



# **Politechnika Warszawska**

## **Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych**

**Instytut Podstaw Budowy Maszyn  
Zakład Mechaniki**

<http://www.ipbm.simr.pw.edu.pl/>



## ***Teoria maszyn i podstawy automatyki***

### **semestr zimowy 2017/2018**

**dr inż. Sebastian Korczak**

# Wykład 10

## Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki z przykładami.

*Licencja: tylko do edukacyjnego użytku studentów Politechniki Warszawskiej.*

# Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja operatorowa
Proporcjonalny (bezinercyjny)	$y(t) = ku(t)$	$k$
Inercyjny pierwszego rzędu	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{Ts + 1}$
Całkujący	$y(t) = k \int_0^t u(t) dt$ <p style="text-align: center;">or</p> $\frac{dy(t)}{dt} = ku(t)$	$\frac{k}{s}$

# Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja operatorowa
Różniczkujący idealny	$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	$ks$
Różniczkujący rzeczywisty	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	$\frac{ks}{Ts + 1}$

# Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja operatorowa
Opóźniający	$y(t) = u(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu (oscylacyjny)	$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$        $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$   $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

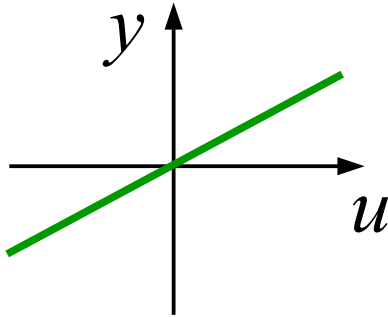
$$\text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$        $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$       dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



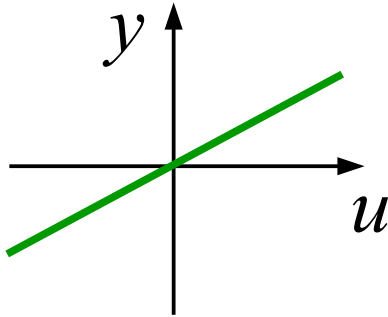


# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$        $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$       dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



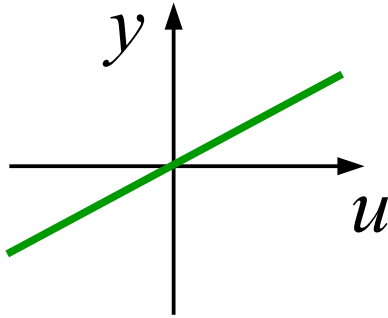
3. Transmitancja:

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$   $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



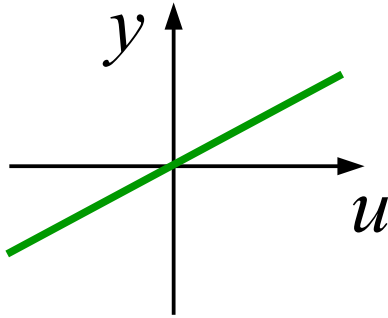
3. Transmitancja:  $G(s) = k$

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$   $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:  $G(s) = k$

---

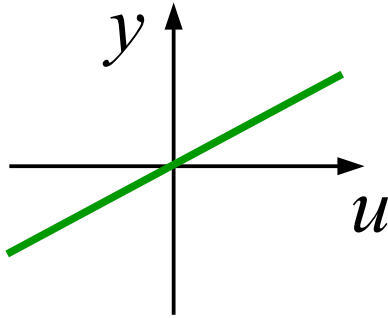
4. Odp. skokowa: dla  $u(t) = u_0 1(t)$

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$        $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$       dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:  $G(s) = k$

---

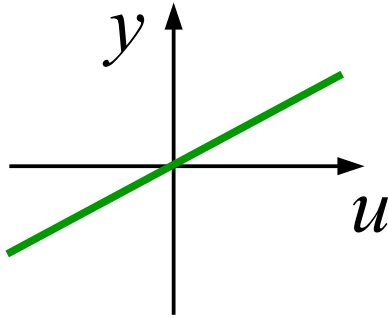
4. Odp. skokowa:  $y(t) = k u_0 1(t)$       dla  $u(t) = u_0 1(t)$

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$        $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

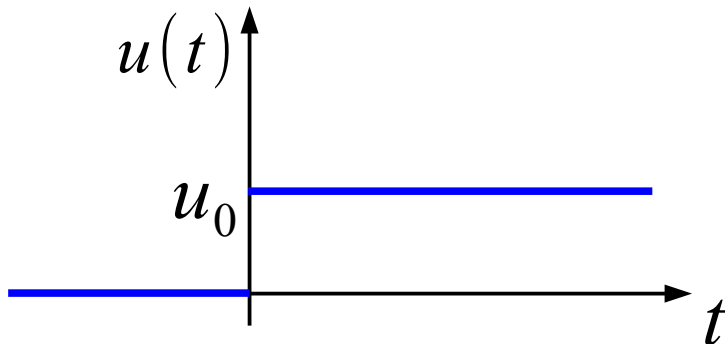
2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$       dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:  $G(s) = k$

---

4. Odp. skokowa:  $y(t) = k u_0 1(t)$       dla  $u(t) = u_0 1(t)$

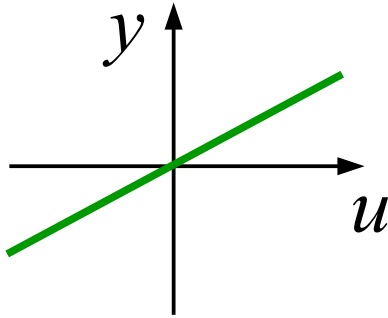


# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$   $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

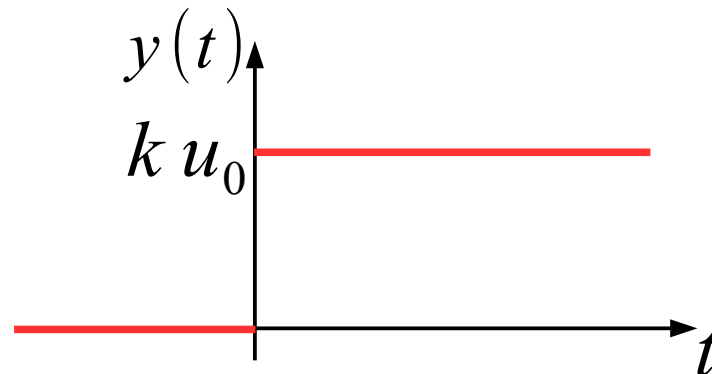
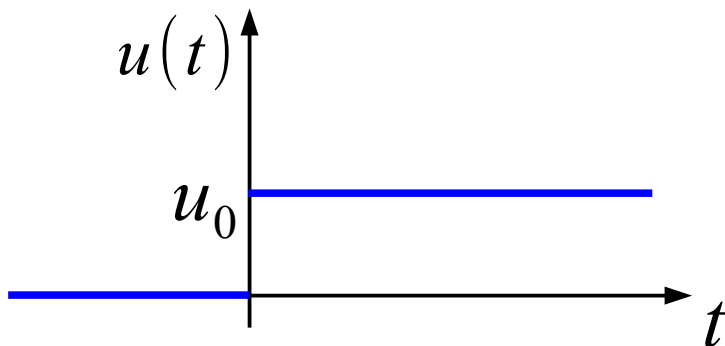
2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:  $G(s) = k$

---

4. Odp. skokowa:  $y(t) = k u_0 1(t)$  dla  $u(t) = u_0 1(t)$



# Element proporcjonalny

---

## 5. Transmitancja widmowa:

# Element proporcjonalny

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$



# Element proporcjonalny

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

# Element proporcjonalny

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

---

6. Wykres Nyquista:

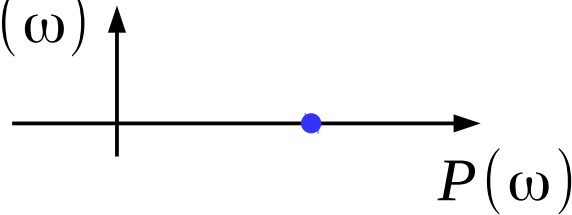
# Element proporcjonalny

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

---

6. Wykres Nyquista:  $Q(\omega)$



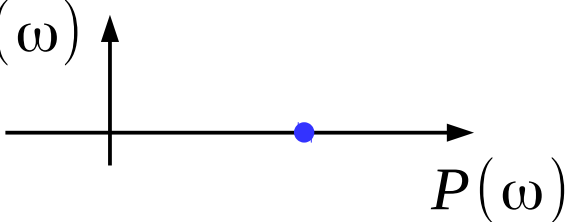
dla  $k > 0$

# Element proporcjonalny

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

---

6. Wykres Nyquista:   $Q(\omega)$  dla  $k > 0$   
 $P(\omega)$

---

7. Wykres Bodego:

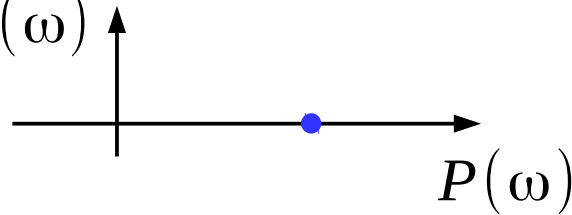
# Element proporcjonalny

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

---

6. Wykres Nyquista:  $Q(\omega)$



dla  $k > 0$

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$

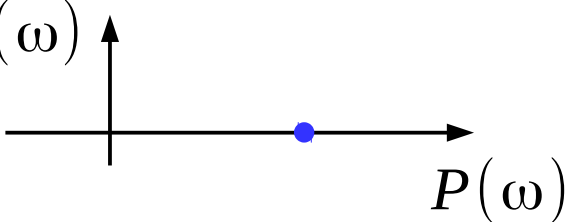
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

# Element proporcjonalny

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

---

6. Wykres Nyquista:   $Q(\omega)$  ↑  
↓  $P(\omega)$     dla  $k > 0$

The Nyquist plot shows a horizontal axis labeled  $P(\omega)$  and a vertical axis labeled  $Q(\omega)$ . A blue dot is placed on the positive  $P(\omega)$  axis, representing the point  $(k, 0)$  in the complex plane.

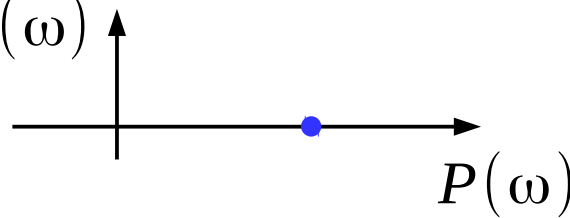
---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$   
 $L(\omega) = 20 \log A(\omega)$      $\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \geq 0 \\ \pi, & \text{dla } k < 0 \end{cases}$

# Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

6. Wykres Nyquista:  $Q(\omega)$

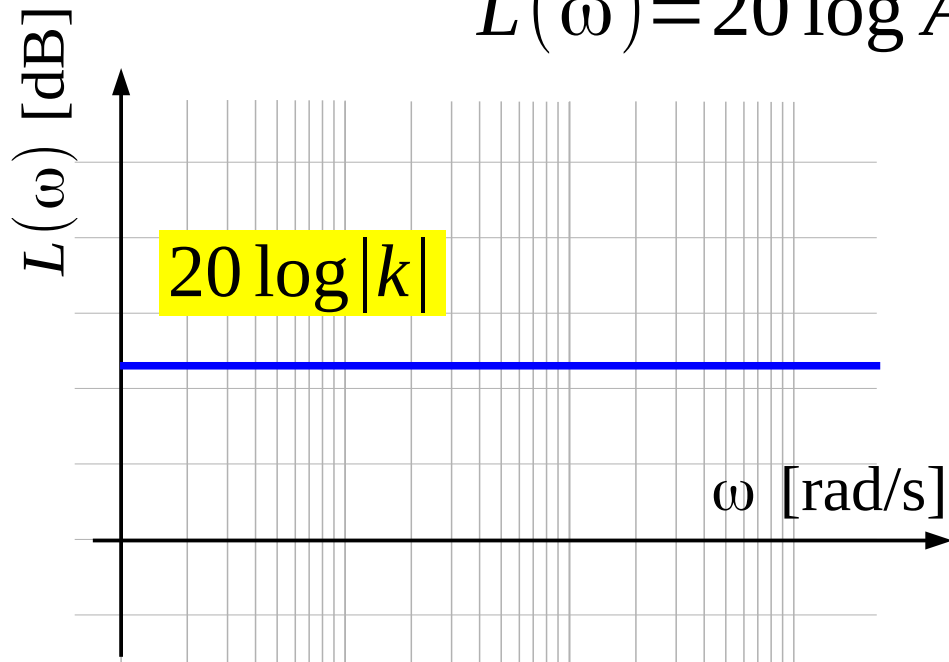


dla  $k > 0$

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

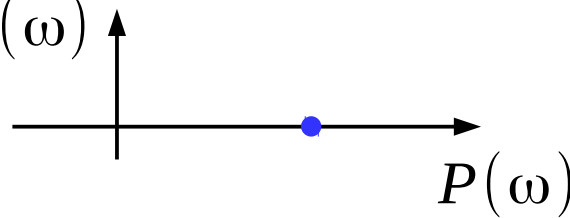
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \geq 0 \\ \pi, & \text{dla } k < 0 \end{cases}$$



# Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

6. Wykres Nyquista:  $Q(\omega)$

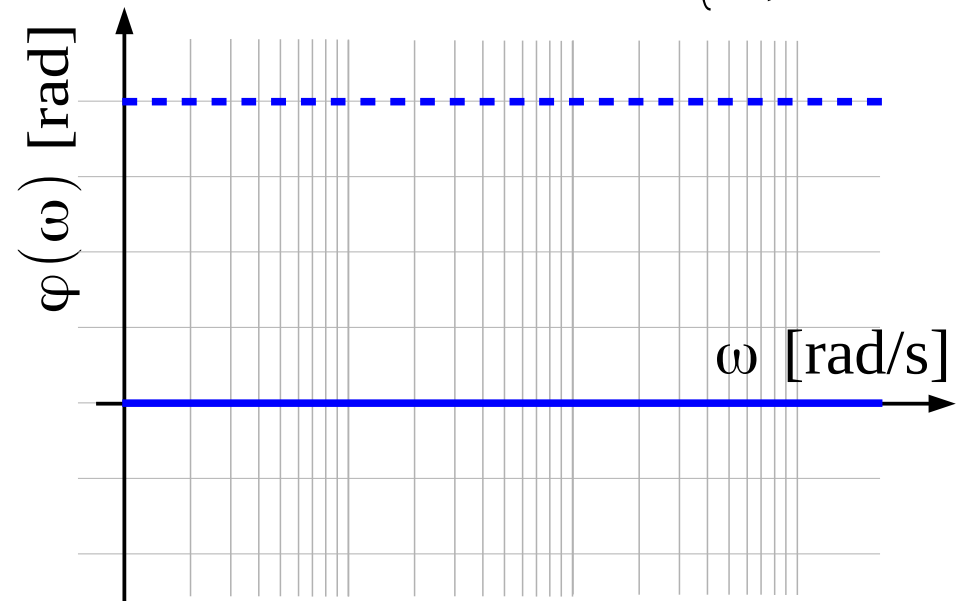
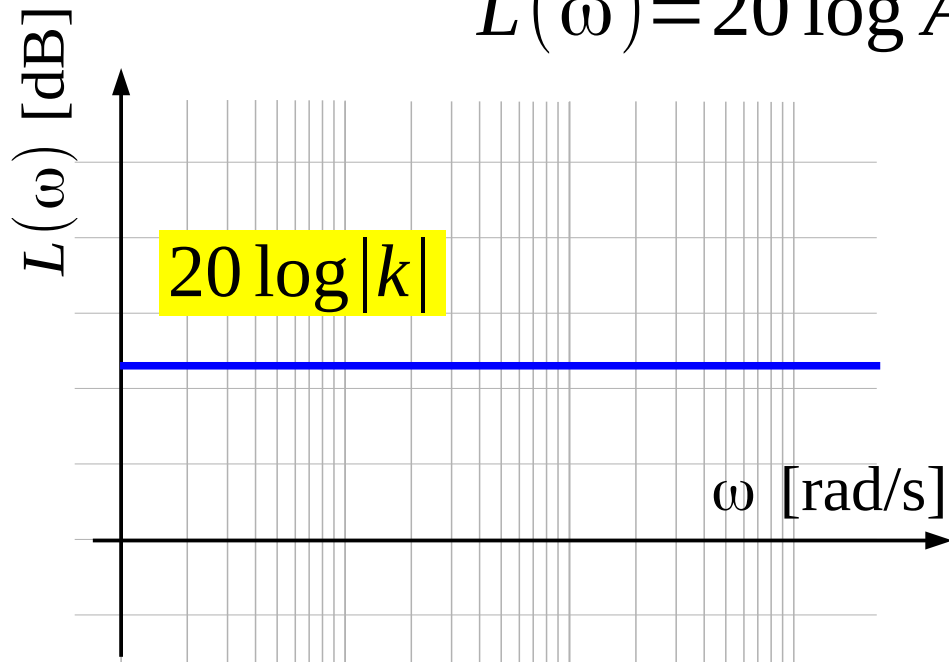


dla  $k > 0$

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \geq 0 \\ \pi, & \text{dla } k < 0 \end{cases}$$

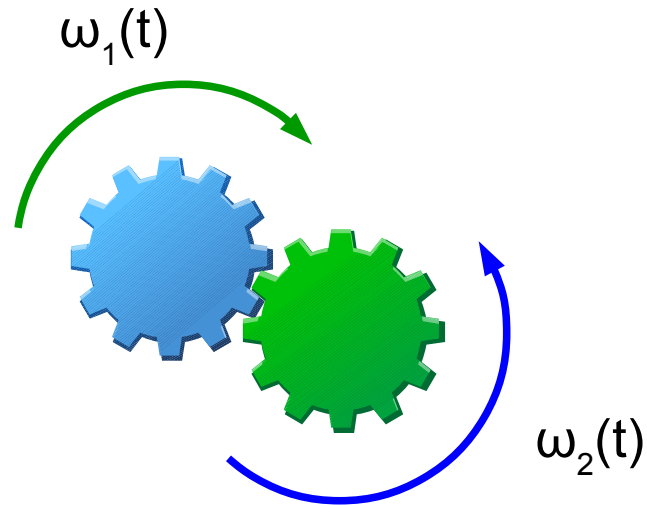




# Element proporcjonalny

## Przykłady

1



przekładnia zębata:

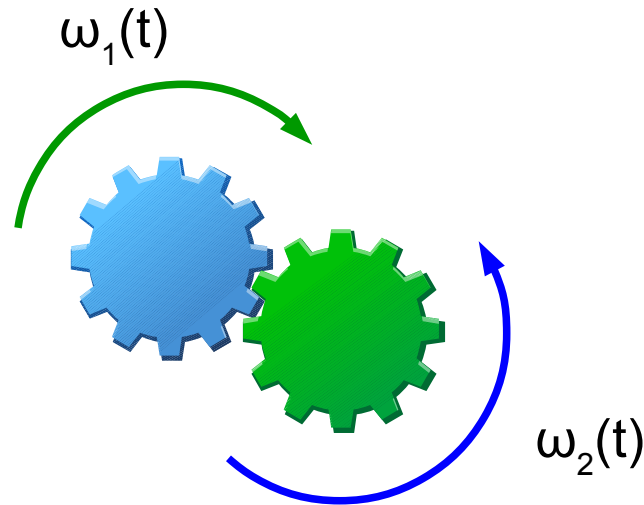
wejście – prędkość kąтова  $\omega_1(t)$

wyjście – prędkość kąтова  $\omega_2(t)$

# Element proporcjonalny

## Przykłady

1

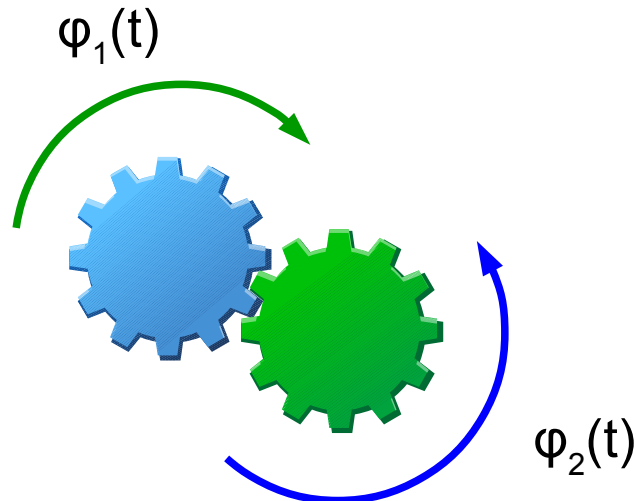


przekładnia zębata:

wejście – prędkość kątowna  $\omega_1(t)$

wyjście – prędkość kątowna  $\omega_2(t)$

2



przekładnia zębata:

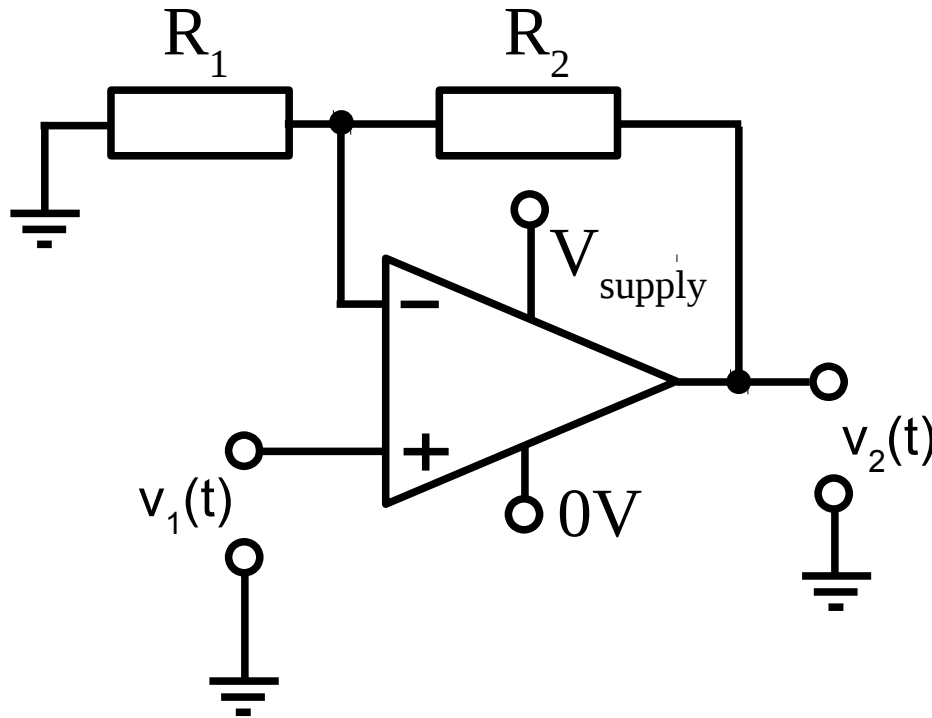
wejście – kąt obrotu  $\varphi_1(t)$

wyjście – kąt obrotu  $\varphi_2(t)$

# Element proporcjonalny

## Przykłady

3



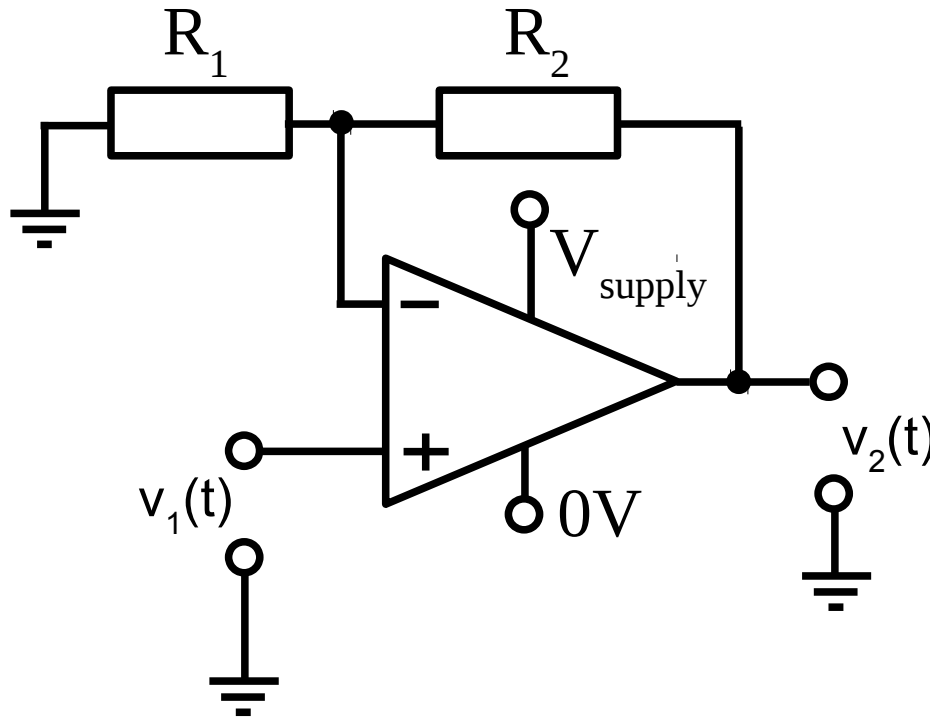
WZMACNIACZ  
OPERACYJNY:  
wejście – napięcie  $v_1(t)$   
wyjście – napięcie  $v_2(t)$

$$v_2(t) = v_1(t) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

# Element proporcjonalny

## Przykłady

3



WZMACNIACZ  
OPERACYJNY:  
wejście – napięcie  $v_1(t)$   
wyjście – napięcie  $v_2(t)$

$$v_2(t) = v_1(t) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

4

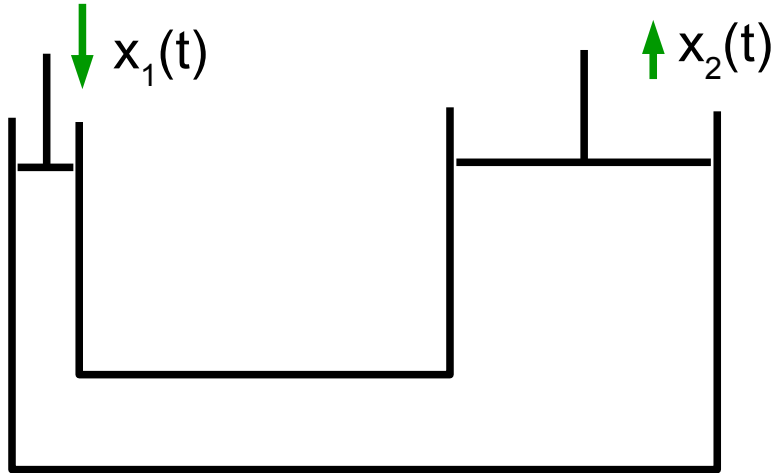


BELKA w stanie ustalonym:  
wejście – siła  $F_1$   
wyjście – siła  $F_2$

# Element proporcjonalny

## Przykłady

5

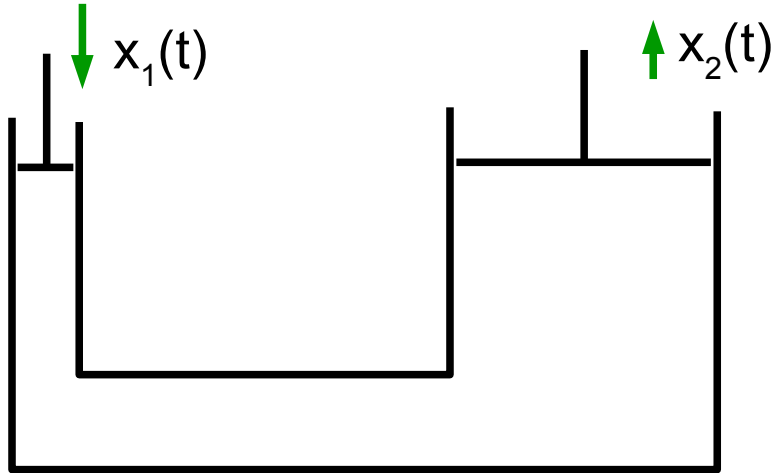


PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:  
wejście – przemieszczenie  $x_1(t)$   
wyjście – przemieszczenie  $x_2(t)$

# Element proporcjonalny

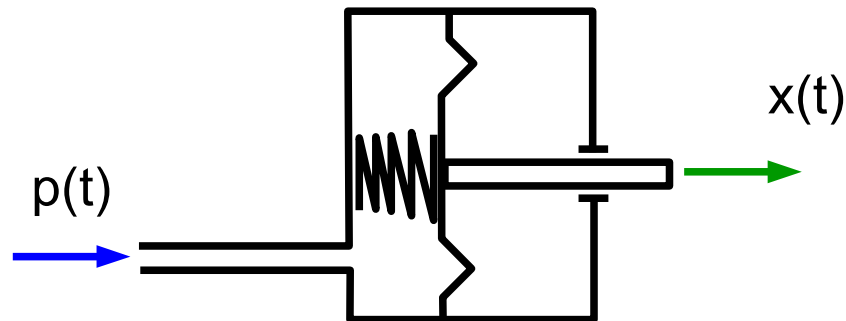
## Przykłady

5



PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:  
wejście – przemieszczenie  $x_1(t)$   
wyjście – przemieszczenie  $x_2(t)$

6



SIŁOWNIK PNEUMATYCZNY:  
wejście – ciśnienie  $p_1(t)$   
wyjście – przemieszczenie  $x(t)$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: 
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

$u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

# Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:  $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna: dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

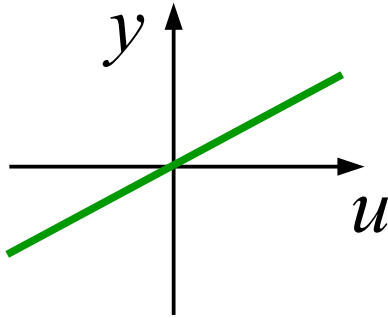


# Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:  $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



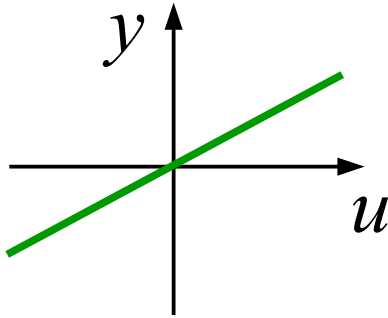
zał.:  $k > 0$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:  $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



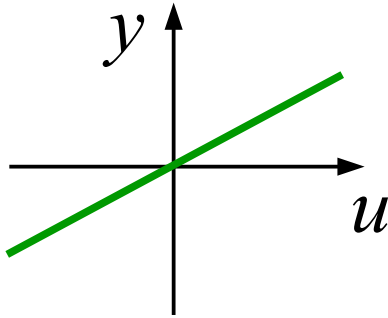
3. Transmitancja:

# Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:  $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:  $G(s) = \frac{k}{Ts+1}$

---

# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

4. Odp. skokowa:

# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(Ts + 1)}$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(Ts + 1)}$

Wyjście:  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 (1 - e^{-t/T})$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

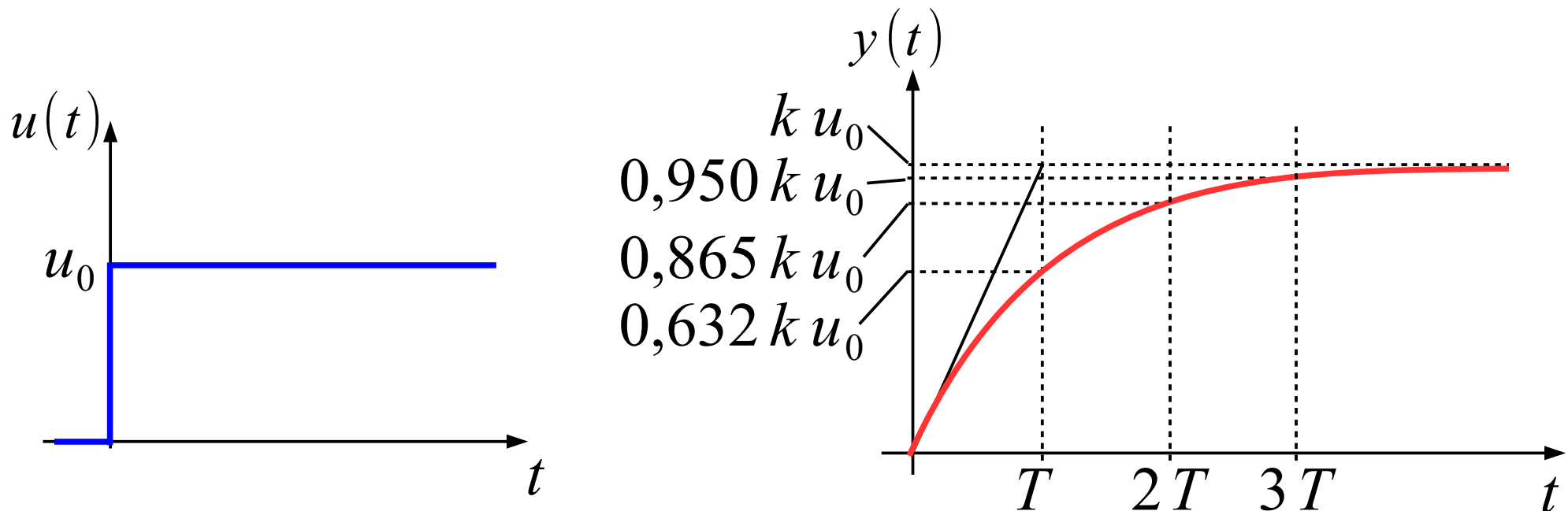
## 4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(Ts + 1)}$

Wyjście:  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 (1 - e^{-t/T})$





# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

5. Transmitancja  
widmowa:

# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

---

6. Wykres Nyquista:

# Element inercyjny pierwszego rzędu

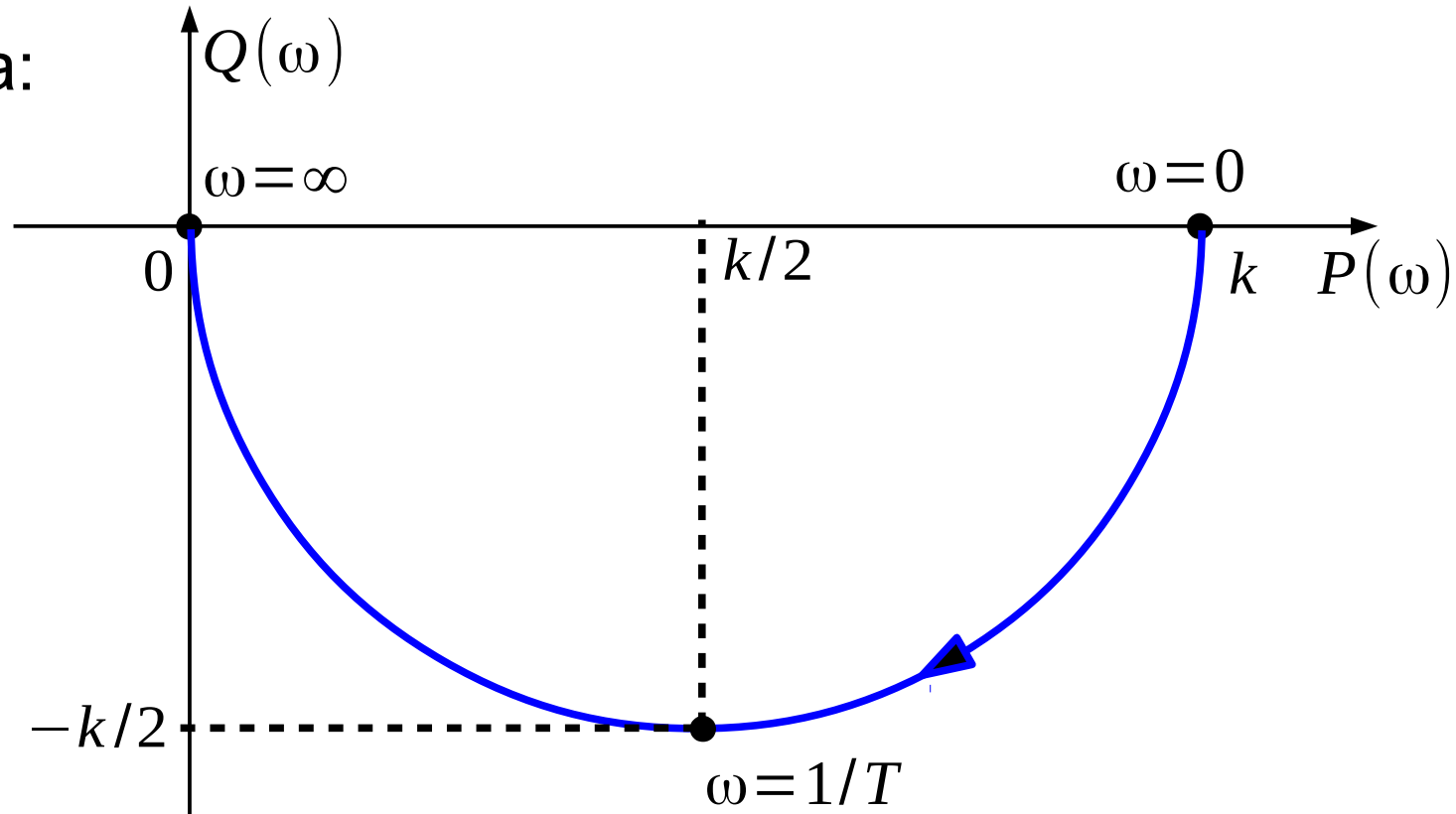
5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:

zał.:  $k > 0$



# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

## 7. Wykres Bodego:

# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$



# Element inercyjny pierwszego rzędu

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

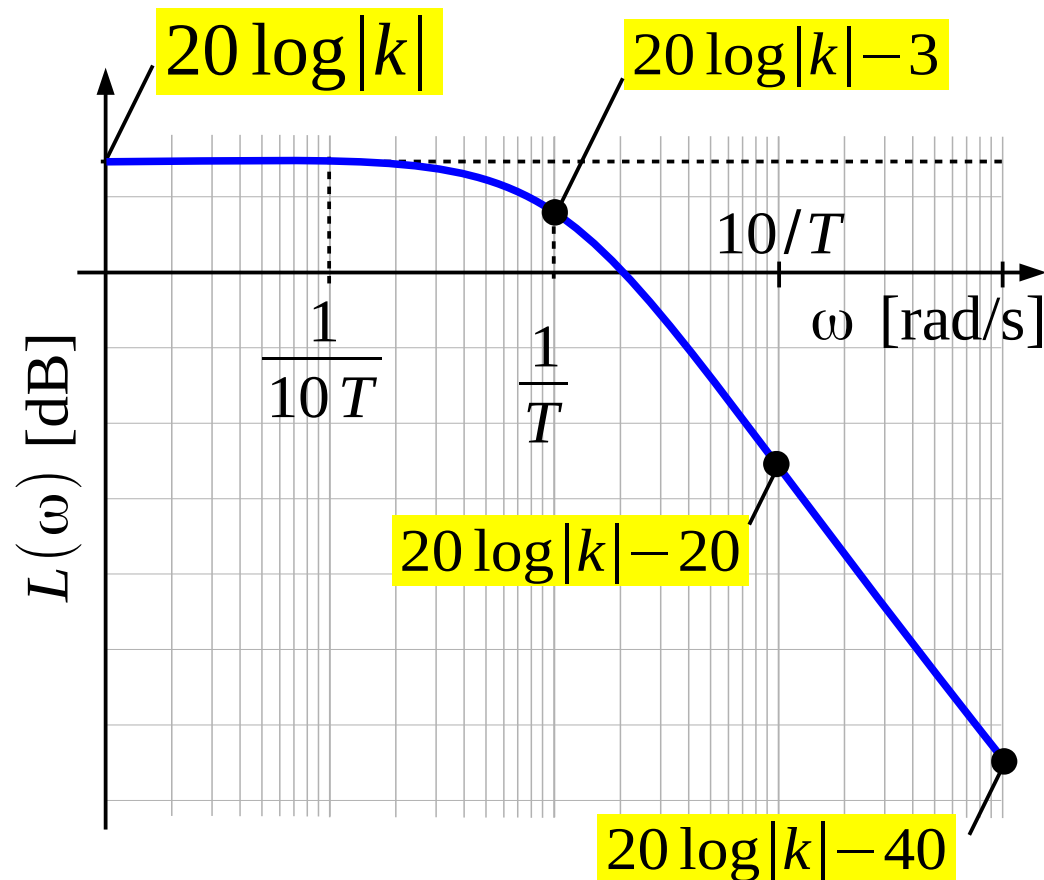
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$

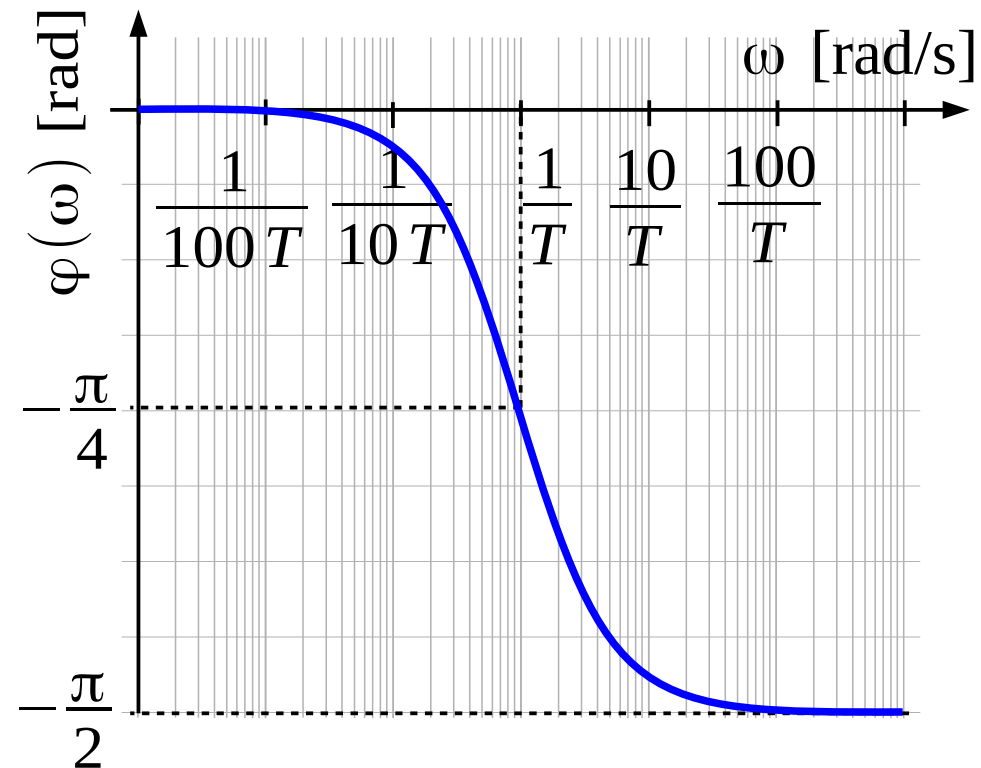
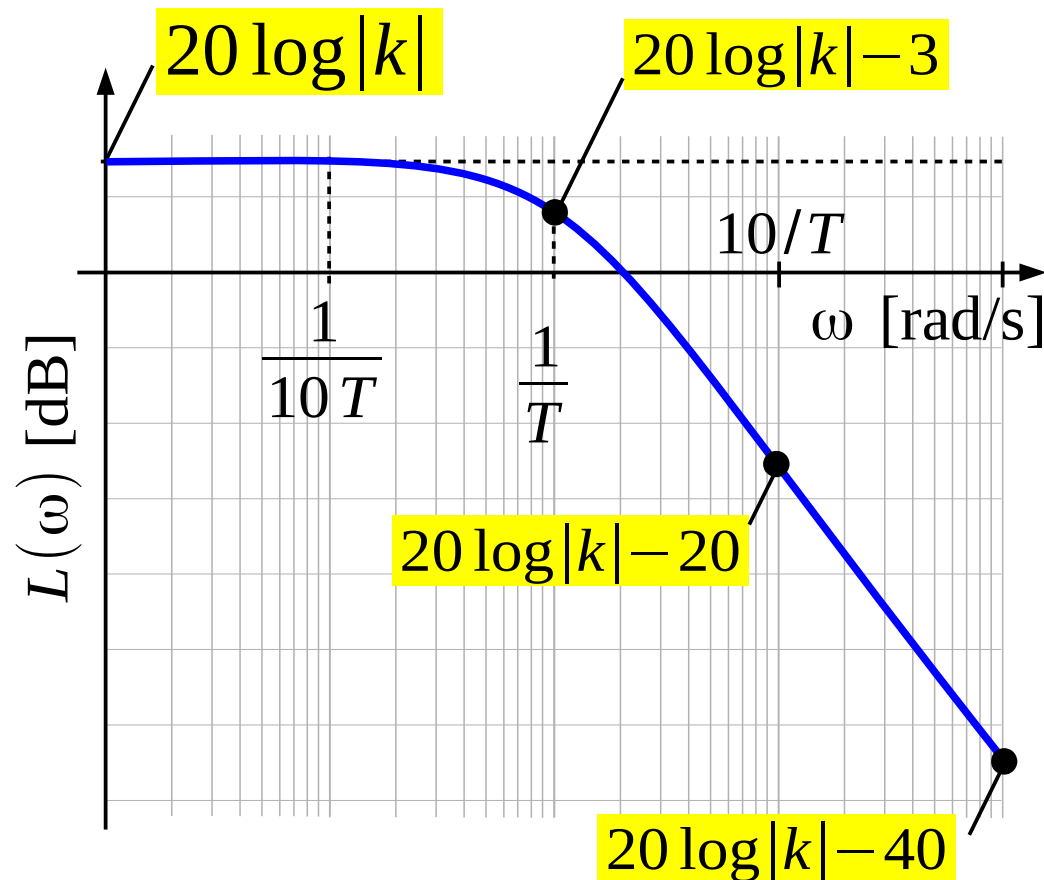


# Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

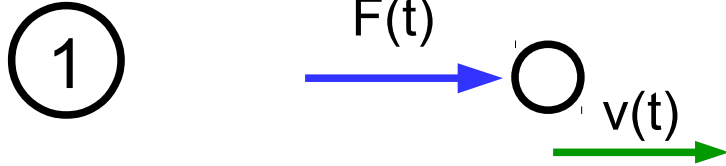
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$



# Element inercyjny pierwszego rzędu

## Przykłady



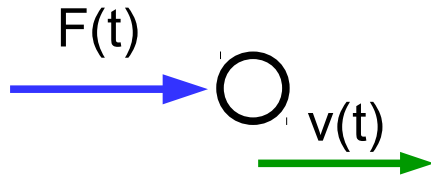
RUCH POSTĘPOWY PUNKTU  
MATERIALNEGO Z LINIOWYM  
TŁUMIENIEM:  
wejście – siła  $F(t)$   
wyjście – prędkość  $v(t)$

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną – stałe przełożenia w układzie napędowym)

# Element inercyjny pierwszego rzędu

## Przykłady

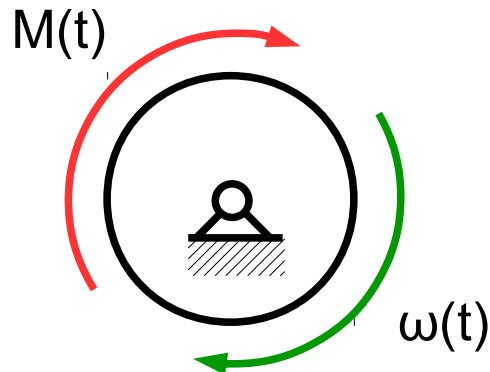
1



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU  
MATERIALNEGO Z LINIOWYM  
TŁUMIENIEM:  
wejście – siła  $F(t)$   
wyjście – prędkość  $v(t)$

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

2

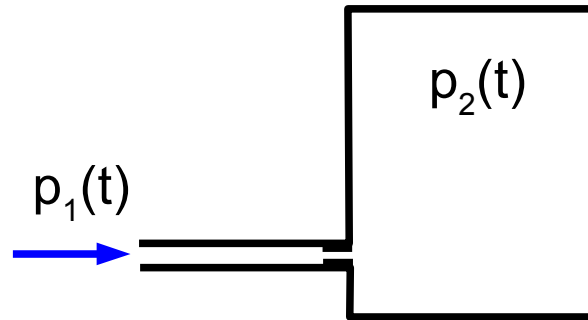


RUCH OBROTOWY BRYŁY  
SZTYWNEJ Z LINIOWYM  
TŁUMIENIEM:  
wejście – moment  $M(t)$   
wyjście – prędkość kątowna  $\omega(t)$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

## Przykłady

3

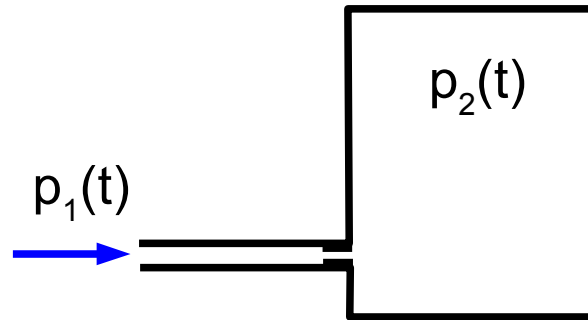


ZBIORNIK POWIETRZA:  
wejscie – ciśnienie  $p_1(t)$   
wyjscie – ciśnienie  $p_2(t)$

# Element inercyjny pierwszego rzędu

## Przykłady

3

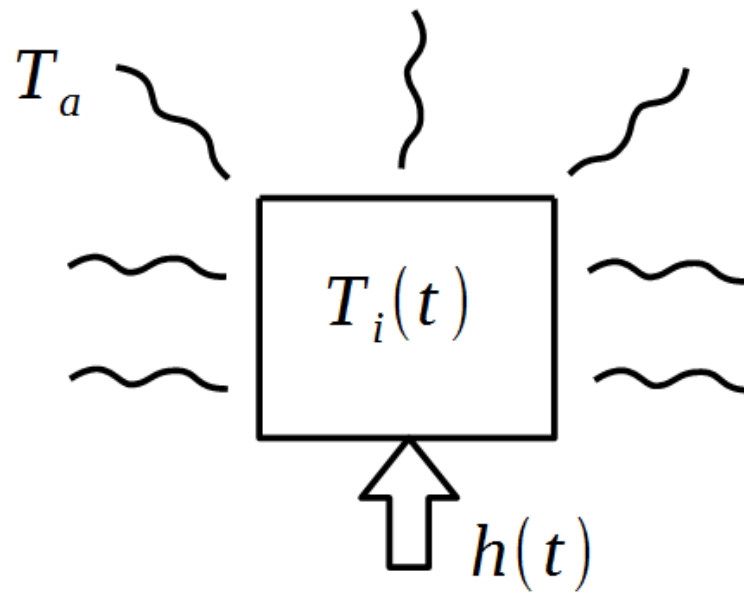


ZBIORNIK POWIETRZA:

wejscie – ciśnienie  $p_1(t)$

wyjście – ciśnienie  $p_2(t)$

4



OGRZEWANY OBIEKT O MAŁEJ  
BEZWŁADNOŚCI:

wejscie – moc grzałki  $h(t)$

wyjście – temperatura obiektu  $T_i(t)$

# Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

$u(t)$  - wejście

$y(t)$  - wyjście



# Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

$u(t)$  - wejście

$y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$\text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$

# Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

$u(t)$  - wejście

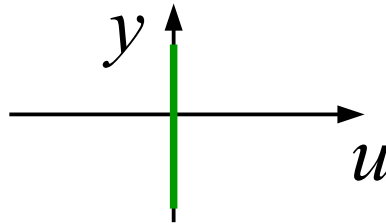
$y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$u = 0$$

$$\text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



# Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

$u(t)$  - wejście

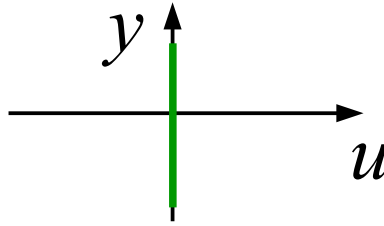
$y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$u = 0$$

$$\text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



3. Transmitancja:

# Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

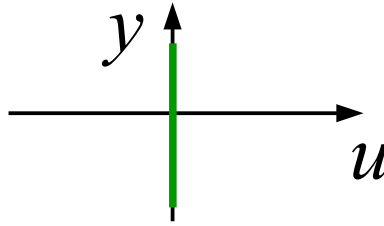
$u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$u = 0$$

$$\text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



3. Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

---

# Element całkujący

---

4. Odp. skokowa:

# Element całkujący

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

# Element całkujący

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s^2}$

# Element całkujący

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s^2}$

Wyjście:  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 t$



# Element całkujący

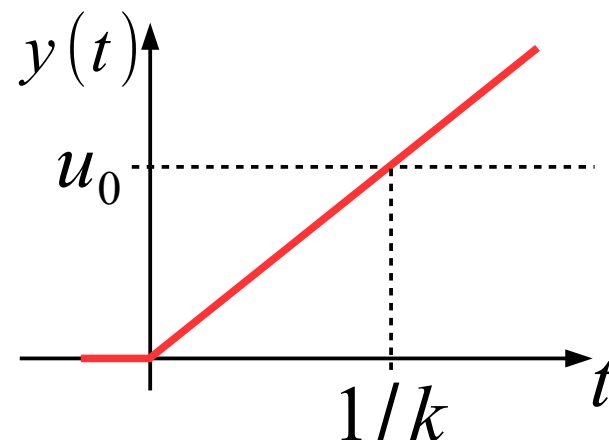
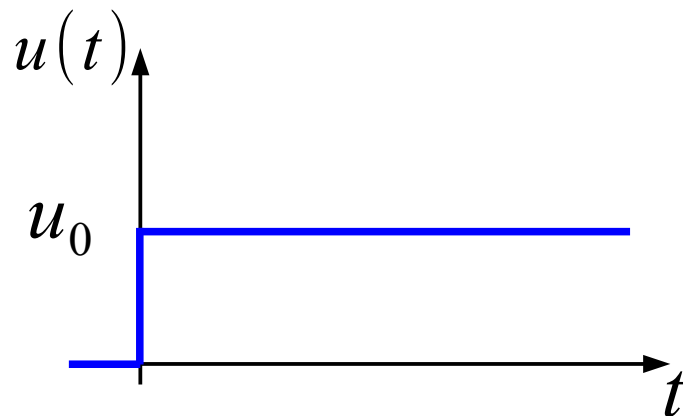
## 4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s^2}$

Wyjście:  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 t$



## 5. Transmitancja widmowa:

# Element całkujący

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

# Element całkujący

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

# Element całkujący

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

---

6. Wykres Nyquista:

# Element całkujący

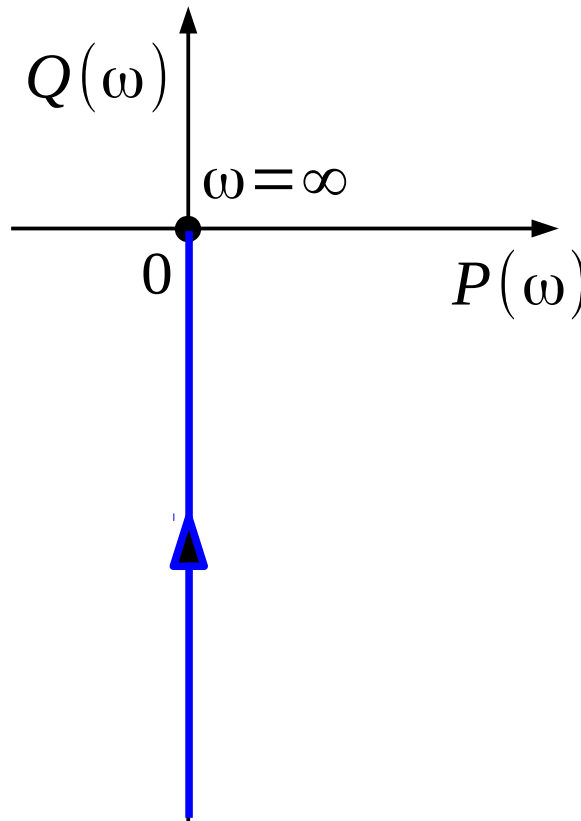
---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:  
dla  $k > 0$



# Element całkujący

---

## 7. Wykres Bodego:

# Element całkujący

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$



# Element całkujący

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right|$$

# Element całkujący

---

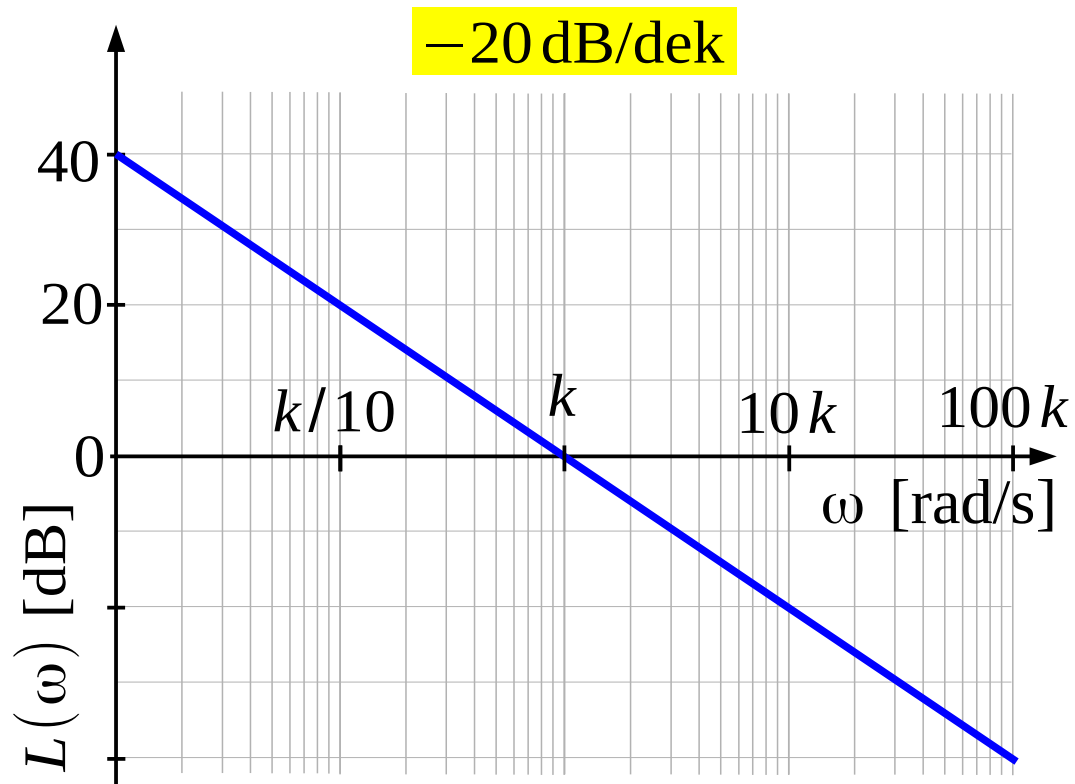
7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\infty)$$

# Element całkujący

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

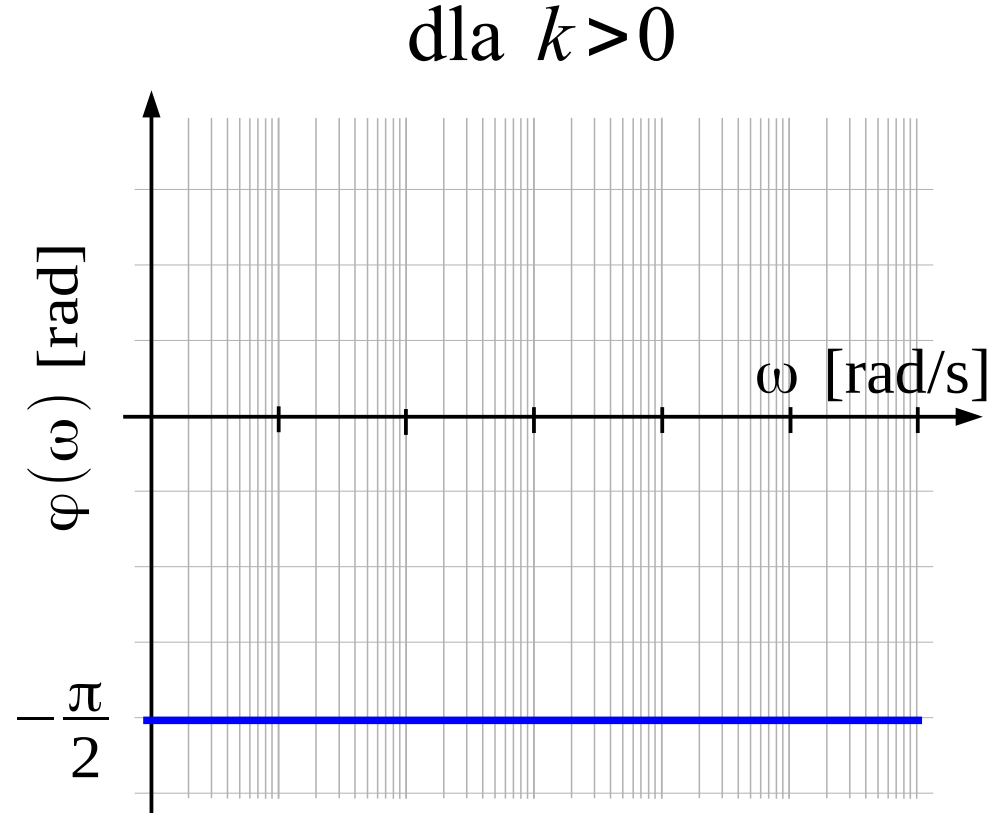
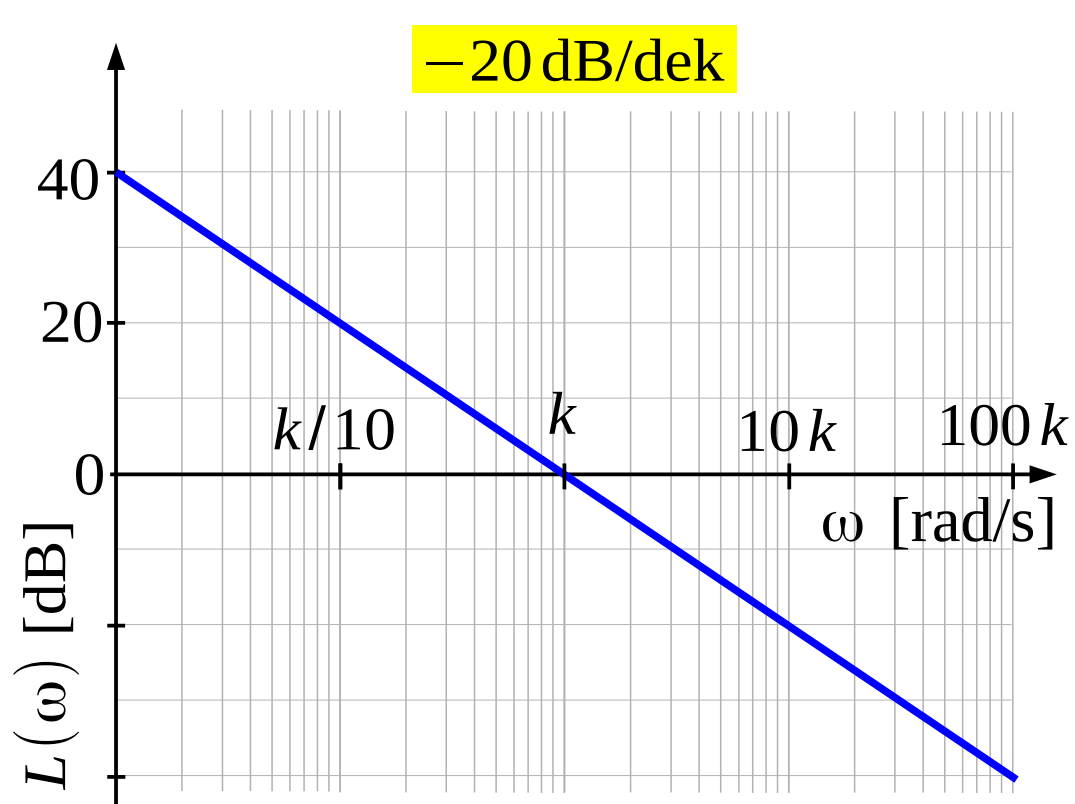
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\infty)$$



# Element całkujący

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

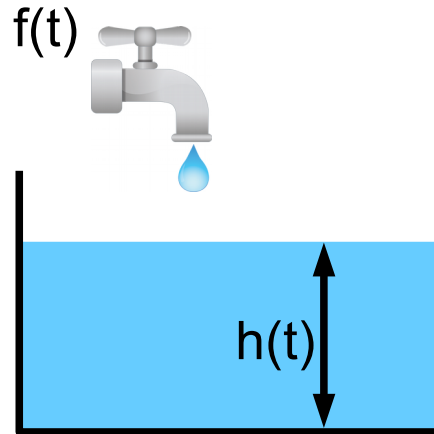
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\infty)$$



# Element całkujący

## Przykłady

1

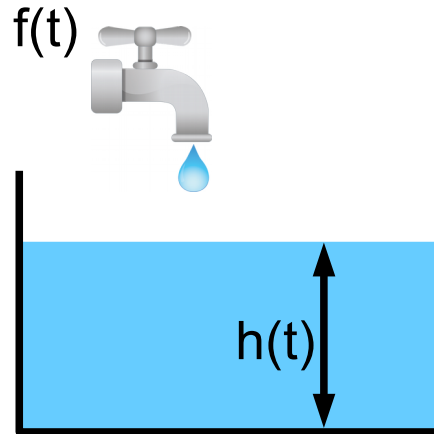


PROSTOPADŁOŚCIENNY  
ZBIORNIK PŁYNU:  
wejście – wydatek dopływu  $f(t)$   
wyjście – poziom cieczy  $h(t)$

# Element całkujący

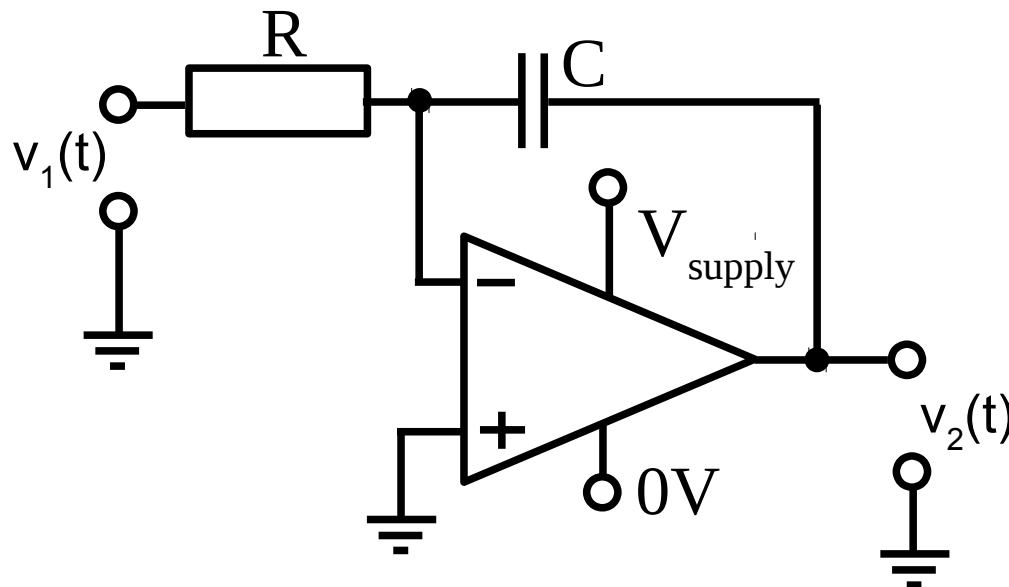
## Przykłady

1



PROSTOPADŁOŚCIENNY  
ZBIORNIK PŁYNU:  
wejście – wydatek dopływu  $f(t)$   
wyjście – poziom cieczy  $h(t)$

2



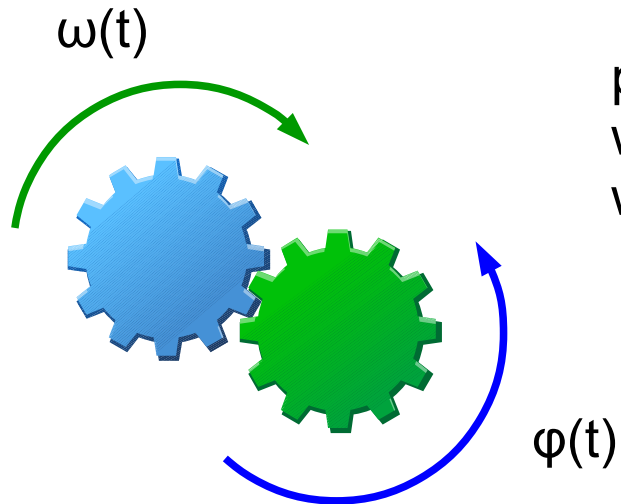
WZMACNIACZ  
OPERACYJNY:  
wejście – napięcie  $v_1(t)$   
wyjście – napięcie  $v_2(t)$

$$v_2(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t v_1(t) dt$$

# Element całkujący

## Przykłady

3

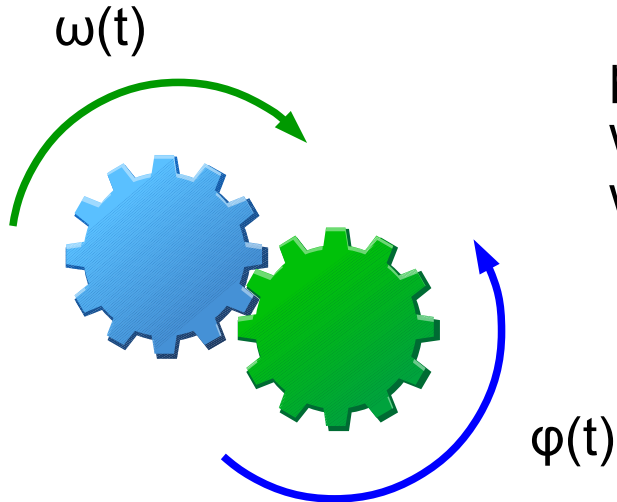


przekładnia zębata:  
wejście – prędkość kątowa  $\omega(t)$   
wyjście – kąt obrotu  $\varphi(t)$

# Element całkujący

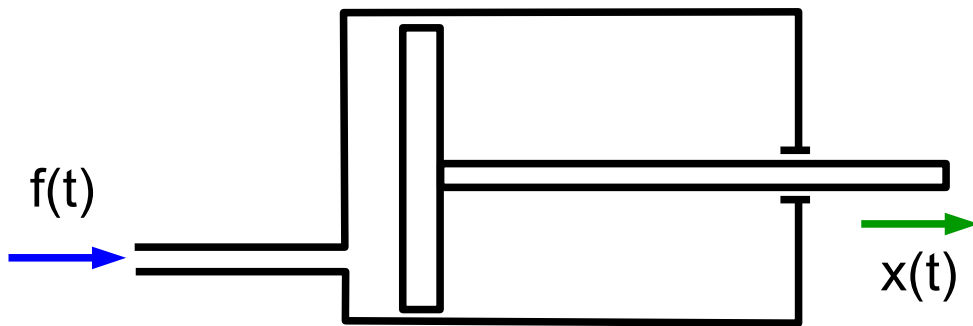
## Przykłady

3



przekładnia zębata:  
wejście – prędkość kątowa  $\omega(t)$   
wyjście – kąt obrotu  $\varphi(t)$

4



CYLINDER HYDRAULICZNY:  
wejście – wydatek cieczy  $f(t)$   
wyjście – przemieszczenie  $x(t)$



# Element różniczkujący idealny

1. Równanie:

$$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$  - wejście

$y(t)$  - wyjście

# Element różniczkujący idealny

1. Równanie:  $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

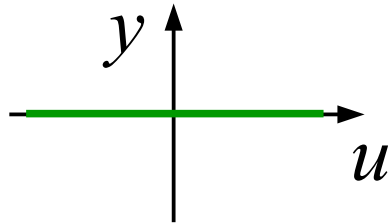
2. Charakterystyka statyczna: dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

# Element różniczkujący idealny

1. Równanie:  $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = 0$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

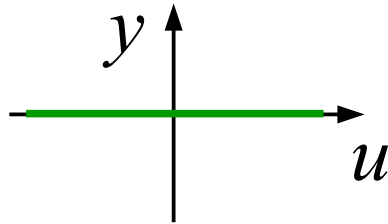


# Element różniczkujący idealny

1. Równanie:  $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = 0$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



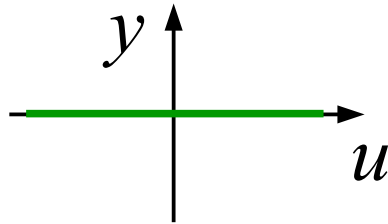
3. Transmitancja:

# Element różniczkujący idealny

1. Równanie:  $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = 0$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:  $G(s) = k s$

---

# Element różniczkujący idealny

---

4. Odp. skokowa:

# Element różniczkujący idealny

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

# Element różniczkujący idealny

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = k u_0$



# Element różniczkujący idealny

---

4. Odp. skokowa:

$$\text{Wejście: } u(t) = u_0 1(t)$$

$$\text{Transformata Laplacea wejścia: } U(s) = u_0 \frac{1}{s}$$

$$\text{Transformata Laplacea wyjścia: } Y(s) = G(s) U(s) = k u_0$$

$$\text{Wyjście: } y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 \delta(t)$$

# Element różniczkujący idealny

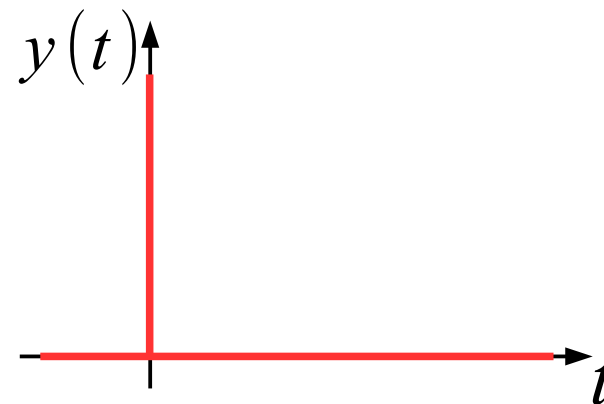
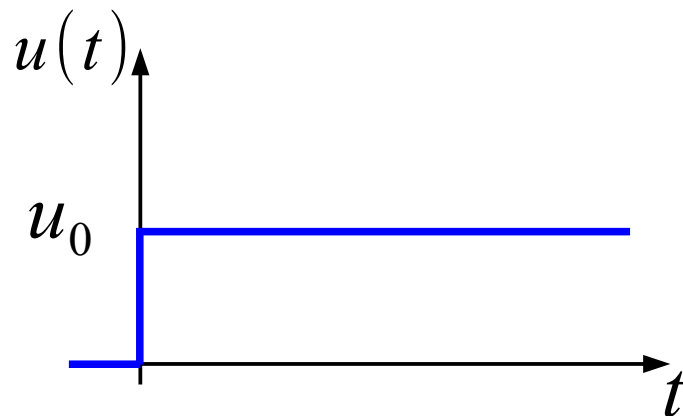
## 4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = k u_0$

Wyjście:  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 \delta(t)$



# Element różniczkujący idealny

---

5. Transmitancja  
widmowa:

# Element różniczkujący idealny

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

# Element różniczkujący idealny

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

---

6. Wykres Nyquista:

# Element różniczkujący idealny

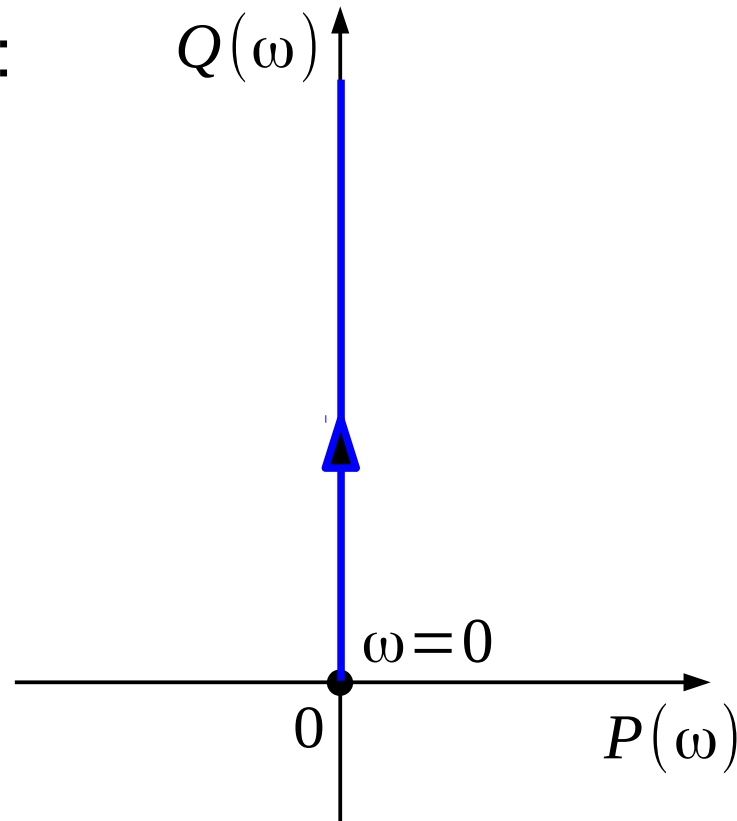
---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

6. Wykres Nyquista:  
dla  $k > 0$



# Element różniczkujący idealny

---

## 7. Wykres Bodego:

# Element różniczkujący idealny

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$



# Element różniczkujący idealny

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega|$$

# Element różniczkujący idealny

---

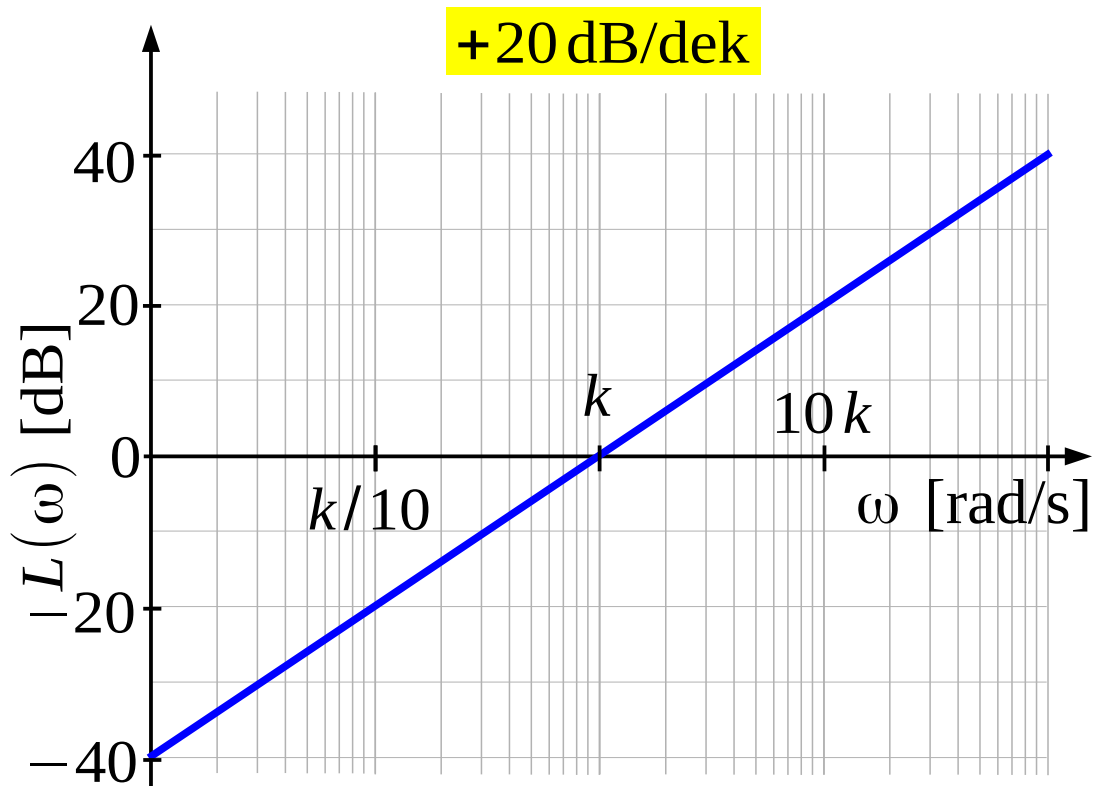
7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(\infty)$$

# Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(\infty)$$



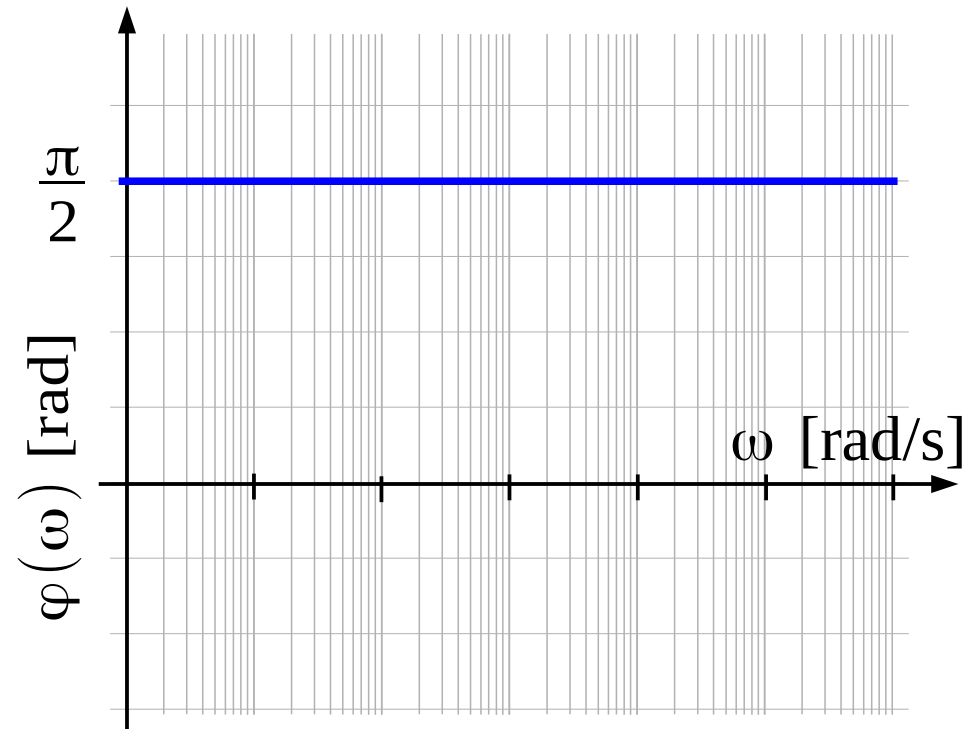
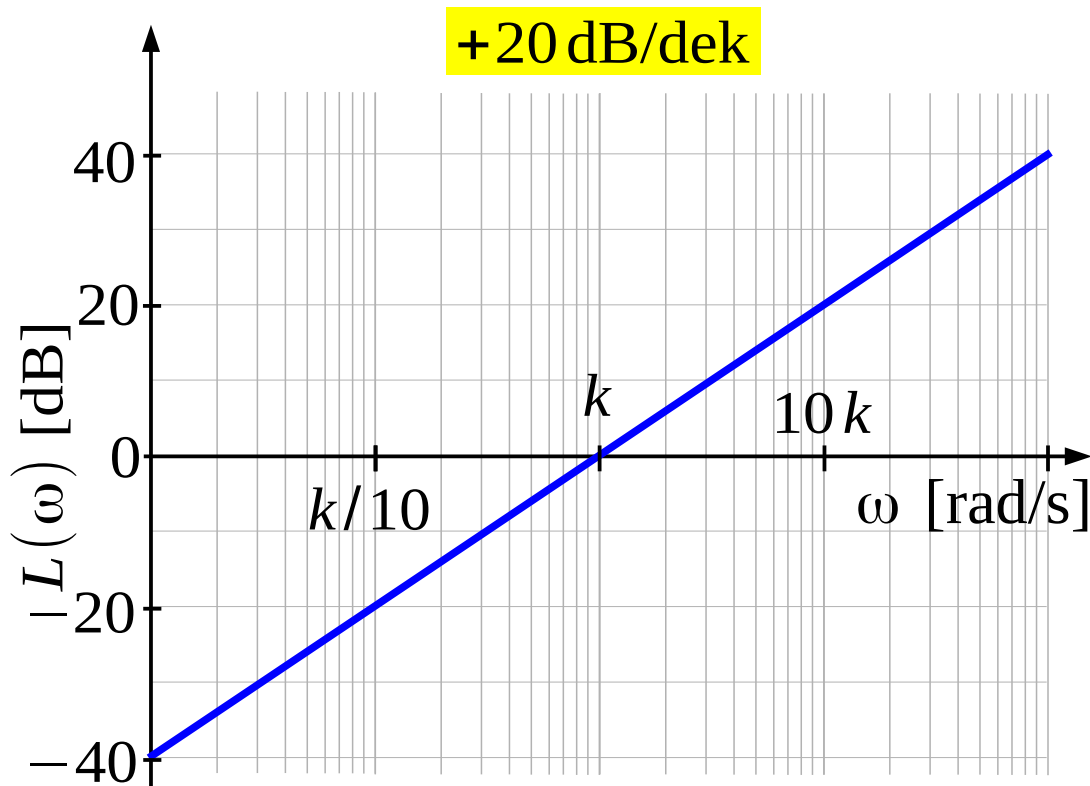
# Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega|$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(\infty)$$

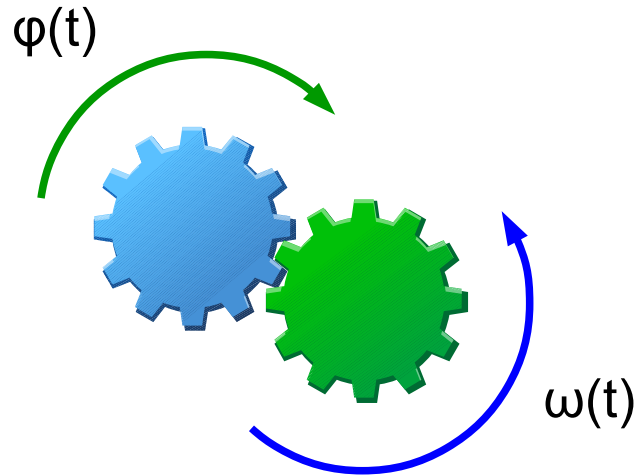
dla  $k > 0$



# Element różniczkujący idealny

## Przykłady

1



PRZEKŁADNIA ZĘBATA:

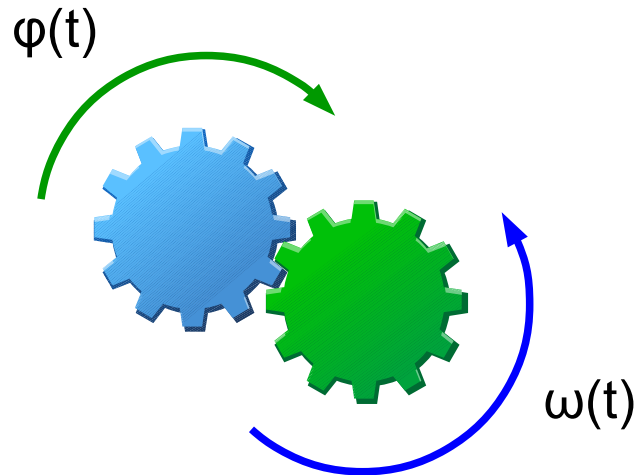
wejście – kąt obrotu  $\varphi(t)$

wyjście – prędkość kątowa  $\omega(t)$

# Element różniczkujący idealny

## Przykłady

1

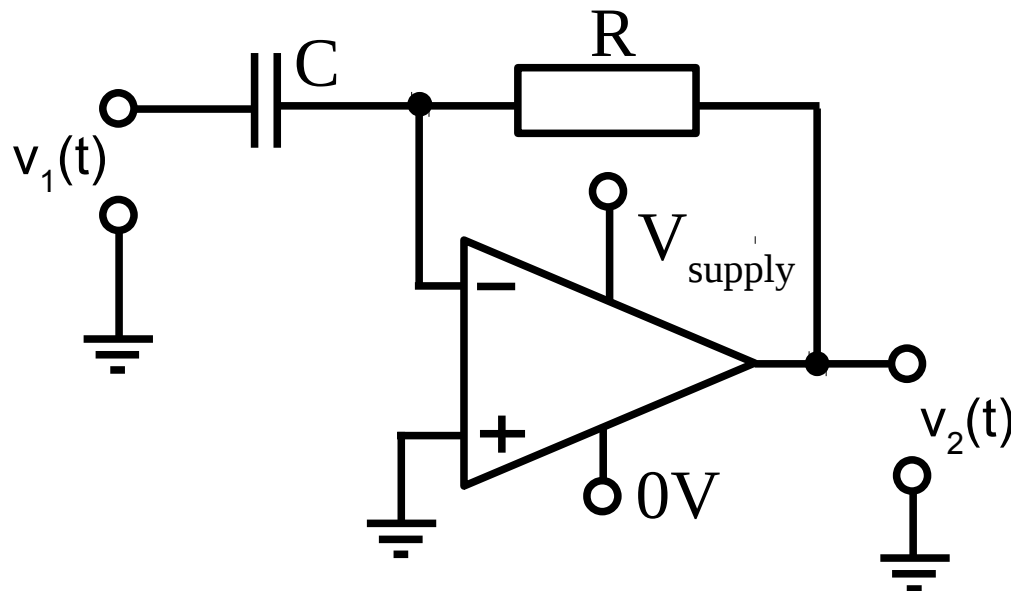


PRZEKŁADNIA ZĘBATA:

wejscie – kąt obrotu  $\varphi(t)$

wyjście – prędkość kątowna  $\omega(t)$

2



WZMACNIACZ  
OPERACYJNY:

wejscie – napięcie  $v_1(t)$

wyjście – napięcie  $v_2(t)$

$$v_2(t) = -RC \frac{dv_1(t)}{dt}$$

# Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie: 
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$  - wejście

$y(t)$  - wyjście

# Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:  $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna: dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

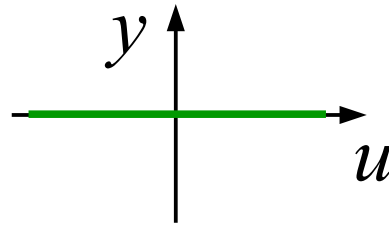


# Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:  $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$        $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y=0$       dla  $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

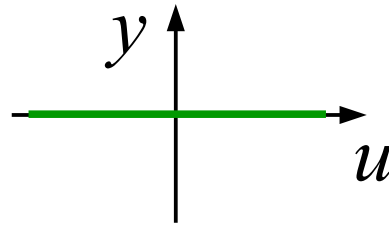


# Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:  $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y=0$  dla  $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



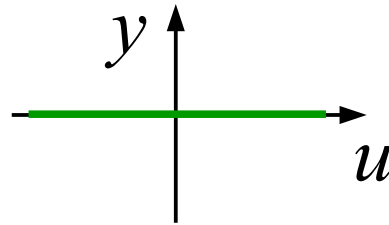
3. Transmitancja:

# Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:  $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$   $u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y=0$  dla  $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja:  $G(s) = \frac{k s}{T s + 1}$

---

# Element różniczkujący rzeczywisty

---

4. Odp. skokowa:

# Element różniczkujący rzeczywisty

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

# Element różniczkujący rzeczywisty

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{Ts + 1}$

# Element różniczkujący rzeczywisty

---

4. Odp. skokowa:

$$\text{Wejście: } u(t) = u_0 1(t)$$

$$\text{Transformata Laplacea wejścia: } U(s) = u_0 \frac{1}{s}$$

$$\text{Transformata Laplacea wyjścia: } Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{Ts + 1}$$

$$\text{Wyjście: } y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 e^{-t/T}$$

# Element różniczkujący rzeczywisty

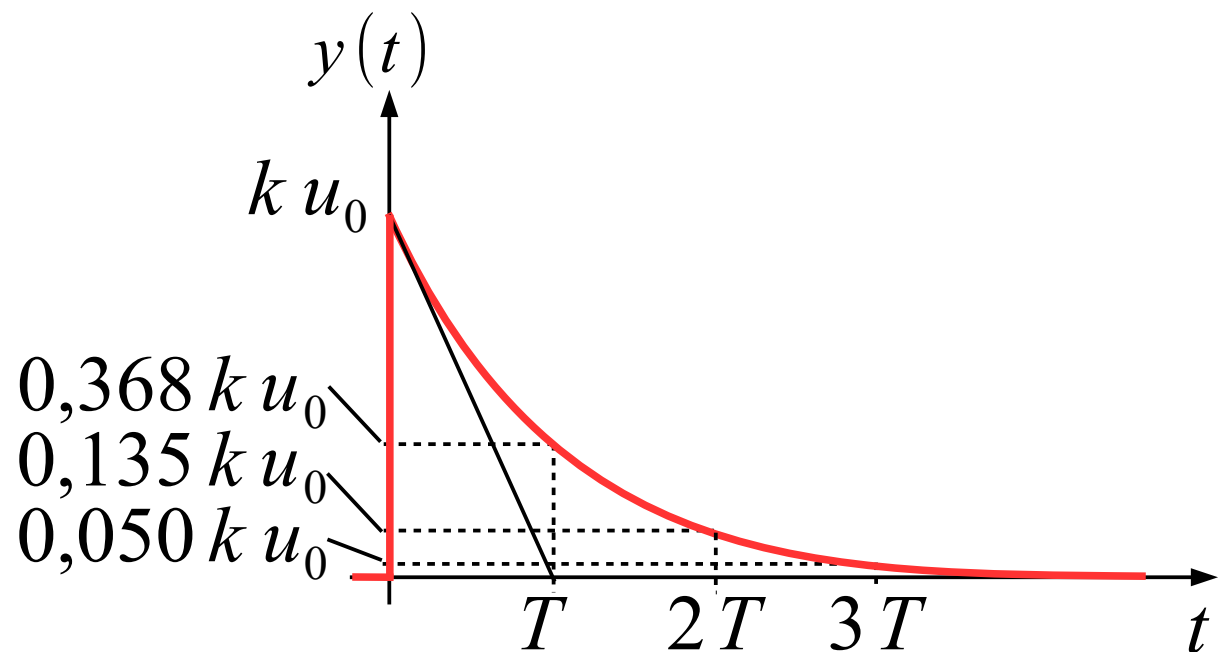
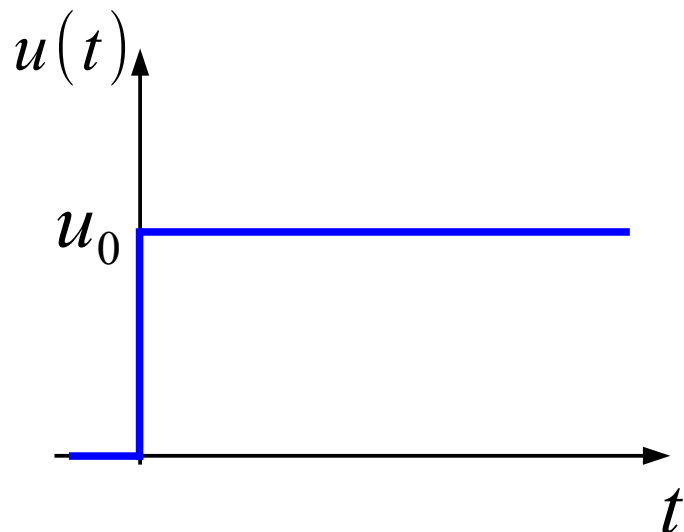
## 4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{Ts + 1}$

Wyjście:  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 e^{-t/T}$





# Element różniczkujący rzeczywisty

---

5. Transmitancja  
widmowa:

# Element różniczkujący rzeczywisty

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$$

# Element różniczkujący rzeczywisty

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k T \omega^2}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

# Element różniczkujący rzeczywisty

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k T \omega^2}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

---

6. Wykres Nyquista:

# Element różniczkujący rzeczywisty

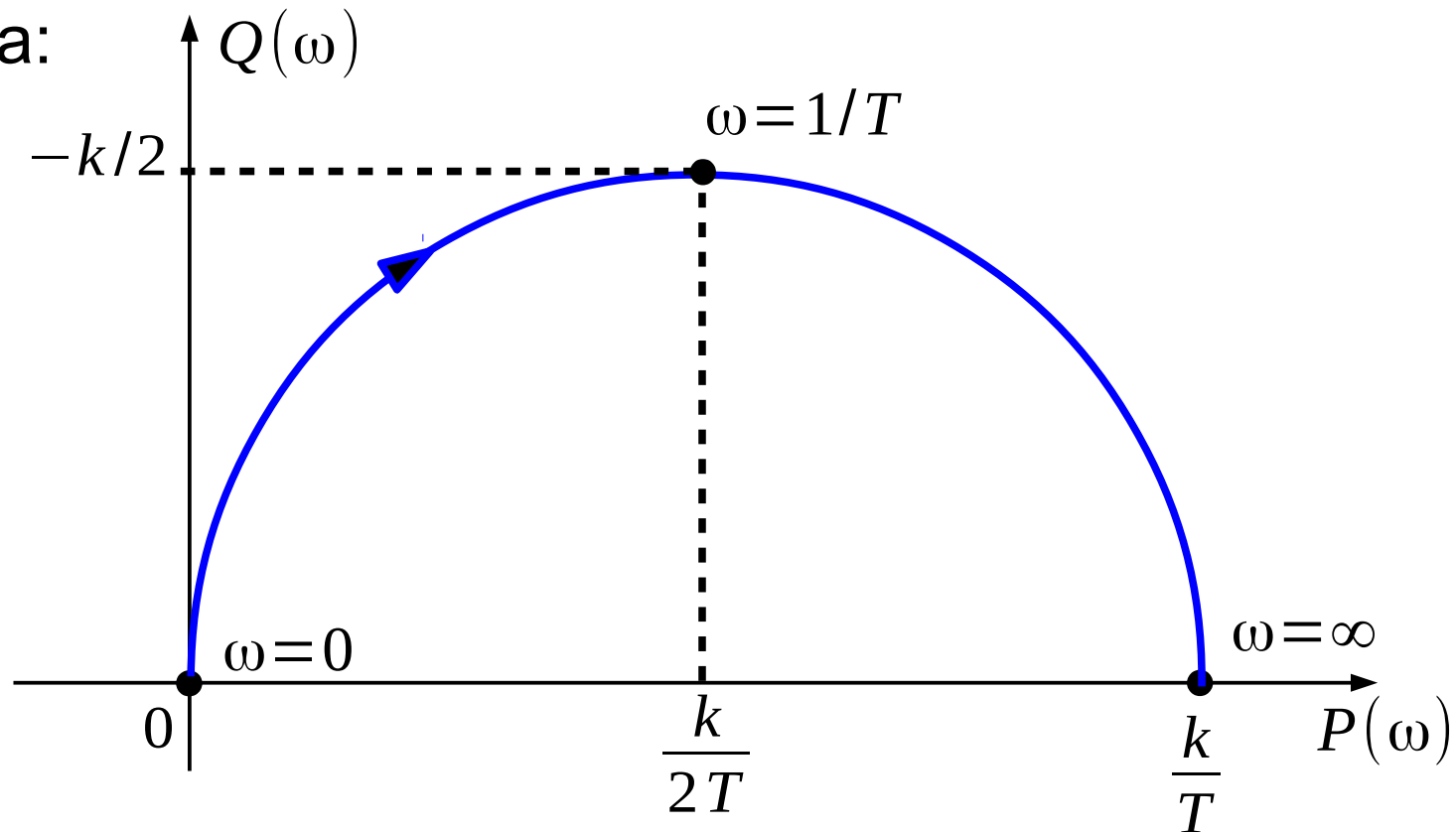
5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k T \omega^2}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:

dla  $k > 0$



# Element różniczkujący rzeczywisty

---

## 7. Wykres Bodego:

# Element różniczkujący rzeczywisty

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

# Element różniczkujący rzeczywisty

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$



# Element różniczkujący rzeczywisty

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

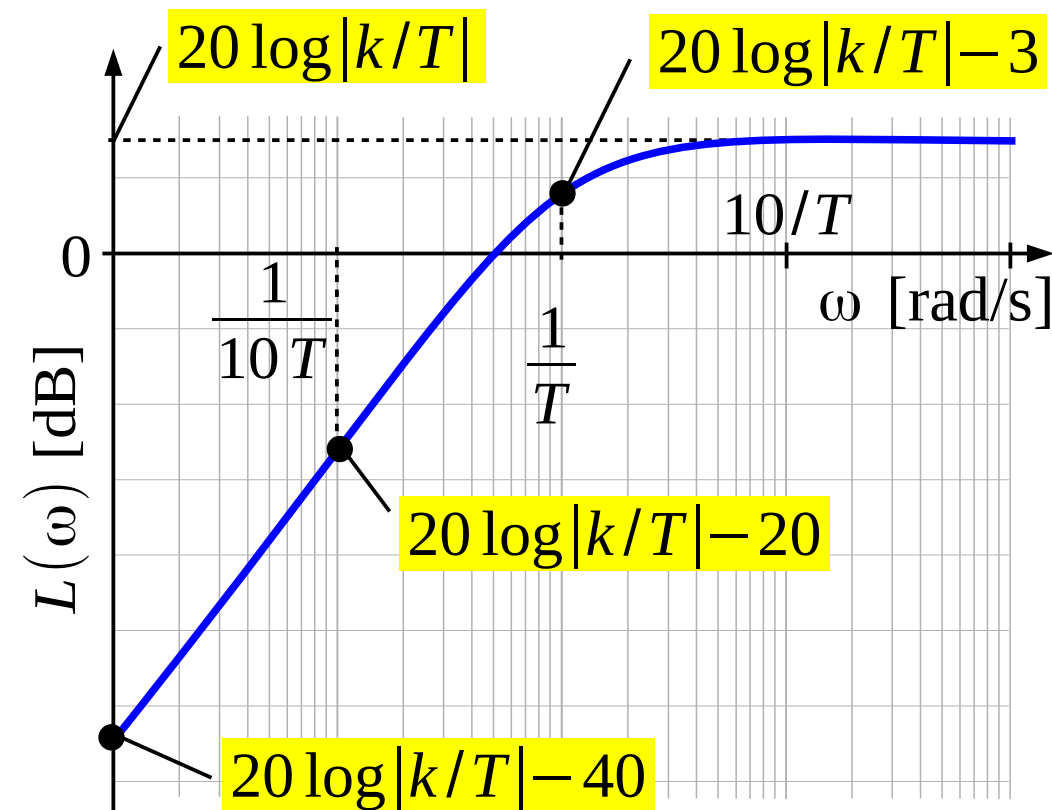
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left( \frac{1}{T \omega} \right)$$

# Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left( \frac{1}{T \omega} \right)$$

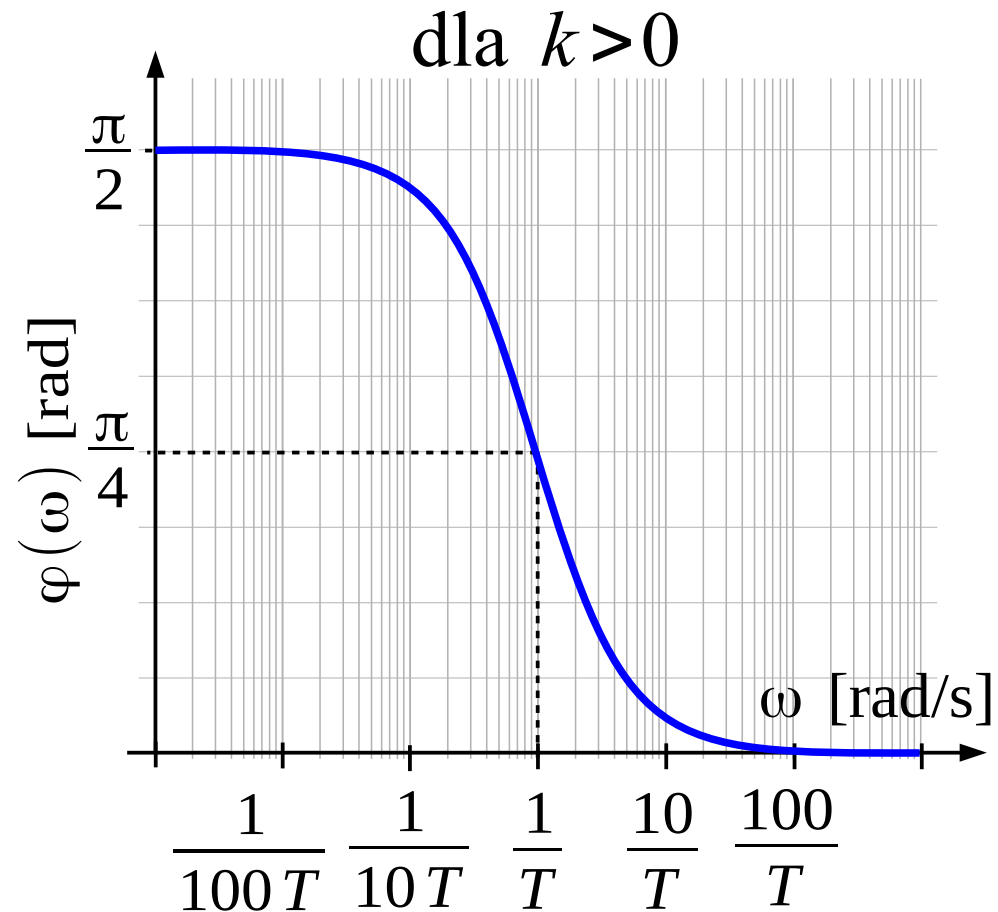
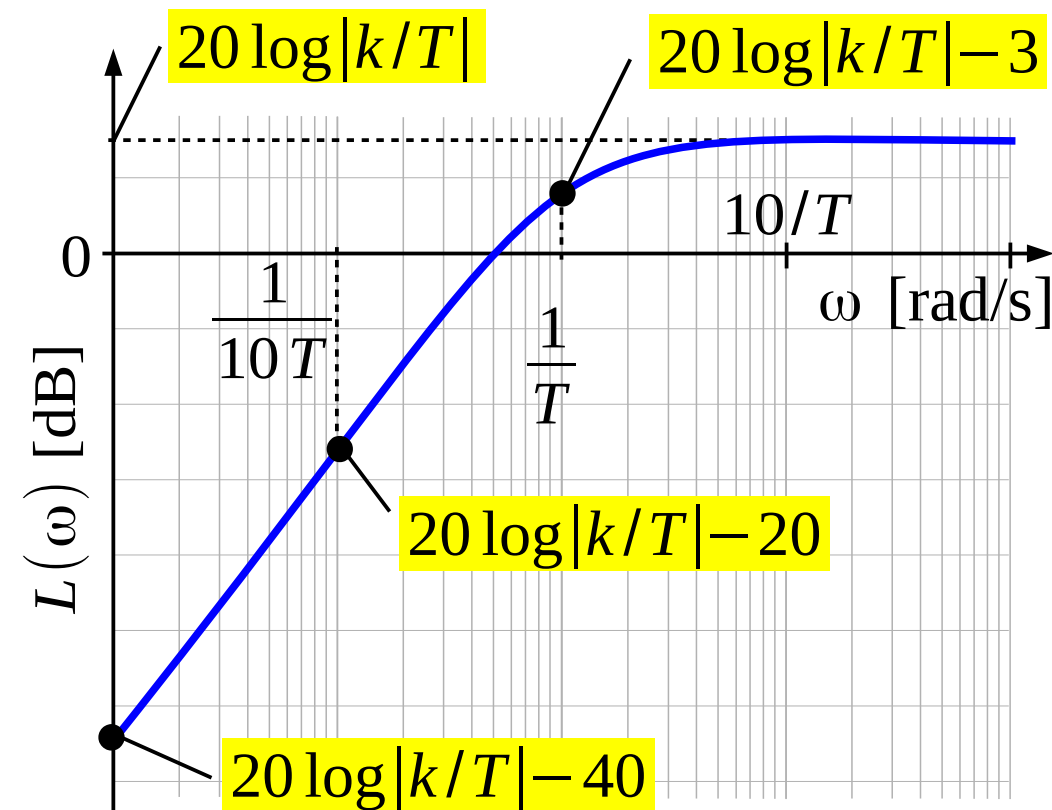


# Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

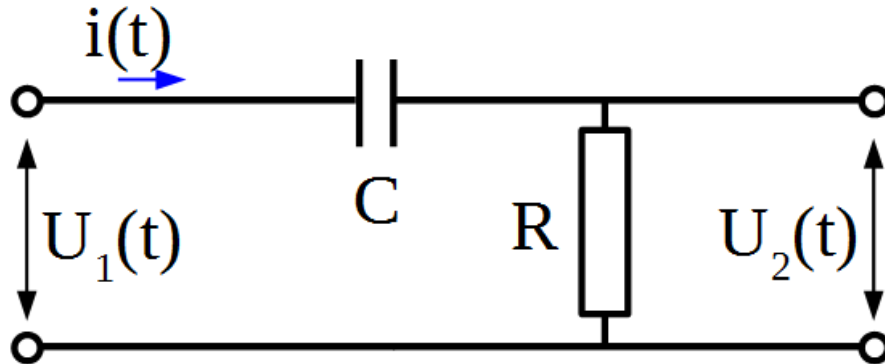
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left( \frac{1}{T \omega} \right)$$



# Element różniczkujący rzeczywisty

## Przykłady

1



OBWÓD RC:  
wejście – napięcie  $u_1(t)$   
wyjście – napięcie  $u_2(t)$

# Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$u(t)$  - wejście

$y(t)$  - wyjście

# Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$u(t)$  - wejście

$y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$\text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$

# Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$u(t)$  - wejście

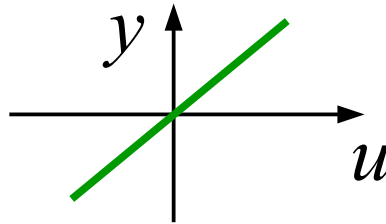
$y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$y = u$$

$$\text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



# Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

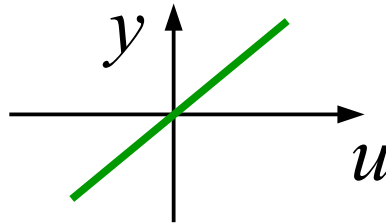
$u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$y = u$$

dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:



# Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

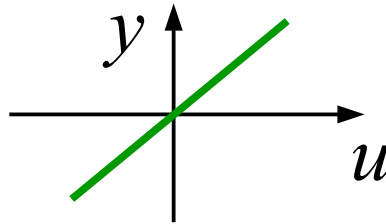
$u(t)$  - wejście  
 $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$y = u$$

dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

---

# Element opóźniający

---

4. Odp. skokowa:

# Element opóźniający

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

# Element opóźniający

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{u_0}{s} e^{-\tau s}$

# Element opóźniający

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 \mathbf{1}(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{u_0}{s} e^{-\tau s}$

Wyjście:  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = u_0 \mathbf{1}(t - \tau)$

# Element opóźniający

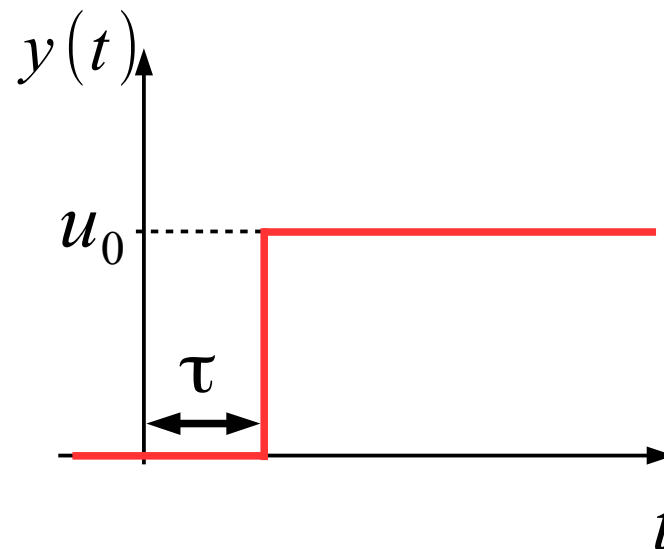
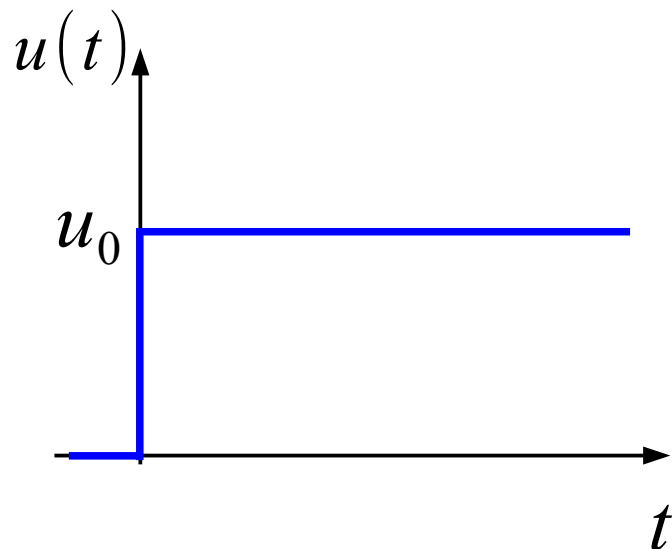
## 4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{u_0}{s} e^{-\tau s}$

Wyjście:  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = u_0 1(t - \tau)$



# Element opóźniający

---

## 5. Transmitancja widmowa:

# Element opóźniający

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$



# Element opóźniający

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$

$$e^{-x} = \cos x - j \sin x$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

# Element opóźniający

---

5. Transmitancja  
widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$

$$e^{-x} = \cos x - j \sin x$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

---

6. Wykres Nyquista:

# Element opóźniający

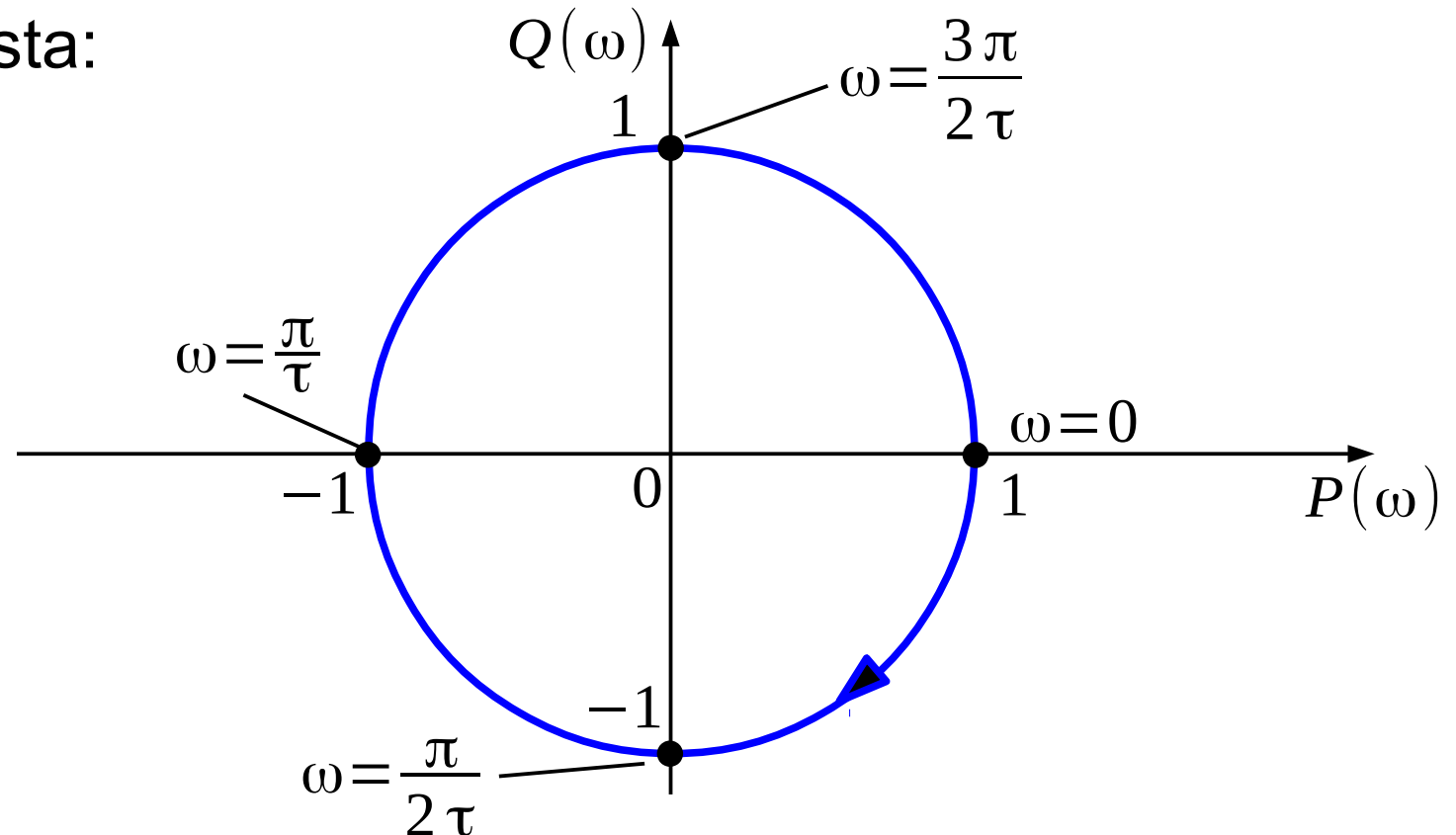
5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$

$$e^{-x} = \cos x - j \sin x$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:



# Element opóźniający

---

## 7. Wykres Bodego:

# Element opóźniający

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

# Element opóźniający

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

# Element opóźniający

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

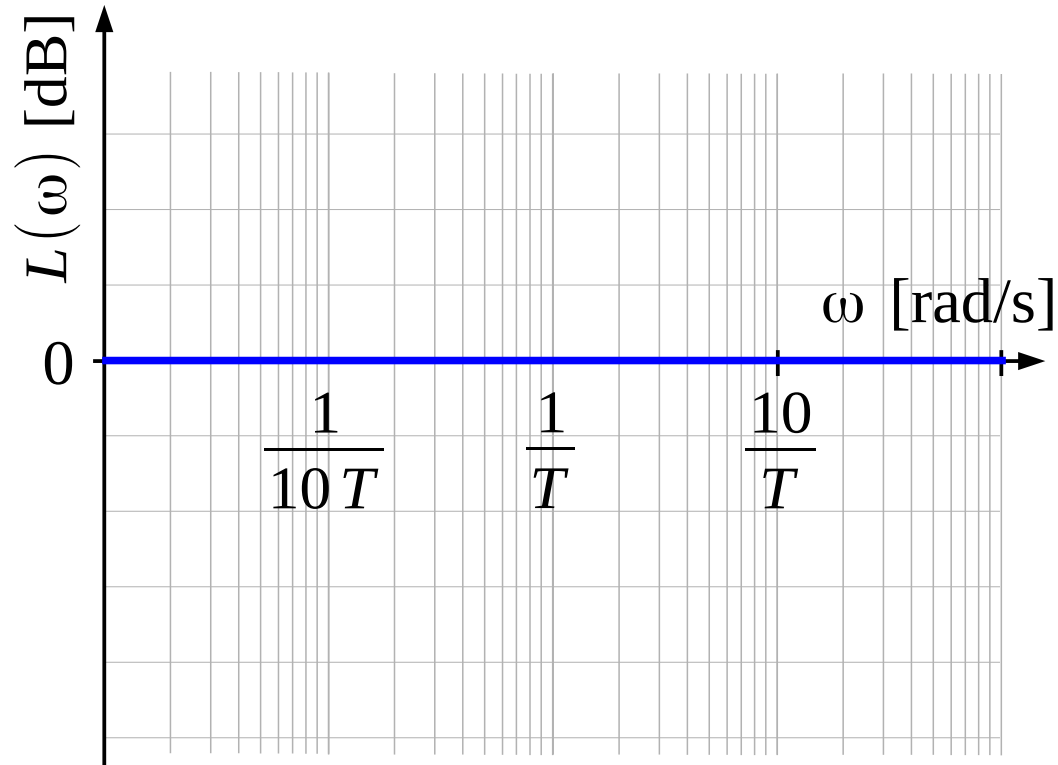
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\tan(\tau\omega)) = -\tau\omega$$

# Element opóźniający

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\tan(\tau \omega)) = -\tau \omega$$



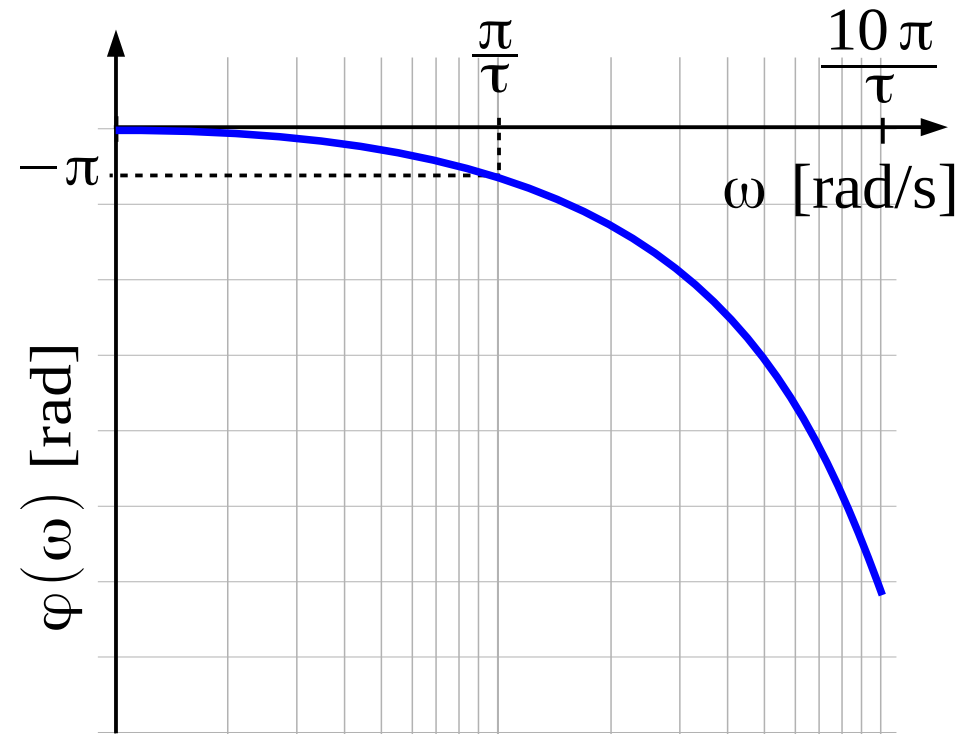
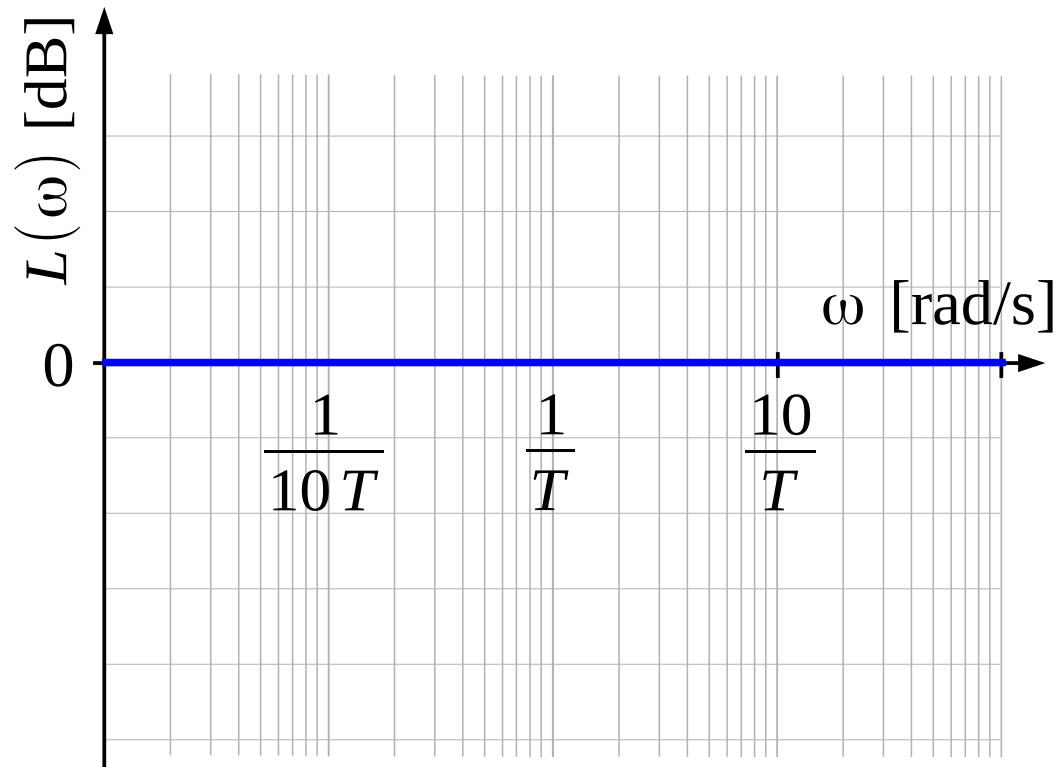


# Element opóźniający

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

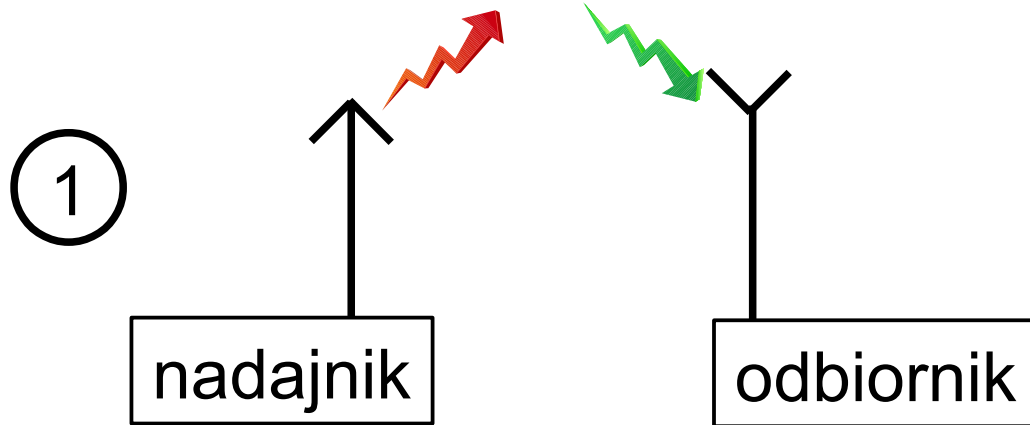
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\tan(\tau\omega)) = -\tau\omega$$



# Element opóźniający

## Przykłady



TRANSMISJA  
BEZPRZEWODOWA:  
wejście – dane wysłane  
wyjście – dane odebrane

# Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

# Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: 
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

---

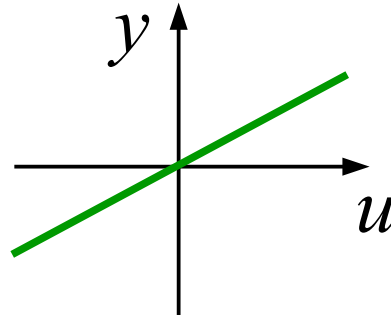
2. Charakterystyka statyczna: 
$$\text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$

# Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: 
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

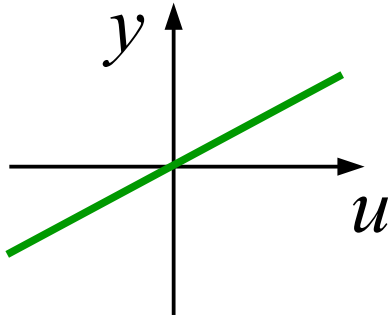


# Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: 
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



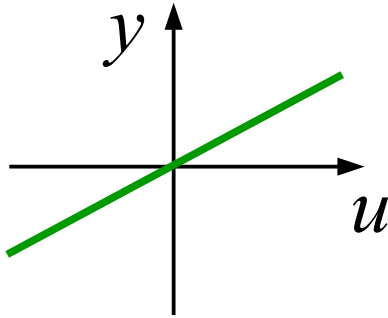
3. Transmitancja:

# Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: 
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: 
$$G(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$

---

# Element inercyjny drugiego rzędu

---

4. Odp. skokowa:



# Element inercyjny drugiego rzędu

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

# Element inercyjny drugiego rzędu

---

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}$

# Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście:  $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia:  $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia:  $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}$

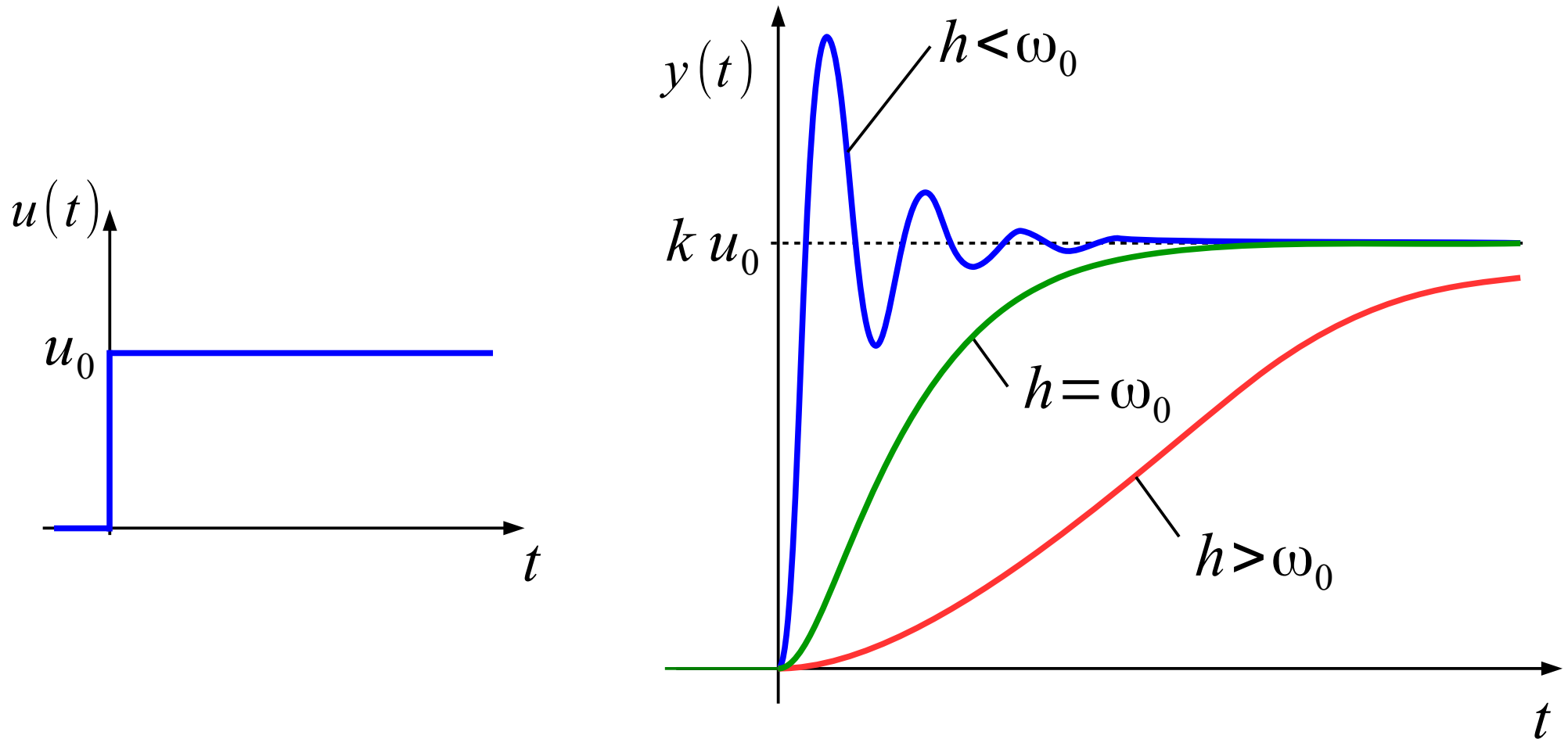
wyjście:  $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} =$

$$= \begin{cases} \frac{k u_0}{T_1^2} \left( 1 - e^{-ht} \left( \cos \omega t + \frac{h}{\omega} \sin \omega t \right) \right), & \text{dla } h \leq \omega_0 \\ \frac{k u_0}{T_1^2} \left( 1 + e^{-ht} \left( \left( \frac{h+w}{2w} - 1 \right) e^{-wt} - \frac{h+w}{2w} e^{wt} \right) \right), & \text{dla } h \geq \omega_0 \end{cases}$$

$$\text{gdzie: } h = \frac{T_2}{2T_1^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T_1}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad w = \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$$

# Element inercyjny drugiego rzędu

## 4. Odp. skokowa:



# Element inercyjny drugiego rzędu

---

## 5. Transmitancja widmowa:

# Element inercyjny drugiego rzędu

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2\omega^2 + T_2j\omega + 1}$

# Element inercyjny drugiego rzędu

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2\omega^2 + T_2 j\omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2\omega^2)}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT_2\omega}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}$$

# Element inercyjny drugiego rzędu

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2\omega^2 + T_2 j\omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2\omega^2)}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT_2\omega}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}$$

---

6. Wykres Nyquista:



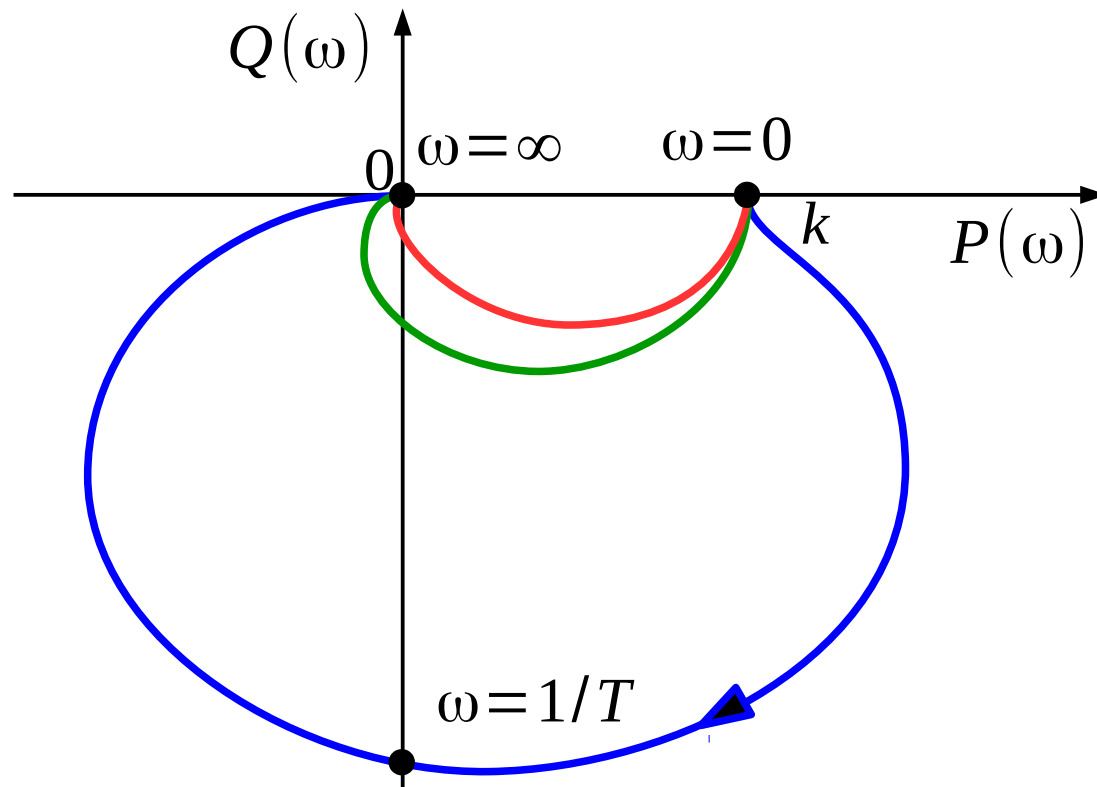
# Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2 \omega^2 + T_2 j\omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2)}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-k T_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}$$

6. Wykres Nyquista:

dla  $k > 0$



- dla  $h < \omega_0$
- dla  $h = \omega_0$
- dla  $h > \omega_0$

# Element inercyjny drugiego rzędu

---

## 7. Wykres Bodego:

# Element inercyjny drugiego rzędu

---

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P}$$

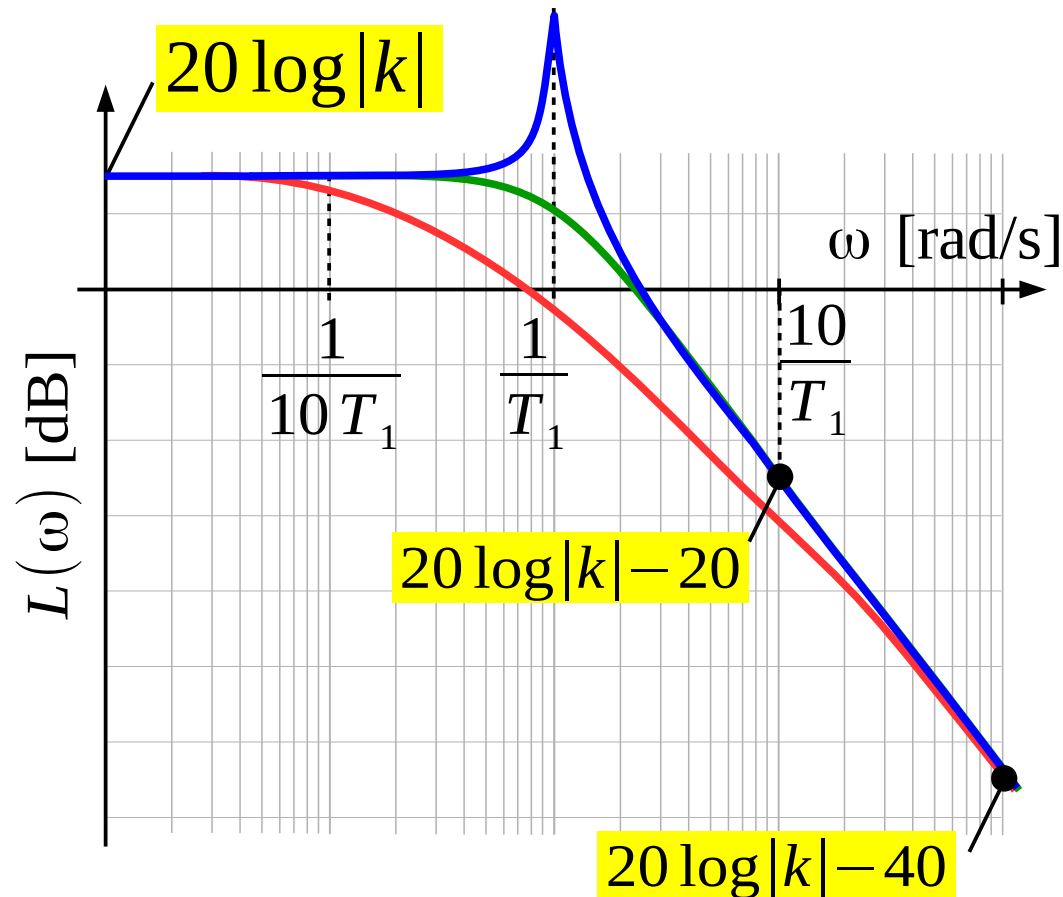
# Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P}$$

- dla  $h < \omega_0$
- dla  $h = \omega_0$
- dla  $h > \omega_0$



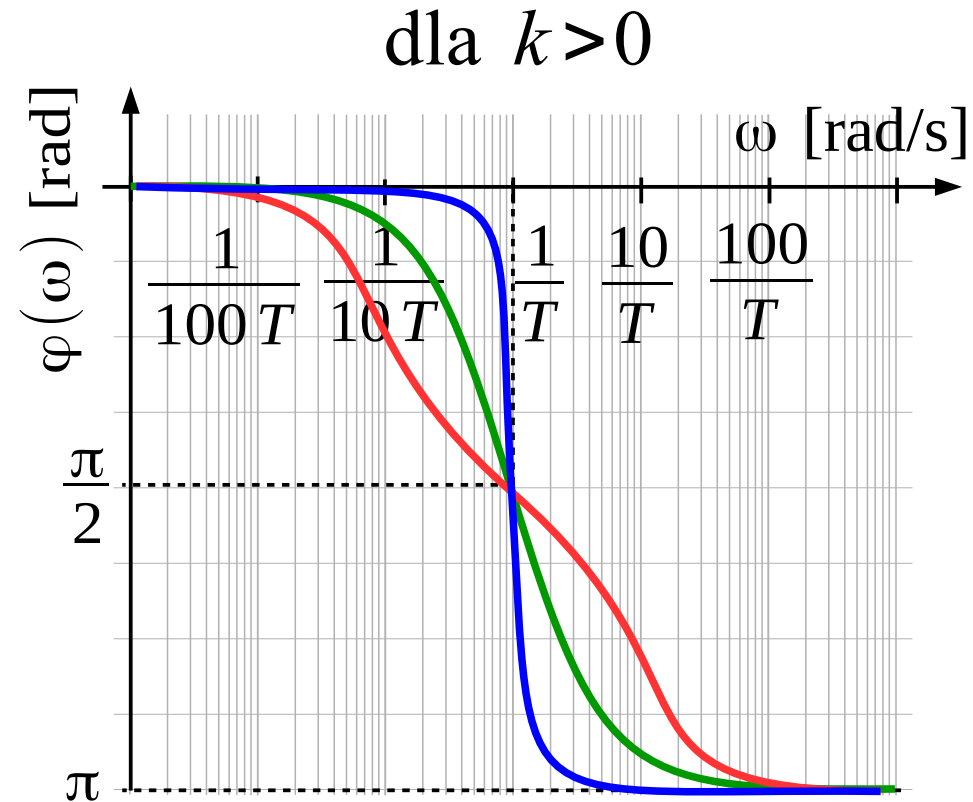
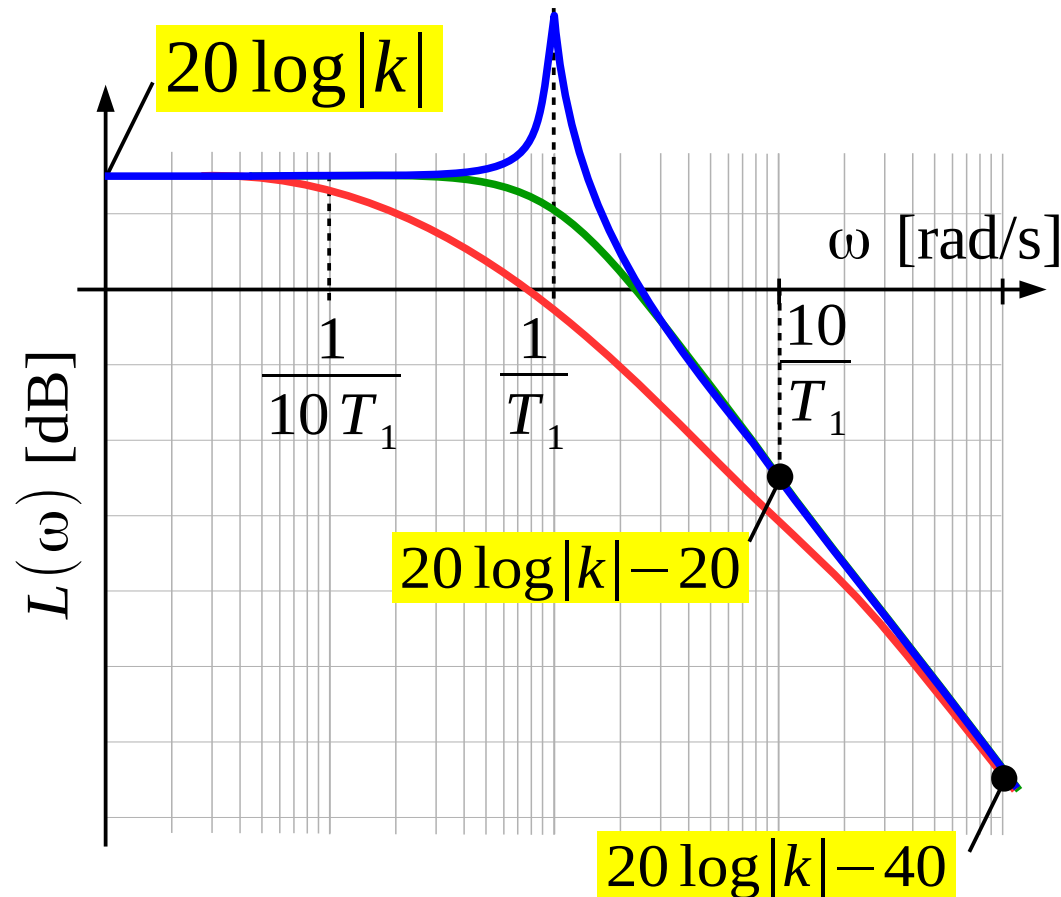
# Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P}$$

- dla  $h < \omega_0$
- dla  $h = \omega_0$
- dla  $h > \omega_0$



# Element inercyjny drugiego rzędu

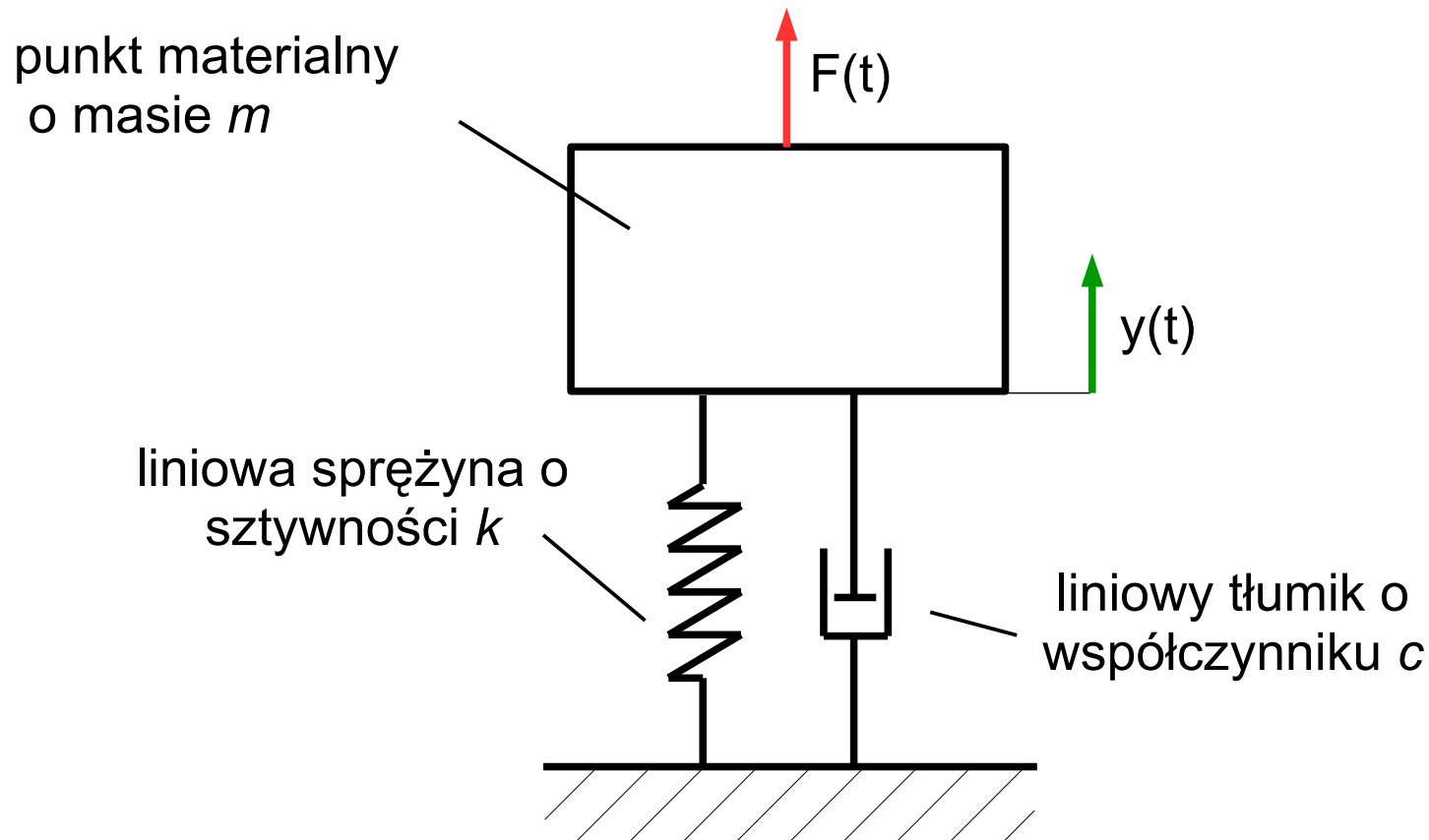
## Przykłady

1

UKŁAD DRGAJĄCY:

wejscie – siła  $F(t)$

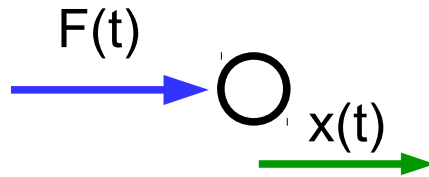
wyjście – przemieszczenie  $y(t)$



# Element inercyjny drugiego rzędu

## Przykłady

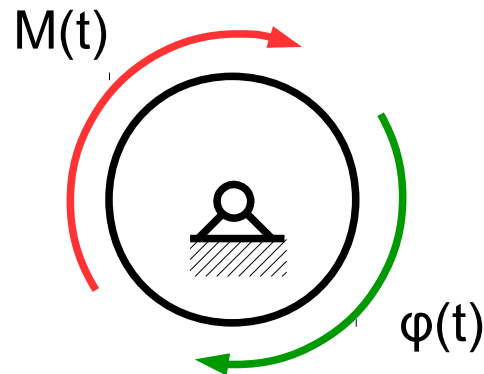
①



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU  
MATERIALNEGO Z LINIOWYM  
TŁUMIENIEM:  
wejście – siła  $F(t)$   
wyjście – przemieszczenie  $x(t)$

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

②

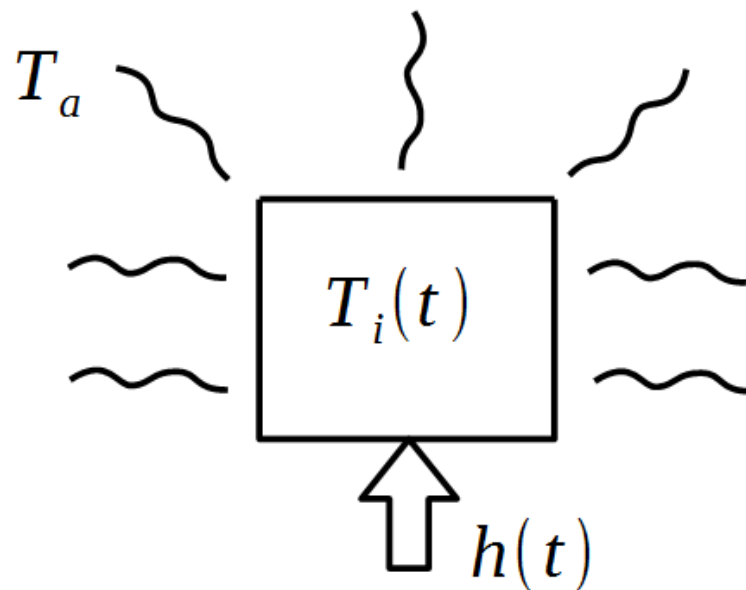


RUCH OBROTOWY BRYŁY  
SZTYWNEJ Z LINIOWYM  
TŁUMIENIEM:  
wejście – moment  $M(t)$   
wyjście – kąt obrotu  $\varphi(t)$

# Element inercyjny drugiego rzędu

## Przykłady

4



OGRZEWANY OBIEKT O DUŻEJ  
BEZWŁADNOŚCI:  
wejście – moc grzałki  $h(t)$   
wyjście – temperatura obiektu  $T_i(t)$



# Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

nazwa elementu	transmitancja
Proporcjonalny	$k$
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	$ks$
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$