Politechnika Warszawska
Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
Instytut Podstaw Budowy Maszyn
Zakład Mechaniki
http://www.ipbm.simr.pw.edu.pl/

Teoria maszyn i podstawy automatyki

semestr zimowy 2017/2018

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 10

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki z przykładami.

Licencja: tylko do edukacyjnego użytku studentów Politechniki Warszawskiej.

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja operatorowa
Proporcjonalny (bezinercyjny)	$y(t)=ku(t)$	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$y(t)=k\int_0^t u(t)dt$ or $\frac{dy(t)}{dt}=ku(t)$	$\frac{k}{s}$

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja operatorowa
Różniczkujący idealny	$y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$	$\frac{ks}{Ts+1}$

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja operatorowa
Opóźniający	$y(t)=u(t-\tau)$	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu (oscylacyjny)	$T_1^2\frac{d^2y(t)}{dt^2}+T_2\frac{dy(t)}{dt}+$ $+y(t)=ku(t)$	$\frac{k}{T_1^2s^2+T_2s+1}$

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t)=ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

Element proporcjonalny

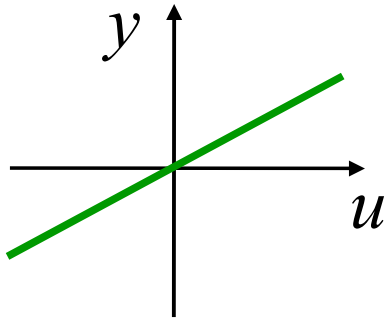
1. Równanie: $\boxed{y(t)=ku(t)}$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t)=ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

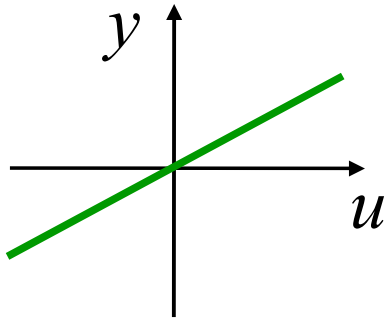
2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t)=ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



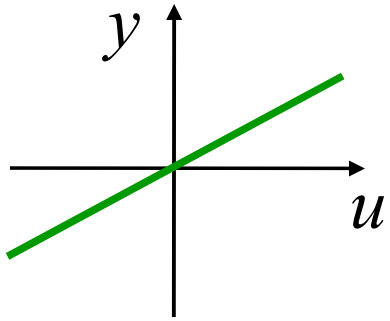
3. Transmitancja: $Y(s)=k\,U(s)$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=k$$

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t)=ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

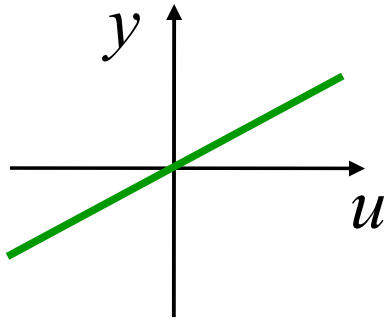


3. Transmitancja: $G(s)=k$

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t)=ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



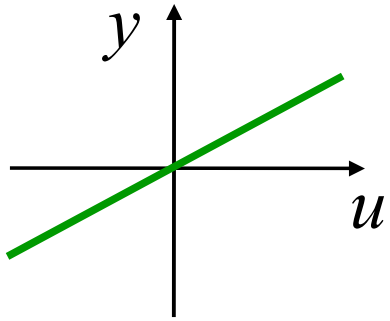
3. Transmitancja: $G(s)=k$

4. Odp. skokowa: dla $u(t)=u_0 1(t)$

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t)=ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



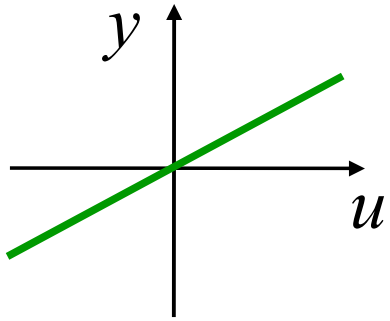
3. Transmitancja: $G(s)=k$

4. Odp. skokowa: $y(t)=k\,u_0\,1(t)$ dla $u(t)=u_0\,1(t)$

Element proporcjonalny

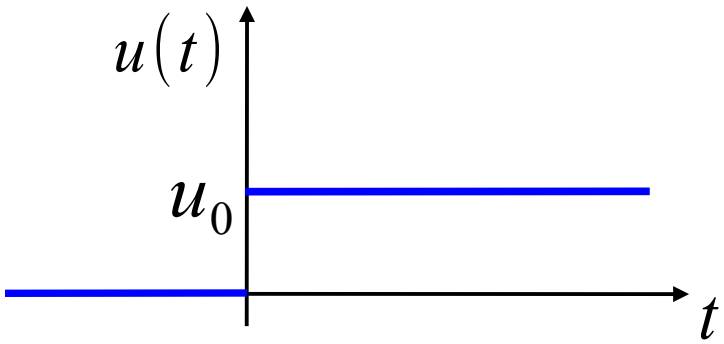
1. Równanie: $y(t)=ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $G(s)=k$

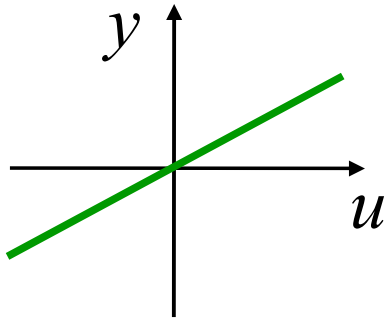
4. Odp. skokowa: $y(t)=k\,u_0\,1(t)$ dla $u(t)=u_0\,1(t)$



Element proporcjonalny

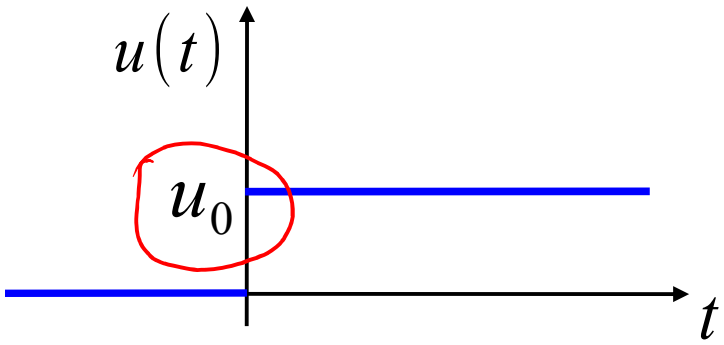
1. Równanie: $y(t)=ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

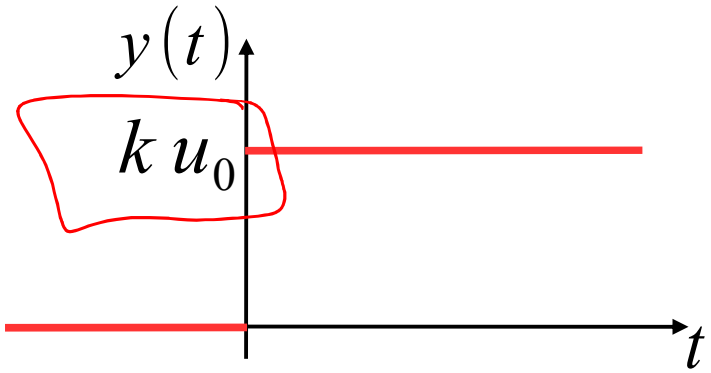
2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $G(s)=k$

4. Odp. skokowa: $y(t)=k\,u_0\,1(t)$ dla $u(t)=u_0\,1(t)$





Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k = P(\omega) + jQ(\omega)$

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k$

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k$ $\quad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

Element proporcjonalny

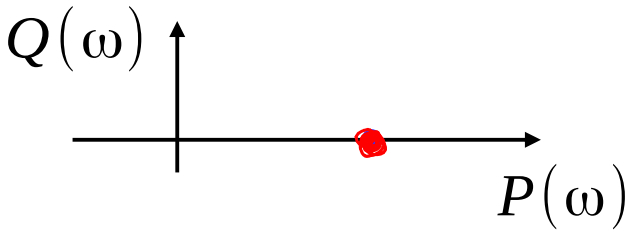
5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k \qquad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

6. Wykres Nyquista:

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k \qquad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

6. Wykres Nyquista:

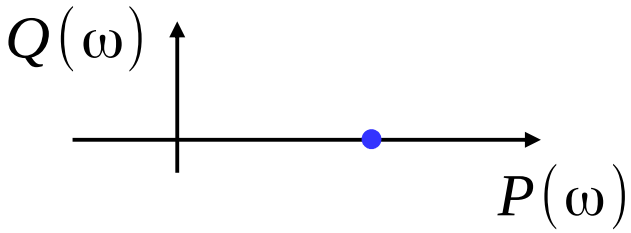


dla $k>0$

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k \qquad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

6. Wykres Nyquista:



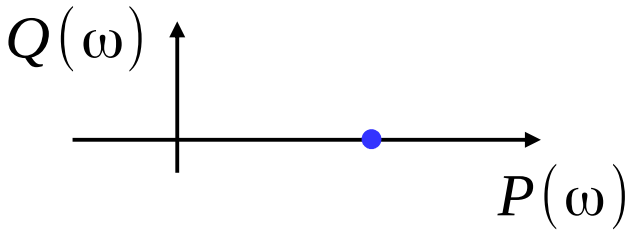
dla $k>0$

7. Wykres Bodego:

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k \qquad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

6. Wykres Nyquista:



dla $k>0$

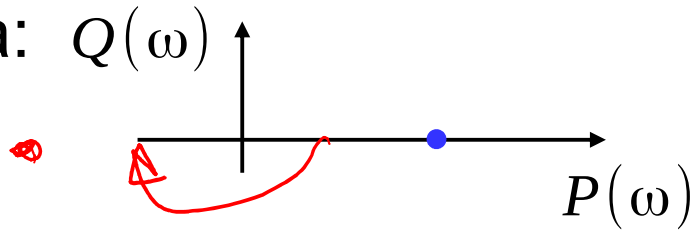
7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)$$

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k \qquad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

6. Wykres Nyquista:



dla $k>0$

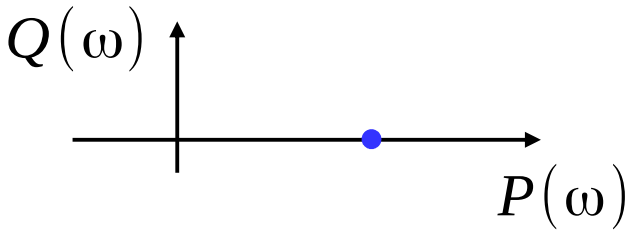
7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega) \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\begin{cases}0, & \text{dla } k\geq 0\\ \pi, & \text{dla } k<0\end{cases}$$

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k \qquad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

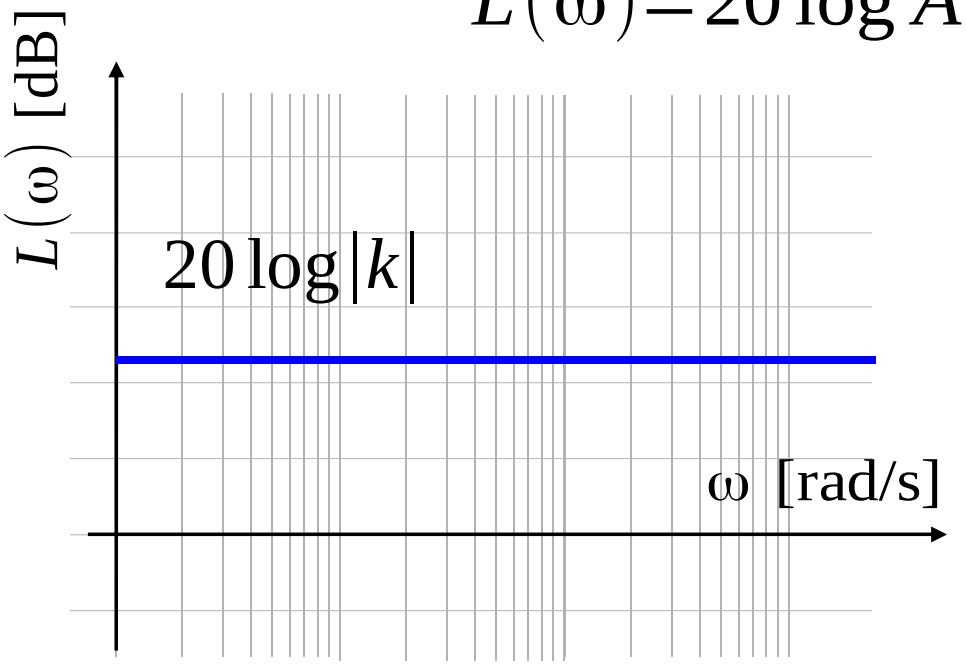
6. Wykres Nyquista:



dla $k>0$

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|$

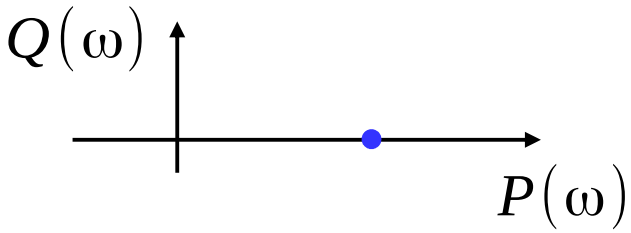
$$L(\omega)=20\log A(\omega) \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\begin{cases}0, \text{ dla } k\geq 0\\ \pi, \text{ dla } k<0\end{cases}$$



Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k \qquad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

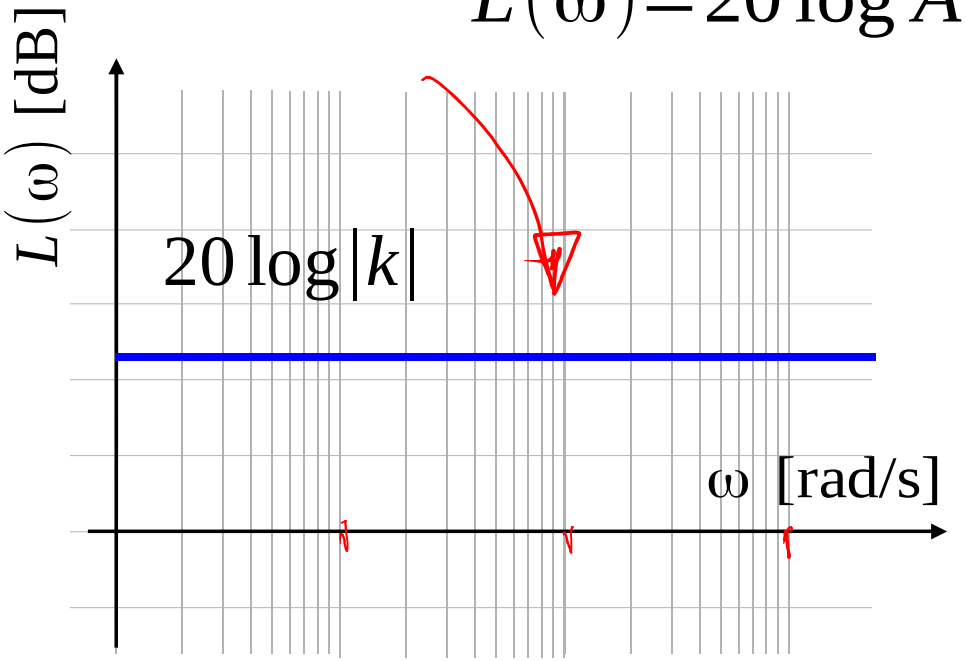
6. Wykres Nyquista:

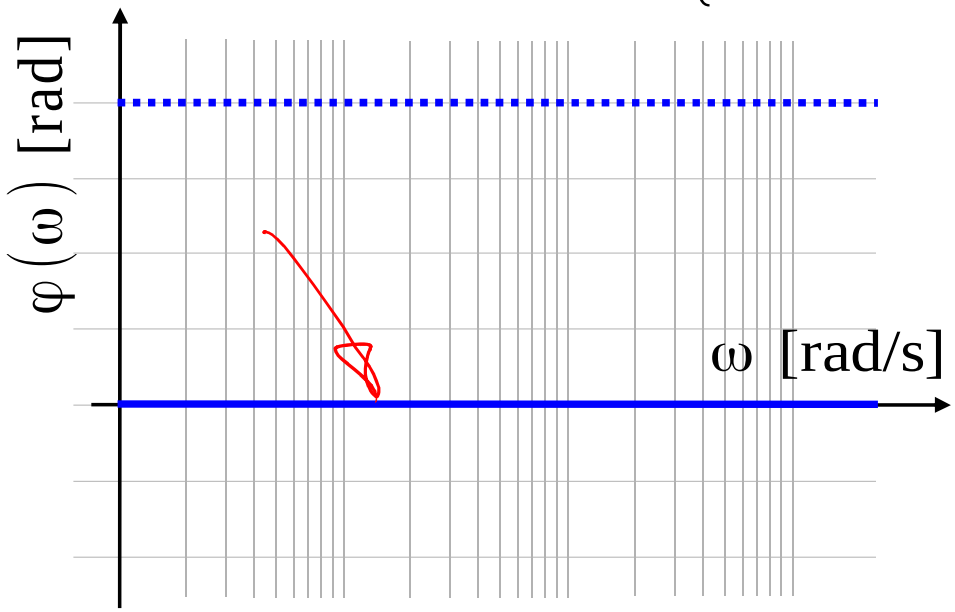


dla $k>0$

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega) \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\begin{cases}0, \text{ dla } k\geq 0\\ \pi, \text{ dla } k<0\end{cases}$$

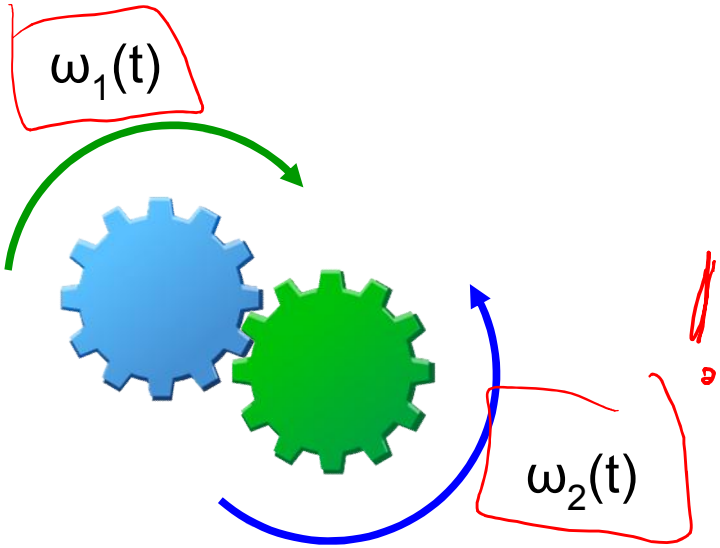




Element proporcjonalny

Przykłady

1

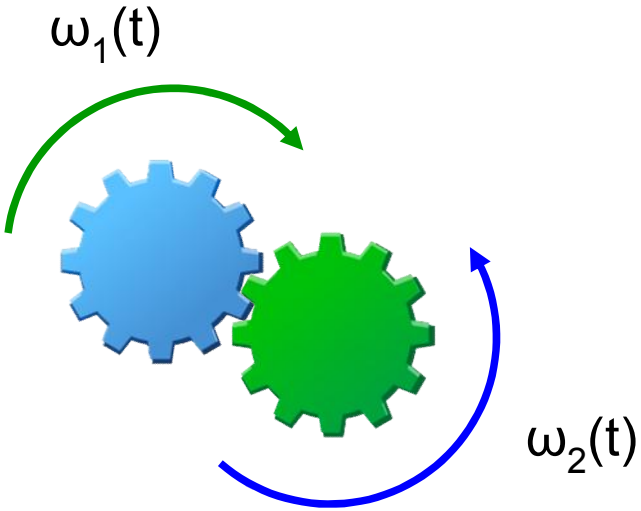


przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa $\omega_1(t)$
wyjście – prędkość kątowa $\omega_2(t)$

Element proporcjonalny

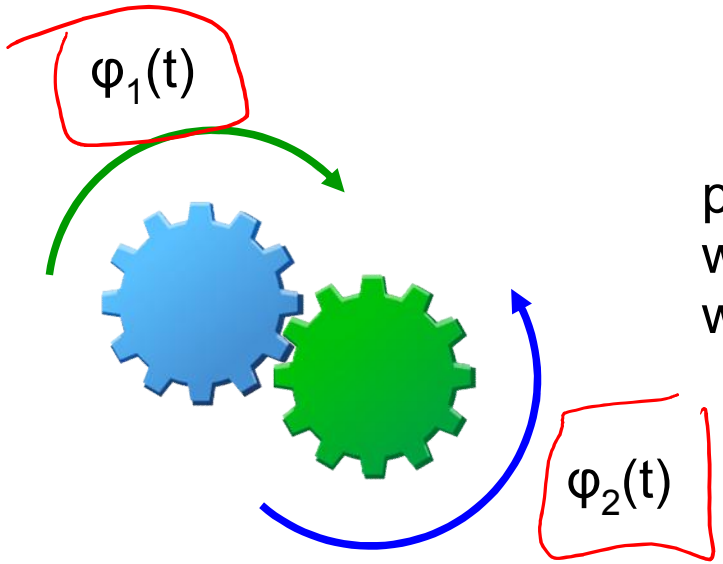
Przykłady

1



przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa $\omega_1(t)$
wyjście – prędkość kątowa $\omega_2(t)$

2

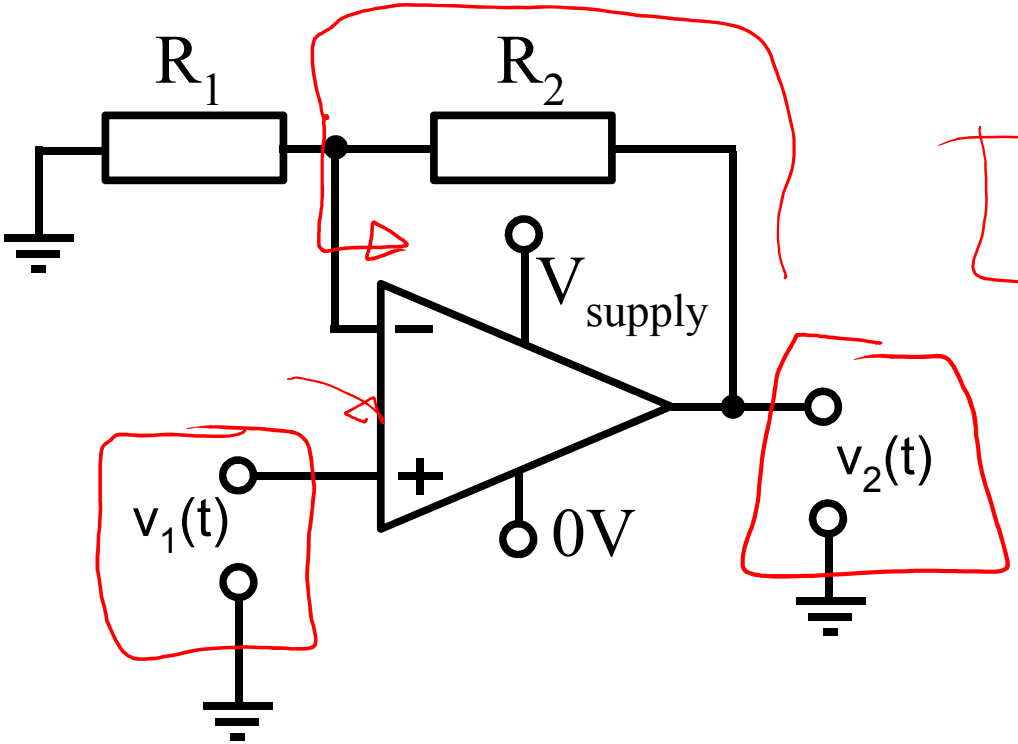


przekładnia zębata:
wejście – kąt obrotu $\varphi_1(t)$
wyjście – kąt obrotu $\varphi_2(t)$

Element proporcjonalny

Przykłady

3



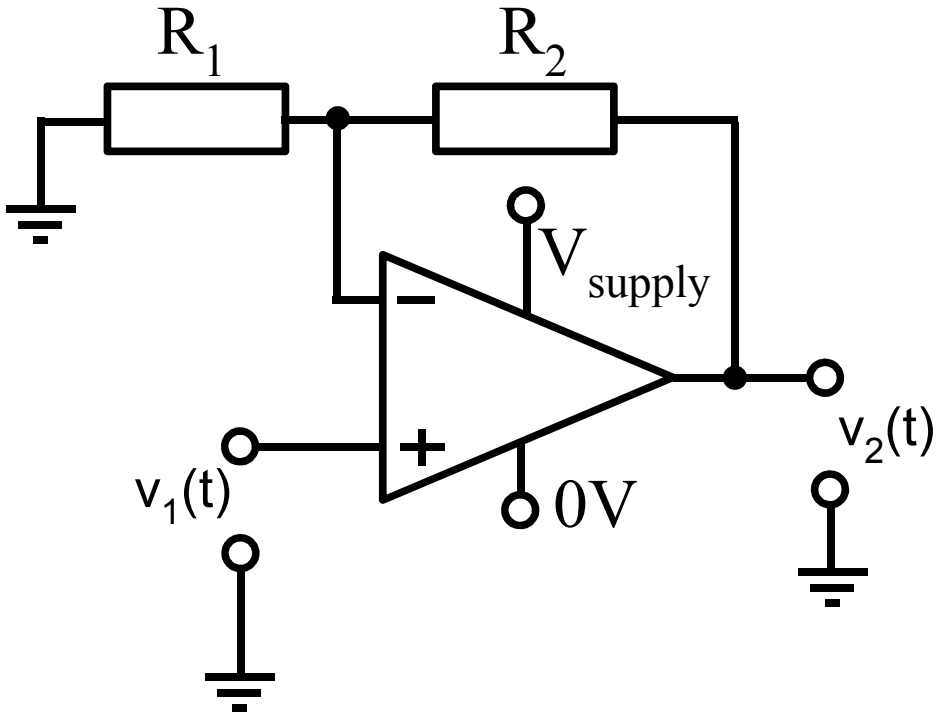
WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = v_1(t)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Element proporcjonalny

Przykłady

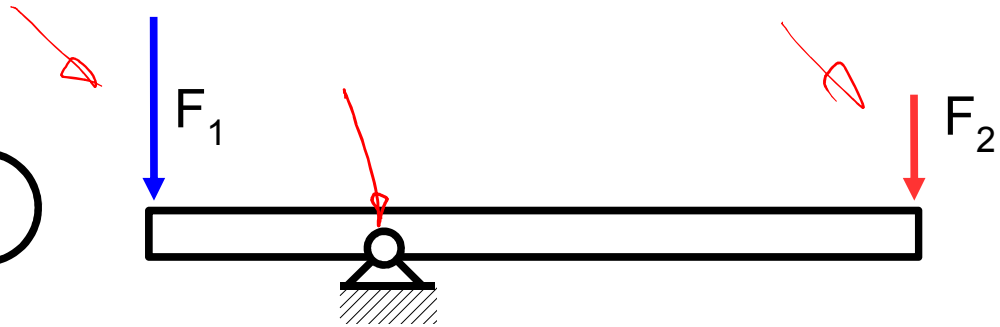
3



WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = v_1(t)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

4

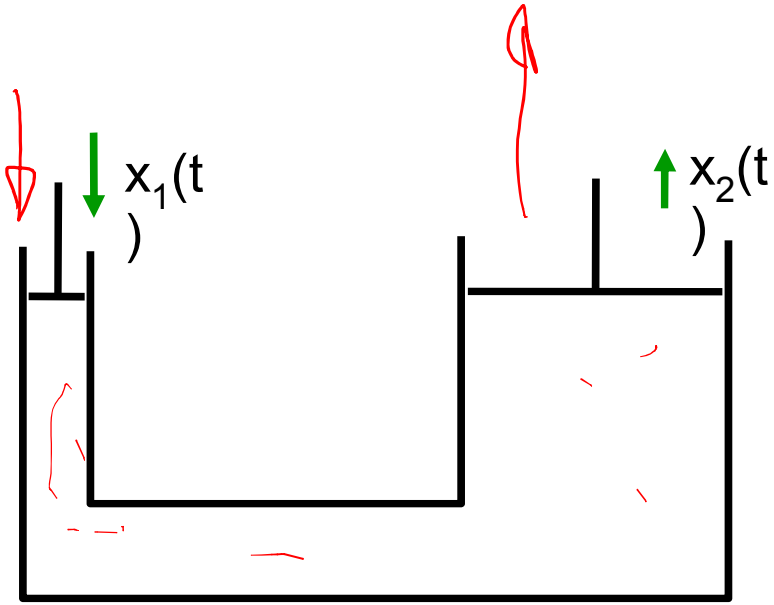


BELKA w stanie ustalonym:
wejście – siła F_1
wyjście – siła F_2

Element proporcjonalny

Przykłady

5

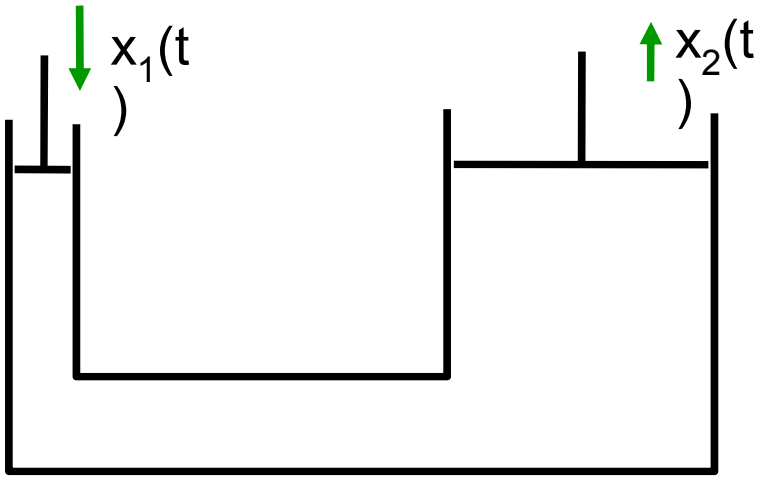


PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:
wejście – przemieszczenie $x_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x_2(t)$

Element proporcjonalny

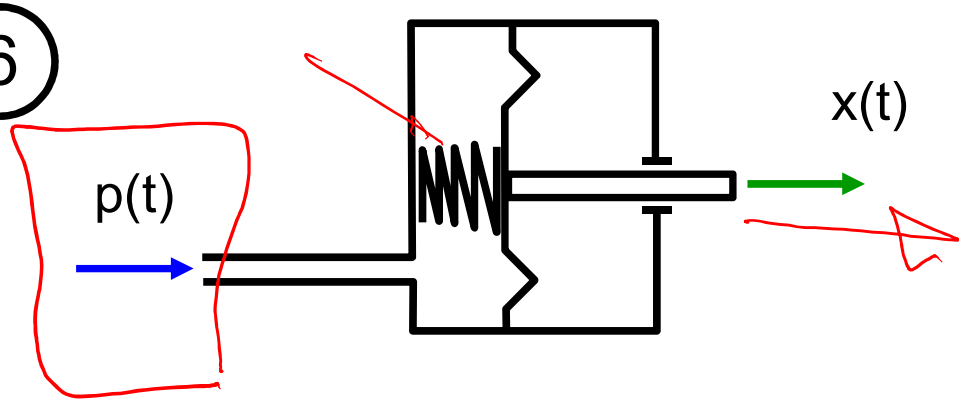
Przykłady

5



PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:
wejście – przemieszczenie $x_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x_2(t)$

6



SIŁOWNIK PNEUMATYCZNY:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x(t)$

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:

$$T\cancel{\frac{dy(t)}{dt}}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$

$$\text{dla } \frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$$

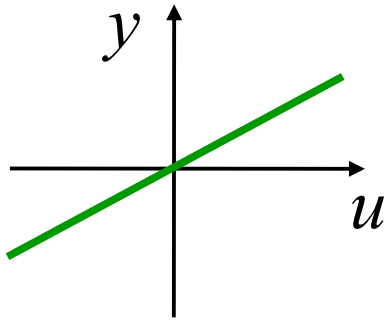
Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



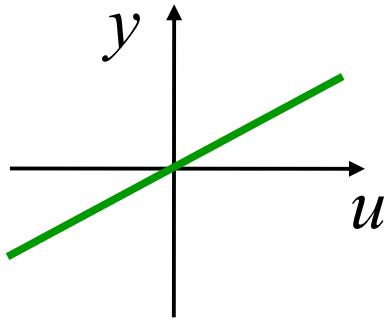
zał.: $k>0$

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $$T\cdot s\cdot Y(s)+Y(s)=k\,U(s)$$

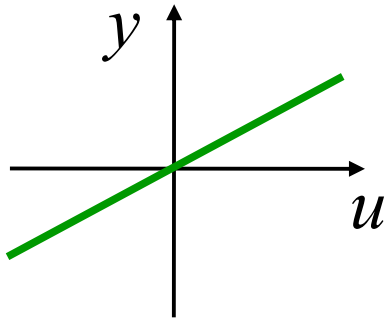
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{Ts+1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $$G(s)=\frac{k}{Ts+1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa:

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

$$Y(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{k}{Ts+1}\cdot u_0\frac{1}{s}=ku_0\frac{1}{s(Ts+1)}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{ku_0\frac{\frac{1}{T}}{s(s+\frac{1}{T})}\right\}=$$

$$=ku_0\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s(Ts+1)}$

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s(Ts+1)}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k u_0(1-e^{-t/T})$

Element inercyjny pierwszego rzędu

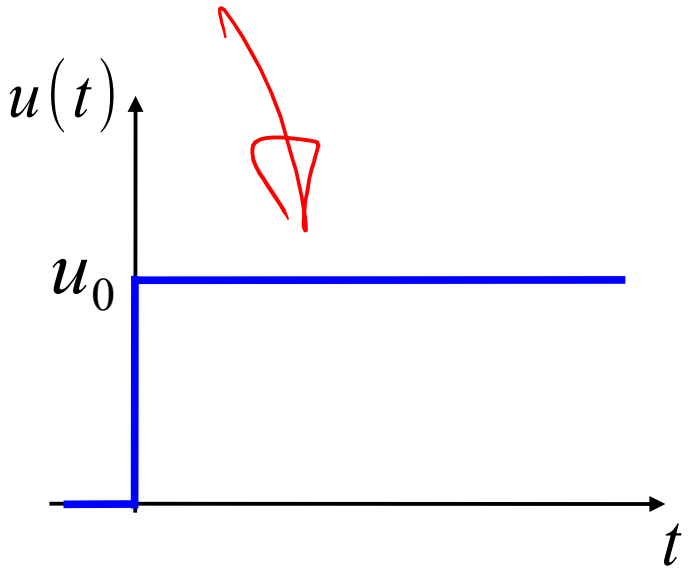
4. Odp. skokowa:

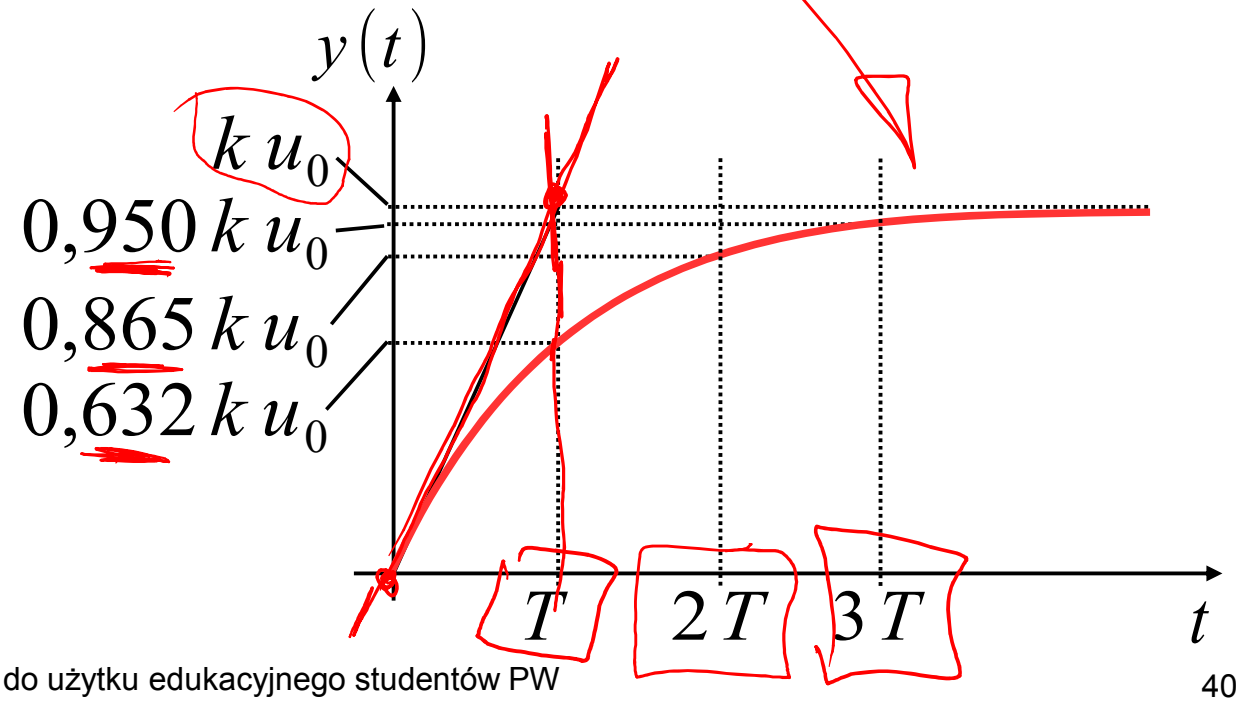
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0\frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k\,u_0}{s(Ts+1)}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k\,u_0(1-e^{-t/T})$





Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} =$$

$$= \frac{k}{Tj\omega + 1} \cdot \frac{Tj\omega - 1}{Tj\omega - 1} = \frac{jTk\omega - k}{-T^2\omega^2 - 1} =$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{k}{T^2\omega^2 + 1}}}_{P(\omega)} \underbrace{- j \frac{Tk\omega}{T^2\omega^2 + 1}}_{Q(\omega)}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:

Element inercyjny pierwszego rzędu

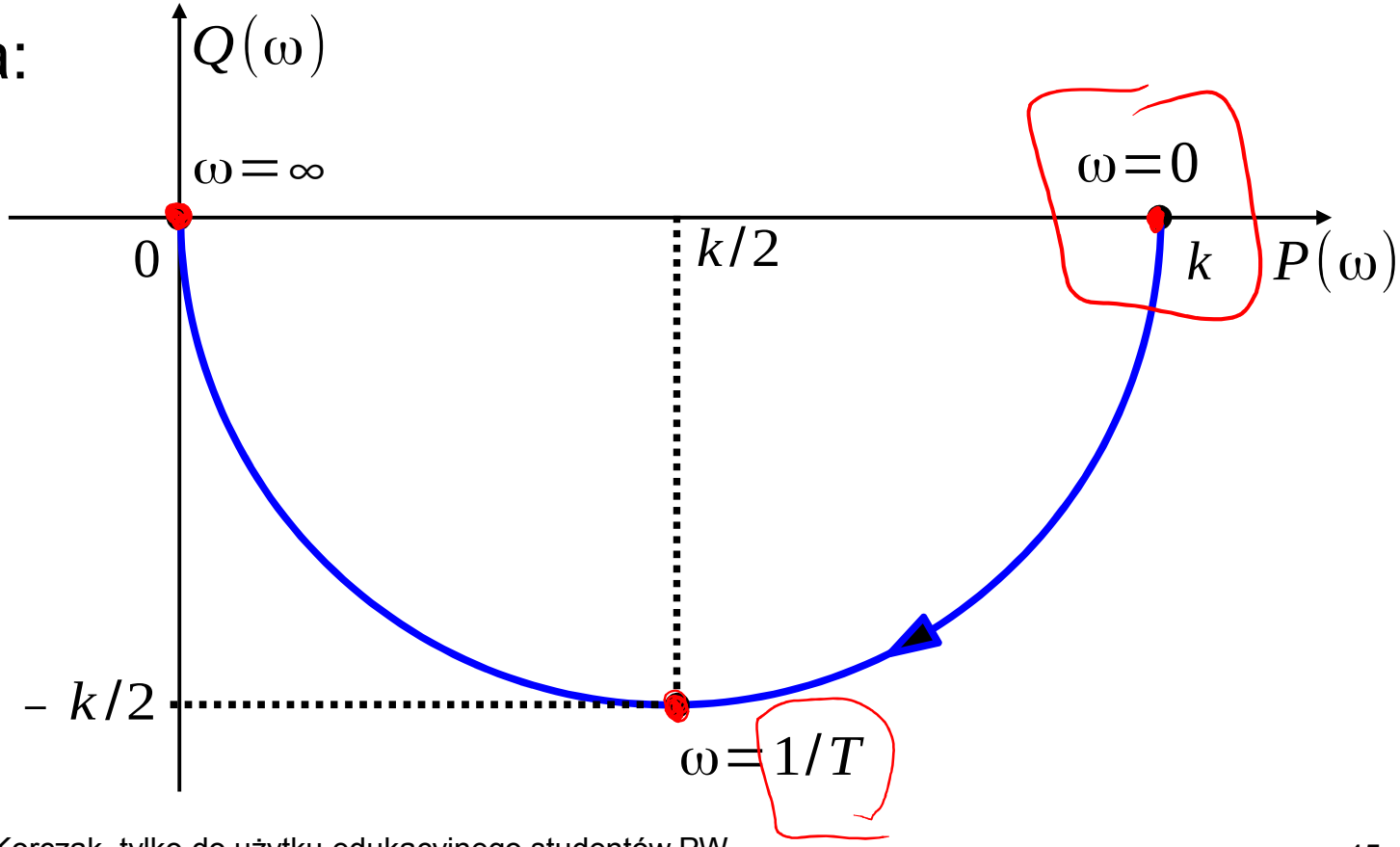
5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:

zał.: $k>0$



Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego:

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}=\operatorname{arctg}(-T\omega)$

$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega)$$

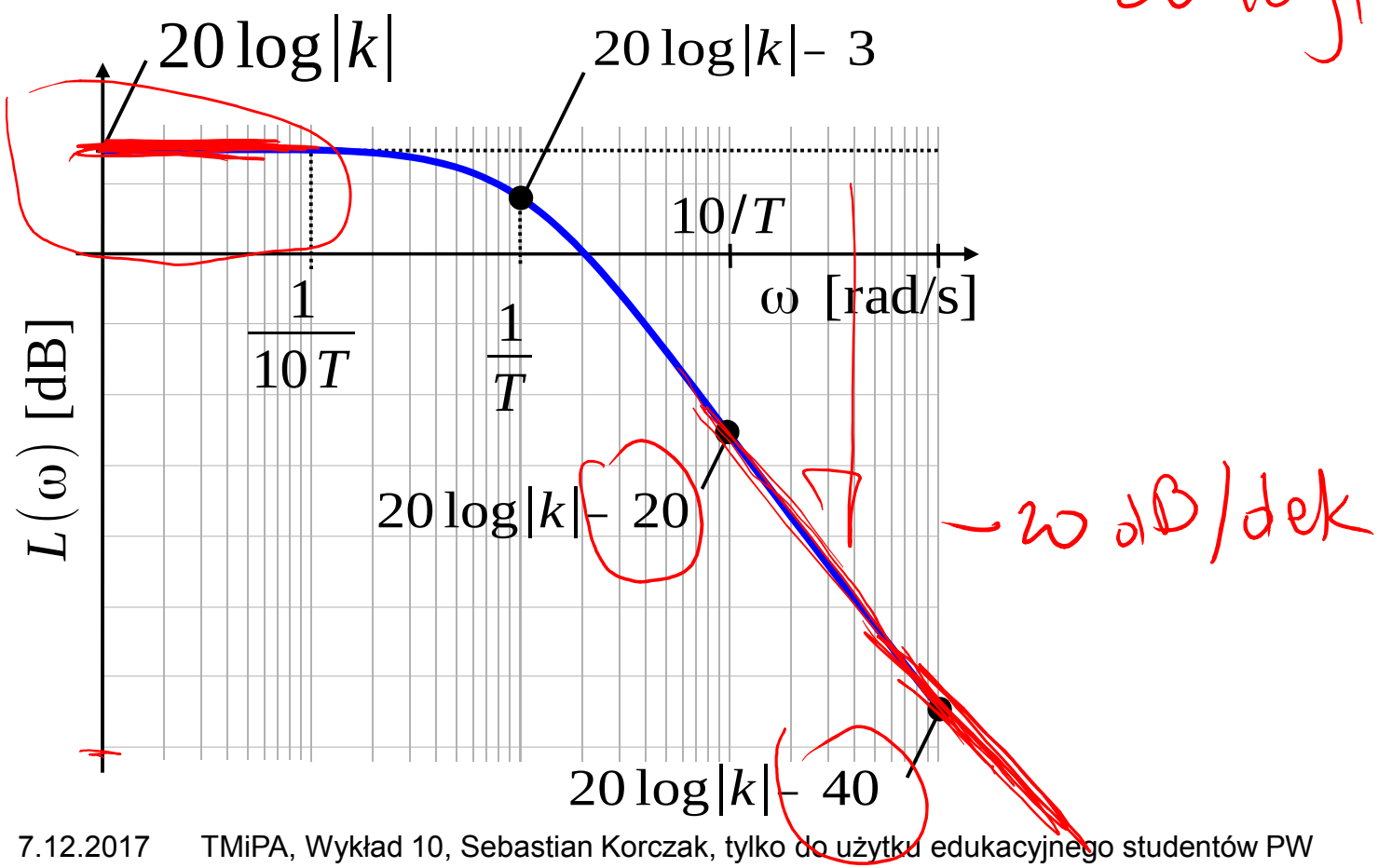
Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+\cancel{1}}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega)$$

$20\log|T\omega|$

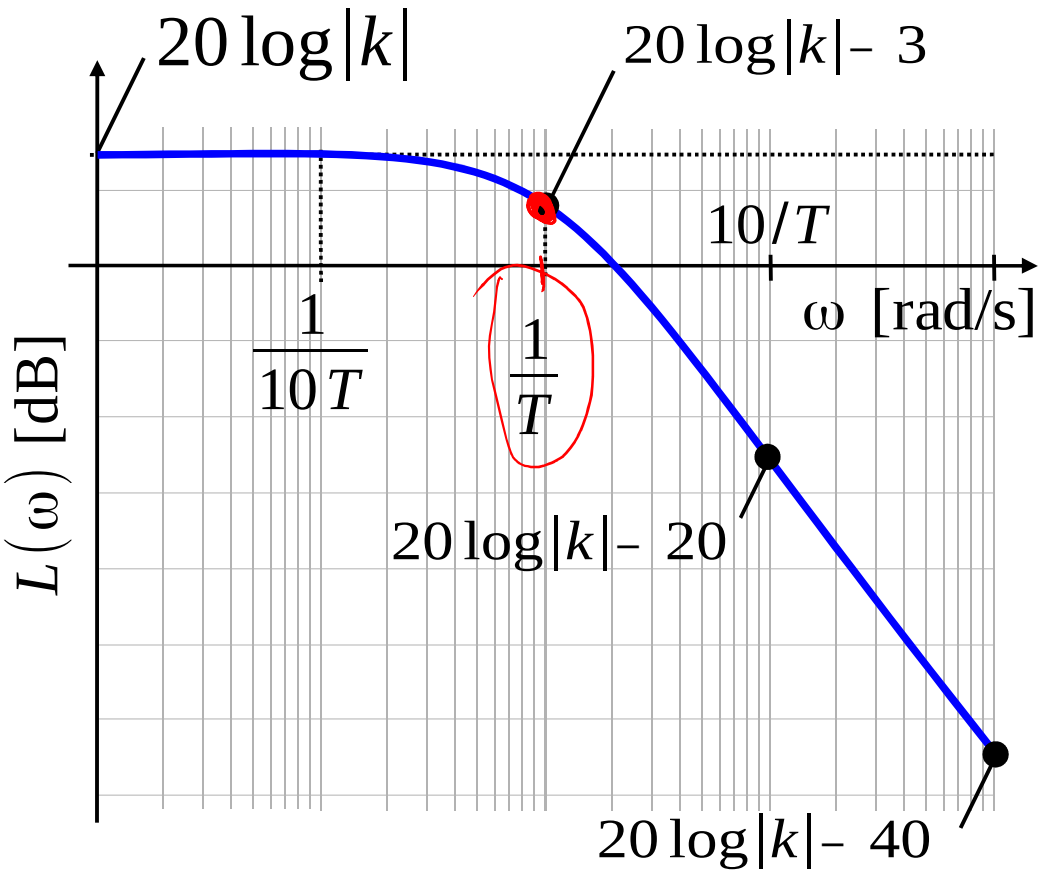


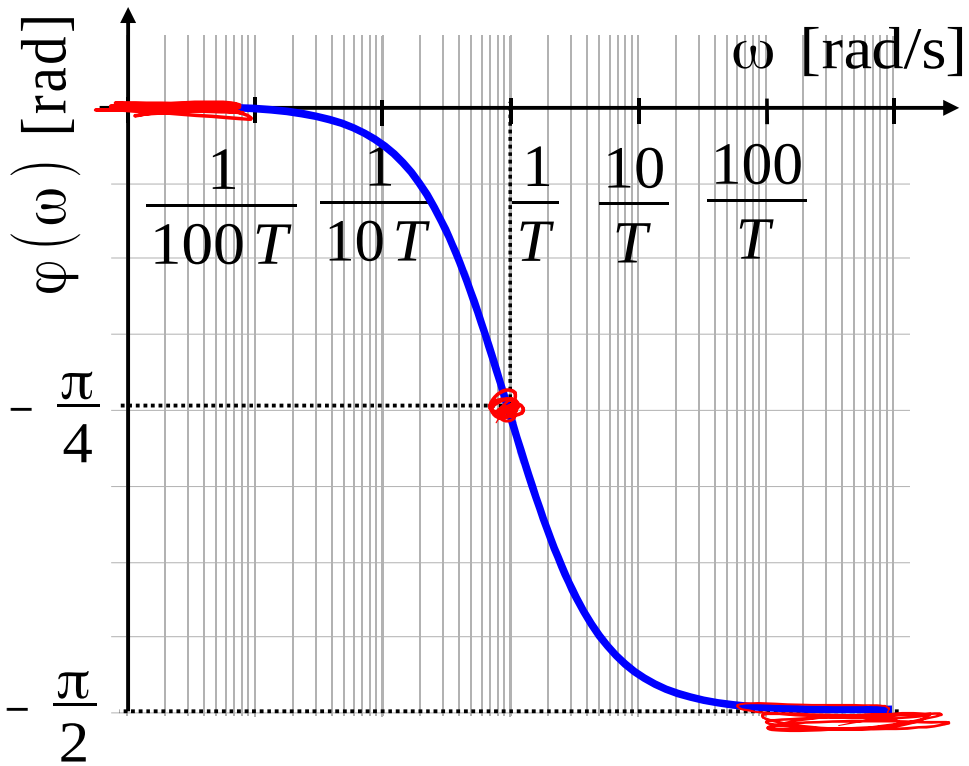
Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega)$$

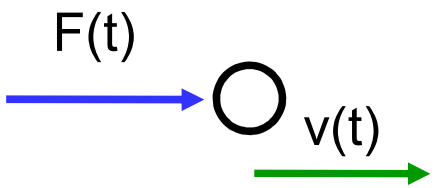




Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

1



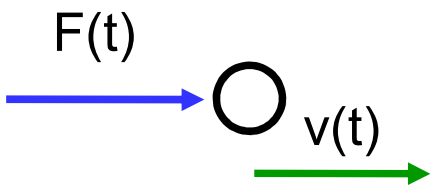
RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła F(t)
wyjście – prędkość v(t)

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną – stałe przełożenia w układzie napędowym)

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

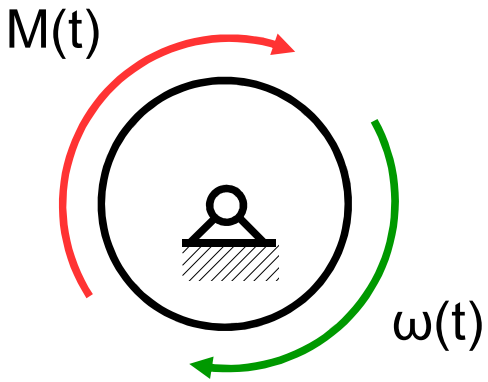
1



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła F(t)
wyjście – prędkość v(t)

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

2

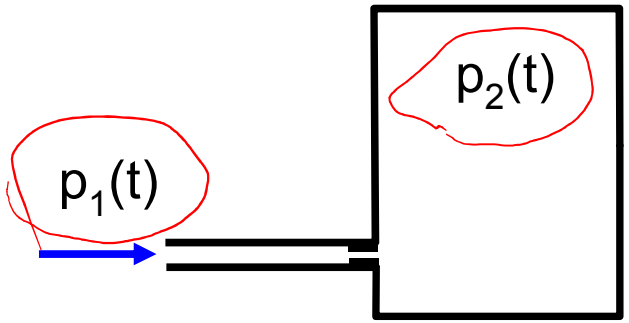


RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – moment M(t)
wyjście – prędkość kątowa ω(t)

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

3

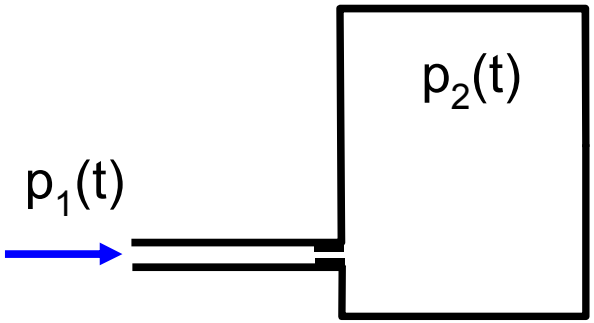


ZBIORNIK POWIETRZA:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – ciśnienie $p_2(t)$

Element inercyjny pierwszego rzędu

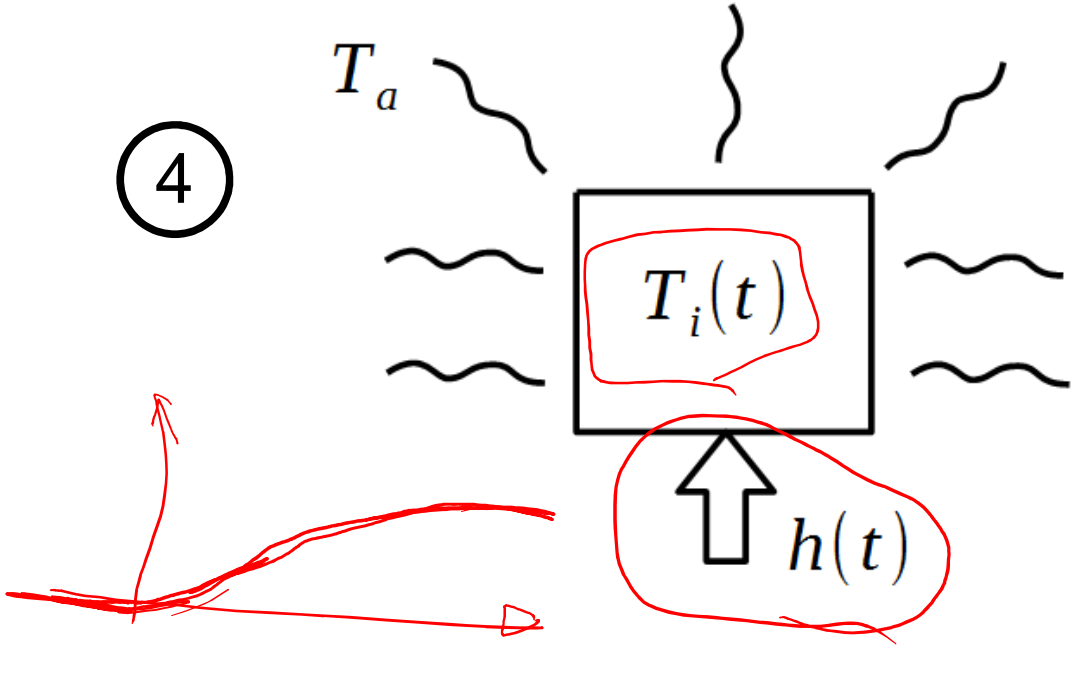
Przykłady

3

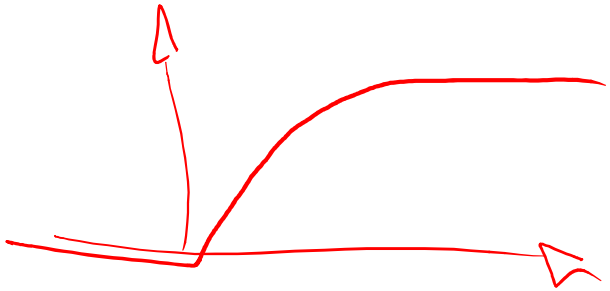


ZBIORNIK POWIETRZA:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – ciśnienie $p_2(t)$

4



OGRZEWANY OBIEKT O MAŁEJ BEZWŁADNOŚCI:
wejście – moc grzałki h(t)
wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$



Element całkujący

$y(t) = k \int u(t)\,dt$

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element całkujący

1. Równanie: $\overset{0}{\longrightarrow}$ $$\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna: $u = 0$

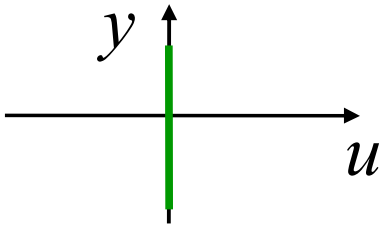
dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

Element całkujący

1. Równanie: $$\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $u = 0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

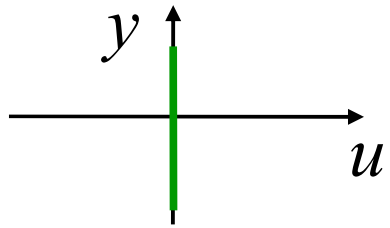


Element całkujący

1. Równanie: $$\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $u = 0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $sY(s) = k\,U(s)$

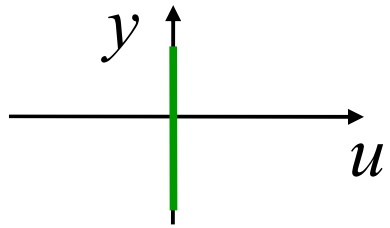
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s}$$

Element całkujący

1. Równanie: $$\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $u = 0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $$G(s) = \frac{k}{s}$$

Element całkujący

4. Odp. skokowa:

Element całkujący

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

$$Y(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{k}{s}\cdot u_0\frac{1}{s}=ku_0\frac{1}{s^2}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=ku_0\cdot t$$

Element całkujący

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s^2}$

Element całkujący

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s^2}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k u_0 t$

Element całkujący

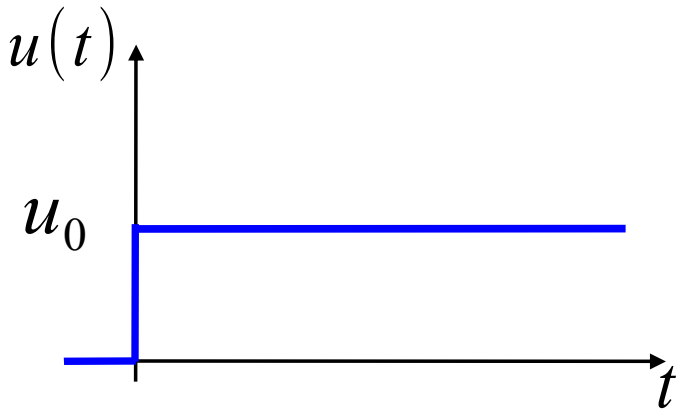
4. Odp. skokowa:

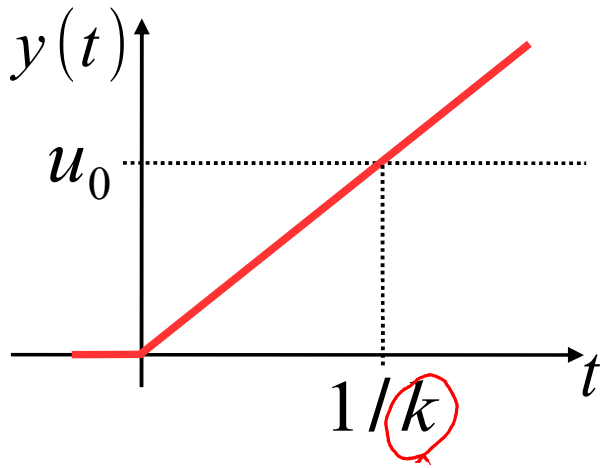
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s^2}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k u_0 t$





Element całkujący

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{k}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} =$$

$$= \frac{kj}{j^2\omega} = -j\frac{k}{\omega}$$

$$P(\omega) = 0 \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

Element całkujący

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega}$$

Element całkujący

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega)=0,\ \ Q(\omega)=-\frac{k}{\omega}$$

Element całkujący

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega)=0,\ \ Q(\omega)=-\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:

Element całkujący

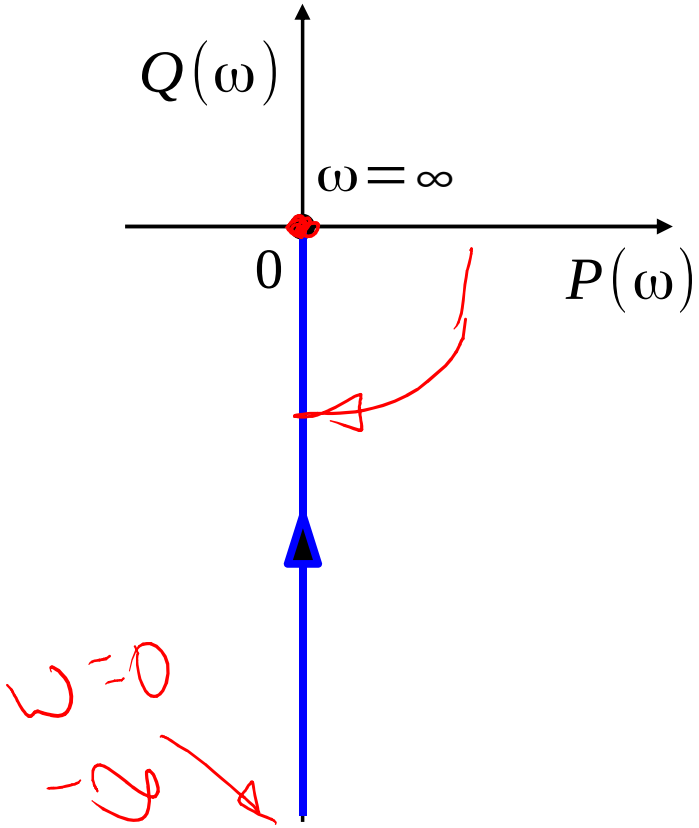
5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega)=0,\quad Q(\omega)=-\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element całkujący

7. Wykres Bodego:

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=\left|\frac{k}{\omega}\right|$

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=\left|\frac{k}{\omega}\right|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log\left|\frac{k}{\omega}\right|$$

Element całkujący

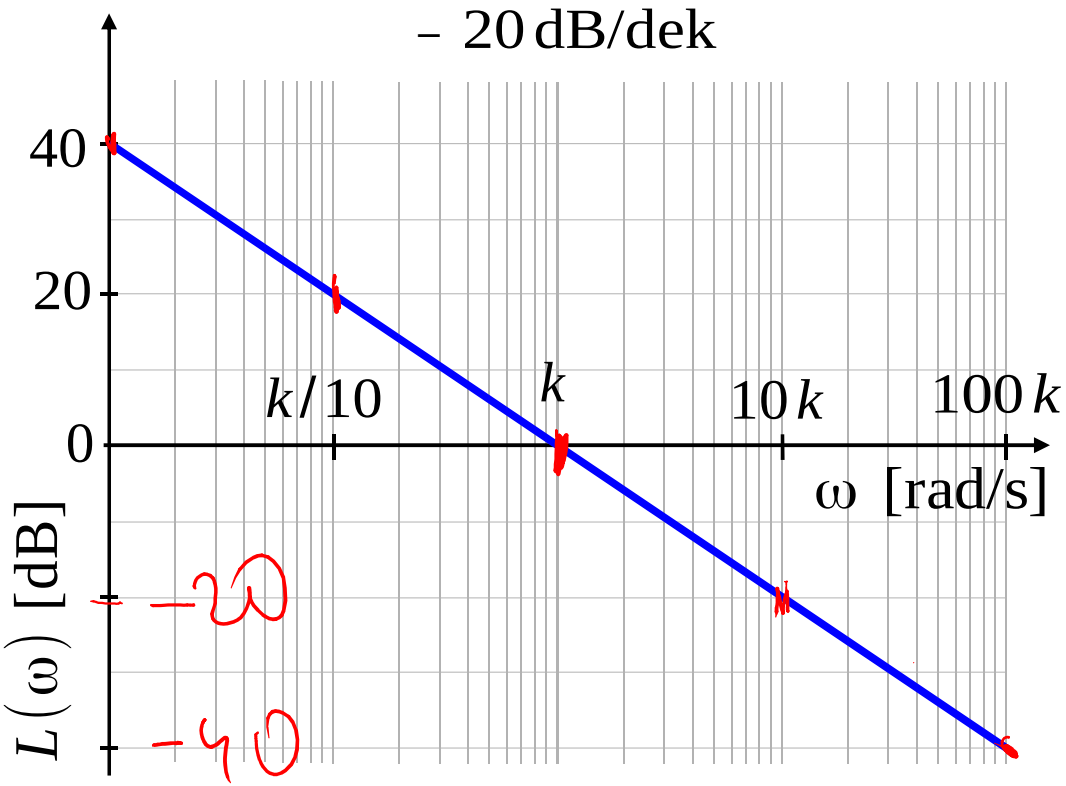
7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=\left|\frac{k}{\omega}\right|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log\left|\frac{k}{\omega}\right| \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-\infty)$$

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=\left|\frac{k}{\omega}\right|$

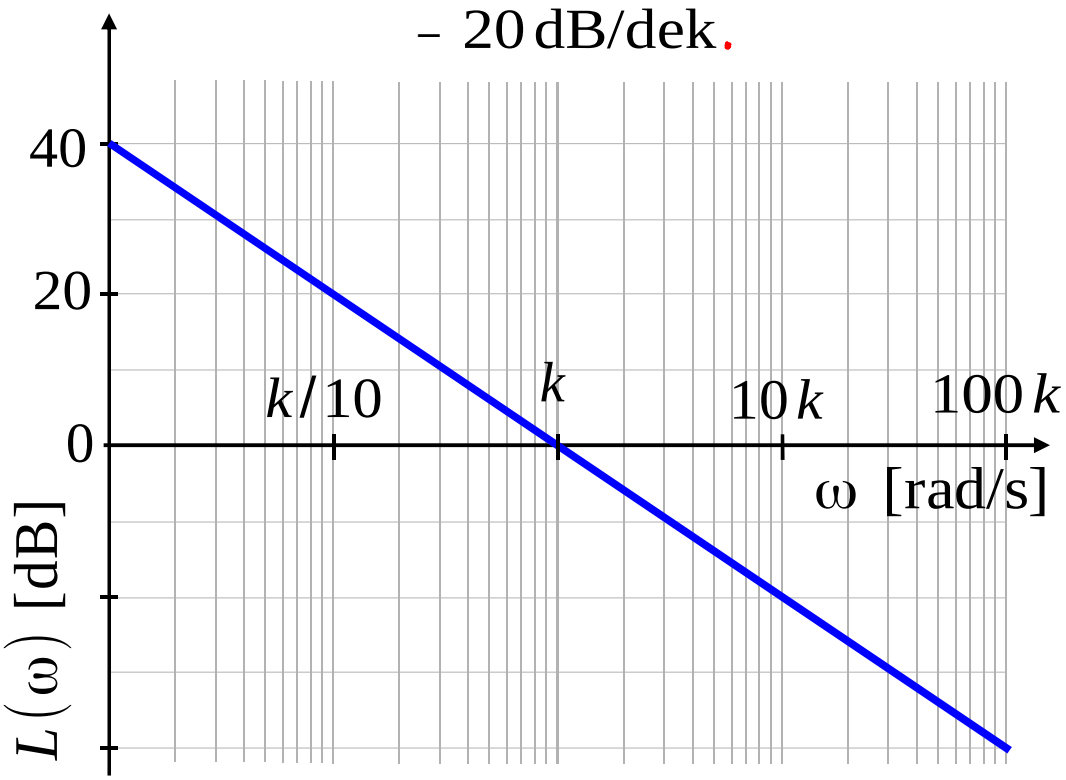
$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log\left|\frac{k}{\omega}\right| \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-\infty)$$



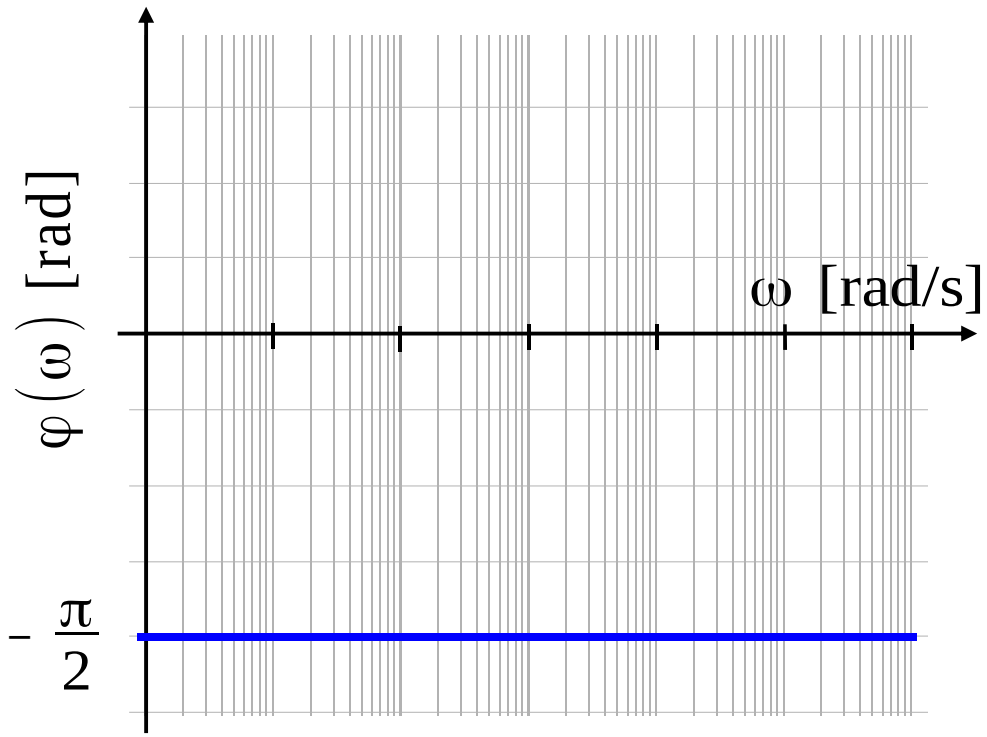
Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=\left|\frac{k}{\omega}\right|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log\left|\frac{k}{\omega}\right| \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-\infty)$$



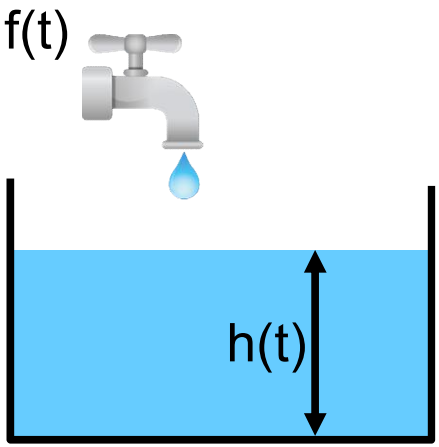
dla $k>0$



Element całkujący

Przykłady

1

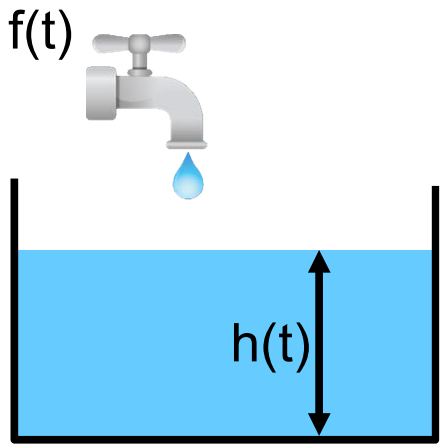


PROSTOPADŁOŚCIENNY ZBIORNIK PŁYNU:
wejście – wydatek dopływu f(t)
wyjście – poziom cieczy h(t)

Element całkujący

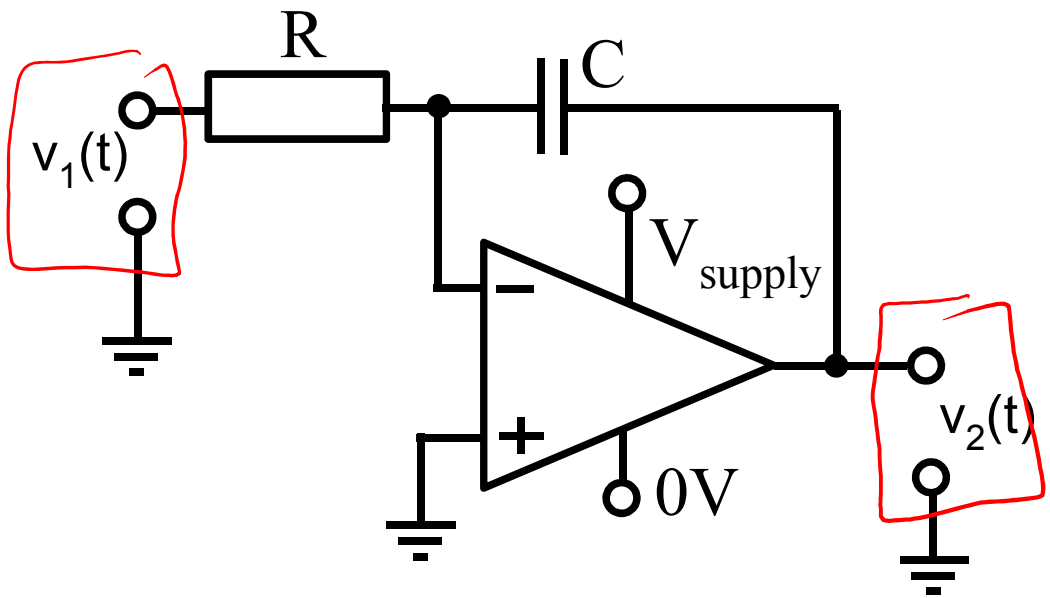
Przykłady

1



PROSTOPADŁOŚCIENNY ZBIORNIK PŁYNU:
wejście – wydatek dopływu f(t)
wyjście – poziom cieczy h(t)

2



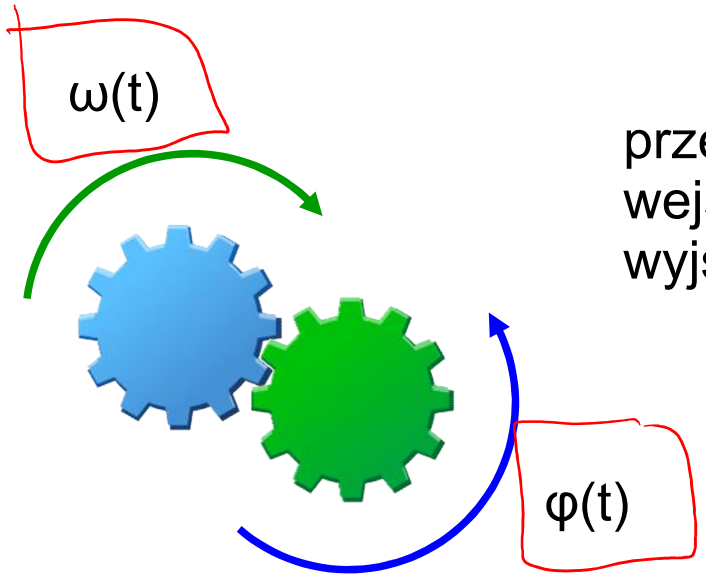
WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t v_1(t)\,dt$$

Element całkujący

Przykłady

3

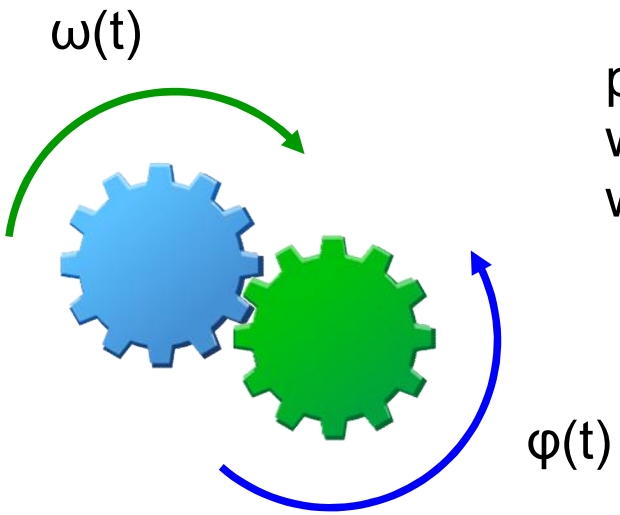


przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa ω(t)
wyjście – kąt obrotu φ(t)

Element całkujący

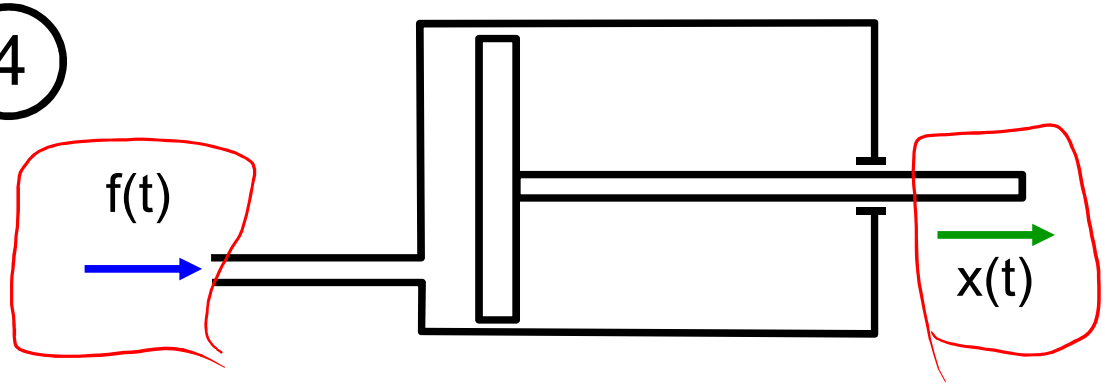
Przykłady

3



przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa ω(t)
wyjście – kąt obrotu φ(t)

4



CYLINDER HYDRAULICZNY:
wejście – wydatek cieczy f(t)
wyjście – przemieszczenie x(t)

Element różniczkujący idealny

1. Równanie:

$$y(t) = k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t)=k\frac{du(t)}{dt} \rightarrow 0$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna: dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

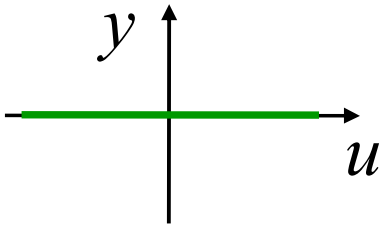
Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

$u \in \mathbb{R}$

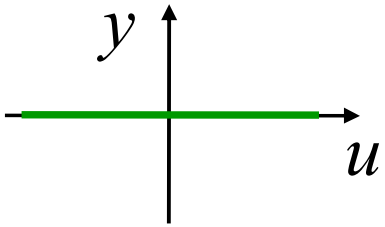


Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $Y(s) = k\,s\,U(s)$

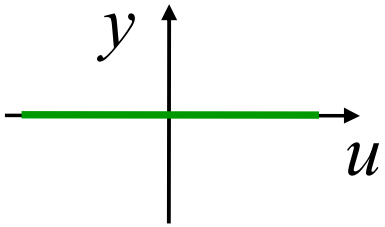
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=k\cdot s$$

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $G(s)=k\,s$

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa:

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = k \cdot s \cdot u_0 \frac{1}{s} = k \cdot u_0 \cdot 1$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{k u_0 \cdot 1\} = k u_0 \delta(t)$$

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=k\,u_0$

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=k\,u_0$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k\,u_0\,\delta(t)$

Element różniczkujący idealny

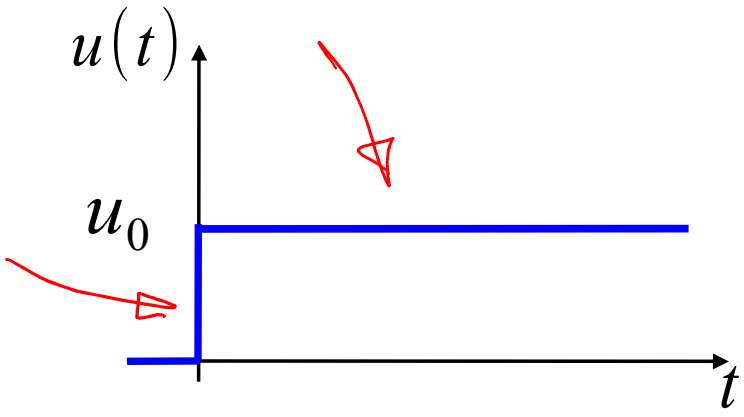
4. Odp. skokowa:

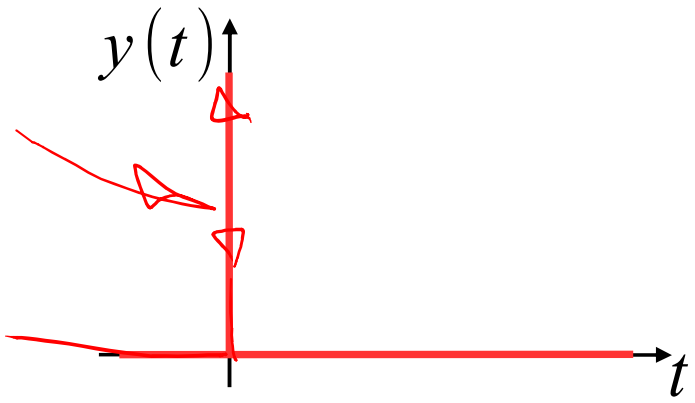
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=k\,u_0$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k\,u_0\,\delta(t)$





Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = kj\omega$$

$$P(\omega) = 0 \qquad Q(\omega) = k\omega$$

Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

6. Wykres Nyquista:

Element różniczkujący idealny

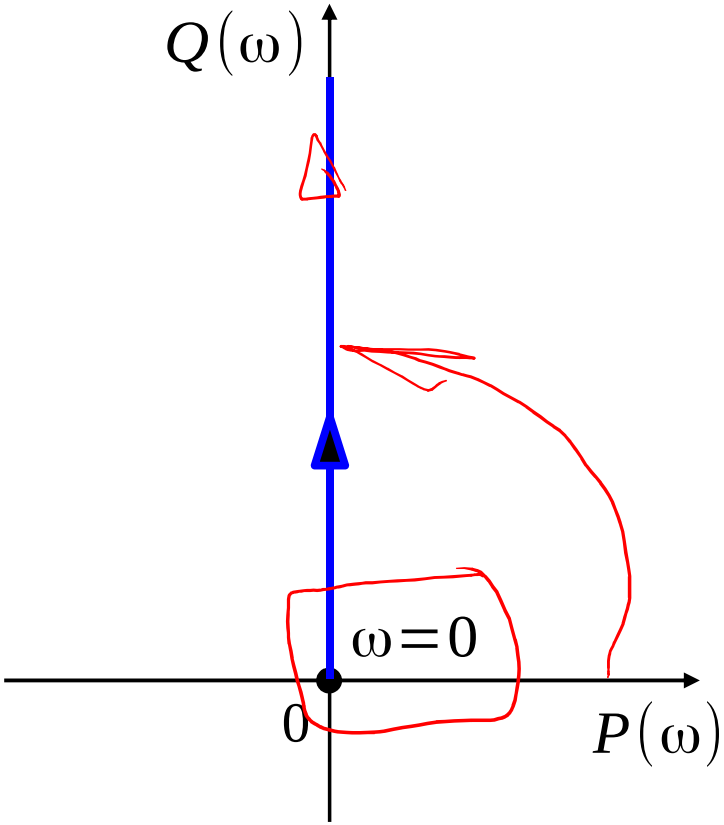
5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k > 0$



Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego:

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\,\omega|$

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|$$

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|$$

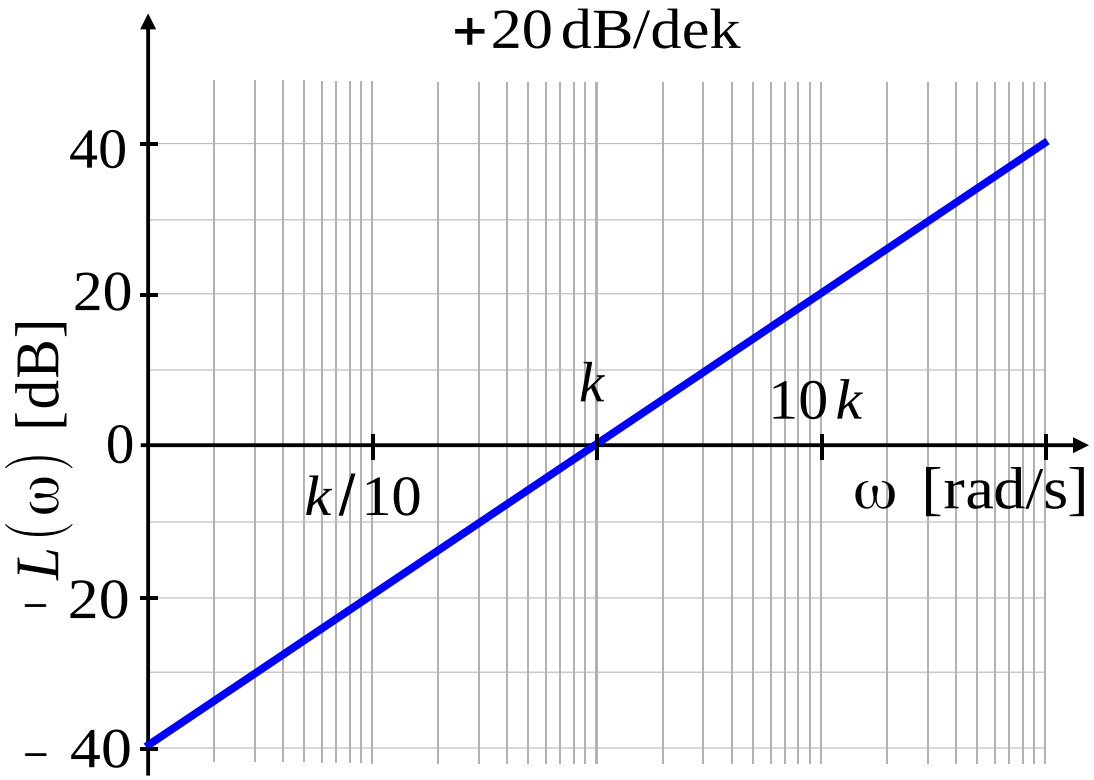
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(\infty)$$

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\,\omega|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\,\omega|$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(\infty)$$

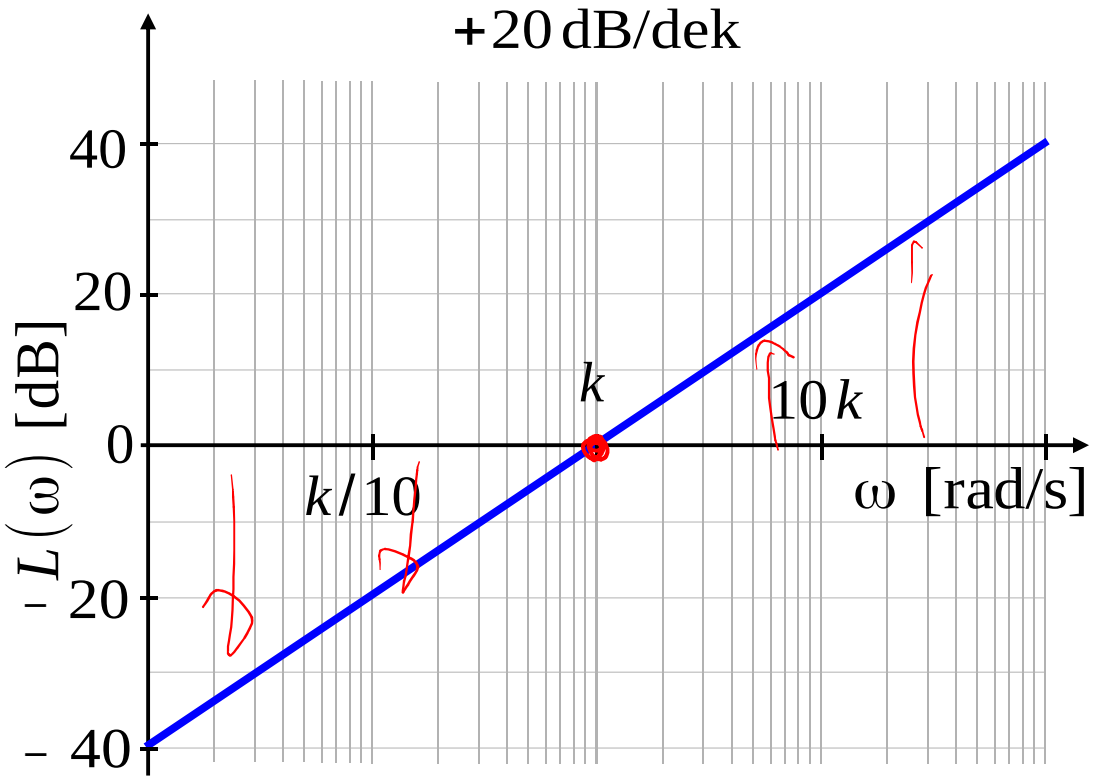


Element różniczkujący idealny

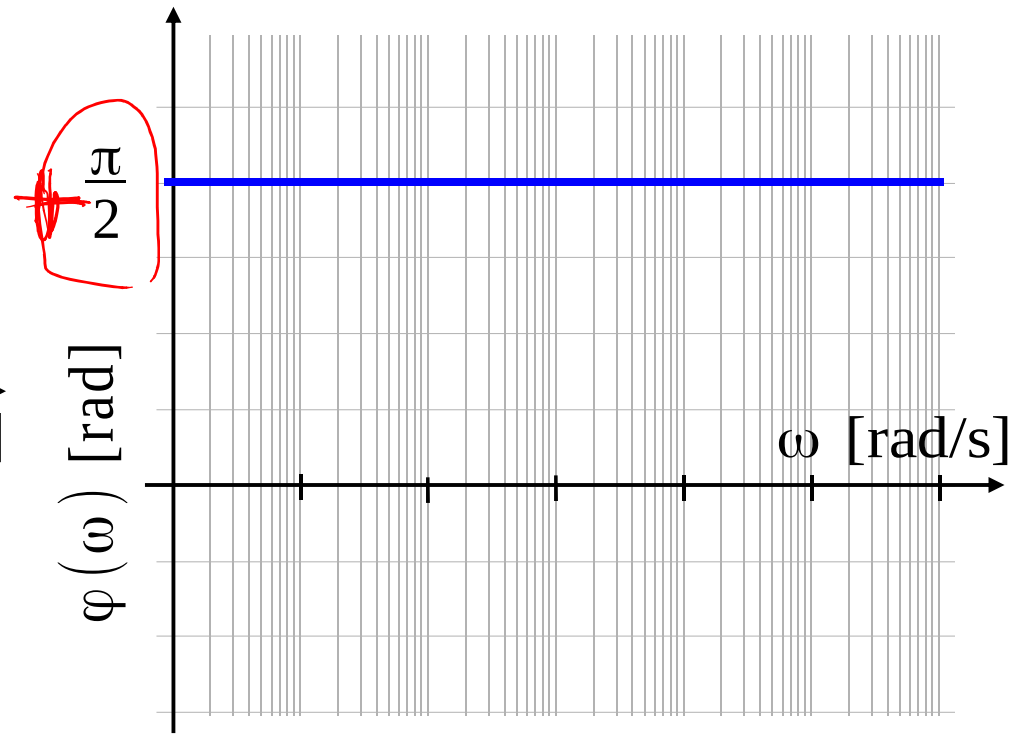
7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(\infty)$$



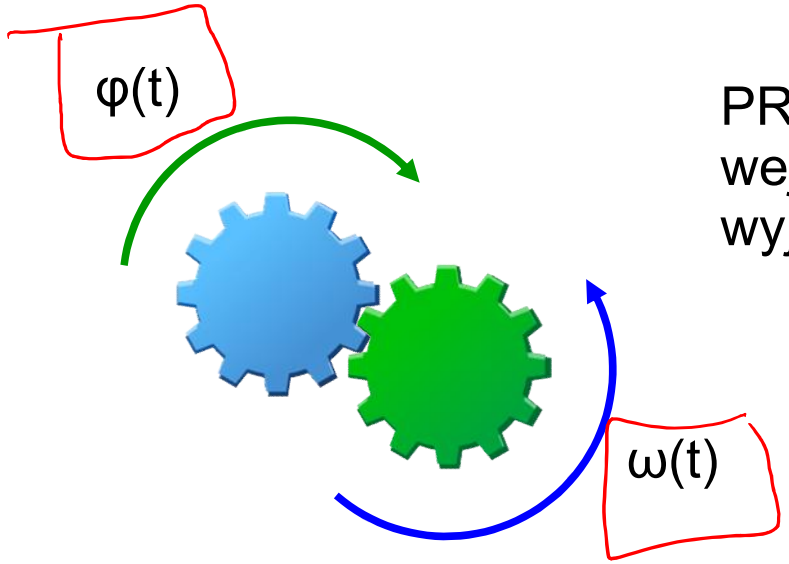
dla $k>0$



Element różniczkujący idealny

Przykłady

1

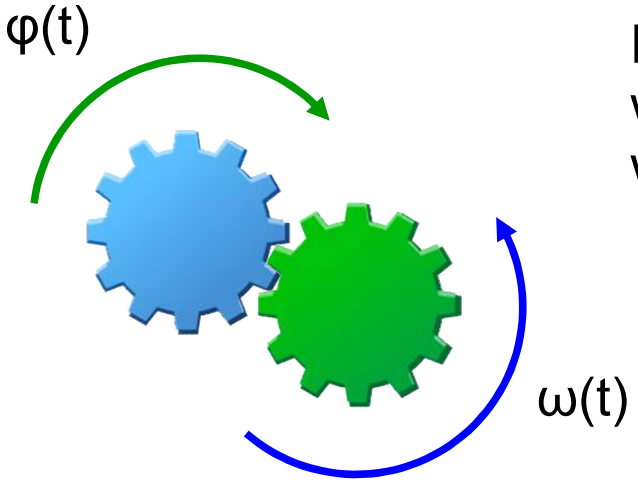


PRZEKŁADNIA ZĘBATA:
wejście – kąt obrotu φ(t)
wyjście – prędkość kątowa ω(t)

Element różniczkujący idealny

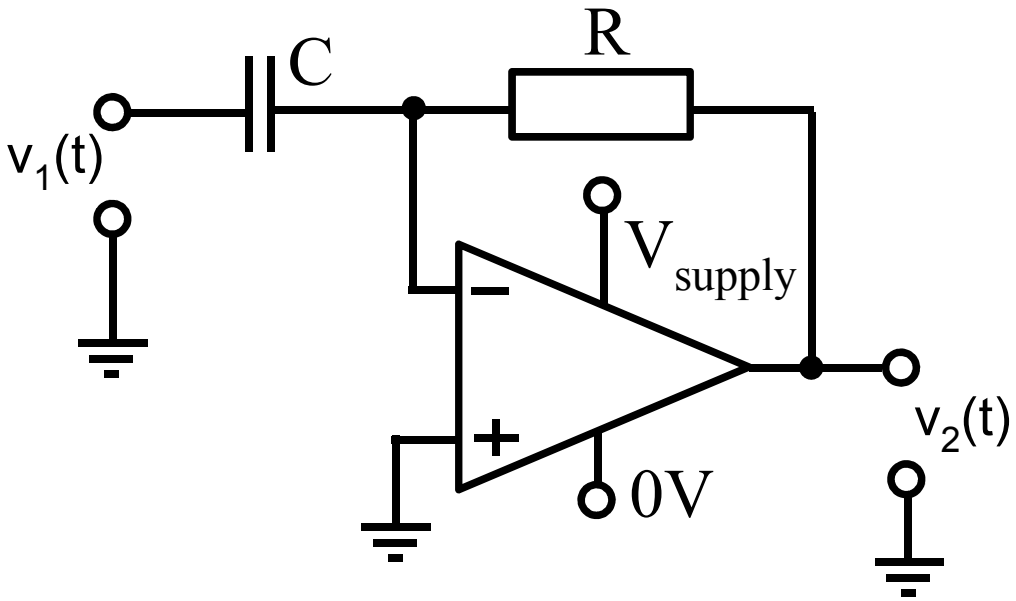
Przykłady

1



PRZEKŁADNIA ZĘBATA:
wejście – kąt obrotu φ(t)
wyjście – prędkość kątowa ω(t)

2



WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = -RC\frac{dv_1(t)}{dt}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

Element różniczkujący rzeczywisty

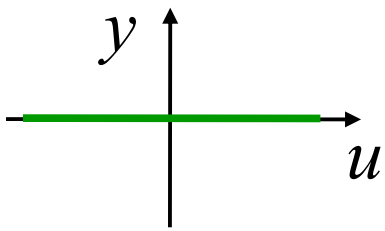
1. Równanie: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

$u \in \mathbb{R}$

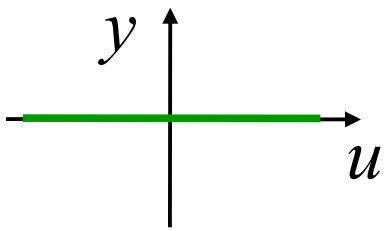


Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



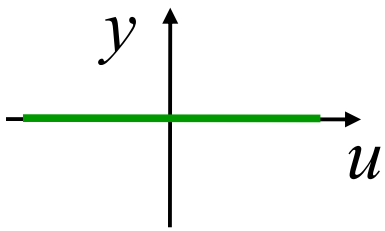
3. Transmitancja:

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $$G(s)=\boxed{\frac{ks}{Ts+1}}$$

$$ks\cdot\frac{1}{Ts+1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{Ts+1}$

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{Ts+1}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k u_0 e^{-t/T}$

Element różniczkujący rzeczywisty

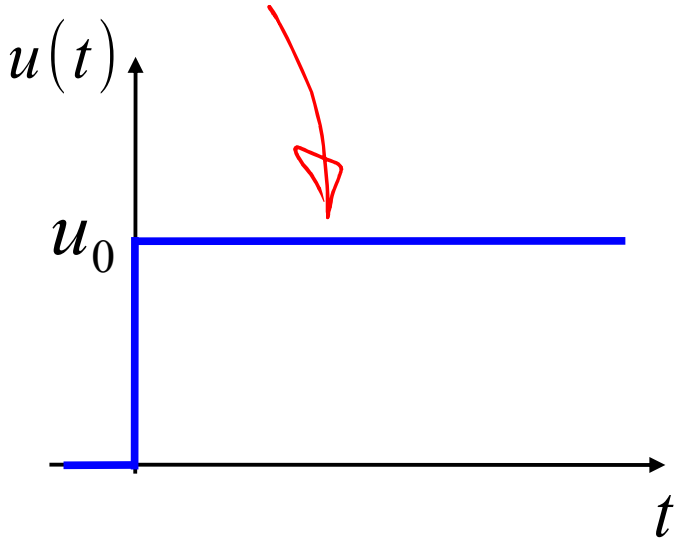
4. Odp. skokowa:

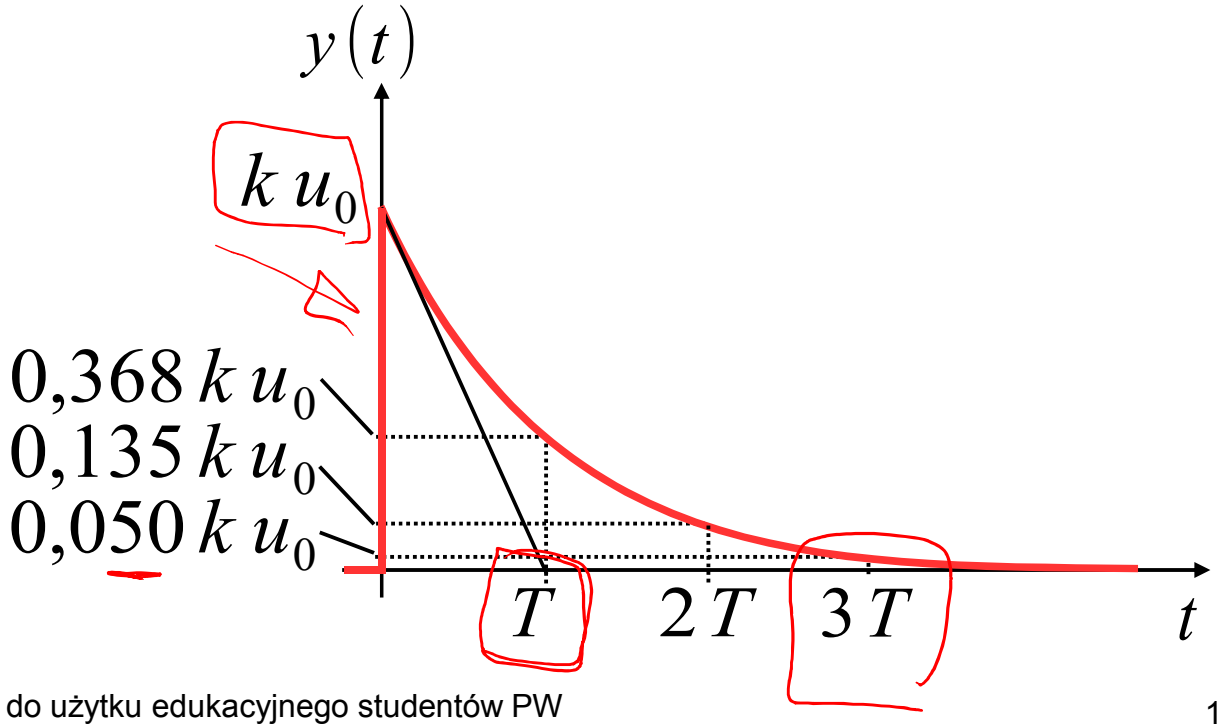
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0\frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k\,u_0}{Ts+1}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k\,u_0 e^{-t/T}$





Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{kj\omega}{Tj\omega + 1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k\,j\omega}{Tj\omega+1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k\,j\omega}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\frac{kT\omega^2}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{k\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k\,j\omega}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\frac{kT\omega^2}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{k\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:

Element różniczkujący rzeczywisty

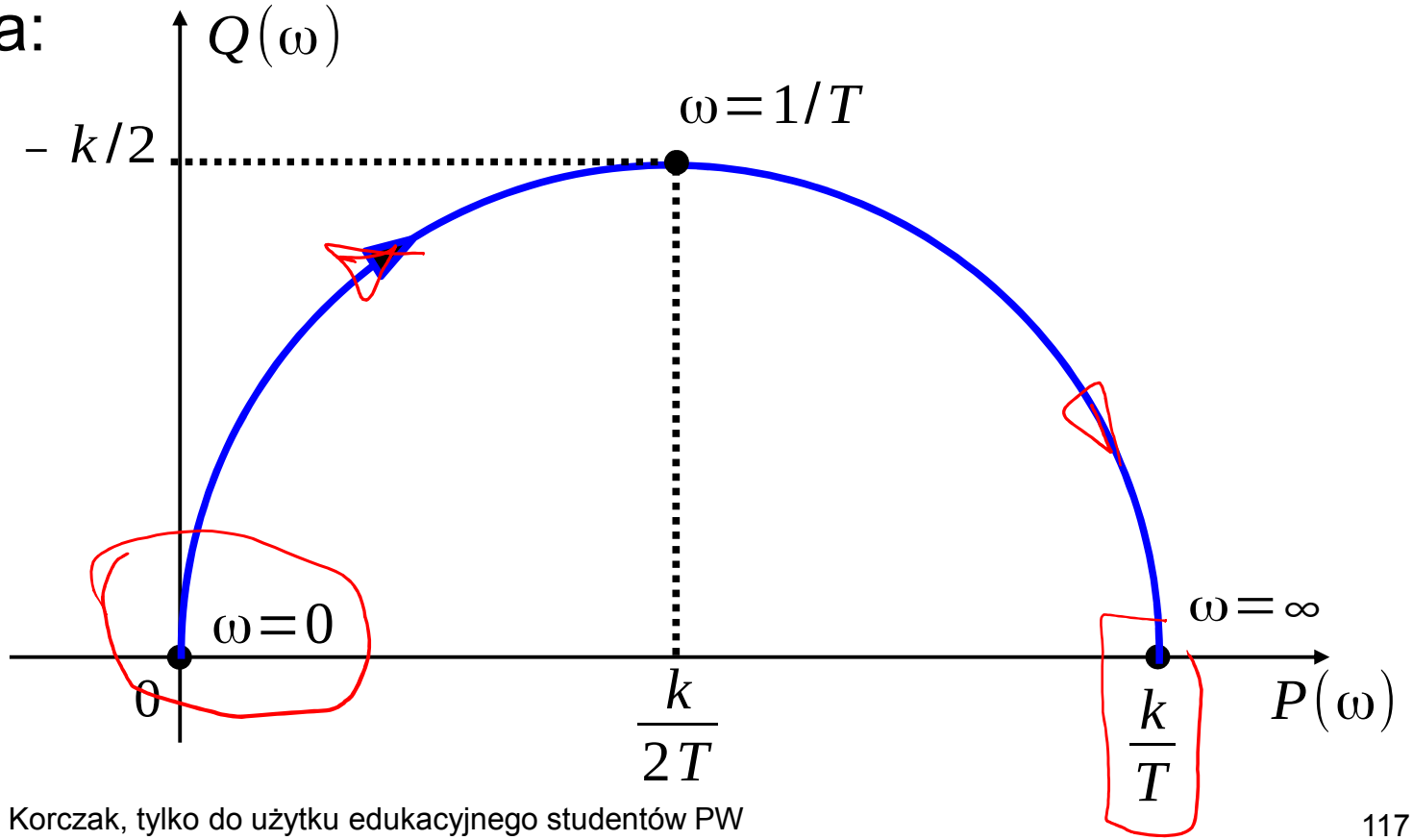
5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k\,j\omega}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\frac{kT\omega^2}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{k\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego:

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

$20\log\left|\frac{k}{T}\right|$ $\omega=\frac{1}{T}$ $-20\log\sqrt{2}$

$20\log\left|\frac{10k}{T}\right|$ $\omega=\frac{10}{T}$ $-20\log\sqrt{101}=20$

$20\log\frac{|100k|}{T}$ $\omega=\frac{100}{T}$ $-20\log\sqrt{1001}=40$

Element różniczkujący rzeczywisty

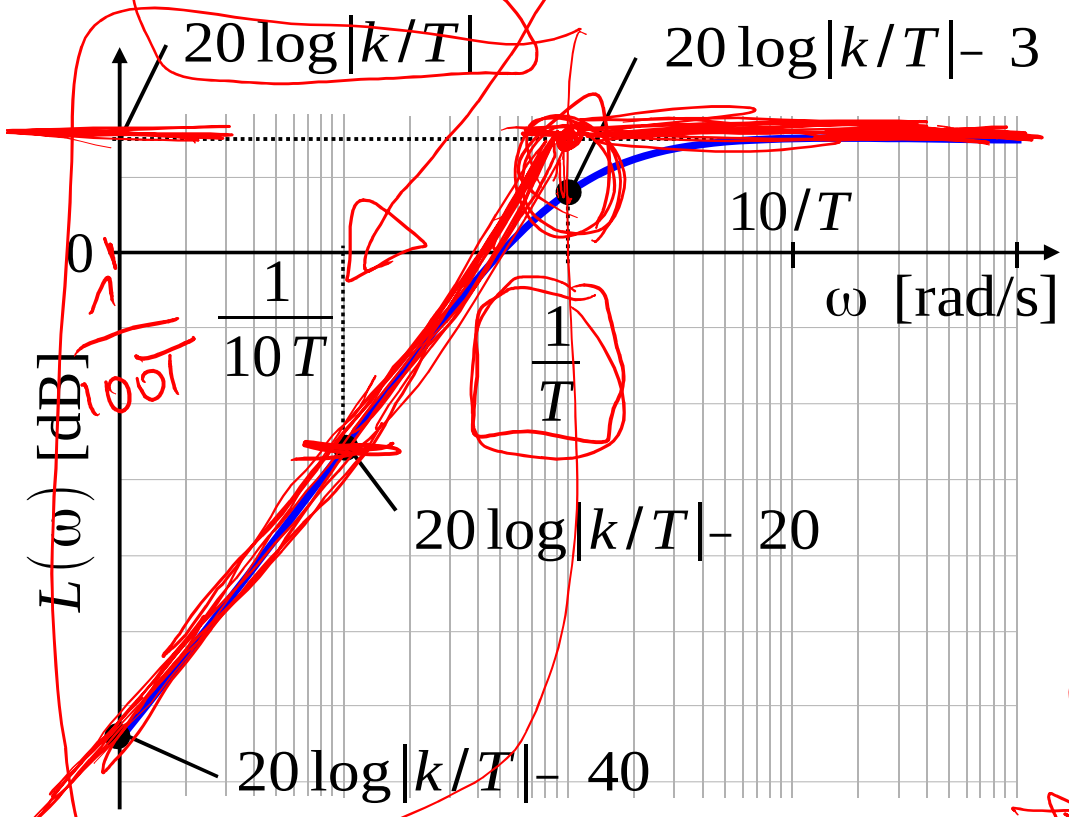
7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

$20\log|k\omega|-20\log|T\omega|$

$=20\log\left|\frac{k\omega}{T\omega}\right|$



$20\log\left|\frac{k}{T}\right|-\boxed{20\log\sqrt{2}}$

$\omega=\frac{1}{10T}$

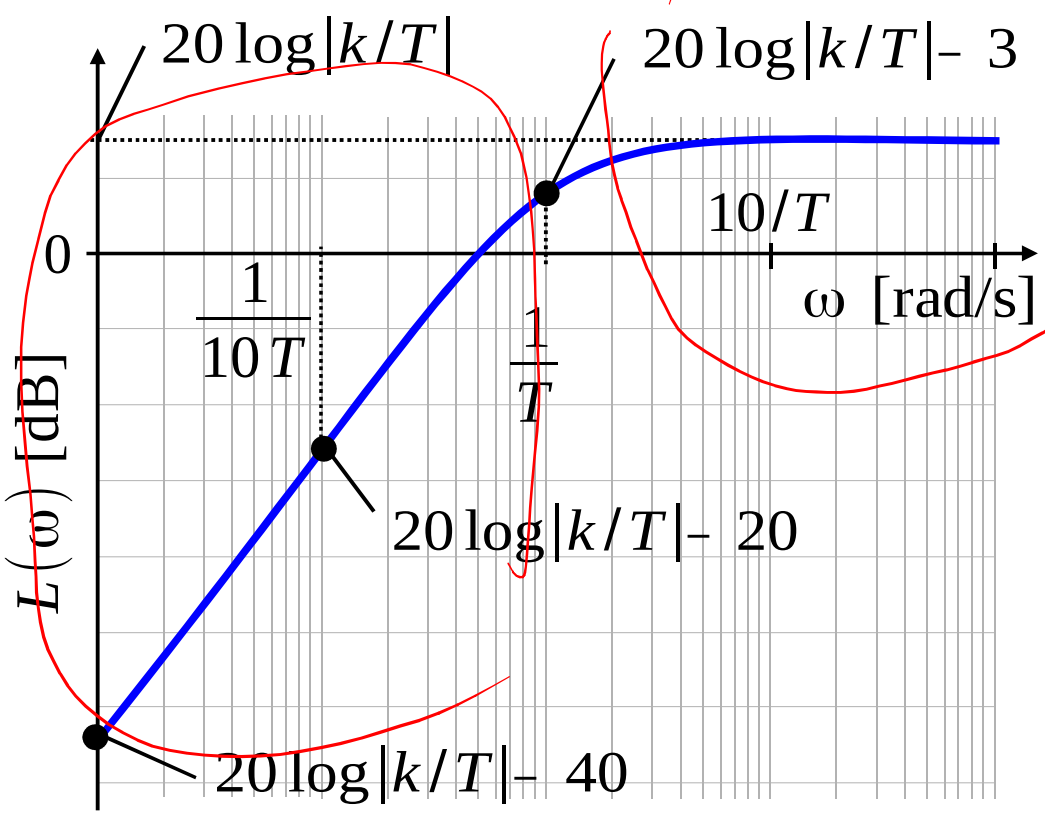
$\rightarrow 20\log\sqrt{\frac{1}{100}+1}$

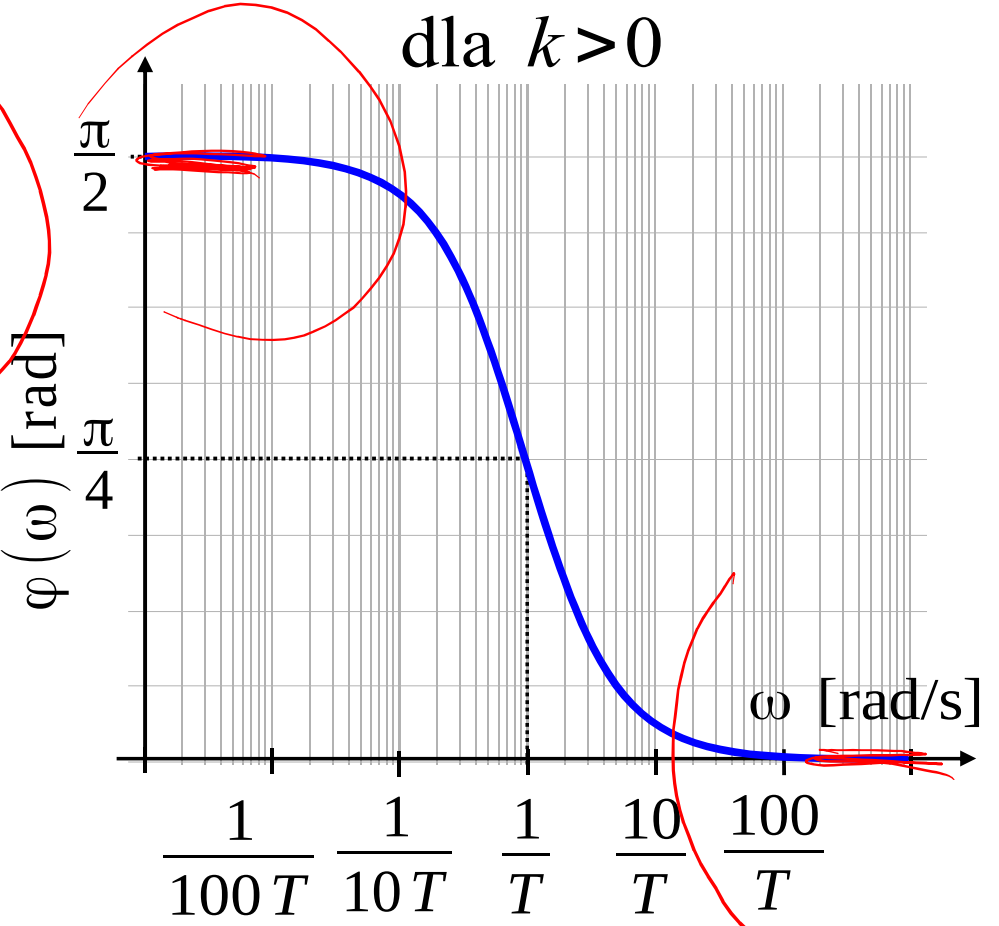
Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

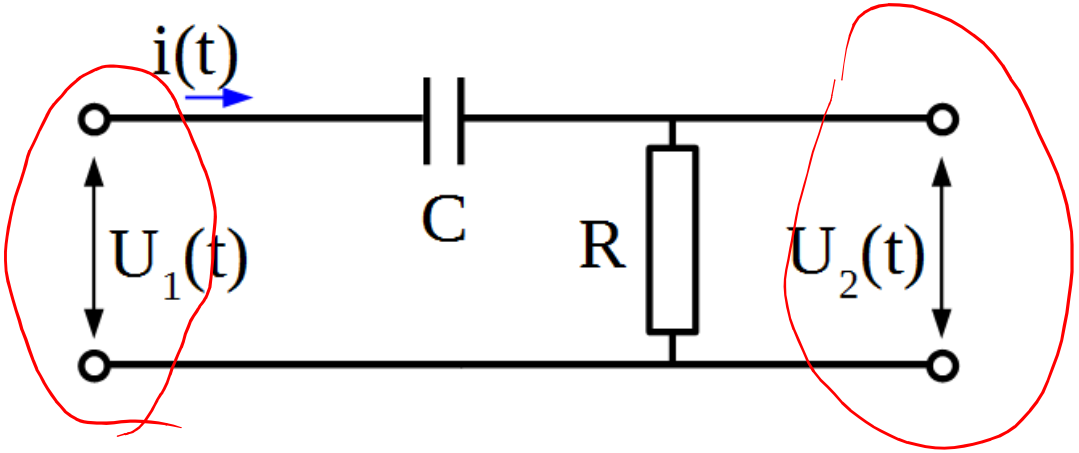




Element różniczkujący rzeczywisty

Przykłady

1



OBWÓD RC:
wejście – napięcie $u_1(t)$
wyjście – napięcie $u_2(t)$

Element opóźniający

1. Równanie: $$y(t)=u(t-\tau)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t)=u(t-\tau)$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

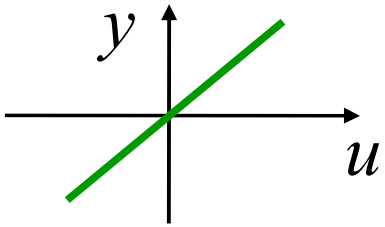
2. Charakterystyka statyczna: dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t)=u(t-\tau)$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

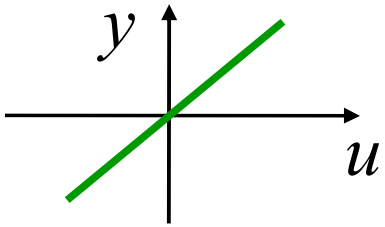
2. Charakterystyka statyczna: $y=u$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



Element opóźniający

1. Równanie: $y(t)=u(t-\tau)$ $\tau \in \mathbb{R}_+$ $u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=u$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $Y(s)=U(s)e^{-\tau s}$

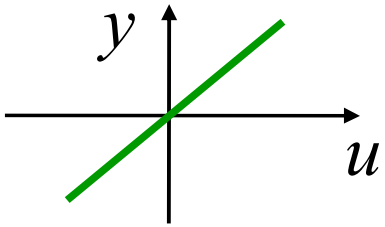
$G(s)=e^{-\tau s}$

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t)=u(t-\tau)$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=u$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $G(s)=e^{-\tau s}$

Element opóźniający

4. Odp. skokowa:

Element opóźniający

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Element opóźniający

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0\frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{u_0}{s}e^{-\tau s}$

Element opóźniający

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0\frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{u_0}{s}e^{-\tau s}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=u_0 1(t-\tau)$

Element opóźniający

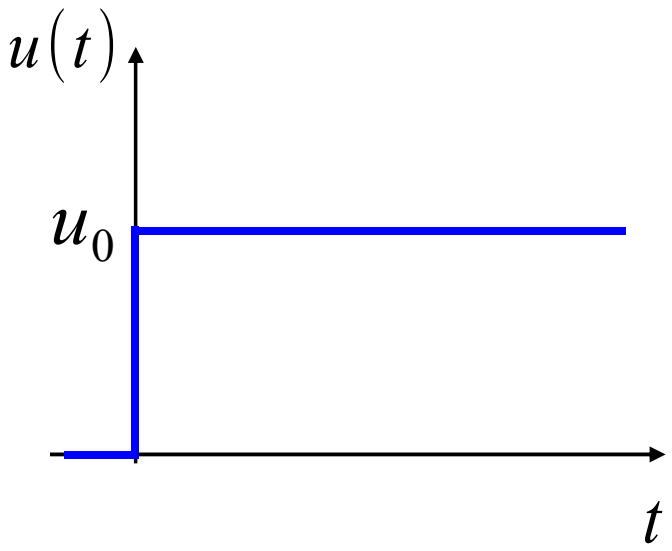
4. Odp. skokowa:

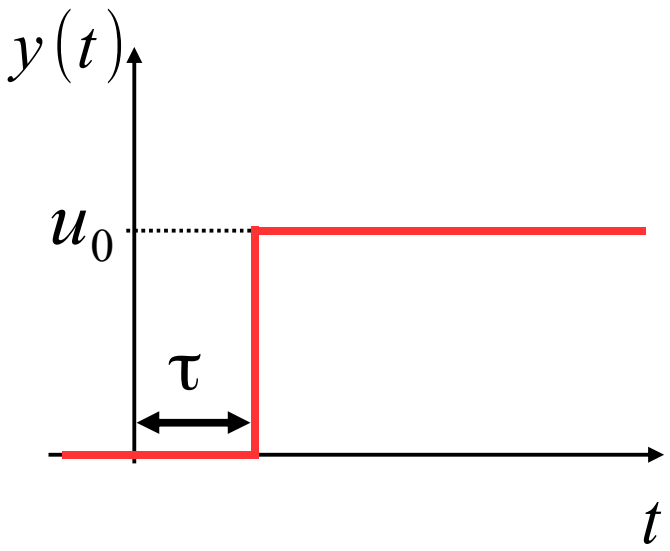
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0\frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{u_0}{s}e^{-\tau s}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=u_0 1(t-\tau)$





Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$

$$e^{-jx} = \cos x - j\sin x$$

$$G(j\omega) = \underbrace{\cos\tau\omega}_{P(\omega)} \underbrace{- j\sin\tau\omega}_{Q(\omega)}$$

Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=e^{-\tau j\omega}$$

Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=e^{-\tau j\omega}$$

$$\boxed{e^{-x}=\cos x - j\sin x}$$

$$P(\omega)=\cos(\tau\omega),\quad Q(\omega)=-\sin(\tau\omega)$$

Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=e^{-\tau j\omega}$$

$$\boxed{e^{-x}=\cos x - j\sin x}$$

$$P(\omega)=\cos(\tau\omega),\quad Q(\omega)=-\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:

Element opóźniający

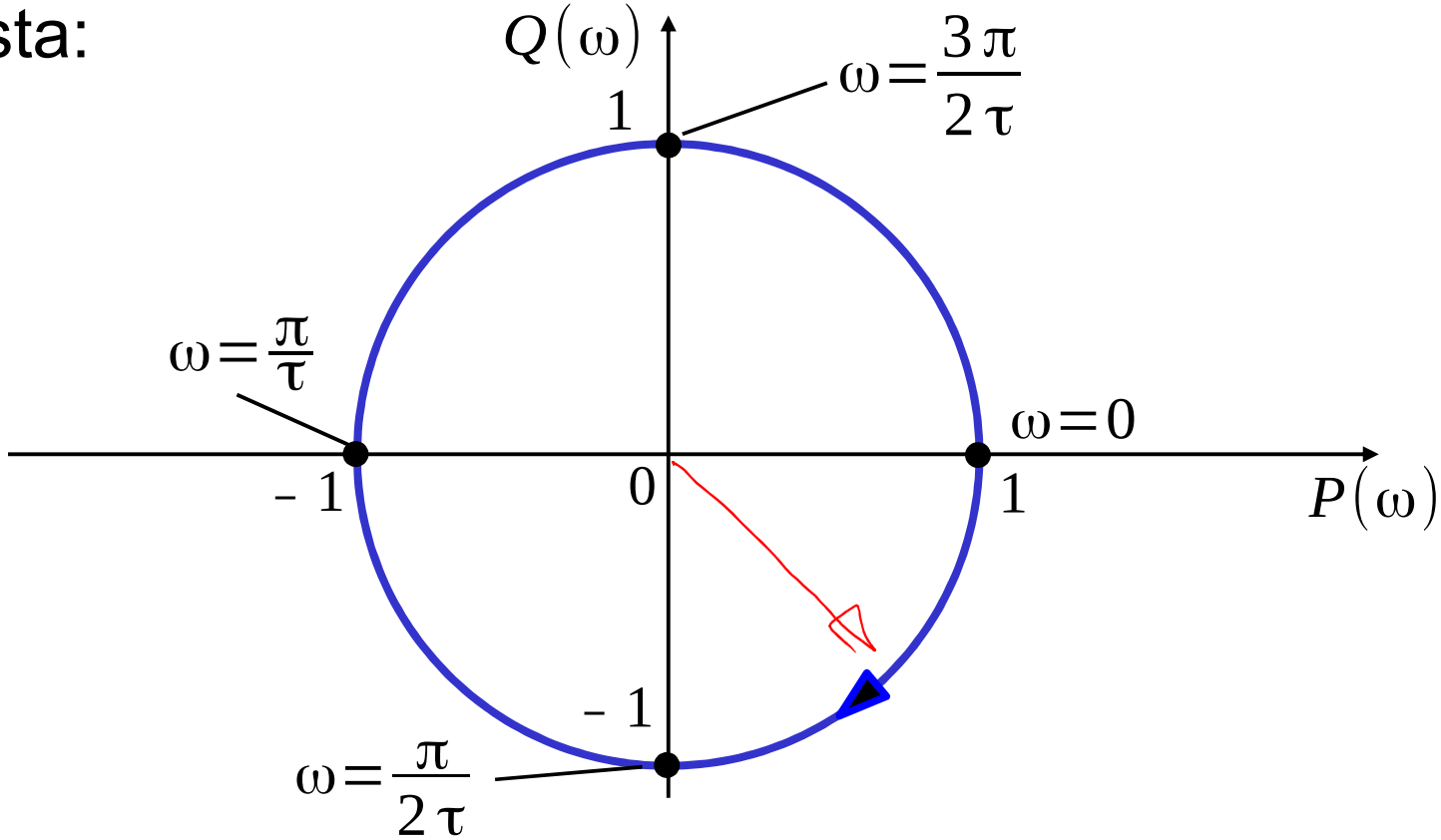
5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=e^{-\tau j\omega}$$

$$\boxed{e^{-x}=\cos x - j\sin x}$$

$$P(\omega)=\cos(\tau\omega),\quad Q(\omega)=-\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:



Element opóźniający

7. Wykres Bodego:

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log 1=0$$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log 1=0$$

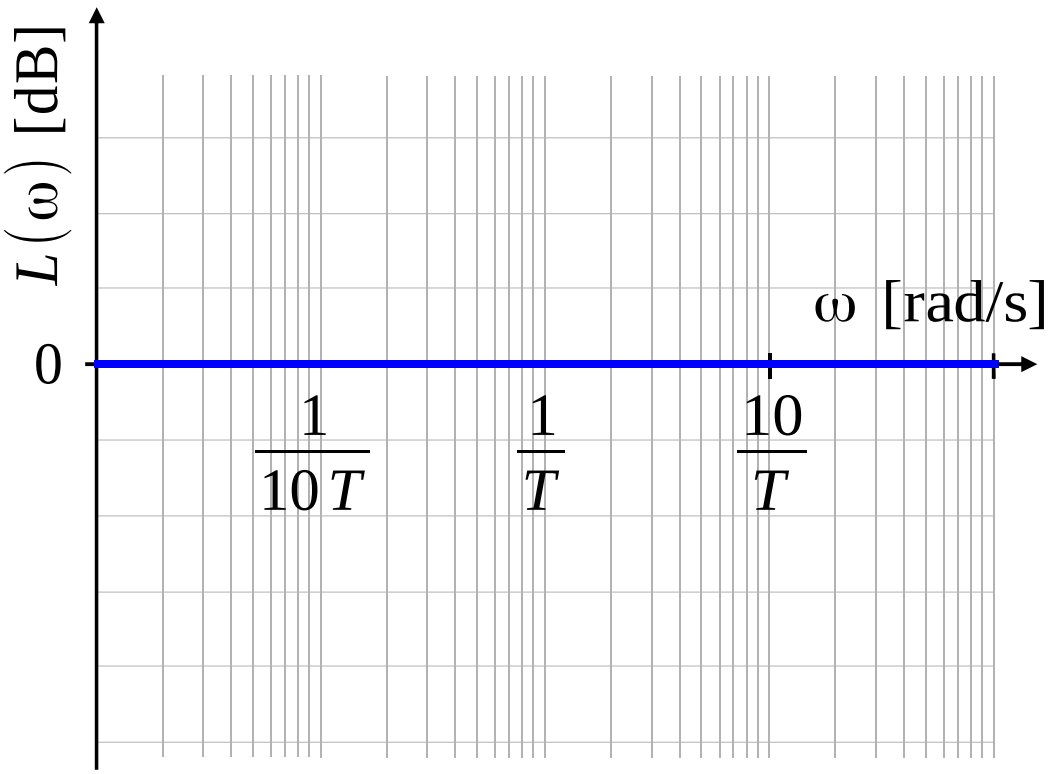
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(-\tan(\tau\omega)\right)=-\tau\omega$$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log 1=0$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(-\tan(\tau\omega)\right)=-\tau\omega$$

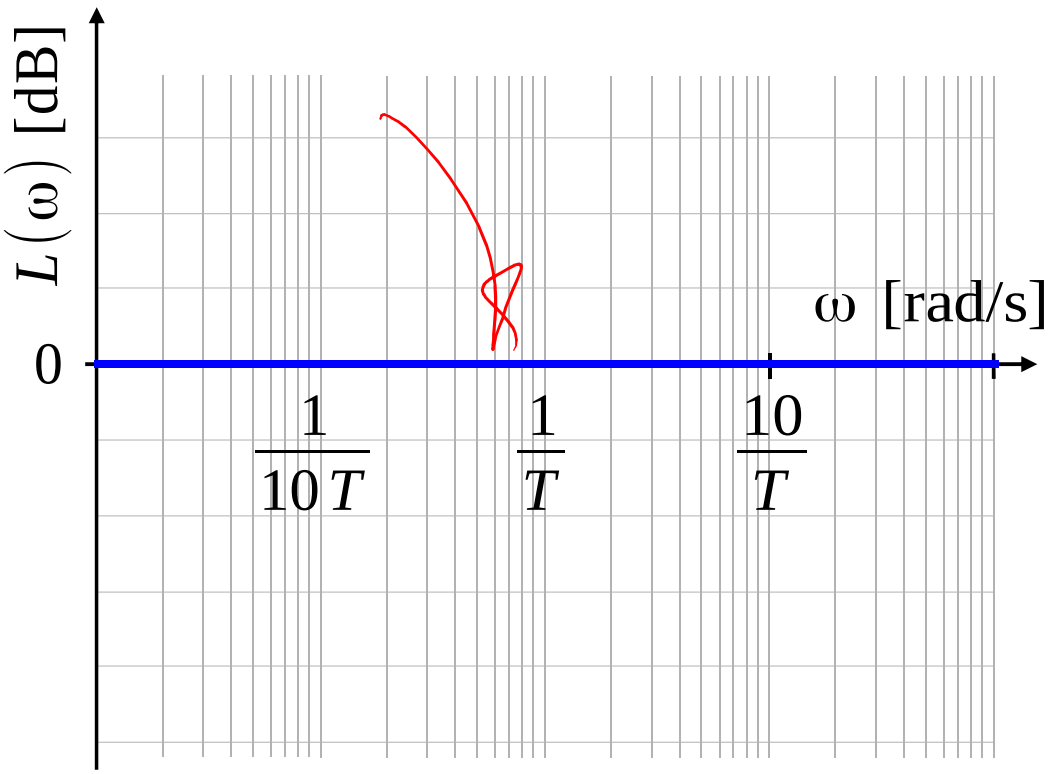


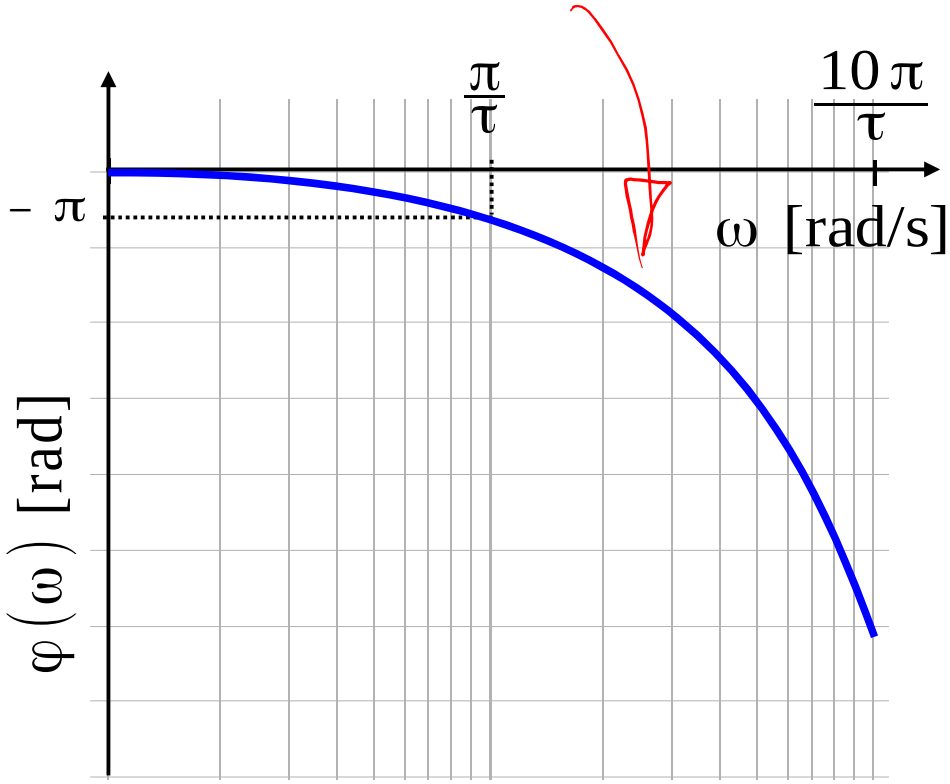
Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log 1=0$$

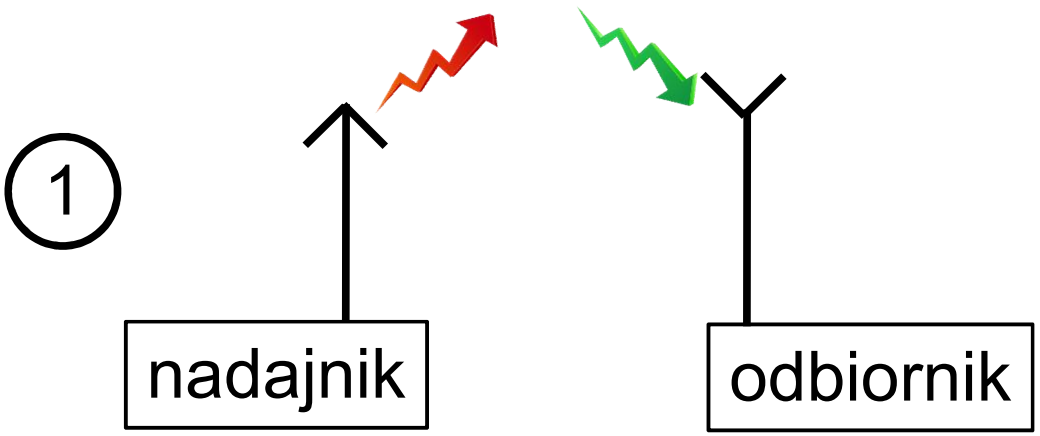
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(-\tan(\tau\omega)\right)=-\tau\omega$$





Element opóźniający

Przykłady



TRANSMISJA BEZPRZEWODOWA:
wejście – dane wysłane
wyjście – dane odebrane

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

$$T_1^2 \cancel{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}} + T_2 \cancel{\frac{dy(t)}{dt}} + y(t) = k\,u(t)$$

---

2. Charakterystyka statyczna:

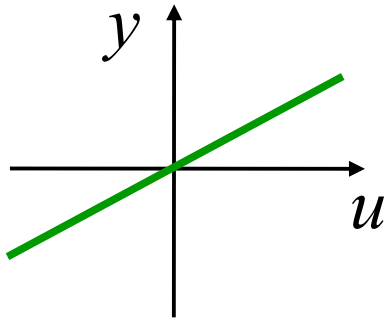
$$\text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

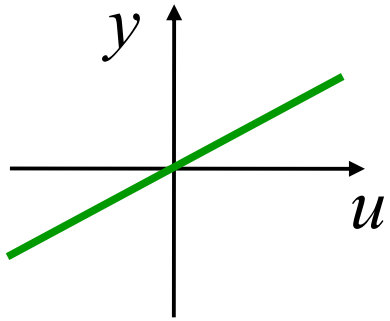


Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:

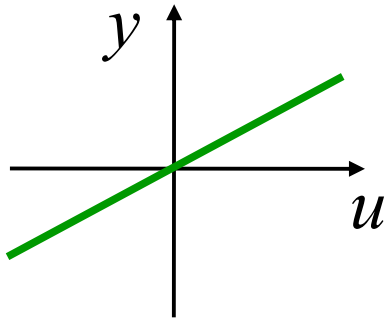
$$T_1^2 s^2 Y(s) + T_2 s Y(s) + Y(s) = k U(s)$$

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2+T_2 s+1)}$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0\frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2+T_2 s+1)}$

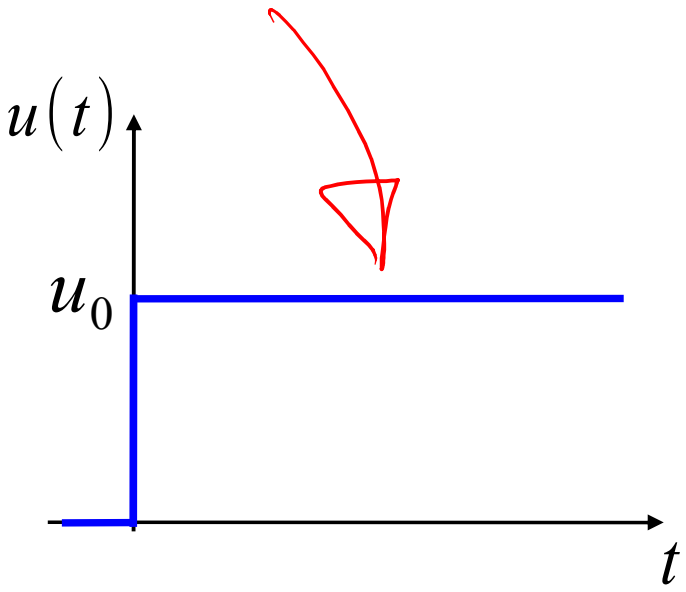
wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=$

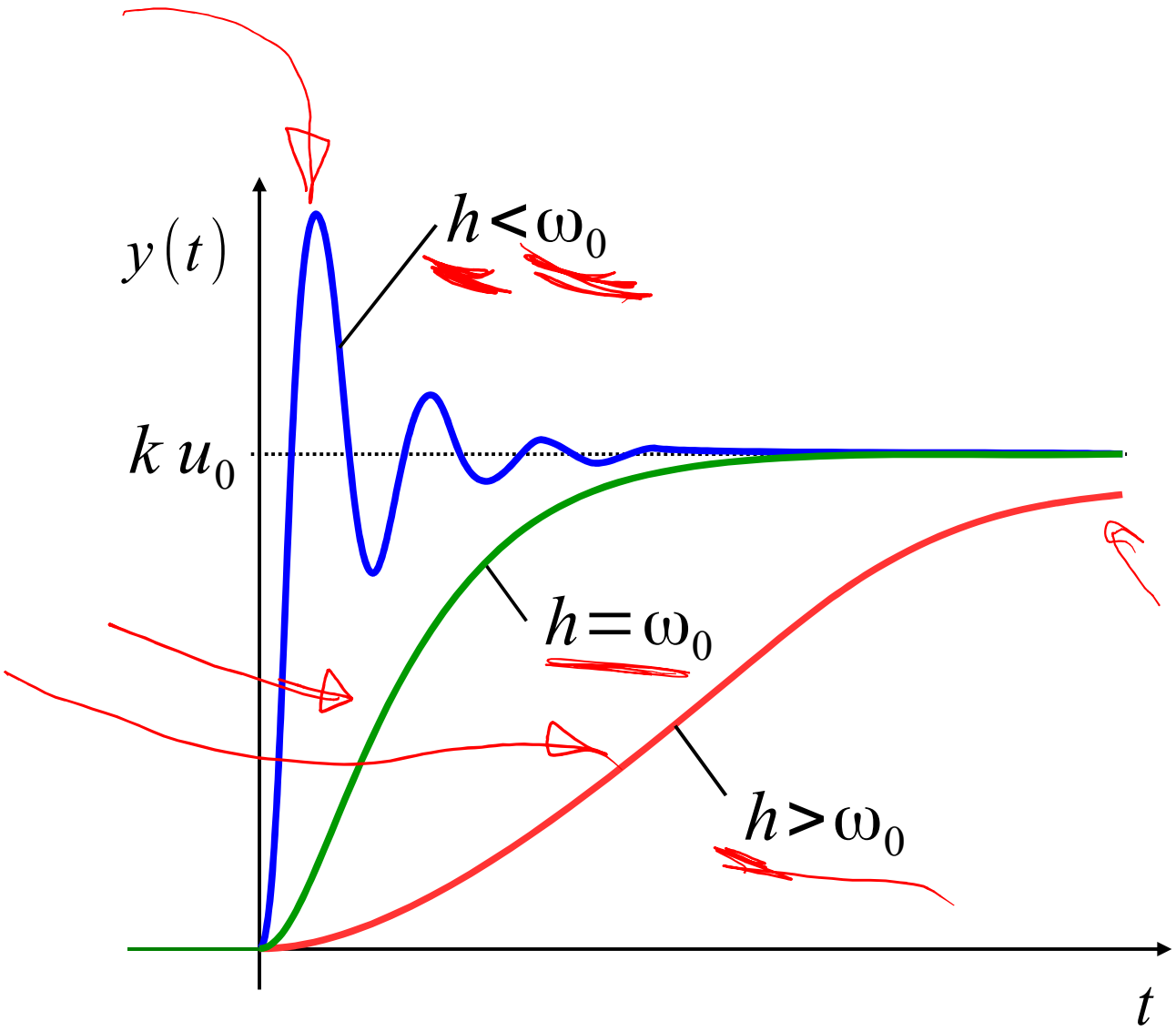
$$=\begin{cases} \boxed{\frac{k u_0}{T_1^2}\left(1-e^{-ht}\left(\cos\omega t+\frac{h}{\omega}\sin\omega t\right)\right)}, & \text{dla } h\leq\omega_0 \\ \frac{k u_0}{T_1^2}\left(1+e^{-ht}\left(\left(\frac{h+w}{2w}-1\right)e^{-wt}-\frac{h+w}{2w}e^{wt}\right)\right), & \text{dla } h\geq\omega_0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{gdzie: } h=\frac{T_2}{2T_1^2},\ \omega_0=\frac{1}{T_1},\ \omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2},\ w=\sqrt{h^2-\omega_0^2}}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:





Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k}{-T_1^2\omega^2+T_2 j\omega+1}$

Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k}{-T_1^2\omega^2+T_2 j\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{k\left(1-T_1^2\omega^2\right)}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2},\quad Q(\omega)=\frac{-kT_2\omega}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k}{-T_1^2\omega^2+T_2 j\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{k(1-T_1^2\omega^2)}{(1-T_1^2\omega^2)^2+T_2^2\omega^2},\quad Q(\omega)=\frac{-kT_2\omega}{(1-T_1^2\omega^2)^2+T_2^2\omega^2}$$

6. Wykres Nyquista:

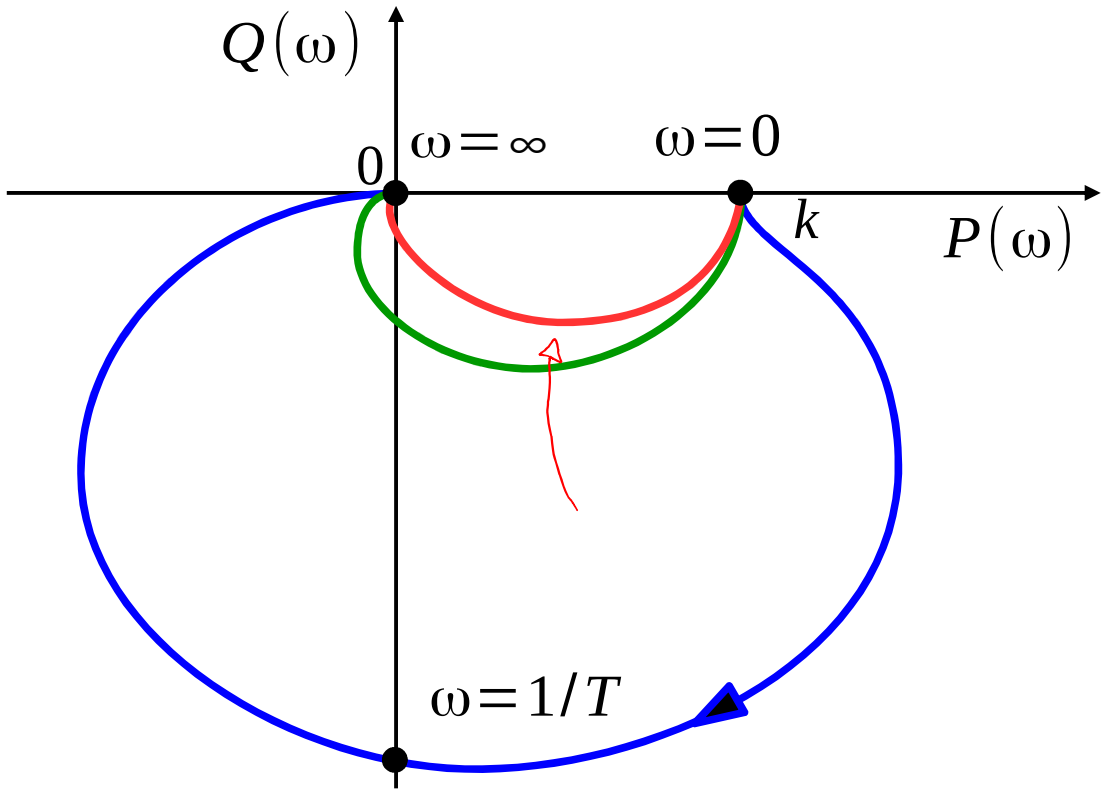
Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k}{-T_1^2\omega^2+T_2 j\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{k(1-T_1^2\omega^2)}{(1-T_1^2\omega^2)^2+T_2^2\omega^2},\quad Q(\omega)=\frac{-kT_2\omega}{(1-T_1^2\omega^2)^2+T_2^2\omega^2}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



dla $h<\omega_0$

dla $h=\omega_0$

dla $h>\omega_0$

Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego:

Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)$$

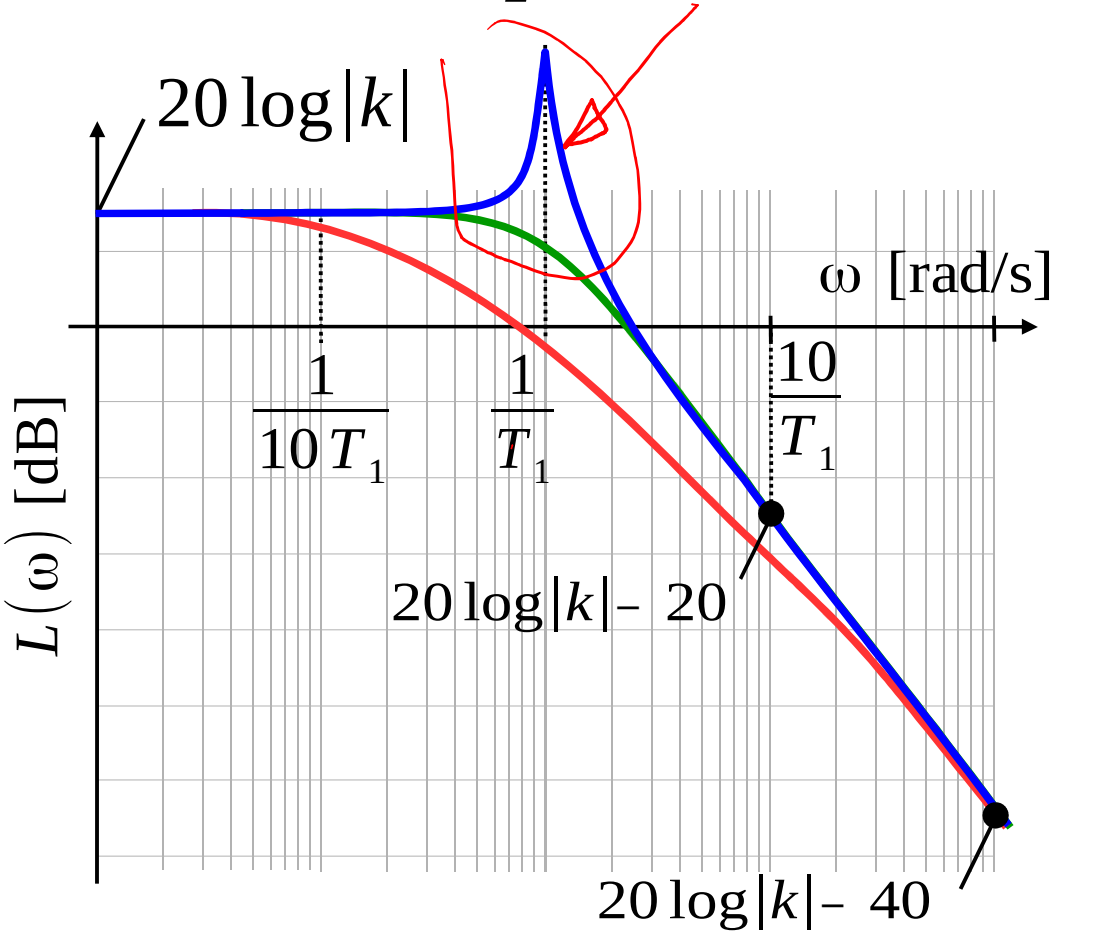
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}$

$L(\omega)=20\log A(\omega)$

$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}$



dla $h<\omega_0$

dla $h=\omega_0$

dla $h>\omega_0$

Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}$

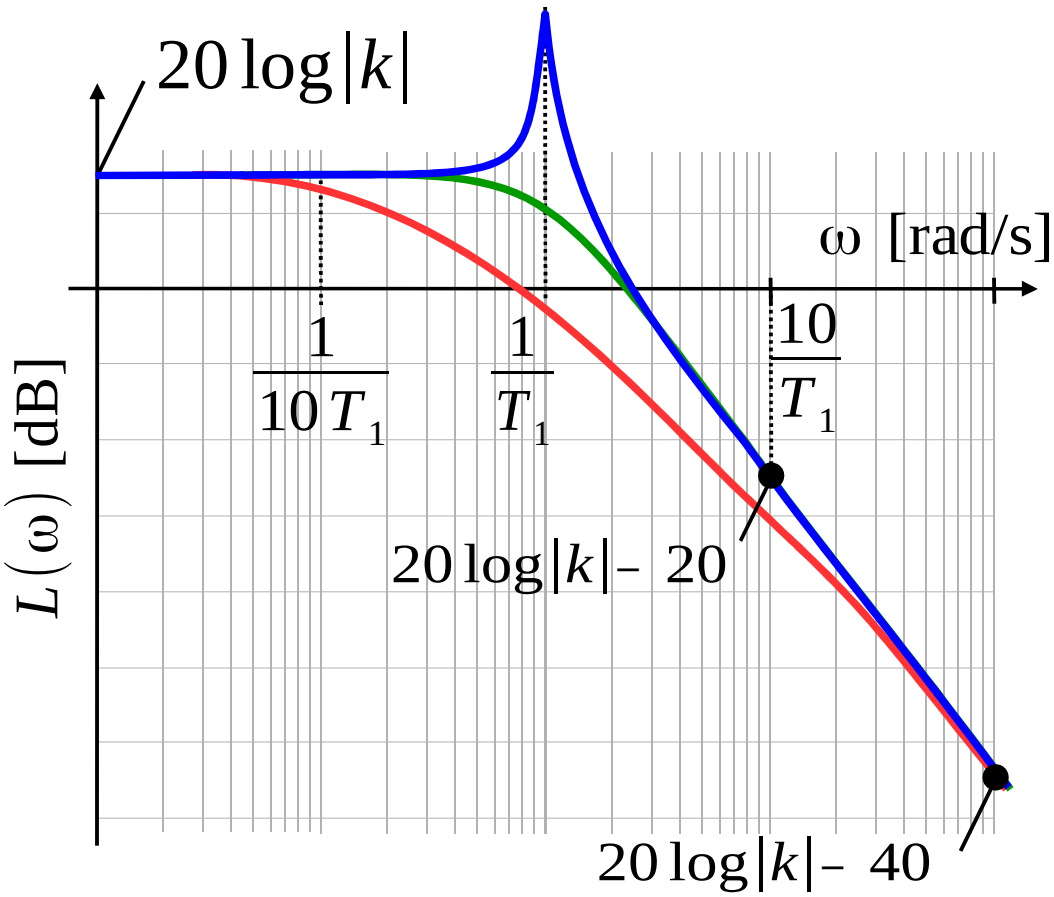
$L(\omega)=20\log A(\omega)$

$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}$

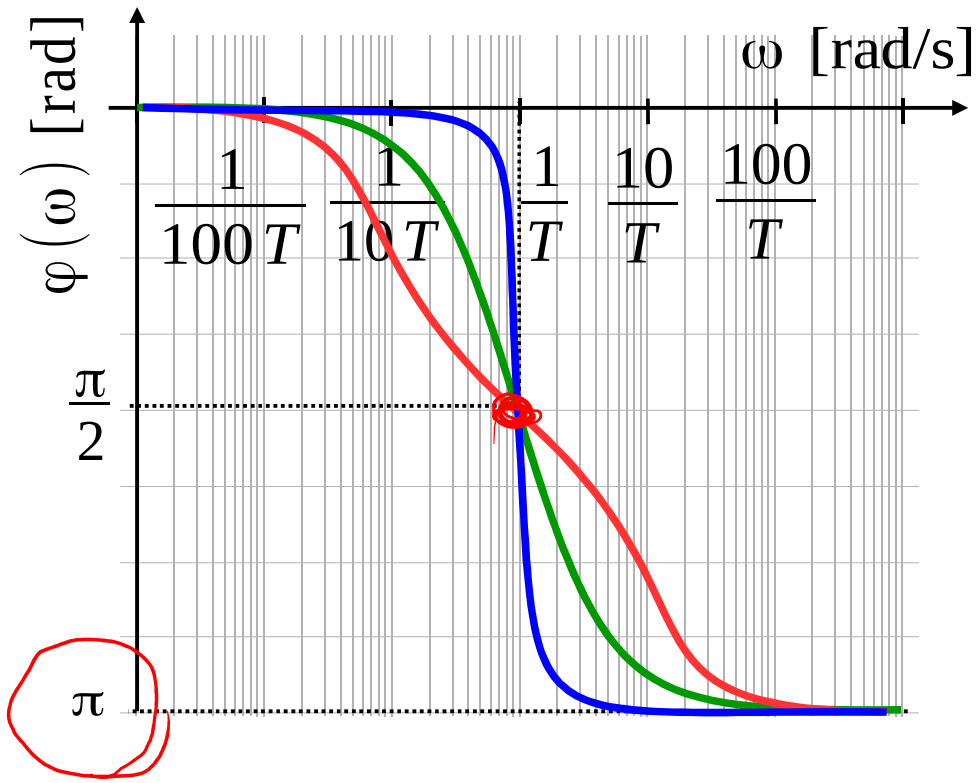
dla $h<\omega_0$

dla $h=\omega_0$

dla $h>\omega_0$



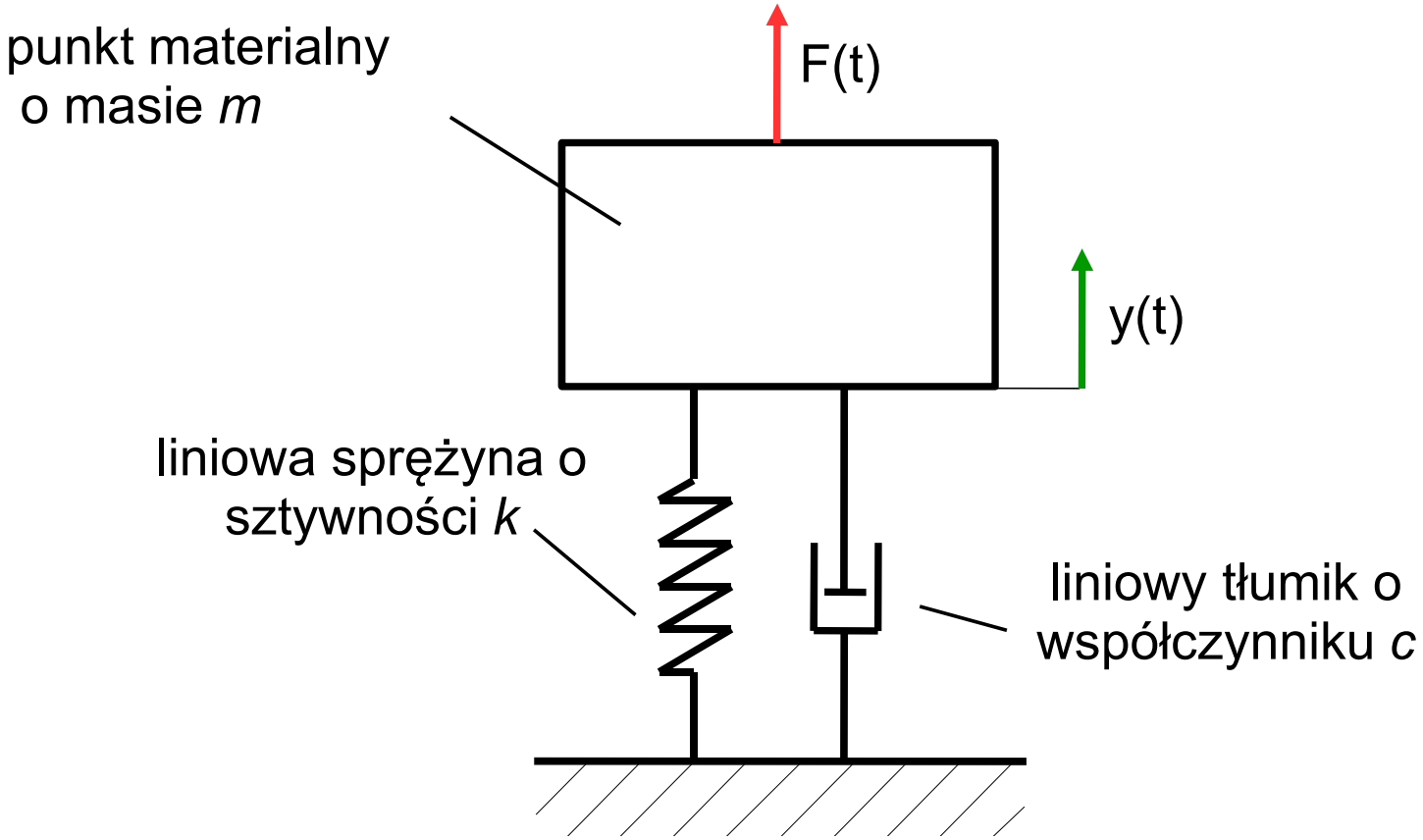
dla $k>0$



Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

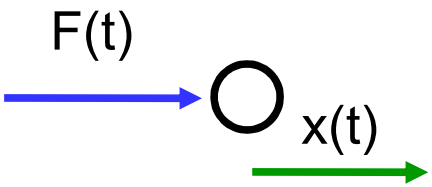
1 UKŁAD DRGAJĄCY:
wejście – siła F(t)
wyjście – przemieszczenie y(t)



Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

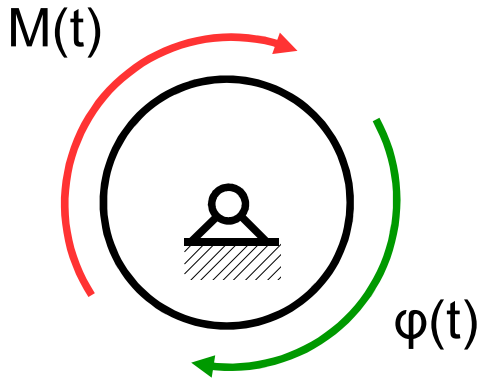
1



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła F(t)
wyjście – przemieszczenie x(t)

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

2

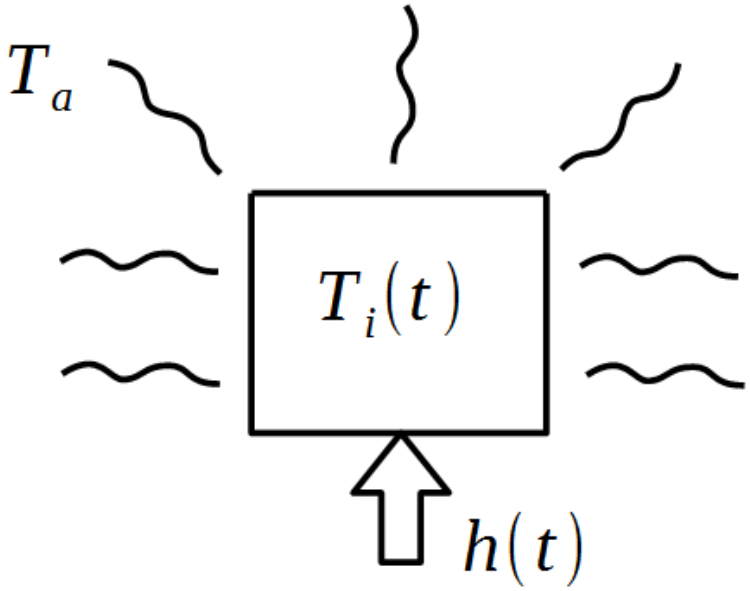


RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – moment M(t)
wyjście – kąt obrotu φ(t)

Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

4



OGRZEWANY OBIEKT O DUŻEJ BEZWŁADNOŚCI:
wejście – moc grzałki h(t)
wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

nazwa elementu	transmitancja
Proporcjonalny	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$