DRGANIA MECHANICZNE

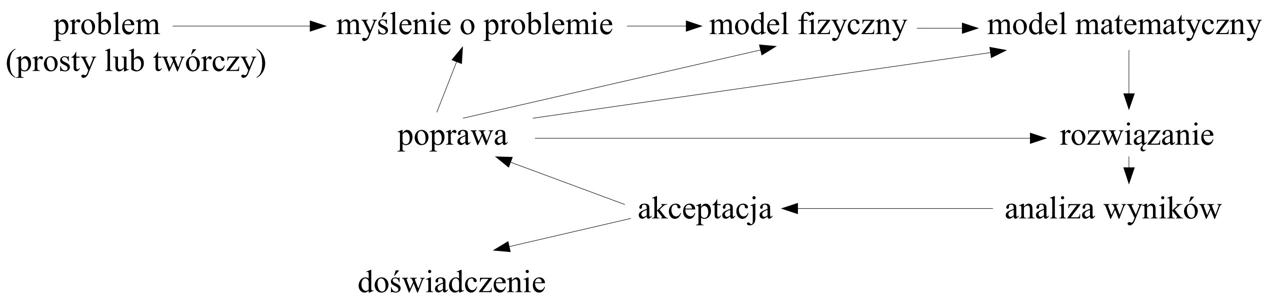
materiały uzupełniające do ćwiczeń

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
studia inżynierskie

prowadzący: mgr inż. Sebastian Korczak

część 2 – modelowanie, drgania swobodne

<u>Modelowanie</u>



W modelu fizycznym stosujemy: punkty materialne, bryły sztywne, nieważką sprężynę liniową, tłumik liniowy, łączniki, podpory itp. W modelu fizycznym dokonujemy agregacji (redukcji) układów elementów.

<u>Rodzaje tłumienia w układach mechanicznych</u>: hydro- i aerodynamiczne, w połączeniach ruchomych, wewnętrzne, konstrukcyjne.

<u>Tłumik wiskotyczny</u>: element reprezentujący siłę tłumienia o wartości proporcjonalnej do prędkości jego odkształcenia. <u>Sprężyna liniowa</u>: element reprezentujący siłę o wartości proporcjonalnej do jego odkształcenia.

Agregacja – zastąpienie układu przez inny układ równoważny o mniejszej ilości elementów.

Równoległe połączenie sprężyn (przy odkształcaniu o jednakową długość): $k_z = k_1 + k_2$

Równoległe połączenie sprężyn (z możliwością obrotu zamocowania): $k_z = \dfrac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

Szeregowe połączenie sprężyn: $\dfrac{1}{k_z} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ lub $k_z = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

Łączenie tłumików – analogicznie do sprężyn.

Układanie równań ruchu

* metoda bilansu sił i momentów (metoda Newtona) – wynika z zasady zmienności pędu i krętu
* metoda równań Lagrange'a II rodzaju
* metoda d'Alemberta
* zasada zachowania energii dla układu zachowawczego

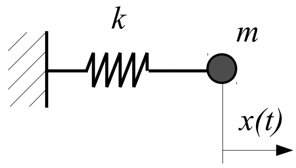
Mamy jeszcze wiele innych metod. Metody energetyczne są metodami ogólniejszymi i często w tej samej postaci mogą być również stosowane w innych dziedzinach (chemia, fizyka).
Dalej dla układów o 1 stopniu swobody stosujemy najczęściej metodę bilansu sił i momentów.

Linearyzacja

W przypadku drgań, gdzie wartości kątów są niewielkie stosujemy uproszczenie:
$dla \quad \varphi \in \langle -8\deg, 8\deg \rangle \qquad \sin\varphi \approx \varphi \quad \cos\varphi \approx 1 \quad tg\,\varphi \approx \varphi$
Taką sytuację często nazywamy „małymi drganiami wokół położenia równowagi”.

Drgania swobodne układów o 1 stopniu swobody
(drgania wywołane warunkami początkowymi)

Układ bez tłumienia:



$m\ddot{x}(t) + k\,x(t) = 0\ ,\ x(0) = x_0\ ,\ \dot{x}(0) = v_0$

$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

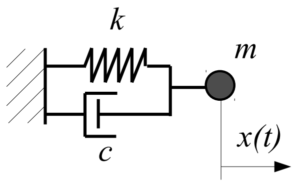
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – częstość drgań własnych; jednostka: $\left[\sqrt{\frac{N/m}{kg}} = \frac{1}{s}\right]$

$f = 2\pi\omega_0$ – częstotliwość drgań własnych; jednostka: [Hz]

Rozwiązanie: $x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$, A i B wyznaczamy z warunków początkowych

lub w innym zapisie: $x(t) = C\sin(\omega_0 t + \varphi)\ ,\ gdzie\ C = \sqrt{A^2 + B^2},\ tg\,\varphi = \frac{A}{B}$

Układ z tłumieniem:



$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k\,x(t) = 0\ ,\ x(0) = x_0\ ,\ \dot{x}(0) = v_0$

$\ddot{x}(t) + 2h\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

dla $h < \omega_0$ (tłumienie podkrytyczne) przewidujemy rozwiązanie w postaci:

$x(t) = e^{-ht}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ A i B obliczamy z podstawienia warunków początkowych

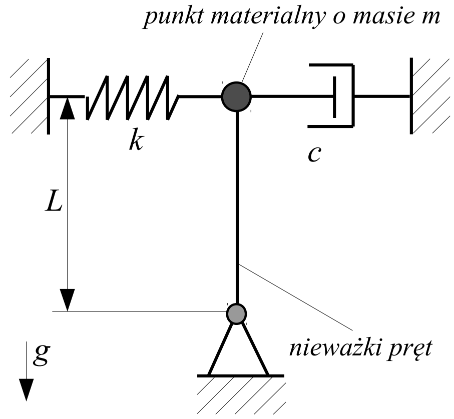
$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$ - częstość drgań tłumionych

Wynik w innym zapisie: $x(t) = e^{-ht} C\sin(\omega t + \varphi)\ ,\ gdzie\ C = \sqrt{A^2 + B^2},\ tg\,\varphi = \frac{A}{B}$

Logarytmiczny dekrement tłumienia: $\delta = h\,T_D\ ,\qquad T_D = \frac{2\pi}{\omega}$

Przykłady zastosowania metody sił do układania równania ruchu

1. Drgania swobodne tłumione wahadła pionowego



Zakładamy małe drgania wokół położenia pionowego.

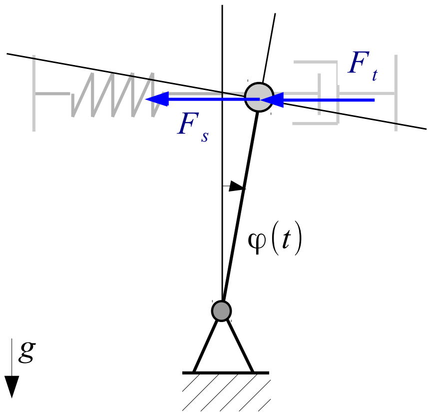
Odkształcenie sprężyny: φL

Prędkość odkształcenia tłumika: $\frac{d}{dt}(\varphi L)=\dot{\varphi} L$

Wartości sił przy założeniu małych kątów: $F_s=k L \varphi$

$F_t=c L \dot{\varphi}$

Siłę odśrodkową pomijamy gdyż nie wpływa na ruch drgający (jest siłą promieniową prostopadłą do kierunku drgań).



Równanie ruchu układu: $I \ddot{\varphi}=\sum M_i$

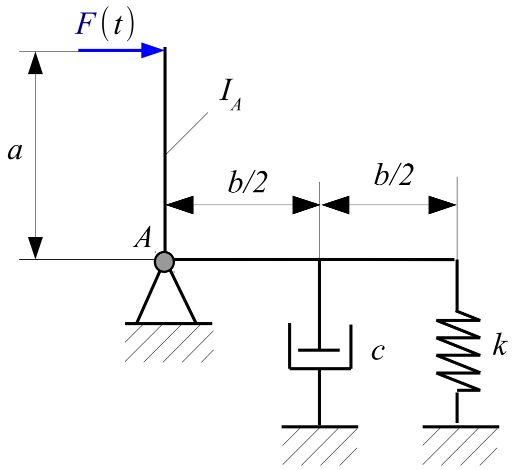
$$m L^2 \ddot{\varphi}=-F_s \cos\varphi L-F_t \cos\varphi L+m g \sin\varphi L$$

$$m L^2 \ddot{\varphi}+k L^2 \varphi \cos\varphi+c L^2 \dot{\varphi} \cos\varphi-m g L \sin\varphi=0$$

Zakładając małe kąty i dzieląc przez mL^2:

$$\ddot{\varphi}+\frac{c}{m}\dot{\varphi}+\left(\frac{k}{m}-\frac{g}{L}\right)\varphi=0$$

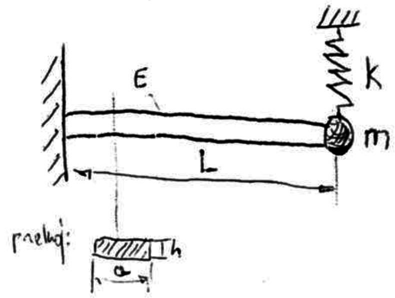
2. Drgania dźwigni kątowej



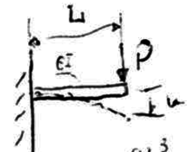
do samodzielnego wyprowadzenia

$$I_A \ddot{\varphi}+c\frac{b^2}{4}\dot{\varphi}+k b^2 \varphi=F(t) a$$

■ Obliczyć częstotliwość drgań własnych układu z rysunku. Masa belki jest pomijalnie mała w stosunku do ciała o masie m.



$k=1000\,\frac{N}{m}$, $E=2\cdot10^{11}\,Pa$, $L=1m$, $m=2kg$,
$a=0{,}04\,m$, $h=0{,}01\,m$

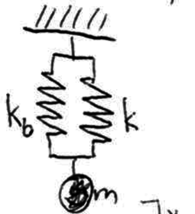


$u=\frac{PL^3}{3EI}$

$$I=\frac{ah^3}{12}=\frac{4\cdot10^{-2}m\cdot(10^{-2}m)^3}{12}=\frac{1}{3}\cdot10^{-8}\,m^4$$

Sztywność belki: $k_b=\frac{3EI}{L^3}=\frac{3\cdot2\cdot10^{11}\frac{N}{m^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot10^{-8}m^4}{(1m)^3}=2000\,\frac{N}{m}$

Układ możemy zastąpić przez równoległe połączenie nieważkich sprężyn:



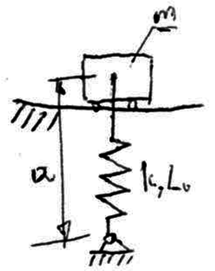
Równanie ruchu: $m\ddot{x}+(k+k_b)x=0$

Częstość drgań własnych: $\omega_0=\sqrt{\frac{k+k_b}{m}}=\sqrt{\frac{3000\frac{N}{m}}{2kg}}\approx 38{,}7\,\frac{1}{s}$

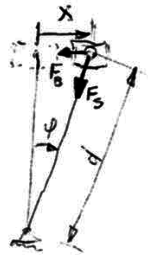
Częstotliwość drgań własnych: $f=\frac{\omega}{2\pi}\approx 6{,}16\,Hz$

■ Obliczyć częstość małych drgań wokół położenia równowagi układu.

$m=2kg$, $k=1000\,\frac{N}{m}$, $a=0{,}5m$, $L_0=0{,}4m$ (dł. swobodna sprężyny)



Małe drgania



$d^2=a^2+x^2$

odkształcenie sprężyny: $\Delta=d-L_0=\sqrt{a^2+x^2}-L_0$

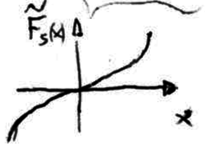
siła w sprężynie: $F_s=k\cdot\Delta$

$\sin\varphi=\frac{x}{d}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\Sigma F_{ix}=F_B+F_s\sin\varphi=0$$

$$m\ddot{x}+k\left(\sqrt{a^2+x^2}-L_0\right)\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=0$$

$$m\ddot{x}+\underbrace{kx\left(1-\frac{L_0}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)}_{\tilde{F}_s(x)}=0$$



Linearyzacja $\tilde{F}_s(x)=kx\left(1-\frac{L_0}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)$, $\tilde{F}_s(x)_{x=0}=F_s(0)+\frac{F_s'(x)_{x=0}}{1!}\cdot x+\ldots$

$$F_s'(x)=\left(kx-\frac{kxL_0}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)'_x=k-\frac{kL_0\sqrt{a^2+x^2}-kxL_0\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}\cdot2x}{a^2+x^2}=$$

$$=k-kL_0\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}+kx^2L_0\frac{1}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

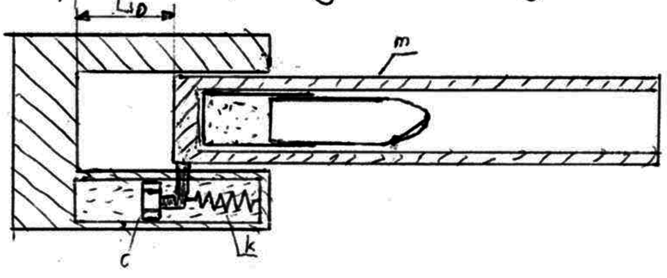
$$F_s'(x)_{x=0}=k-kL_0\frac{1}{|a|}\overset{a>0}{=}k\left(1-\frac{L_0}{a}\right)$$

Zatem $\tilde{F}_s(x)\approx kx\left(1-\frac{L_0}{a}\right)$

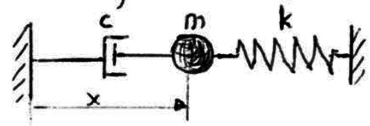
Po linearyzacji:

$$m\ddot{x}+kx\left(1-\frac{L_0}{a}\right)=0$$

Dobrać współczynnik tłumienia mechanizmu powrotu lufy działa tak, aby jej powrót do pozycji wyjściowej trwał jak najkrócej.
Obliczyć maksymalny skok lufy i czas jej powrotu do pozycji początkowej. Znane są m i k.



Przedstawmy układ w postaci modelu:



Równanie ruchu:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = -V_0$ ← prędkość początkowa lufy po wystrzale

$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$h = \frac{c}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Najszybszy powrót obiektu do położenia początkowego uzyskamy dobierając tłumienie o charakterze krytycznym, zatem:

$h = \omega_0$

$\frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow c = 2\sqrt{k \cdot m}$

Przewidujemy rozwiązanie równania ruchu w postaci:

$x(t) = e^{-ht}(C_1 + C_2 t)$

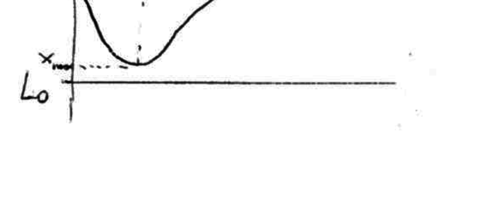
stałe wyznaczamy z warunków początkowych:

$x(0) = e^{-0}(C_1 + C_2 \cdot 0) = C_1 = 0$

$\dot{x}(t) = -he^{-ht}(C_1 + C_2 t) + e^{-ht} \cdot C_2$

$\dot{x}(0) = -hC_1 + C_2 = C_2 = -V_0$

$x(t) = -V_0 \cdot t \cdot e^{-ht}$



Maksymalny skok lufy obliczamy szukając minimum funkcji $x(t)$:

$\dot{x}(t) = 0 \iff t_{max} = \frac{1}{h} \qquad x(t_{max}) = \frac{V_0}{h \cdot e}$

Czas powrotu lufy obliczamy z zależności, np.:

$x(t_k) = 1\% \cdot L_0$

Przykład liczbowy rozwiązania równania różniczkowego dla oscylatora harmonicznego tłumionego przy zadanych warunkach początkowych

$$2\ddot{x}(t)+80\dot{x}(t)+1250\,x(t)=0,\quad x(0)=1,\quad \dot{x}(0)=-2$$

$$\ddot{x}(t)+40\,\dot{x}(t)+625\,x(t)=0$$

$$\ddot{x}(t)+2h\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=0$$

$$h=20,\quad \omega_0=25$$

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2}=15$$

Tłumienie krytyczne ($h<\omega_0$)

Rozwiązanie:

$$x(t)=e^{-ht}(A\cos\omega t+B\sin\omega t)$$

Podstawiamy pierwszy warunek początkowy:

$$x(0)=A \;\rightarrow\; A=1$$

Liczymy pochodną $\frac{dx(t)}{dt}$

Podstawiamy drugi warunek początkowy:

$$\dot{x}(0)=-hA+B\omega \;\rightarrow\; B=\frac{\dot{x}(0)+h}{\omega}=1{,}2$$

Mamy więc rozwiązanie:

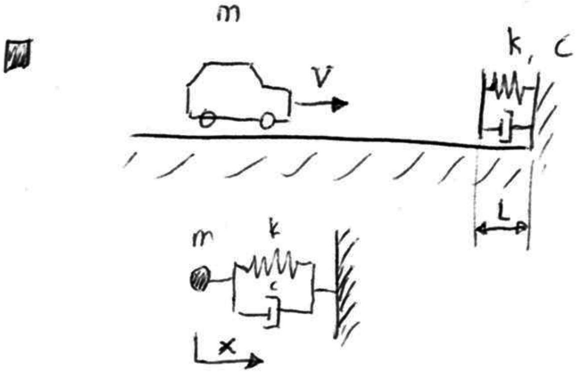
$$x(t)=e^{-20t}(1\cos 15t+1{,}2\sin 15t)$$

Wykorzystując wzory na sumę funkcji harmonicznych tej samej częstości możemy otrzymać wzór

$$x(t)\approx 1{,}56\,e^{-20t}\sin(15t+0{,}69)$$

Przykładowe zdanie z wykorzystania oscylatora tłumionego w zadaniu zaprojektowania zderzaka

Zderzenie samochodu ze zderzakiem modelujemy jako oscylator tłumiony dla którego zadajemy odpowiednie warunki początkowe

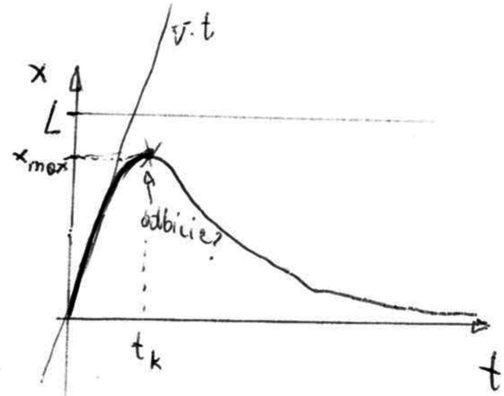


dane: k, m, V

Dobrać c, aby zderzenie było tłumione w sposób krytyczny. Ile wyniesie siła zderzeniowa? Ile siła maksymalna?

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad x(0)=0 \qquad \dot{x}(0)=V$$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



tłumienie krytyczne → $h = \omega_0$

$$\frac{c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{k \cdot m}$$

$$F_z(t) = F_s(t) + F_t(t) = k \cdot x(t) + c \cdot \dot{x}(t)$$ ← trzeba znać rozwiązanie x(t) aby to przeanalizować i znaleźć maksimum siły

$$F_z(0) = k \cdot 0 + c \cdot V = 2\sqrt{k \cdot m} \cdot V$$

- Jakie musi być k aby "zderzak" nie uległ całkowitemu "zgnieceniu"

Przewid.: $x(t) = e^{-ht}(C_1 + C_2 t)$

$$\dot{x}(t) = -he^{-ht}(C_1 + C_2 t) + e^{-ht} \cdot C_2$$

$$x(0)=0 \rightarrow e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\dot{x}(0) = V \rightarrow -he^0(0 + C_2 \cdot 0) + e^0 C_2 = V \rightarrow C_2 = V$$

$$x(t) = e^{-ht} \cdot V \cdot t$$

$$v(t) = -he^{-ht}vt + e^{-ht}v = v(1-ht)e^{-ht}$$

max $x(t)$ dla $v(t)=0$ → $v(1-ht)e^{-ht} = 0$ → $v(1-ht) = e^{ht}$ → numerycznie szukamy t_k

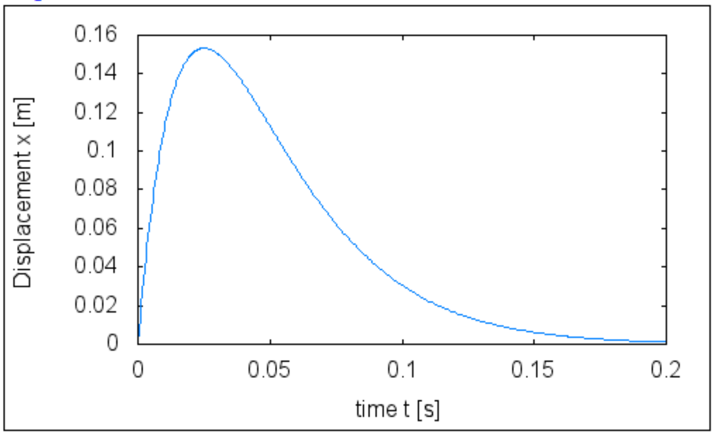
sprawdzamy czy $x(t_k) < L$

Dobieramy h aby $x_{max} < L$ a potem $k = mh^2$

A tak wyglądały by wykresy przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia w tym zadaniu dla zupełnie przykładowej wartości tłumienia i prędkości początkowej (użyłem programu wxMaxima):

```
(%i41) v_0: 60/3.6$
       h : 40$
       x(t) := v_0*t*exp(-h*t)$
       wxplot2d([x(t)], [t,0,0.2], [xlabel, "time t [s]"], [ylabel, "Displacement x [m]"]);
```

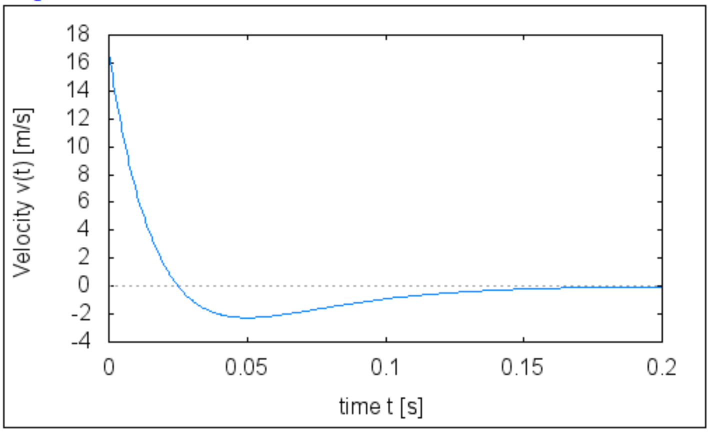
(%t44)



(%o44)

```
(%i39) v(t) := diff(x(t), t)$
       wxplot2d([v(t)], [t,0,0.2], [xlabel, "time t [s]"], [ylabel, "Velocity v(t) [m/s]"]);
```

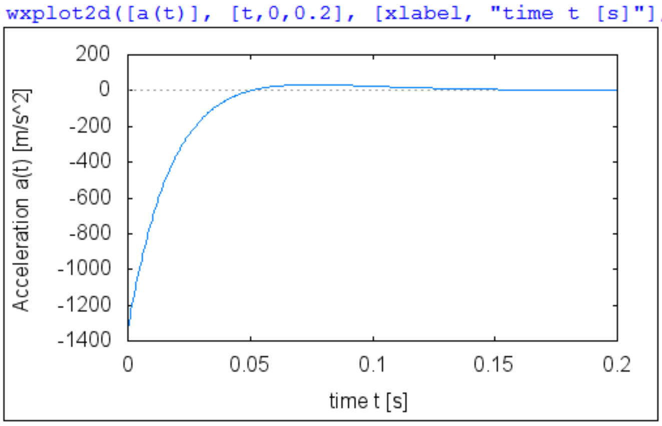
(%t40)



(%o40)

```
(%i37) a(t) := diff(v(t), t)$
       wxplot2d([a(t)], [t,0,0.2], [xlabel, "time t [s]"], [ylabel, "Acceleration a(t) [m/s^2]"]);
```

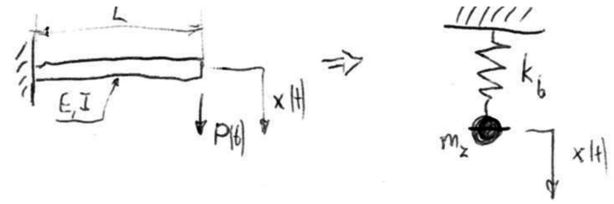
(%t38)



(%o38)

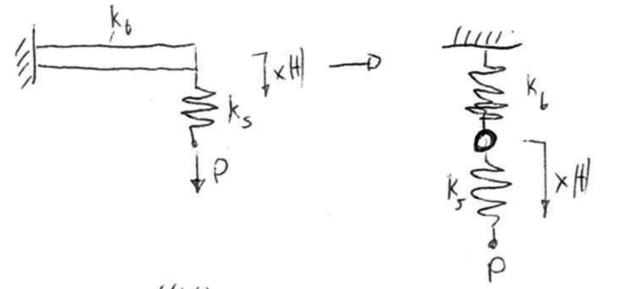
...takiego przyspieszenia 140G nikt by nie przeżył

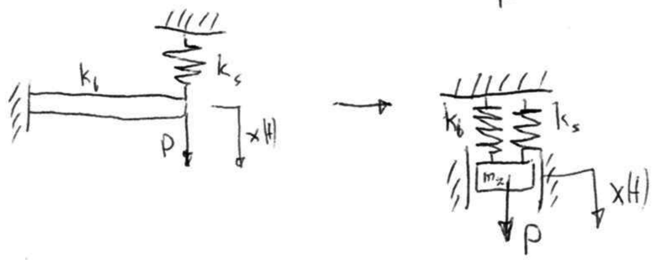
Dodatkowe materiały



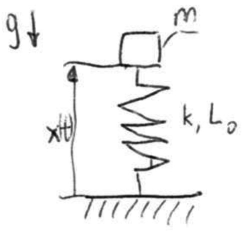
$$k_b = \frac{3EI}{L^3}$$

m_z - masa zredukowana





Uwaga o układach współrzędnych



dla $x(0) = L_0$ - długość swobodna sprężyny

$$m\ddot{x} + (x - L_0)k = mg$$

$$m\ddot{x} + kx = mg + kL_0$$

dla $x(0) = L_0 - \frac{mg}{k}$ - startujemy z położenia równowagi

$$m\ddot{x} + \left(x - L_0 + \frac{mg}{k}\right)k = mg$$

$$m\ddot{x} + k(x - L_0) = 0$$

Przyjęcie układu współrzędnych przy podłożu wprowadza dodatkowy czynnik w równaniu ruchu, ale czasem pomaga to ocenić rozwiązanie pod kątem ograniczeń geometrycznych (tu np. $x(t) \geq 0$). Szczególnie jest to istotne w układach o wielu stopniach swobody.

Poniżej dokładne matematyczne wyprowadzenie rozwiązania równania oscylatora harmonicznego z tłumieniem

$x\,[m]$ $\dot{x}\left[\frac{m}{s}\right]$ $\ddot{x}\left[\frac{m}{s^2}\right]$

$m\,[kg]$

$c\left[N\frac{s}{m}\right]$

$k\left[\frac{N}{m}\right]$

$h\left[\frac{N\frac{s}{m}}{kg} = \frac{kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot\frac{s}{m}}{kg} = \frac{1}{s}\right]$

$\omega_0\left[\sqrt{\frac{\frac{N}{m}}{kg}} = \sqrt{\frac{kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{m}}{kg}} = \sqrt{\frac{1}{s^2}} = \frac{1}{s}\right]$

- $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

W.P.

$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = V_0$

przewid.: $x(t) = X\cdot e^{rt}$, r - zespolone

$\dot{x}(t) = Xre^{rt}$

$\ddot{x}(t) = Xr^2e^{rt}$

i podstawiamy:

$$Xr^2e^{rt} + 2hXre^{rt} + \omega_0^2 Xe^{rt} = 0$$

$$r^2 + 2hr + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = 4h^2 - 4\omega_0^2$$

$$r_1 = \frac{-2h - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2h - 2\sqrt{h^2-\omega_0^2}}{2} = -h - \sqrt{h^2-\omega_0^2}$$

$$r_2 = \frac{-2h + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2h + 2\sqrt{h^2-\omega_0^2}}{2} = -h + \sqrt{h^2-\omega_0^2}$$

rozwiązanie:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} = C_1 e^{-ht} e^{-\sqrt{h^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-ht} e^{\sqrt{h^2-\omega_0^2}\,t} =$$

$$= e^{-ht}\left(C_1 e^{-\sqrt{h^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{\sqrt{h^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

- $\Delta < 0$ $(h < \omega_0)$ tłumienie podkrytyczne

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{h^2-\omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2-h^2} = i\omega$

$e^{+ix} = \cos x + i\sin x$

$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$

$$x(t) = e^{-ht}\left(C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}\right)$$

$$x(t) = e^{-ht}\left(C_1\cos\omega t - C_1 i\sin\omega t + C_2\cos\omega t + C_2 i\sin\omega t\right)$$

$$x(t) = e^{-ht}\left(C_3\cos\omega t + C_4 i\sin\omega t\right)$$

Pozbywamy się części urojonej - zgodnie z teorią równań różniczkowych możemy dokonać liniowej kombinacji rozwiązań

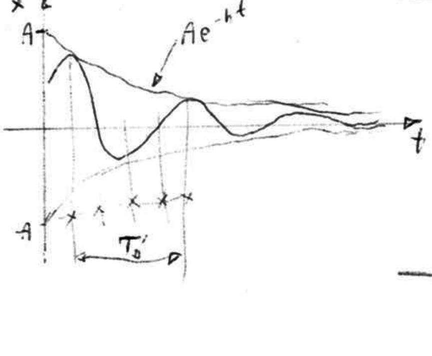
$$\tilde{x}(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} + \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = e^{-ht}\left(C_5\cos\omega t + C_6\sin\omega t\right)$$

C_5 i C_6 z W.P.

$$\tilde{x}(t) = Ae^{-ht}\sin(\omega t + \varphi)$$

$A = \sqrt{C_5^2 + C_6^2}$

$\varphi = \operatorname{atan}\frac{C_5}{C_6}$



$T_D = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$\omega = 2\pi f$

$\omega = 2\pi\frac{1}{T}$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

Logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T_D)} = \ln \frac{e^{-ht}}{e^{-h(t+T_D)}} = \ln e^{hT_D} = h \cdot T_D = \text{const.}$$

- $\Delta = 0$ $(h = \omega_0)$ - tłumienie krytyczne

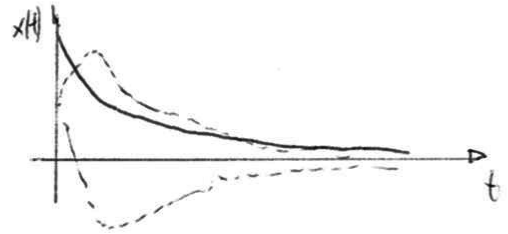
$r_1 = r_2 = -h$ $\quad \sqrt{\Delta} = 0 = \omega = 0$ $\quad$ w tym przypadku z teorii RR:

$$x(t) = e^{-ht}\left(C_1 + C_2 t\right)$$

C_1 i C_2 z w.p.

- $\Delta > 0$ $(h > \omega_0)$ - tłumienie nadkrytyczne

$$x(t) = e^{-ht}\left(C_1 e^{-\sqrt{h^2-\omega_0^2}\, t} + C_2 e^{\sqrt{h^2-\omega_0^2}\, t}\right)$$



Sebastian Korczak, 30.11.2011
aktualizacja: 19.04.2012
aktualizacja: 7.04.2013
aktualizacja: 11.04.2014
aktualizacja: 17.04.2015