^2\right)^2 + 4\,h^2\,v^2}}$$

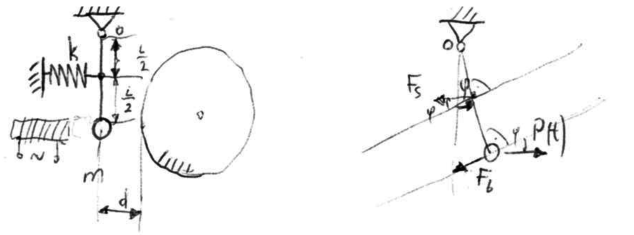
Wymuszenie harmoniczne (dla przyspieszenia)



Przykład

Dobrać wartość współczynnika sztywności w modelu dzwonka elektrycznego tak, aby układ zadziałał. Przyjmujemy przybliżenie, że elektromagnes działa na ciężarek siłą sinusoidalną o częstotliwości 50Hz i amplitudzie 10N.

Dane: $f=50\text{Hz}$, $P_0=10\,N$, $L=50\text{mm}$, $m=5\text{g}$, $d=1\text{mm}$



$$\Sigma M_O:\ P(t)\cos\varphi\cdot L - F_b\cos\varphi\cdot L - F_s\cos\varphi\,\frac{L}{2}=0$$

$$\cos\varphi\cong 1,\quad F_b=m\cdot L\ddot{\varphi},\quad F_s=k\cdot\varphi\,\frac{L}{2}$$

$$P(t)-F_b-\tfrac{1}{2}F_s=0$$

$$P(t)-mL\ddot{\varphi}-k\,\frac{L}{4}\varphi=0$$

$$mL\ddot{\varphi}+k\,\frac{L}{4}\varphi=P(t) \qquad P(t)=P_0\sin\nu\cdot$$

$$\ddot{\varphi}+\omega_0^2\varphi=F_0\sin\nu t$$

Pełne rozwiązanie drgań układu: $x(t)=e^{-ht}\left(A\cos\omega t+B\sin\omega t\right)+A\sin(\nu t+\delta)$

gdzie amplituda drgań ustalonych układu

$$A=\frac{P_0}{mL}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2+4h^2\nu^2}}$$

Z powodu braku tłumienia w układzie (h=0) mamy

$$x(t)=A\cos\omega_0 t+B\sin\omega_0 t+A\sin\nu t \qquad A=\frac{P_0}{mL}\frac{1}{|\omega_0^2-\nu^2|}$$

Aby układ zadziałał amplituda drgań (przemieszczenie, ale równanie jest na kąt obrotu) ciężarka musi być co najmniej równe szczelinie dzwonka, zatem

$$A\,L\geqslant d$$

$$\frac{P_0}{mL}\frac{1}{|\omega_0^2-\nu^2|}L\geqslant d$$

Następnie przekształcamy aby wydobyć niewiadomy współczynnik k

$$\frac{P_0}{m}\frac{1}{\left|\frac{k}{4\text{m}}-\nu^2\right|}\geqslant d$$

co daje nam dwa warunki: $k\leqslant 4\frac{P_0}{d}+4m\nu^2 \wedge k\geqslant 4m\nu^2-4\frac{P_0}{d}$

i ostatecznie: $k\leqslant 41973{,}92\,\frac{N}{m}$

DRGANIA WYMUSZONE SIŁĄ ODŚRODKOWĄ

Skrót teorii:

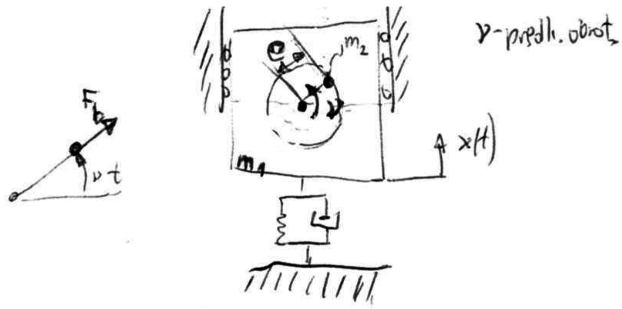
$$(m_1+m_2)\ddot{x}(t)+c\,\dot{x}(t)+k\,x(t)=F_b\sin\nu t$$

$$F_b=m_2 e\nu^2$$

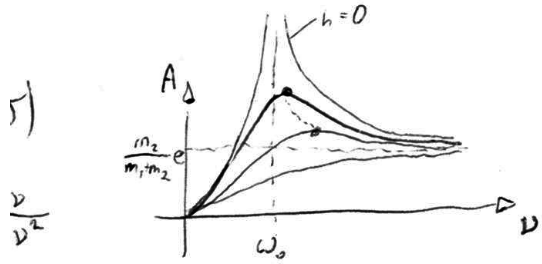
$$\ddot{x}(t)+2h\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=q\sin\nu t$$

$$q=\frac{m_2 e\nu^2}{m_1+m_2}$$

$$x(t)=e^{-ht}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)+A\sin(\nu t+\delta)$$



$$A=q\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2+4h^2\nu^2}} \qquad tg\,\delta=\frac{-2h\nu}{\omega_0^2-\nu^2}$$

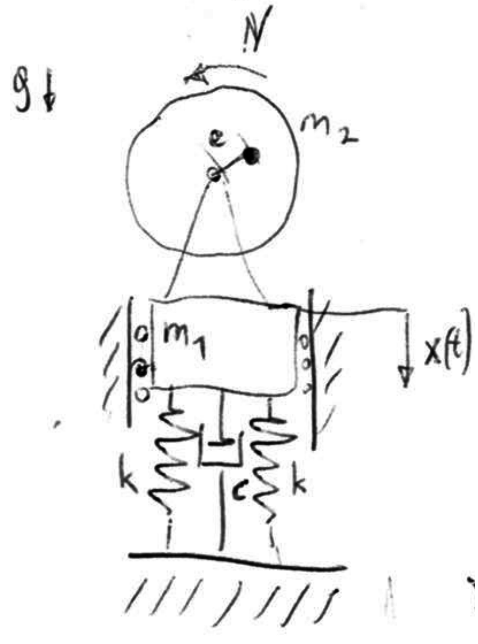


Występowanie zjawiska:
- wszelkie maszyny z elementami wirującymi

Przykład

Wyprowadzić równianie ruchu płaskiego modelu wyważarki do kół. Jak obliczyć położenie środka ciężkości koła?

Dane: $k\,,\ c\,,\ m_{1,}\ N[\frac{obr}{min}]$



Zakładamy koło na urządzenie – z ugięcia statycznego sprężyn x_{st} wyznaczamy masę koła:

$$m_2=2k\frac{x_{st}}{g}$$

Zamieniamy prędkość obrotową koła na częstość kołową:

$$\nu=2\pi\frac{N}{60}$$

Równanie ruchu maszyny:

$$(m_1+m_2)\ddot{x}+c\dot{x}+2k\,x=m_2 e\nu^2\sin\nu t$$

$$\ddot{x}(t)+2h\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=\frac{m_2}{m_1+m_2}e\nu^2\sin\nu t$$

Ruch ustalony maszyny opisuje funkcja:

$$x(t)=A\sin(\nu t+\delta),\quad \text{gdzie}\quad A=\frac{m_2}{m_1+m_2}e\nu^2\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2+4h^2\nu^2}}\qquad tg\,\delta=\frac{-2h\nu}{\omega_0^2-\nu^2}$$

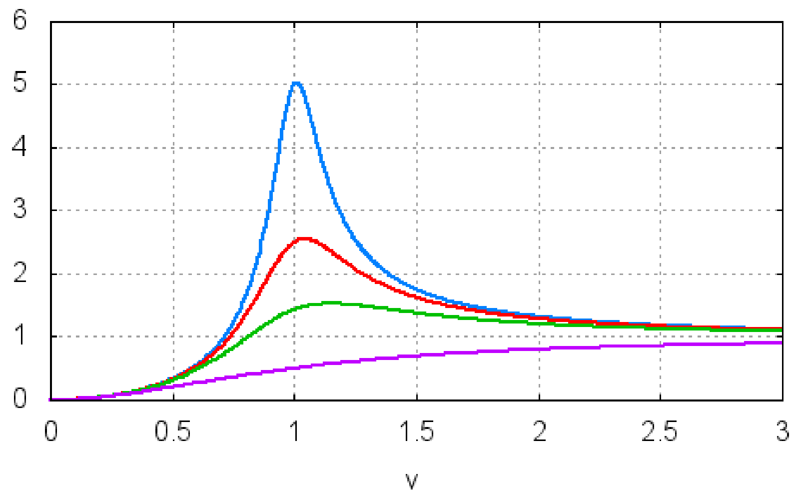
Mierząc amplitudę drgań maszyny podczas jednostajnego ruchu obrotowego koła możemy obliczyć wartość przesunięcia środka masy koła:

$$e=A\frac{m_1+m_2}{m_2\nu^2}\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2+4h^2\nu^2}$$

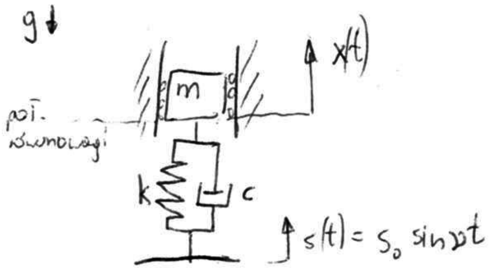
Widząc, że na skutek tłumienia przebieg drgań układu opóźniony jest w czasie względem wymuszenia, możemy odszukać położenie kątowe koła, przy którym jest maksimum amplitudy drgań a następnie cofając koło o kąt δ znaleźć dokładne położenie środka masy koła.

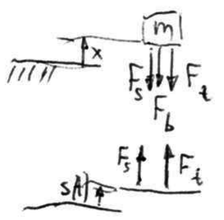
$$\frac{v^2}{\sqrt{\left(w_0^2-v^2\right)^2+4h^2v^2}}$$

wymuszenie bezwładnościowe
(dla przemieszczenia)



DRGANIA WYMUSZONE KINEMATYCZNIE





$$F_b + F_s + F_t = 0$$

$$m\ddot{x} + k(x-s) + c(\dot{x} - \dot{s}) = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{s} + ks$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \underbrace{c s_0 \nu}_{A} \cos\nu t + \underbrace{k s_0}_{B} \sin\nu t$$

$$C = \sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{c^2 s_0^2 \nu^2 + k^2 s_0^2} = s_0\sqrt{c^2\nu^2 + k^2}$$

$$\varphi = \operatorname{atan}\frac{A}{B} = \operatorname{atan}\frac{c\nu}{k}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = C\sin(\nu t + \varphi)$$

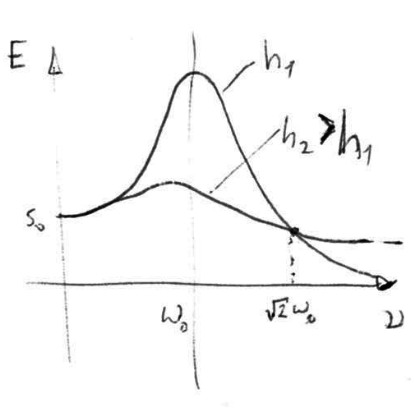
$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = D\sin(\nu t+\varphi), \quad D = \frac{C}{m} = \frac{s_0}{m}\sqrt{k^2 + c^2\nu^2}$$

rozwiązanie ustalone:

$$x(t) = E\sin(\nu t + \varphi + \phi)$$

$$E = D\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2 + 4h^2\nu^2}} \qquad \phi = \operatorname{atan}\frac{-2h\nu}{\omega_0^2-\nu^2}$$

$$E = \frac{s_0}{m}\frac{\sqrt{k^2+c^2\nu^2}}{\sqrt{(\omega_0^2-\nu^2)^2 + 4h^2\nu^2}}$$

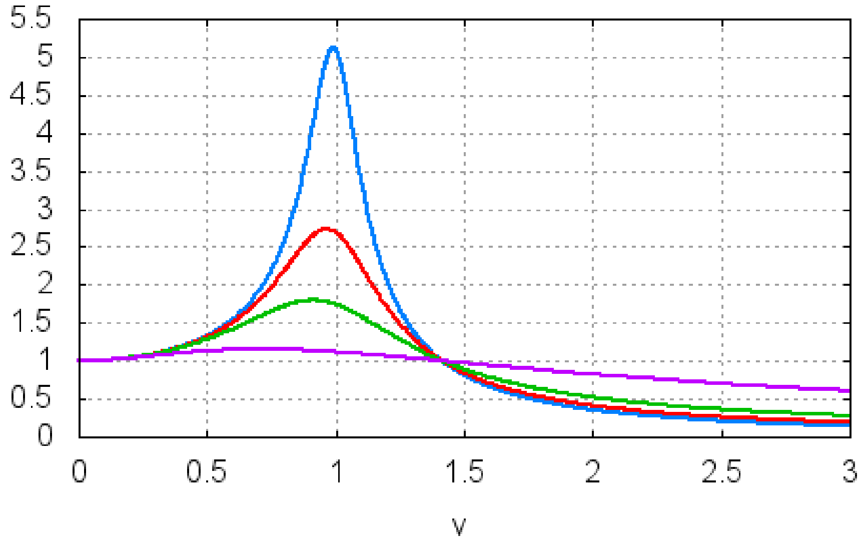


<u>Występowanie zjawiska:</u>

- ruch pojazdu po nierównościach drogi
- wpływ drgań podłoża na pracę urządzeń mechanicznych

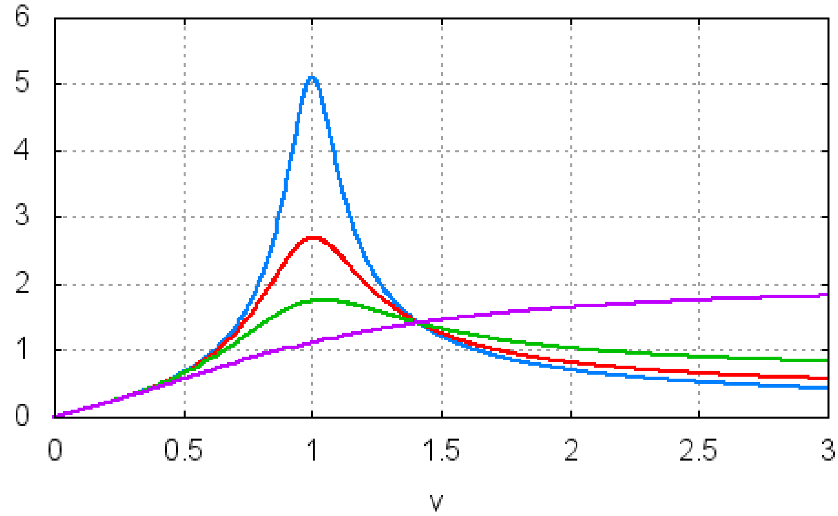
$$\frac{\sqrt{4h^2v^2+w_0^4}}{\sqrt{\left(w_0^2-v^2\right)^2+4h^2v^2}}$$

Wymuszenie kinematyczne
(dla przemieszczenia)



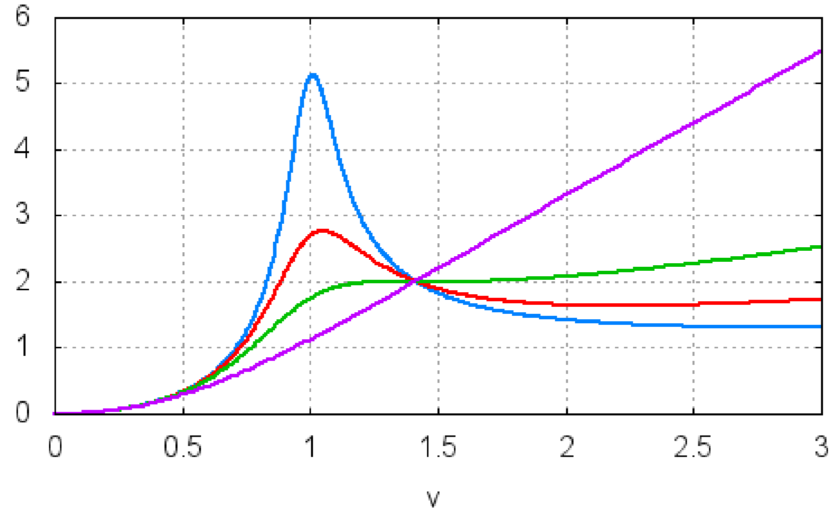
$$\frac{v\sqrt{4h^2v^2+w_0^4}}{\sqrt{\left(w_0^2-v^2\right)^2+4h^2v^2}}$$

Wymuszenie kinematyczne
(dla prędkości)



$$\frac{v^2\sqrt{4h^2v^2+w_0^4}}{\sqrt{\left(w_0^2-v^2\right)^2+4h^2v^2}}$$

Wymuszenie kinematyczne
(dla przyspieszenia)



Sebastian Korczak, 09.12.2011
aktualizacja: 19.04.2012
aktualizacja: 12.04.2013
aktualizacja: 11.05.2014
aktualizacja: 19.04.2015