DRGANIA MECHANICZNE

materiały uzupełniające do ćwiczeń

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
studia inżynierskie
prowadzący: mgr inż. Sebastian Korczak

część 1 – synteza i analiza drgań

Symbol **(E)** oznacza zalecenie obejrzenie wykresów w arkuszu kalkulacyjnym

Funkcja okresowa: $x(t)=x(t+T),\ T\neq 0$

Funkcja harmoniczna: $x(t)=a\sin(\omega t+\varphi)$

a - amplituda

ω – częstość w radianach na sekundę (ale wymiar jest $\frac{1}{s}$)

φ – faza początkowa w radianach

$\omega=2\pi f$

$f=\frac{1}{T}$ – częstotliwość w Hz lub $\frac{1}{s}$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta)$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$

Synteza (składanie) drgań

- w kierunkach prostopadłych

np. wykres XY funkcji: $x(t)=\sin(t),\ y(t)=a\sin(f\,t+b)$ **(E)**

- w tych samych kierunkach

* jednakowe częstości przebiegów harmonicznych – efektem sumowania jest przebieg harmoniczny:

$$\sum_i a_i\sin(\omega t+\varphi_i)=C\sin(\omega t+\Phi),\ C=\sqrt{A^2+B^2},\ A=\sum_i a_i\sin\varphi_i,\ B=\sum_i a_i\cos\varphi_i,\ \Phi=arctg\,\frac{A}{B}$$

* różne częstości przebiegów harmonicznych – efektem jest przebieg nieharmoniczny, ale:

- dla częstości współmiernych będzie to ruch okresowy
- dla częstości niewspółmiernych będzie to ruch nieokresowy (prawie okresowy, quasi okresowy)

Przykład: dokonać syntezy funkcji

$x_1(t)=2\sin(-\omega t-\frac{\pi}{4})$

$x_2(t)=3\cos(-\omega t+\frac{\pi}{4})$

$x_3(t)=4\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$

wynik: $x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)\approx 3{,}38\sin(\omega-0{,}21)$ **(E)**

Przydatne zależności

$\sin(-x)=-\sin(x)$

$\cos(-x)=\cos(x)$

$\cos(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$3\sin(\sqrt{2}t)-4\sin(5t)$ – ruch quasi okresowy **(E)**

$2\cos(\frac{2}{5}t-\pi)-\sin(6t+2)$ ruch okresowy o okresie 5π **(E)**

$2\sin 6t+\sin 4t$ – ruch okresowy o okresie π **(E)**

Dudnienie

Zjawisko polegające na dodawaniu dwóch sygnałów harmonicznych o zbliżonych częstościach w wyniku którego powstaje sygnał harmoniczny o okresowo zmiennej amplitudzie.

Sposób wyprowadzenia:

$x(t)=a\sin(\omega_1 t)+a\sin(\omega_2 t),\ \omega_2=\omega_1+\Delta\omega,\ \Delta\omega\ll\omega_1$

Po przekształceniu drugiej części $a\sin(\omega_2 t)=a\sin(\omega_1 t+\Delta\omega t)$ możemy zastosować wzory jak dla sumy funkcji harmonicznych o tej samej częstości:

$x(t)=a\sin(\omega_1 t)+a\sin(\omega_1 t+\Delta\omega t)=C\sin(\omega_1 t+\varphi)$

$A=a\sin(0)+a\sin(\Delta\omega t)=a\sin(\Delta\omega t)$

$B=a\cos(0)+a\cos(\Delta\omega t)=a+a\cos(\Delta\omega t)$

$C=\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{a^2\sin^2\Delta\omega t+a^2+2a^2\cos\Delta\omega t+a^2\cos^2\Delta\omega t}=a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\Delta\omega t}$

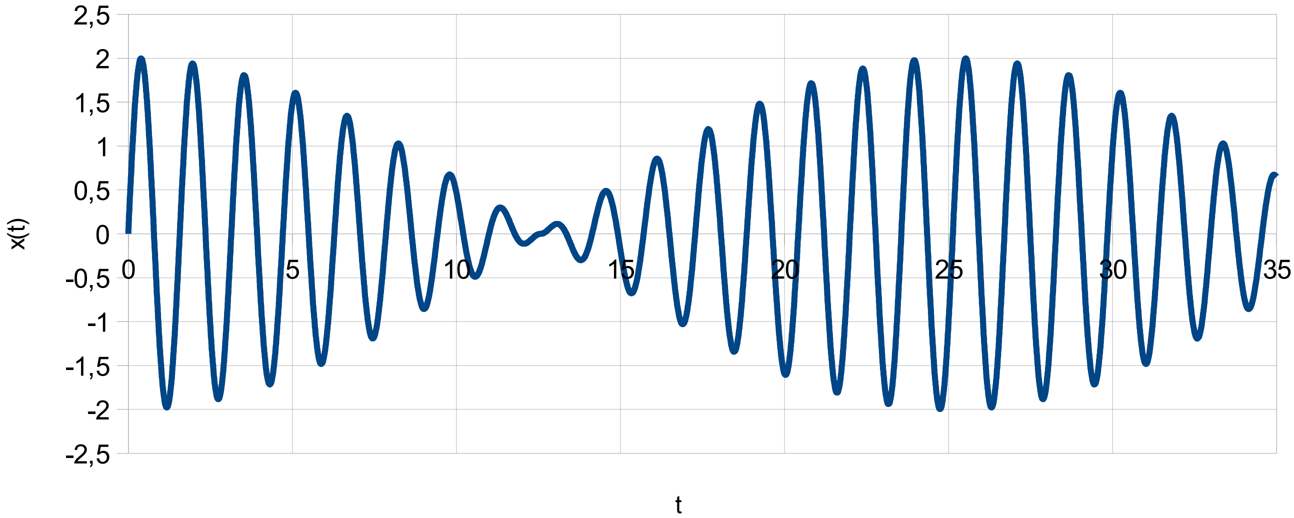
$$tg\,\varphi=\frac{A}{B}=\frac{a\sin(\Delta\omega t)}{a+a\cos(\Delta\omega t)}=\frac{\sin(\Delta\omega t)}{1+\cos(\Delta\omega t)}=\frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2}t+\frac{\Delta\omega}{2}t)}{1+\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t+\frac{\Delta\omega}{2}t)}=\frac{2\sin(\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)}{1+\cos^2(\frac{\Delta\omega}{2}t)-\sin^2(\frac{\Delta\omega}{2}t)}=$$

$$\frac{2\sin(\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)}{\sin^2(\frac{\Delta\omega}{2}t)+\cos^2(\frac{\Delta\omega}{2}t)+\cos^2(\frac{\Delta\omega}{2}t)-\sin^2(\frac{\Delta\omega}{2}t)}=\frac{2\sin(\frac{\Delta\omega}{2}t)\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)}{2\cos^2(\frac{\Delta\omega}{2}t)}=\frac{\sin(\frac{\Delta\omega}{2}t)}{\cos(\frac{\Delta\omega}{2}t)}=tg(\frac{\Delta\omega}{2}t)$$

Z powyższego: $\varphi=\frac{\Delta\omega}{2}t$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$x(t)=a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\Delta\omega t}\sin\left(\omega_1 t+\frac{\Delta\omega}{2}t\right)=a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\Delta\omega t}\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right) \quad \textbf{(E)}$$

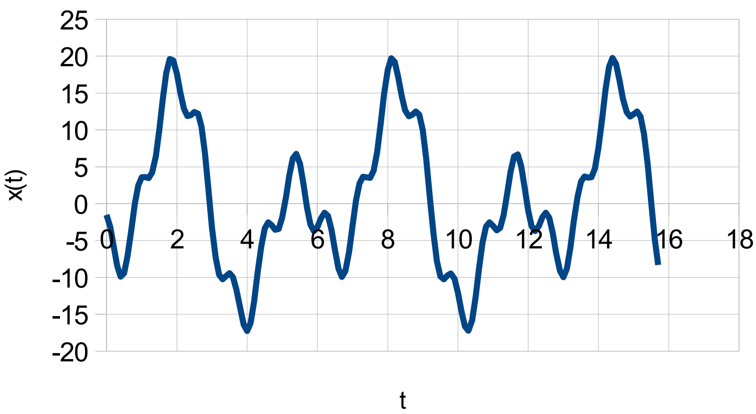


ANALIZA DRGAŃ

Stosując podstawowe zależności trygonometryczne można rozłożyć proste funkcje okresowe na sumę funkcji harmonicznych, np.:

$2\sin^3 2t=\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin 6t$ **(E)** (zachęcam spróbować z $\sin^4 t$ albo $\cos^4 3t$)

Mając funkcję np.: $x(t)=8\sin t-10\sin(2t+\pi/6)+3{,}5\cos(7t)$ możemy obejrzeć jej wykres:

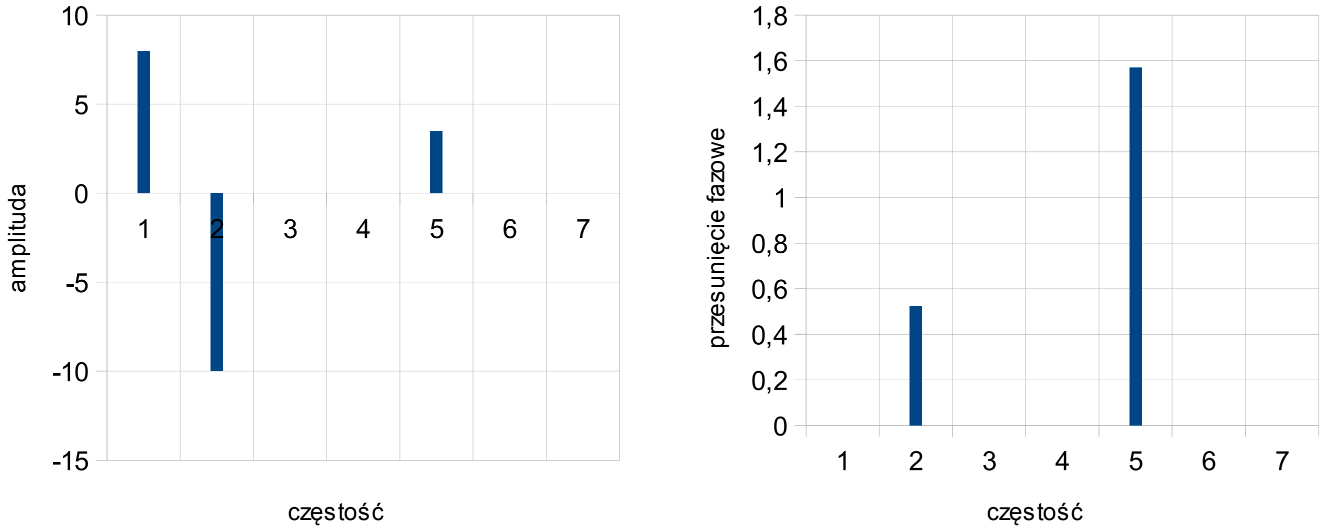


W sytuacji, gdy wykres składał się będzie z ogromnej ilości składowych i zakłóceń, sam wykres będzie niósł za sobą zbyt mało informacji w celach praktycznych (mogli byśmy tylko policzyć średnią, minimum, maksimum czy też odchylenie standardowe).

Jednak gdy poprzednią funkcję zapiszemy w takiej postaci:

$x(t)=8\sin t-10\sin(2t+\pi/6)+3{,}5\sin(5t+\pi/2)$

i narysujemy dwa wykresy – oddzielnie dla amplitud składowych harmonicznych sygnału i oddzielnie dla ich przesunięć fazowych



to zestaw tych dwóch wykresów niesie za sobą więcej informacji przydatnych praktycznie niż wcześniejszy wykres, gdyż widzimy dokładnie z czego składa się dany sygnał (możemy lepiej wnioskować o tym jakie zjawiska wywołały powstanie konkretnych składowych).

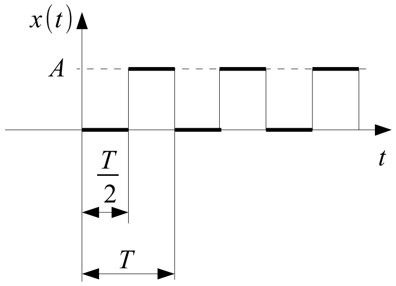
<u>Szereg Fouriera</u>

pozwala opisać funkcję okresową o okresie T za pomocą nieskończonego szeregu funkcji harmonicznych:

$$x(t) = x(t+T) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega t)+b_n\sin(n\omega t)\right),\quad gdzie:\ \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,dt \quad a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)\,dt \quad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Poniżej przykłady obliczeń szeregu dla przykładowych sygnałów.



$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos 0\,dt=\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} A\,dt=\frac{2A}{T}[t]_{T/2}^{T}=\frac{2A}{T}\left(T-\frac{T}{2}\right)=A$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)\,dt=\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} A\cos(n\omega t)\,dt=\frac{2A}{T}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_{T/2}^{T}=\frac{2A}{Tn\omega}(\sin(n\omega T)-\sin(n\omega T/2))=$$

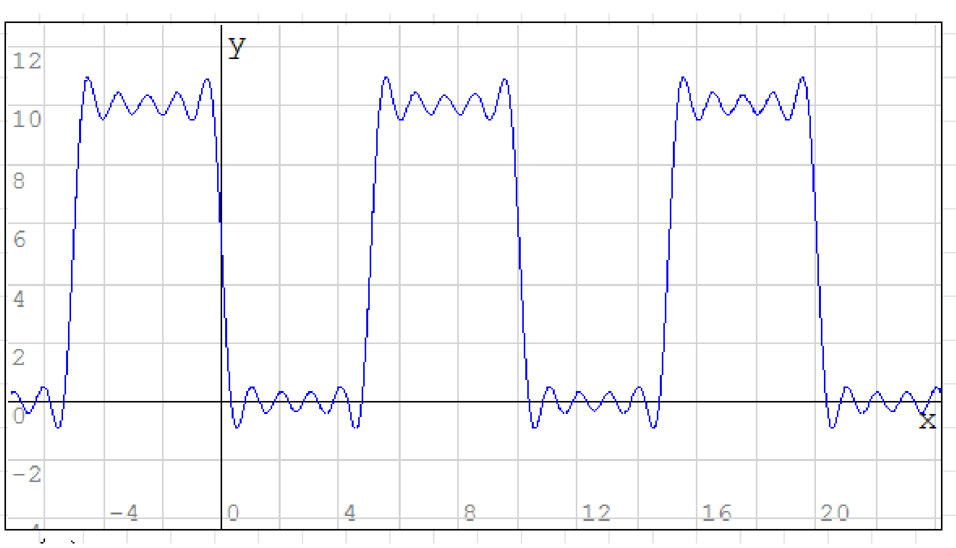
$$\frac{2A}{Tn}\frac{T}{2\pi}\left(\sin(n\frac{2\pi}{T}T)-\sin(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2})\right)=\frac{A}{n\pi}(\sin(2n\pi)-\sin(n\pi))=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)\,dt=\frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} A\sin(n\omega t)\,dt=\frac{2A}{T}\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{T/2}^{T}=\frac{-2A}{Tn\omega}(\cos(n\omega T)-\cos(n\omega T/2))=$$

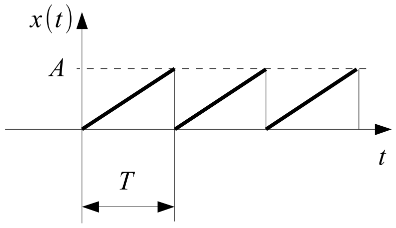
$$=\frac{-2A}{Tn}\frac{T}{2\pi}\left(\cos(n\frac{2\pi}{T}T)-\cos(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2})\right)=\frac{-A}{n\pi}(\cos(2n\pi)-\cos(n\pi))=\frac{-A}{n\pi}(1-\cos(n\pi))=$$

$$=\begin{cases}0, & dla\ \ n=2,4,6\ldots\\ \dfrac{-2A}{n\pi}, & dla\ \ n=1,3,5\ldots\end{cases}$$

$$x(t)=\frac{A}{2}-\frac{2A}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)-\frac{2A}{3\pi}\sin\left(\frac{6\pi}{T}t\right)-\frac{2A}{5\pi}\sin\left(\frac{10\pi}{T}t\right)-\ldots$$



A=10, T=10, n = 10



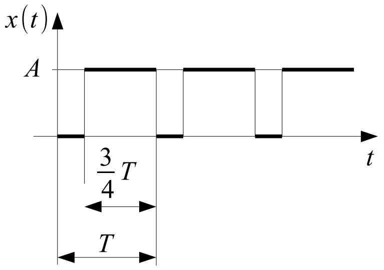
$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T \frac{A\,t}{T}\,dt=\frac{2\mathrm{A}}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T=A$$

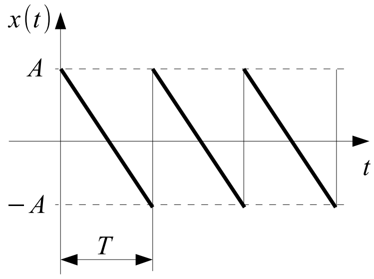
$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(n\omega t)\,dt=\frac{2}{T}\int_0^T \frac{At}{T}\cos(n\omega t)\,dt=\frac{2\mathrm{A}}{T^2}\int_0^T t\cos(n\omega t)\,dt=0$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(n\omega t)\,dt=\frac{2}{T}\int_0^T \frac{At}{T}\sin(n\omega t)\,dt\,dt=\frac{2\mathrm{A}}{T^2}\int_0^T t\sin(n\omega t)\,dt=-\frac{A}{n\pi}$$

W powyższych należy skorzystać np. z całkowania przez części.

Inne przykłady:





Warto zajrzeć:

http://pl.wikipedia.org/wiki/Szereg_Fouriera

aplet w javie liczący szereg Fouriera dla kilku przykładowych sygnałów
http://www.jhu.edu/~signals/phasorapplet2/phasorappletindex.htm

poczyniłem też kiedyś krótki artykuł na temat przekształceń Fouriera, a raczej praktycznego zastosowania:

http://myinventions.pl/index.php?page=AnalizaDzwieku

i program który w nim opisałem (do uruchomienia pod Windowsem):

http://myinventions.pl/dydaktyka/analiza_dzwieku.zip

program rysuje przebieg sygnału i jego widmo, na podstawie dźwięku z mikrofonu w komputerze (można przetestować gwizdanie, śpiewanie, granie na instrumentach, pukanie, drapanie itd.)

Sebastian Korczak, 20.04.2013
aktualizacja: 15.12.2013
aktualizacja: 31.03.2014