Politechnika Warszawska
Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
Instytut Podstaw Budowy Maszyn
Zakład Mechaniki
http://www.ipbm.simr.pw.edu.pl/

Teoria maszyn i podstawy automatyki

semestr zimowy 2016/2017

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 8

Transformata Laplace'a.
Transmitancja.
Wyznaczanie odpowiedzi.

Licencja: tylko do edukacyjnego użytku studentów Politechniki Warszawskiej.

Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a

<u>Założenie</u>: $x(t)$ - sygnał taki, że dla $t<0 \quad x(t)=0$

Transformata Laplace'a

Założenie: $x(t)$ - sygnał taki, że dla $t<0 \quad x(t)=0$

Transformata Laplace'a funkcji x(t):

$$X(s)=L\{x(t)\}=\int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Transformata Laplace'a

Założenie: $x(t)$ - sygnał taki, że dla $t<0 \quad x(t)=0$

Transformata Laplace'a funkcji x(t):

$$X(s)=L\{x(t)\}=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

gdzie: $s \in \mathbb{C}, \quad s=\sigma+j\omega, \quad j=\sqrt{-1}$

Transformata Laplace'a

<u>Założenie</u>: $x(t)$ - sygnał taki, że dla $t<0 \quad x(t)=0$

<u>Transformata Laplace'a funkcji x(t)</u>:

$$X(s)=L\{x(t)\}=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

gdzie: $s\in\mathbb{C}, \quad s=\sigma+j\omega, \quad j=\sqrt{-1}$

Warunkiem koniecznym istnienia całki jest lokalna całkowalność x(t) dla t <0, ∞).

Transformata Laplace'a

Założenie: $x(t)$ - sygnał taki, że dla $t<0 \quad x(t)=0$

Transformata Laplace'a funkcji x(t):

$$X(s)=L\{x(t)\}=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

gdzie: $s \in \mathbb{C}, \quad s=\sigma+j\omega, \quad j=\sqrt{-1}$

Warunkiem koniecznym istnienia całki jest lokalna całkowalność x(t) dla t <0, ∞).

Odwrotna transformata Laplace'a x(t):

$$x(t)=L^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-j\omega}^{\gamma+j\omega} X(s)e^{st}ds$$

Transformata Laplace'a

Przykład 1

Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji x(t) korzystając z definicji.

$$x(t)=e^{-2t}$$

Transformata Laplace'a

<u>Przykład 1</u>

Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji x(t) korzystając z definicji.

$$x(t)=e^{-2t}$$

$$X(s)=L\{e^{-2t}\}=\int_0^\infty e^{-2t}e^{-st}=\int_0^\infty e^{-(2+s)t}=\left[\frac{e^{-(2+s)t}}{-(2+s)}\right]_0^\infty=$$

$$=\frac{e^{-(2+s)\infty}}{-(2+s)}-\frac{e^{-(2+s)0}}{-(2+s)}=\frac{1}{s+2}\ \text{dla Re(s)>-2}$$

Transformata Laplace'a

$f(t),\ t \geqslant 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ unit impulse	1
$1(t)$ unit step	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega}$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(s)$
$x(t)+y(t)$	$X(s)+Y(s)$
$x(t)*y(t)$ convolution	$X(s) \cdot Y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s)-y(0)$
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$	$s^2Y(s)-s\,y(0)-\frac{dy(0)}{dt}$
$\frac{d^n y(t)}{dt^n}$	$s^nY(s)-\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}-s\frac{d^{n-2}y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1}y(0)$

tabela na stronie www

$f(t),\ t\geqslant 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ impuls jednostkowy	1
$1(t)$ skok jednostkowy	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega}$

$f(t),\ t \geqslant 0$	$F(s)$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(s)$
$x(t)+y(t)$	$X(s)+Y(s)$
$x(t)*y(t)$ splot	$X(s)\cdot Y(s)$
$\dfrac{dy(t)}{dt}$	$sY(s)-y(0)$
$\dfrac{d^2 y(t)}{dt^2}$	$s^2 Y(s)-s\,y(0)-\dfrac{dy(0)}{dt}$
$\dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$	$s^n Y(s)-\dfrac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}}-s\dfrac{d^{n-2} y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1} y(0)$
$\int\limits_{t=0}^{\infty} f(t)\,dt$	$\dfrac{F(s)}{s}$
$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f(t)\,dt$	$\dfrac{F(s)}{s^n}$
$f(t-\tau)$	$e^{-\tau s} F(s)$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t)\ ,\ \frac{dy(0)}{dt} = 2,\ y(0) = 3,\ t \geqslant 0$$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t)\ ,\ \frac{dy(0)}{dt} = 2,\ y(0) = 3,\ t \geqslant 0$$

po transformacie Laplace'a

$$Y(s) = \frac{1 - 7s + 3s^2}{s(s-1)(s-2)}$$

po rozkładzie na ułamki proste

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}$$

po odwrotnej transformacie Laplace'a

$$y(t) = \frac{1}{2}1(t) + 3e^t - \frac{1}{2}e^{2t}$$

Transmitancja

Dany jest liniowy niezależny od czasu układ typu SISO o ciągłym sygnale wejściowym *x(t)* i wyjściowym *y(t)*

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{dx(t)}{dt}+b_m x(t)$$

Transmitancja

Dany jest liniowy niezależny od czasu układ typu SISO o ciągłym sygnale wejściowym *x(t)* i wyjściowym *y(t)*

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{dx(t)}{dt}+b_m x(t)$$

po transformacie Laplace'a z zerowymi warunkami początkowymi

$$s^n Y(s)+a_1 s^{n-1} Y(s)+\ldots+a_{n-1} s\, Y(s)+a_n Y(s)=s^m X(s)+b_1 s^{m-1} X(s)+\ldots+b_{m-1} s\, X(s)+b_m X(s)$$

Transmitancja

Dany jest liniowy niezależny od czasu układ typu SISO o ciągłym sygnale wejściowym *x(t)* i wyjściowym *y(t)*

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{dx(t)}{dt}+b_m x(t)$$

po transformacie Laplace'a z zerowymi warunkami początkowymi

$$s^n Y(s)+a_1 s^{n-1} Y(s)+\ldots+a_{n-1} s Y(s)+a_n Y(s)=s^m X(s)+b_1 s^{m-1} X(s)+\ldots+b_{m-1} s X(s)+b_m X(s)$$

$$\left(s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1} s+a_n\right)Y(s)=\left(s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1} s+b_m\right)X(s)$$

Transmitancja

Dany jest liniowy niezależny od czasu układ typu SISO o ciągłym sygnale wejściowym *x(t)* i wyjściowym *y(t)*

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{dx(t)}{dt}+b_m x(t)$$

po transformacie Laplace'a z zerowymi warunkami początkowymi

$$s^n Y(s)+a_1 s^{n-1}Y(s)+\ldots+a_{n-1}sY(s)+a_nY(s)=s^mX(s)+b_1s^{m-1}X(s)+\ldots+b_{m-1}sX(s)+b_mX(s)$$

$$(s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n)Y(s)=(s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m)X(s)$$

Transmitancja: $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^m+b_1s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}$

Transmitancja

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}$$

Transmitancja

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

Transmitancja

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

$z_{1,}\ z_2,\ \ldots,\ z_m$ - zera transmitancji

$p_{1,}\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ - bieguny transmitancji

Transmitancja

Prezentacja graficzna

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

Transmitancja

Prezentacja graficzna

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

dla każdego $s \in \mathbb{C}$ liczymy $G(s) \in \mathbb{C}$

Transmitancja

Prezentacja graficzna

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

dla każdego $s \in \mathbb{C}$ liczymy $G(s) \in \mathbb{C}$

$$s = \sigma + j\omega \qquad\qquad G(s) = |G(s)| e^{j \arg G(s)}$$

Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}=\frac{s-2}{(s-1)(s+j+1)(s-j+1)}$$

Transmitancja

Przykład

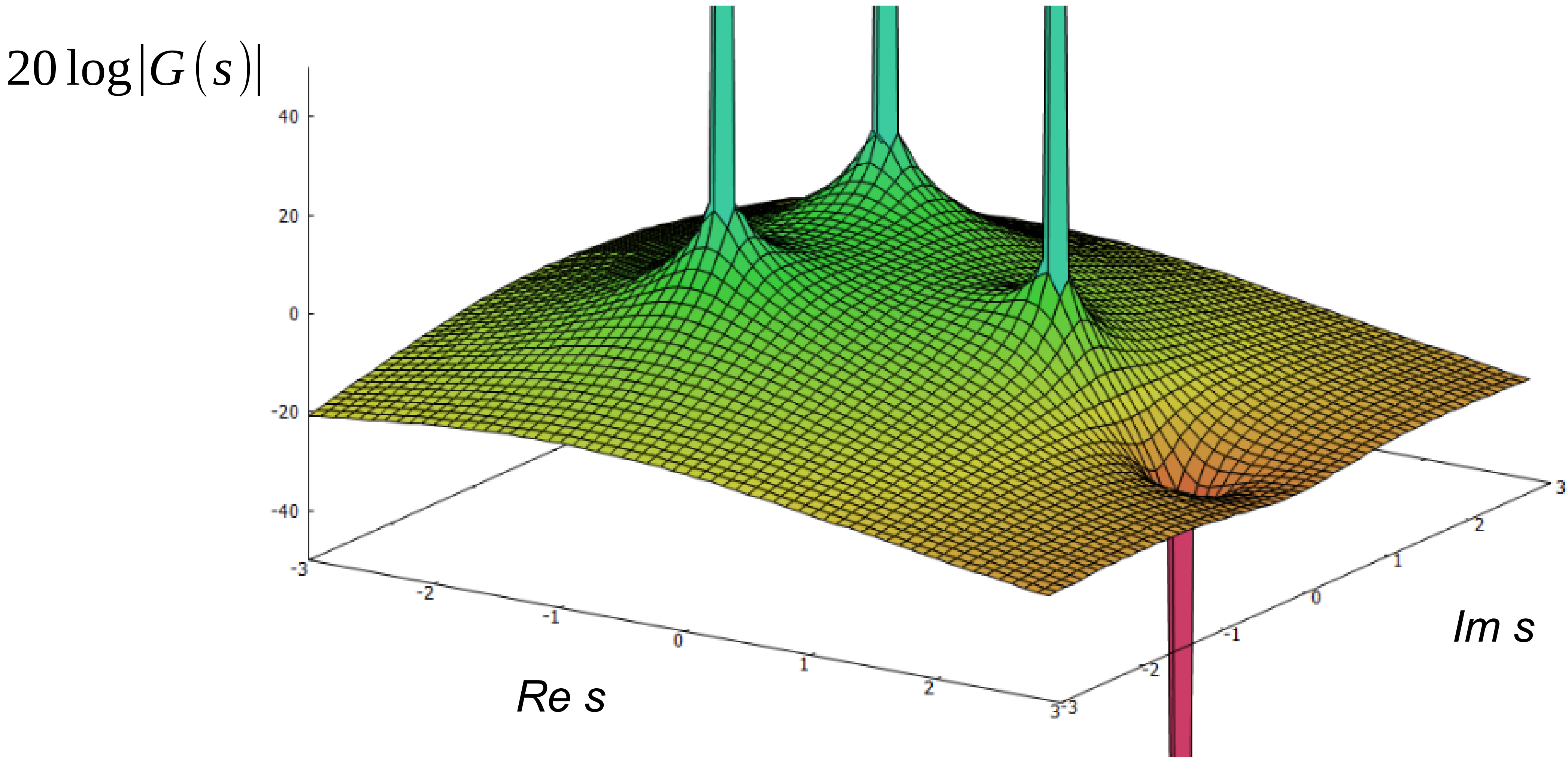
$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}=\frac{s-2}{(s-1)(s+j+1)(s-j+1)}$$

Bieguny: $p_1=1,\ \ p_2=-1-j,\ \ p_3=-1+j$ zera: $z_1=2$

Transmitancja

Przykład

Bieguny: $p_1 = 1, \; p_2 = -1 - j, \; p_3 = -1 + j$ zera: $z_1 = 2$



Wejście i wyjście

Transmitancja: $$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Wejście i wyjście

Transmitancja: $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)X(s)$

Wejście i wyjście

Transmitancja: $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)X(s)$

Wyjście w dziedzinie czasu: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$

Wejście i wyjście

Transmitancja: $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)X(s)$

Wyjście w dziedzinie czasu: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$

$$y(t)=L^{-1}\{G(s)X(s)\}=L^{-1}\{G(s)\}*L^{-1}\{X(s)\}=g(t)*x(t)$$

Wejście i wyjście

Transmitancja: $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)X(s)$

Wyjście w dziedzinie czasu: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$

$$y(t)=L^{-1}\{G(s)X(s)\}=L^{-1}\{G(s)\}*L^{-1}\{X(s)\}=g(t)*x(t)$$

Splot: $g(t)*x(t)=\int_0^\infty g(\tau)x(t-\tau)d\tau$

Wejście i wyjście

Transmitancja: $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)X(s)$

Wyjście w dziedzinie czasu: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$

$$y(t)=L^{-1}\{G(s)X(s)\}=L^{-1}\{G(s)\}*L^{-1}\{X(s)\}=g(t)*x(t)$$

Splot: $g(t)*x(t)=\int_{0}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)d\tau$

$g(t)$ - odpowiedź impulsowa układu ($y(t)$ dla $x(t)=\delta(t)$)

Wejście i wyjście

$$g(t)$$

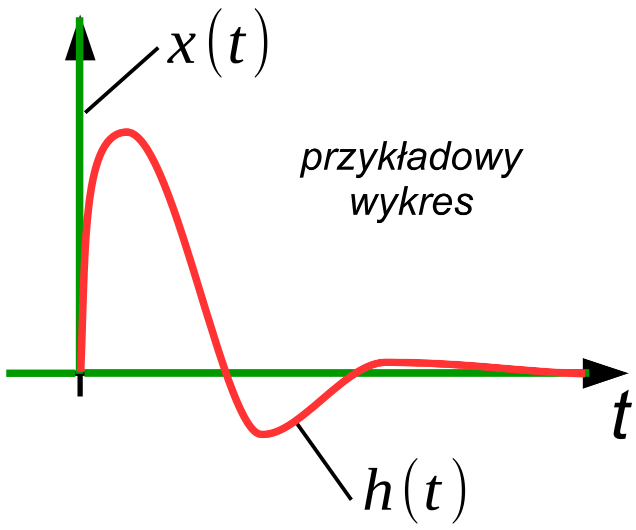
odpowiedź impulsowa

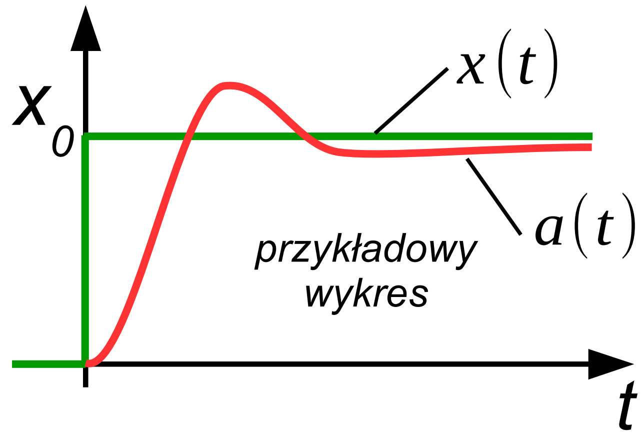
$y(t)$ dla $x(t) = \delta(t)$

$$a(t)$$

odpowieź skokowa

$y(t)$ dla $x(t) = 1(t)$





$$\frac{d\,a(t)}{dt} = g(t)$$

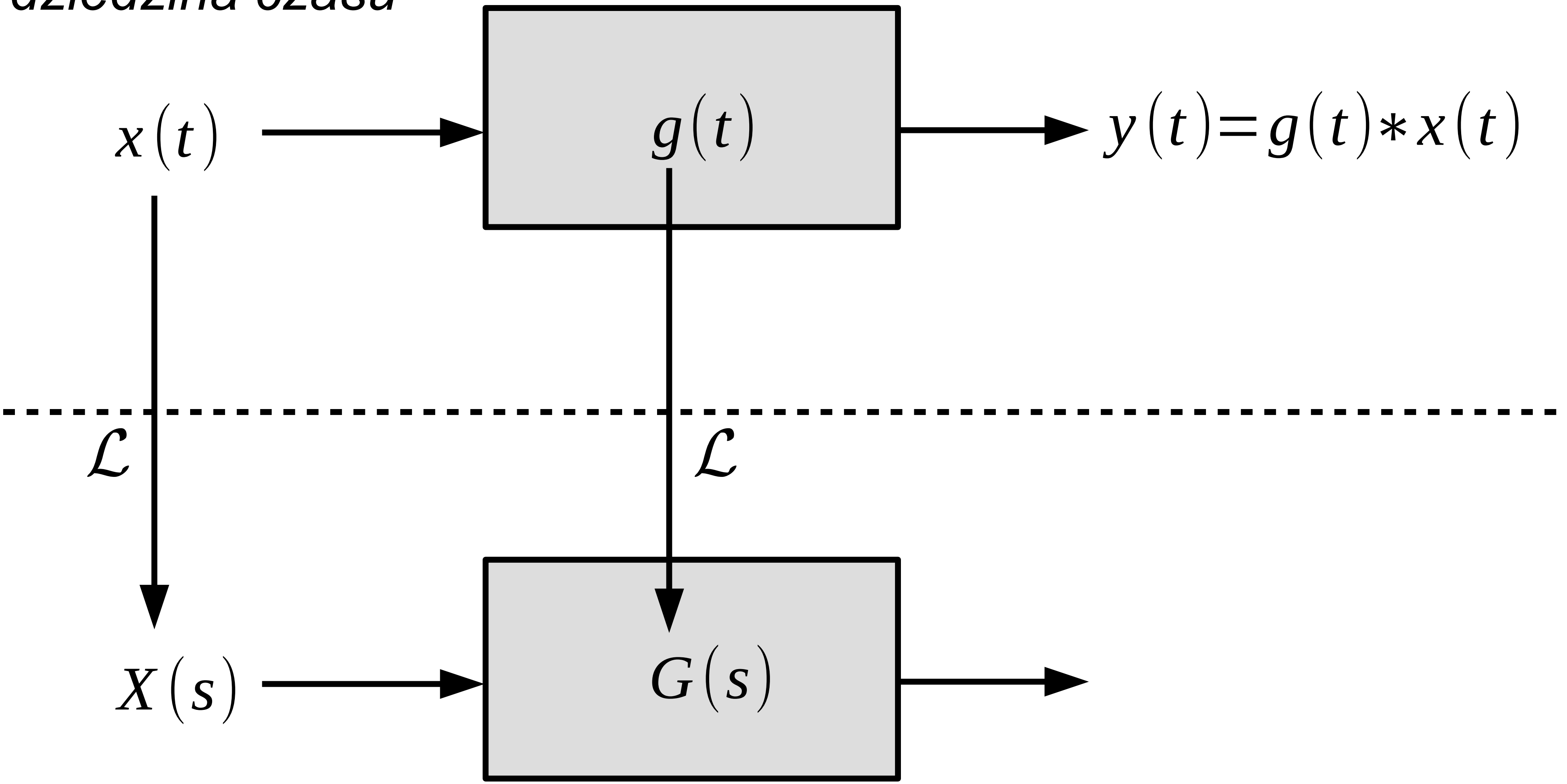
Wejście i wyjście

dziedzina czasu

$$x(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow y(t)=g(t)*x(t)$$

Wejście i wyjście

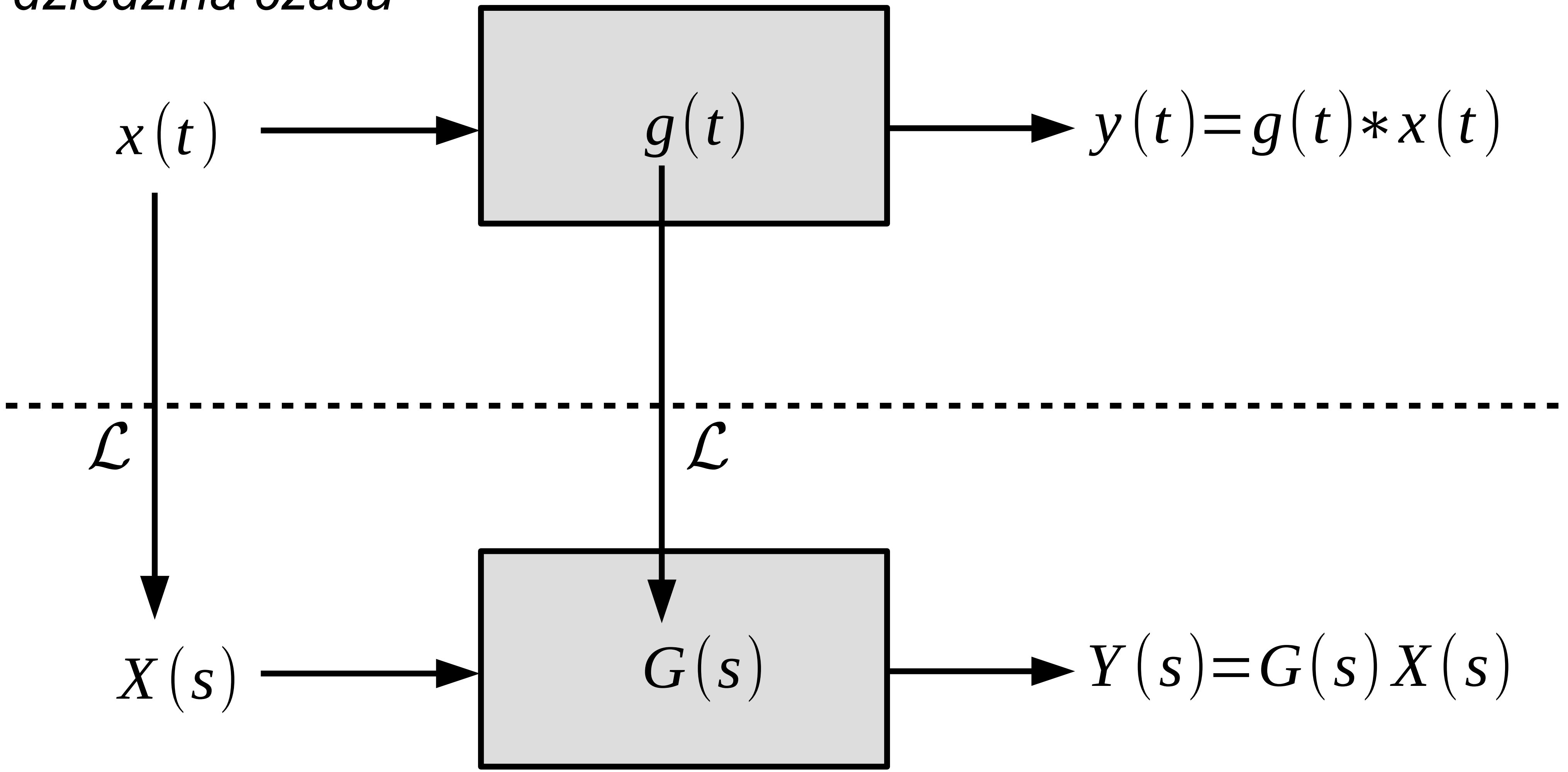
dziedzina czasu



dziedzina zespolona

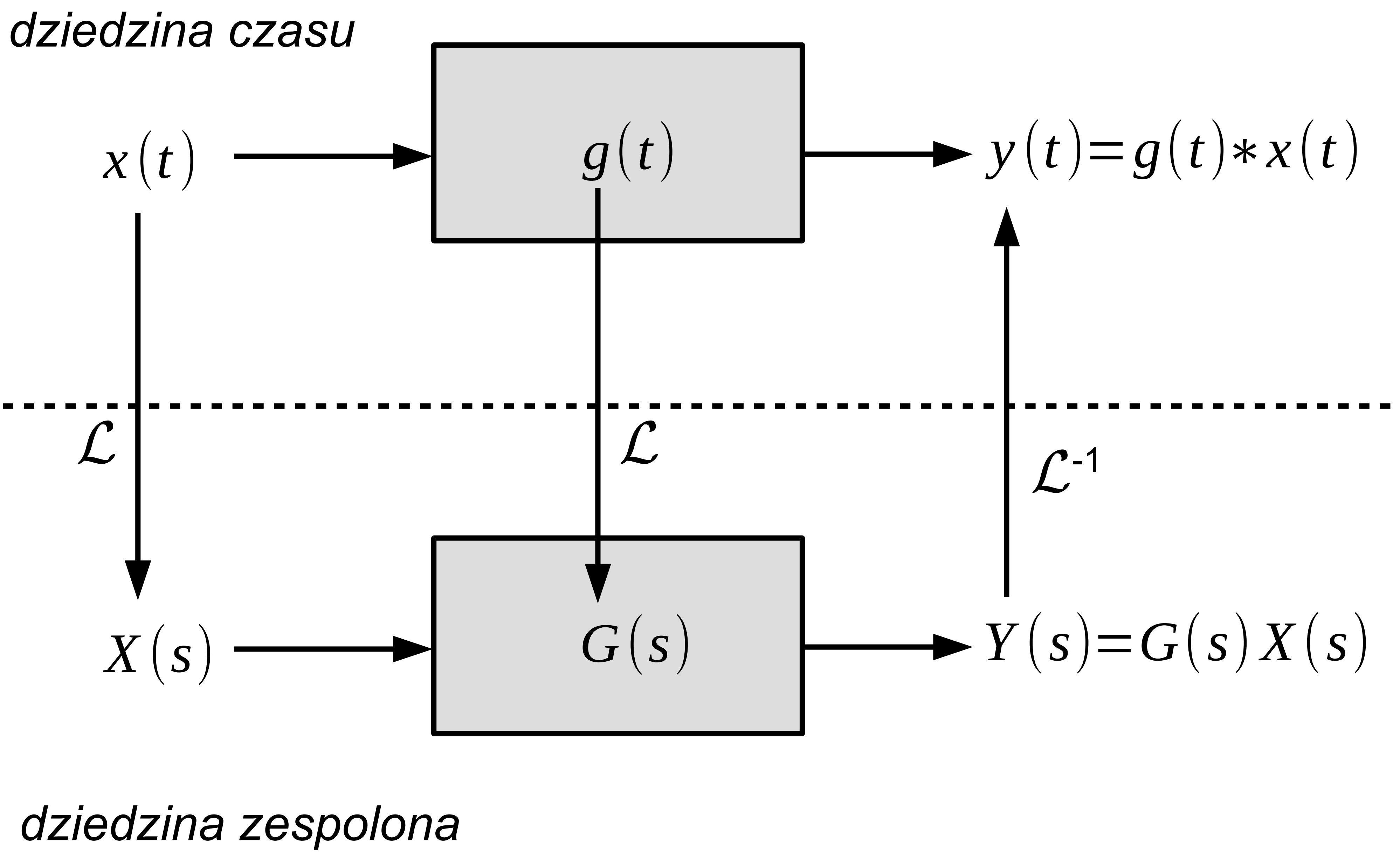
Wejście i wyjście

dziedzina czasu



dziedzina zespolona

Wejście i wyjście



Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Jendostkowe wymuszenie skokowe (funkcja Heaviside'a): $1(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geqslant 0 \end{cases}$

$H(t)$ lub $1_+(t)$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Jendostkowe wymuszenie skokowe (funkcja Heaviside'a): $1(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geqslant 0 \end{cases}$

$H(t)$ lub $1_{+}(t)$

Funkcja liniowo narastająca: $x(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & t\geqslant 0 \end{cases}$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Jendostkowe wymuszenie skokowe (funkcja Heaviside'a): $1(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geqslant 0 \end{cases}$

$H(t)$ lub $1_{+}(t)$

Funkcja liniowo narastająca: $x(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & t\geqslant 0 \end{cases}$

Funkcja harmoniczna: $x(t)=a\sin(\omega t)$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe

wejście: $x(t)=a\cdot 1(t)$ Transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t)=?$

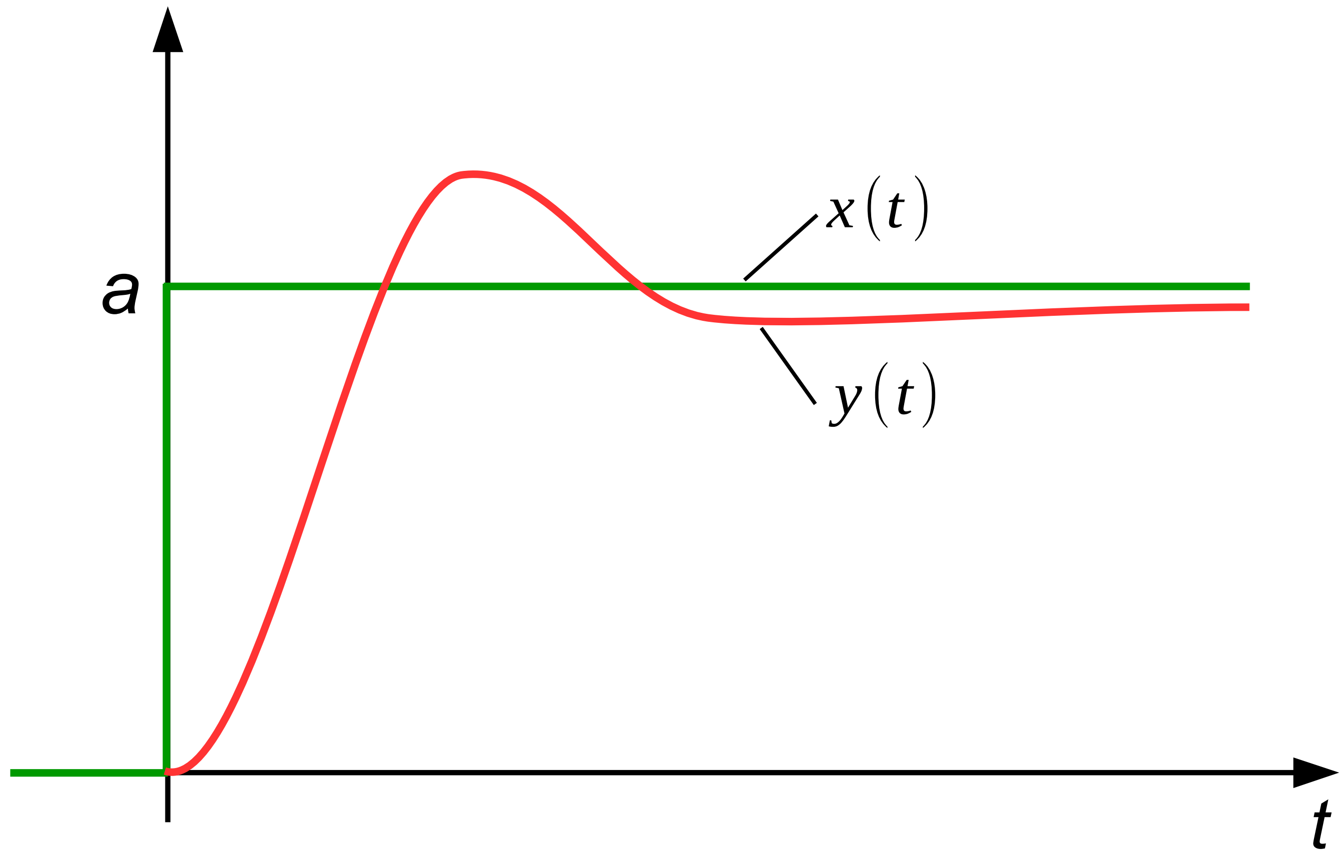
Odpowiedź na wymuszenie skokowe

wejście: $x(t)=a\cdot 1(t)$ Transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t)=?$

$$X(s)=L\{x(t)\}=a\cdot\frac{1}{s}$$

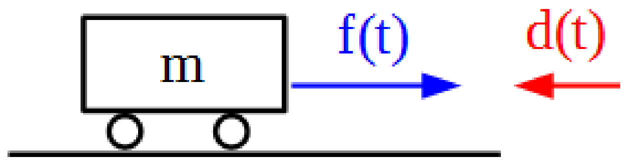
$$Y(s)=X(s)\cdot G(s)$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$$



Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

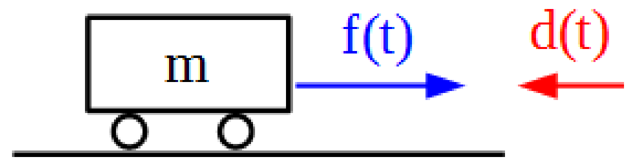
pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



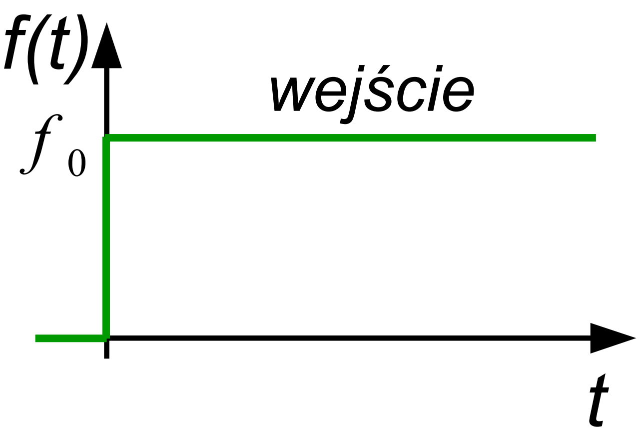
$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-d(t)$$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



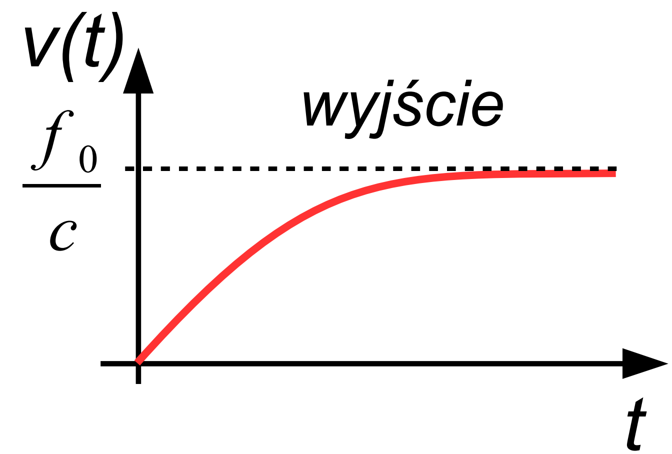
$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-d(t)$$



$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-c\,v(t)$$

$$m\,s\,V(s)=F(s)-c\,V(s)$$

$$H(s)=\frac{V(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms+c}$$



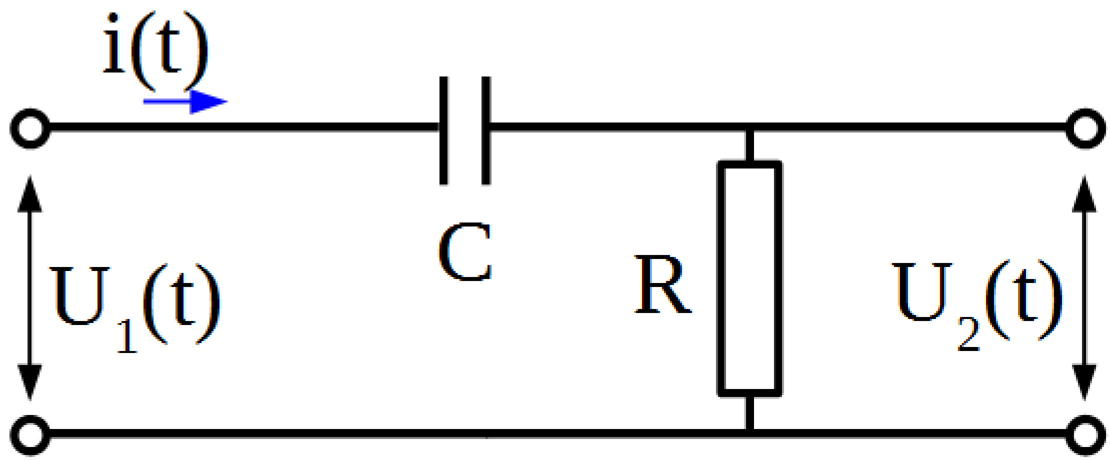
$$f(t)=f_0 1(t)$$

$$F(s)=f_0\frac{1}{s}$$

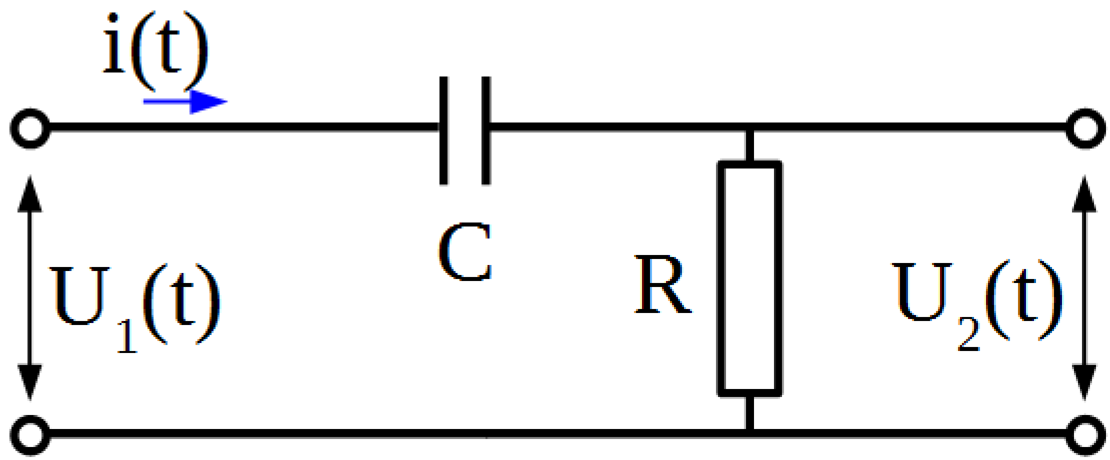
$$V(s)=H(s)F(s)=\frac{1}{ms+c}f_0\frac{1}{s}=\frac{f_0}{s(ms+c)}$$

$$v(t)=L^{-1}\left\{\frac{f_0}{s(ms+c)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{f_0}{c}\frac{c/m}{s(s+c/m)}\right\}=\frac{f_0}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

Odpowiedź skokowa - przykład 2



Odpowiedź skokowa - przykład 2

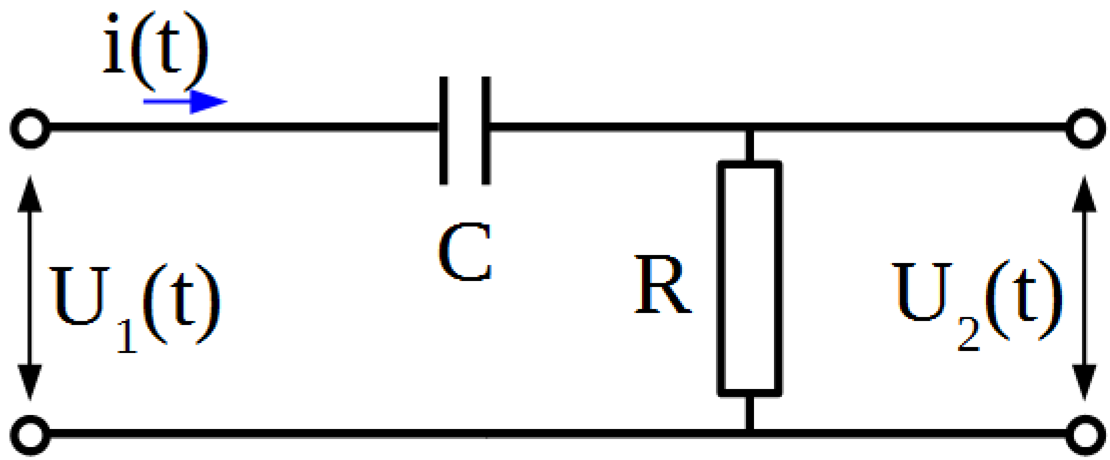


$$u_1(t)=u_C(t)+u_R(t)$$

$$u_C(t)=\frac{q(t)}{C}\ ,\ u_R(t)=i(t)R\ ,\ i=\frac{dq}{dt}\qquad u_2(t)=u_R(t)$$

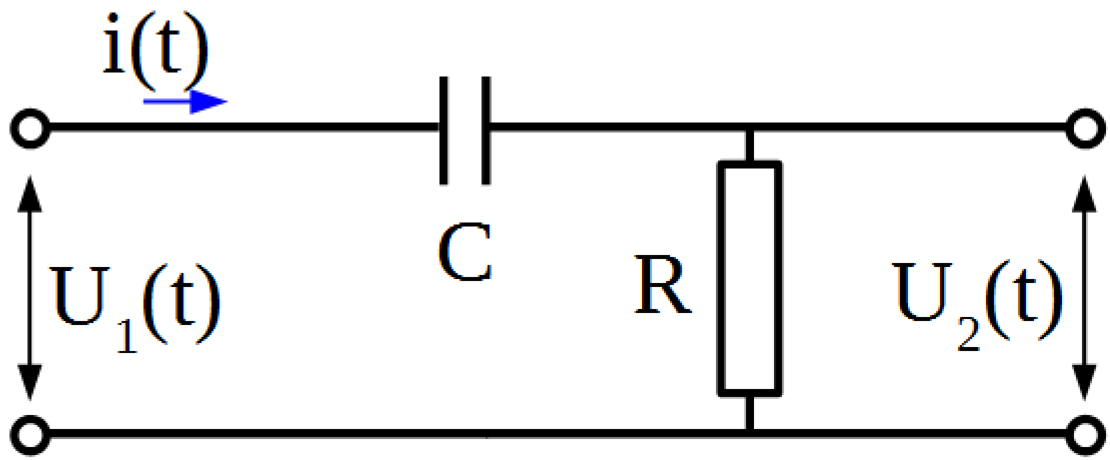
$$u_C(t)=\frac{q(t)}{C}=\frac{1}{C}\int i\,dt=\frac{1}{C}\int\frac{u_R}{R}dt=\frac{1}{CR}\int u_2\,dt$$

Odpowiedź skokowa - przykład 2



$$\frac{1}{CR}\int u_2(t)\,dt + u_2(t) = u_1(t)$$

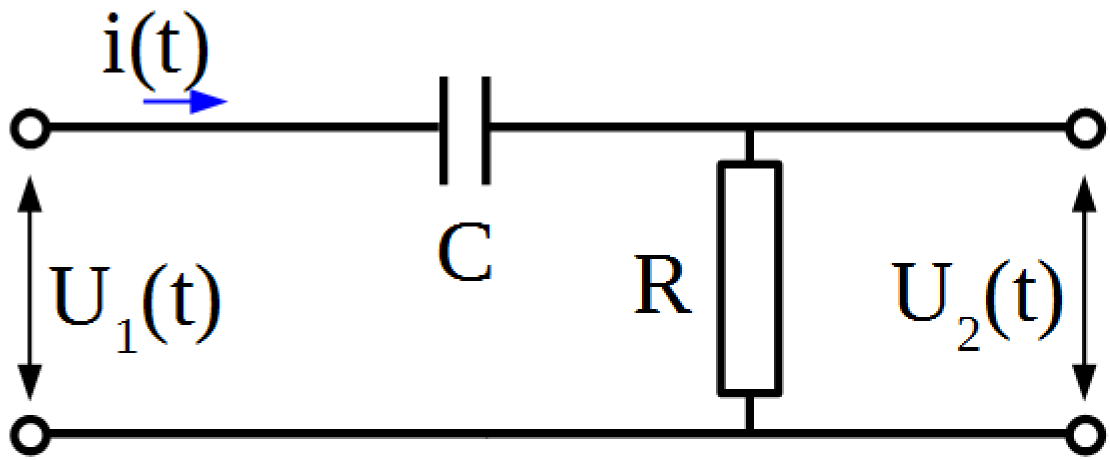
Odpowiedź skokowa - przykład 2



$$\frac{1}{CR}\int u_2(t)\,dt + u_2(t) = u_1(t)$$

$$\frac{1}{CR}u_2(t) + \frac{du_2(t)}{dt} = \frac{du_1(t)}{dt}$$

Odpowiedź skokowa - przykład 2

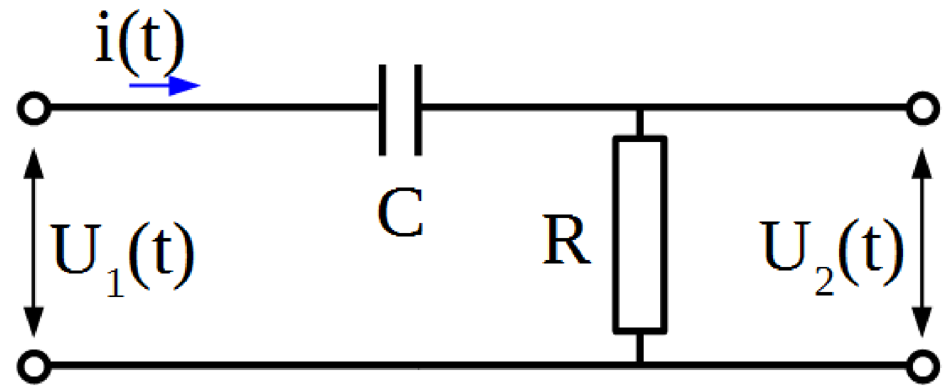


$$\frac{1}{T}U_2(s)+sU_2(s)=sU_1(s) \qquad T=CR$$

$$G(s)=\frac{U_2(s)}{U_1(s)}=\boxed{\frac{Ts}{1+Ts}}$$

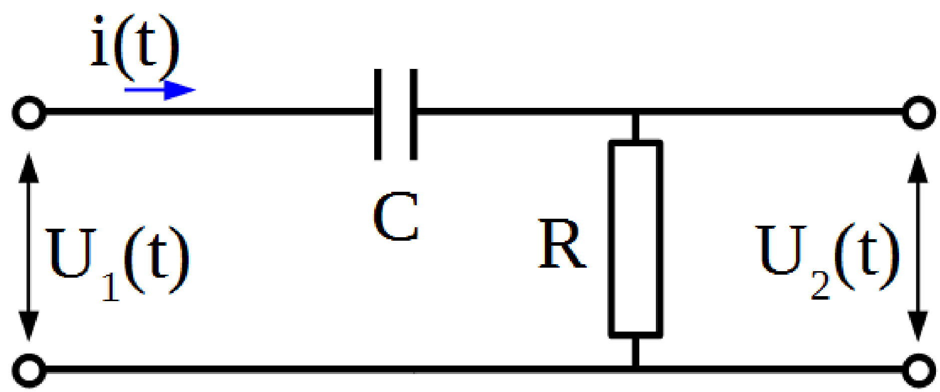
Odpowiedź skokowa - przykład 2

$$G(s) = \frac{Ts}{1+Ts}$$



Odpowiedź skokowa - przykład 2

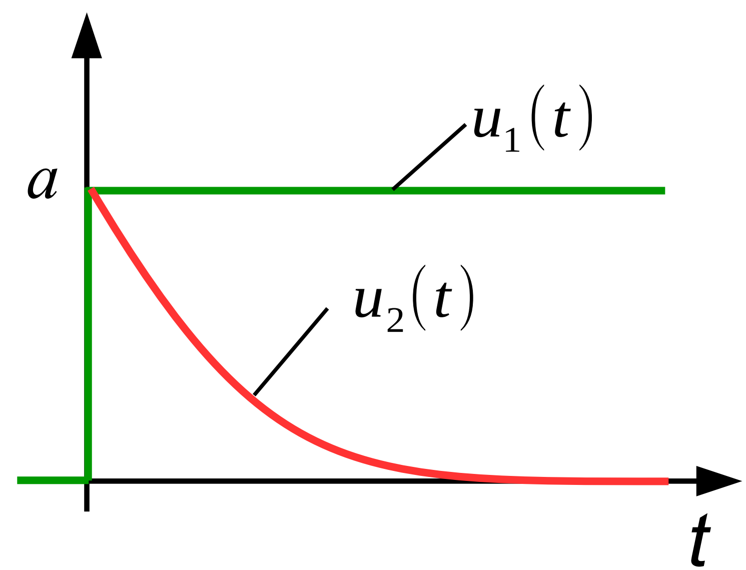
$$G(s) = \frac{Ts}{1+Ts}$$



$$u_1(t) = a \cdot 1(t),$$

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot G(s) = a\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$u_2(t) = L^{-1}\left[U_s(s)\right] = ae^{\frac{-t}{T}}$$



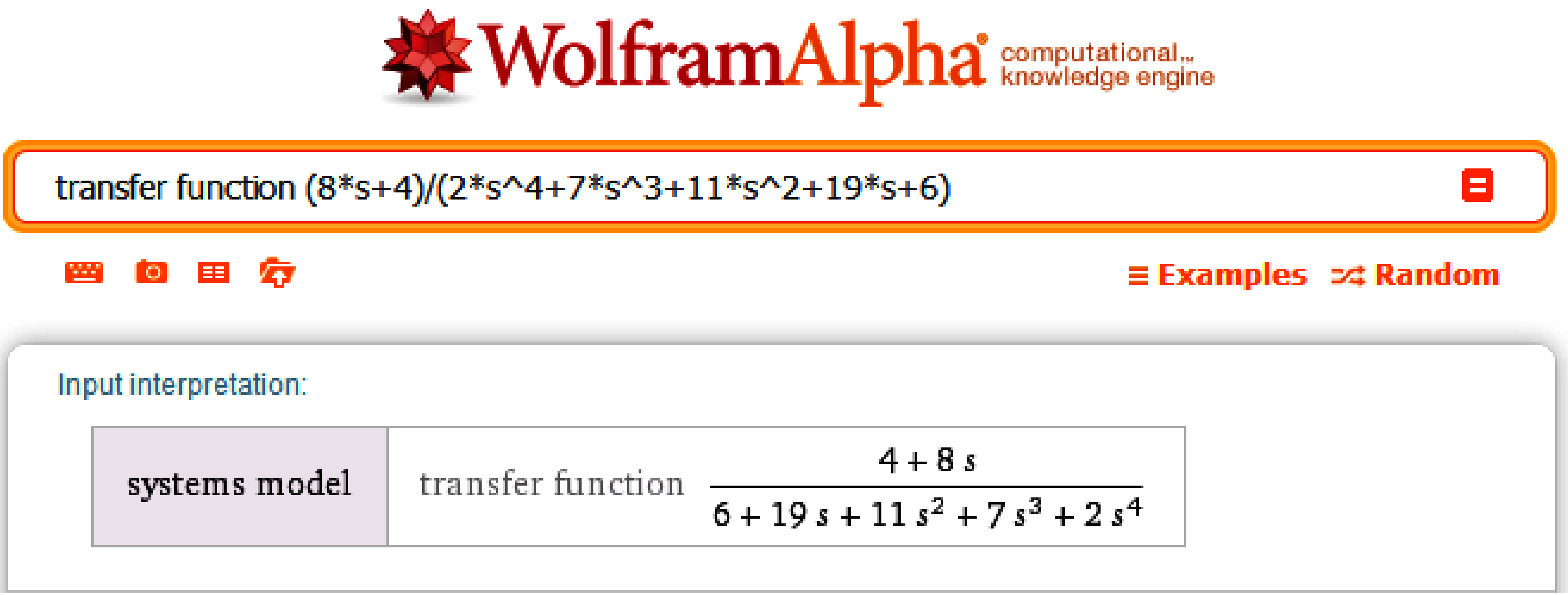
Metody obliczeń komputerowych na potrzeby analizy transmitancji

Oprogramowanie do obliczeń symbolicznych:

- Strona internetowa: www.wolframalpha.com
- Maxima (darmowe)
- Wolfram Mathematica (http://www.wolfram.com/mathematica/)
- Mathcad

Wykresy sporządzić można również w arkuszu kalkulacyjnym (np. Excel, LibreOffice Calc)

WolframAlpha



WolframAlpha