Politechnika Warszawska
Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych
Instytut Podstaw Budowy Maszyn
Zakład Mechaniki
http://www.ipbm.simr.pw.edu.pl/

Teoria maszyn i podstawy automatyki

semestr zimowy 2016/2017

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 13

Kryteria stabilności.
Korekcja układów automatyki.

Kryteria stabilności

Ogólny warunek stabilności

Kryterium Hurwitz

Kryterium Nyquista

Ogólny warunek stabilności

Układ liniowy o jednym wejściu i jednym wyjściu jest stabilny, jeśli części rzeczywiste wszystkich biegunów transmitancji tego obiektu są mniejsze od zera.

$$G(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$$\operatorname{Re} p_1<0 \ \wedge\ \operatorname{Re} p_2<0 \ \wedge\dots\wedge\ \operatorname{Re} p_n<0$$

Kryterium Hurwitza

W matematyce

Warunek konieczny i wystarczający na położenie wszystkich pierwiastków wielomianu w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej

W teorii sterowania

Warunek konieczny i wystarczający na ujemną część rzeczywistą wszystkich biegunów transmitancji operatorowej obiektu

Kryterium Hurwitza

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

jest stabilny, jeżeli:

Kryterium Hurwitza

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

jest stabilny, jeżeli:

1 $\quad a_n>0,\ \ a_{n-1}>0,\ \ \ldots,\ \ a_1>0,\ \ a_0>0$

Kryterium Hurwitza

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

jest stabilny, jeżeli:

1 $a_n > 0,\ \ a_{n-1} > 0,\ \ \dots,\ \ a_1 > 0,\ \ a_0 > 0$

2

Macierz Hurwitza

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitza

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$

jest stabilny, jeżeli:

1. $a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \ldots, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

2. $\det \Delta_2 > 0$
   $\det \Delta_3 > 0$
   $\ldots$
   $\det \Delta_{n-1} > 0$

$\Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_{n-1}$

$$M_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Δ_i *- wiodące minory główne*
i-tego rzędu macierzy Hurwitza

Kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza ≠ Kryterium Routh'a
(1895) (1876)

Kryterium Liénard'a–Chipart'a – modyfikacja kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza

Przykład 1

$$G(s)=\frac{5s+3}{10s^2+3s+1}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 2

$$G(s)=\frac{2s}{2s^3+s+20}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 3

$$G(s)=\frac{3s-5}{s^3+4s^2+3s+10}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 4

$$G(s)=\frac{1}{3s^4+4s^3+6s^2+4s+5}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 5

Dobrać parametr k aby spełnić kryterium Hurwitza

$$\frac{k\,s}{4\,s^3+3\,s^2+k\,s+1}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 6

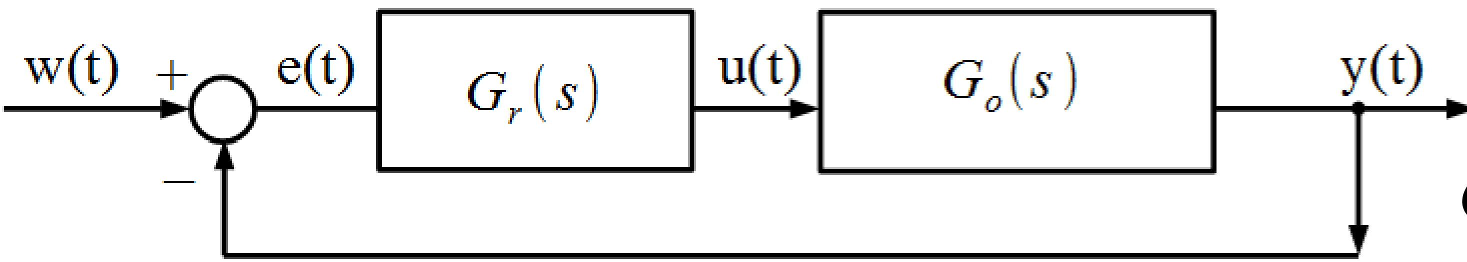
Dobrać parametr k aby spełnić kryterium Hurwitza

$$\frac{2}{2s^3+ks^2+(1+k)s+3}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



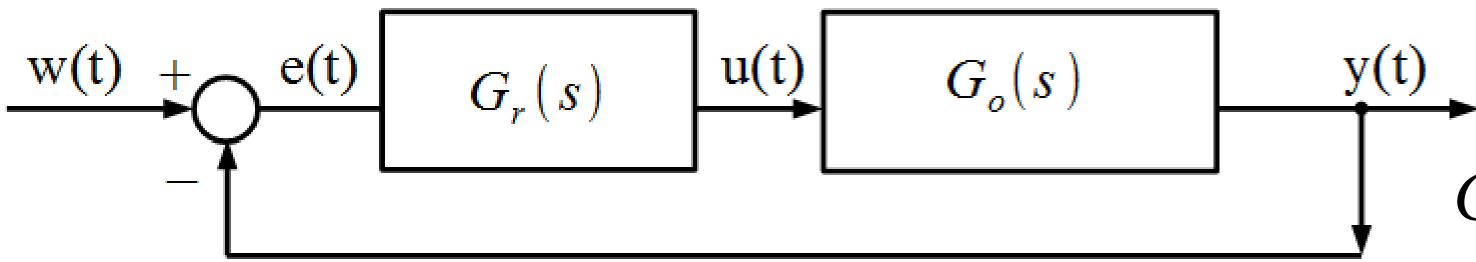
$$G_r(s)=\frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_r(s)=\frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

$$G_z(s)=\frac{G_r G_o}{1+G_r G_o}=\frac{4s}{a_4 s^4+a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0}$$

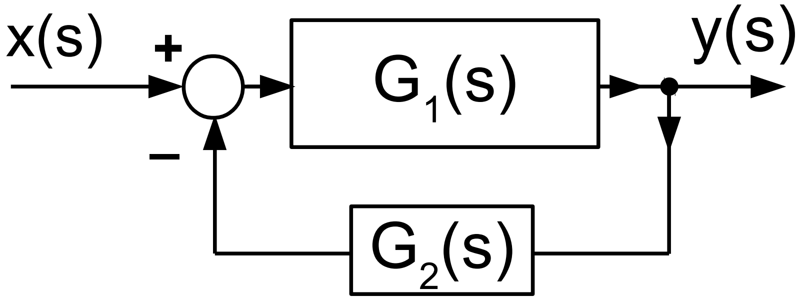
$a_4=T\ ,\ a_3=2T+1,$
$a_2=T+2\ ,\ a_1=T+5\ ,\ a_0=1$

$$a_4>0\ ,\ a_3>0\ ,\ a_2>0\ ,\ a_1>0\ ,\ a_0>0\ \rightarrow\ T>0$$

$$\Delta_2=\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}=T^2+2>0\ \ T\in\mathbb{R}$$

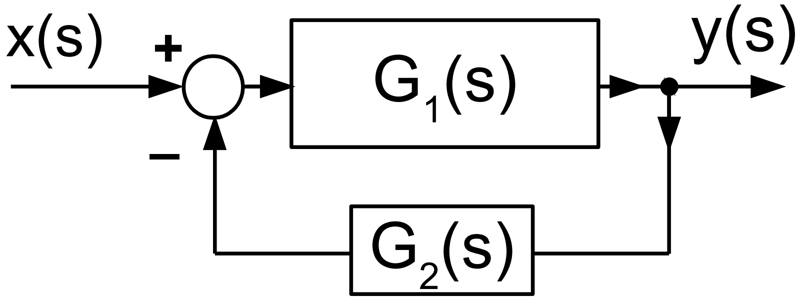
$$\Delta_3=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{bmatrix}=T^3+T^2-2T+9>0\ \rightarrow\ T>2.83$$

Kryterium Nyquista



$$G_z(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

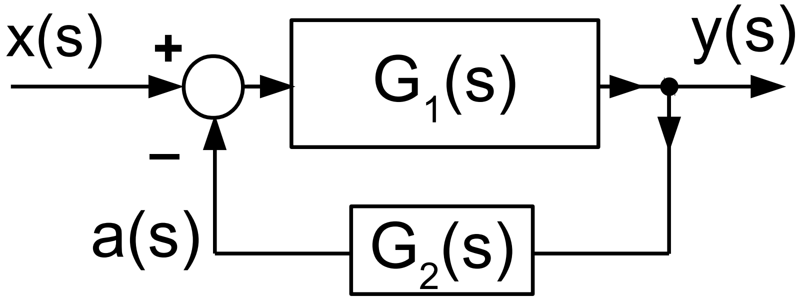
Kryterium Nyquista



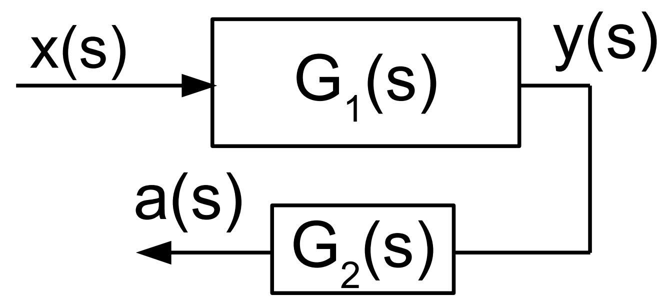
$$G_z(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

Niestabilny, gdy: $G_1 G_2 = -1$

Kryterium Nyquista



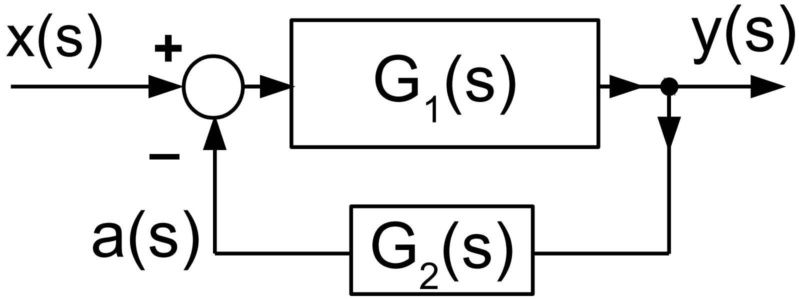
$$G_z(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$



$$G_{otw}(s) = \frac{a(s)}{x(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

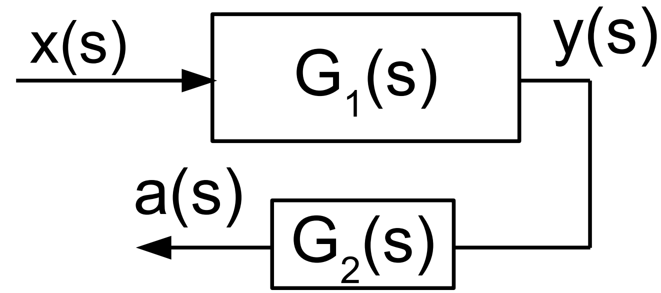
Niestabilny, gdy: $\boxed{G_1 G_2} = -1$

Kryterium Nyquista

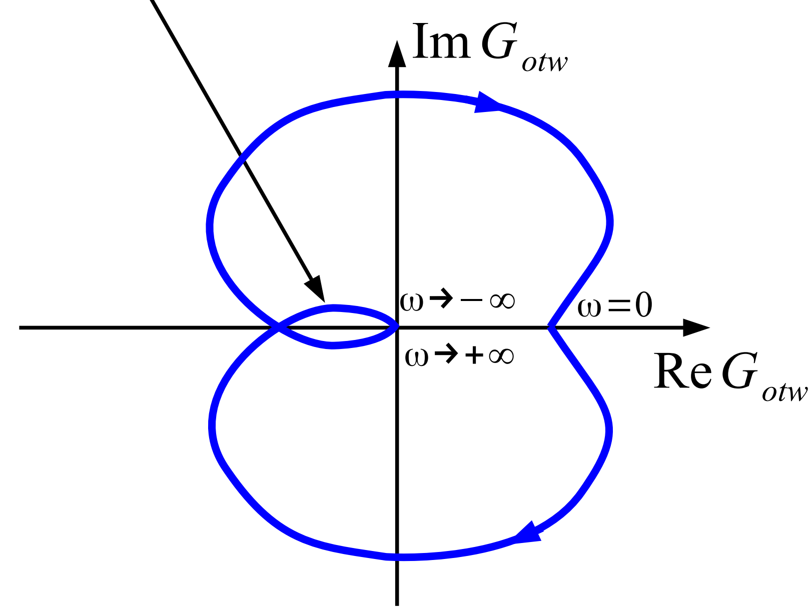


$$G_z(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

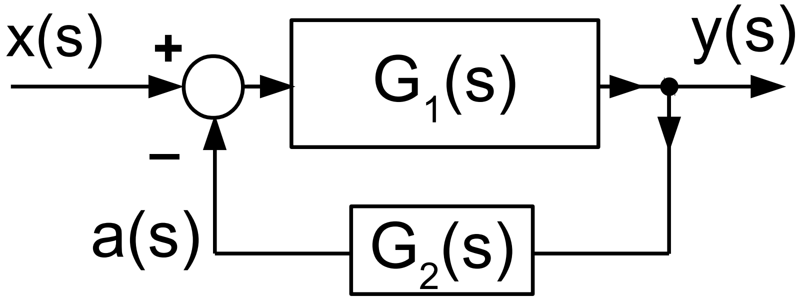
Niestabilny, gdy: $\boxed{G_1 G_2} = -1$

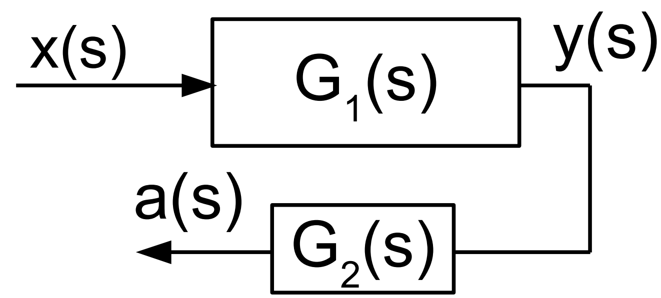


$$G_{otw}(s)=\frac{a(s)}{x(s)}=G_1(s)G_2(s)$$



Kryterium Nyquista

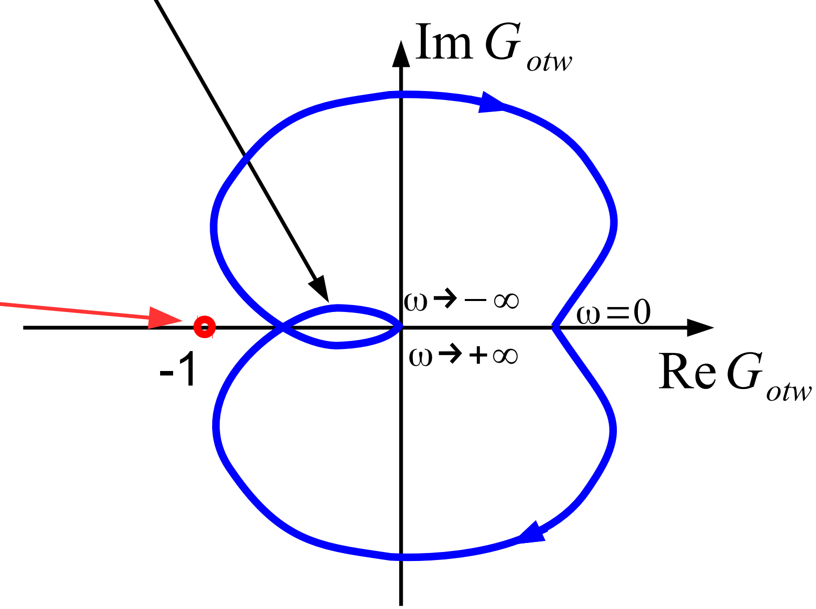




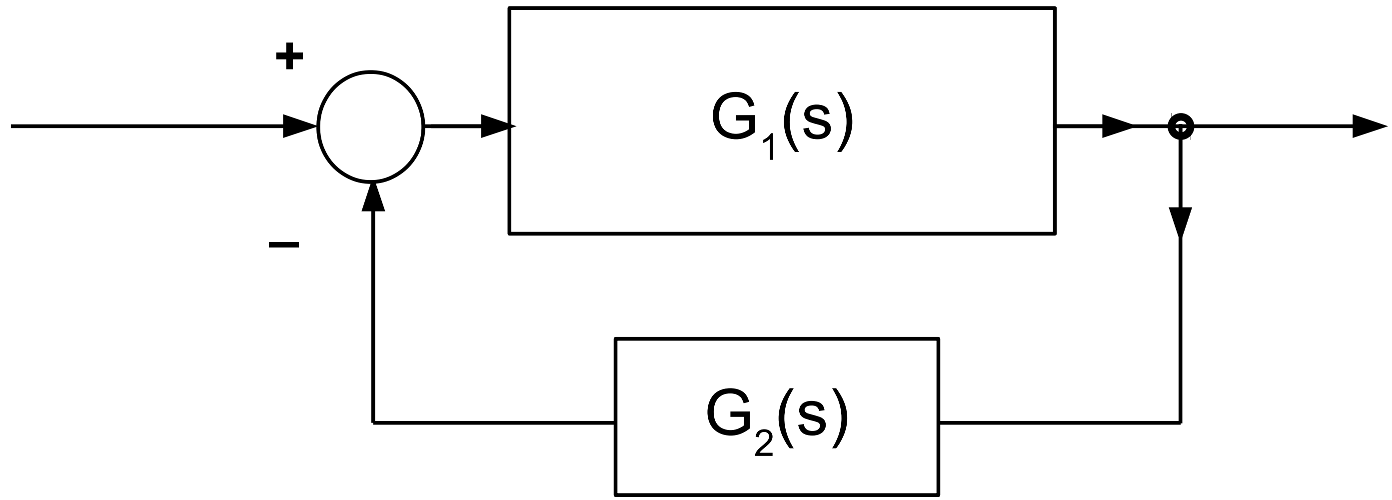
$$G_z(s)=\frac{y(s)}{x(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

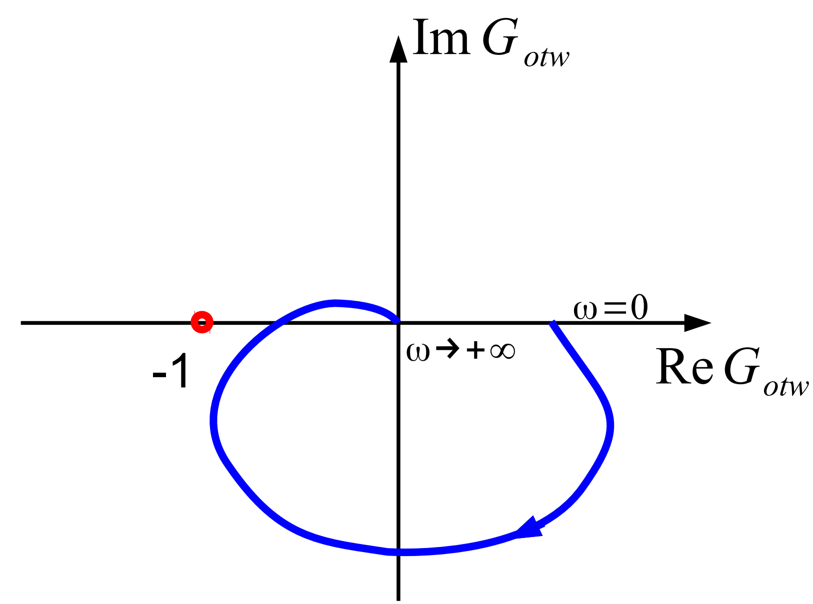
$$G_{otw}(s)=\frac{a(s)}{x(s)}=G_1(s)G_2(s)$$

Niestabilny, gdy: $\boxed{G_1 G_2} = \boxed{-1}$

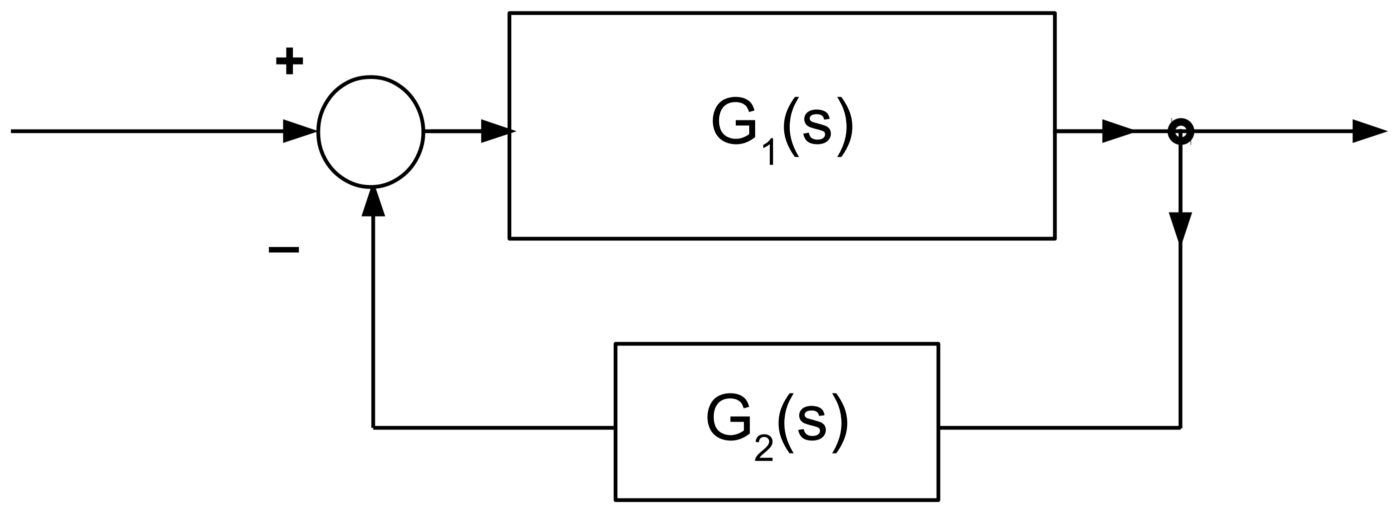


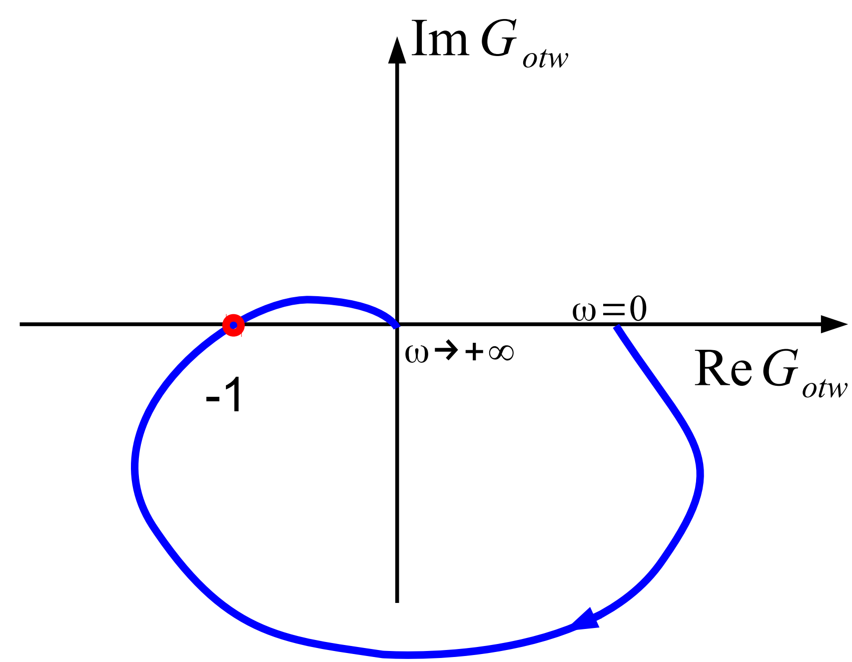
Kryterium Nyquista





Kryterium Nyquista



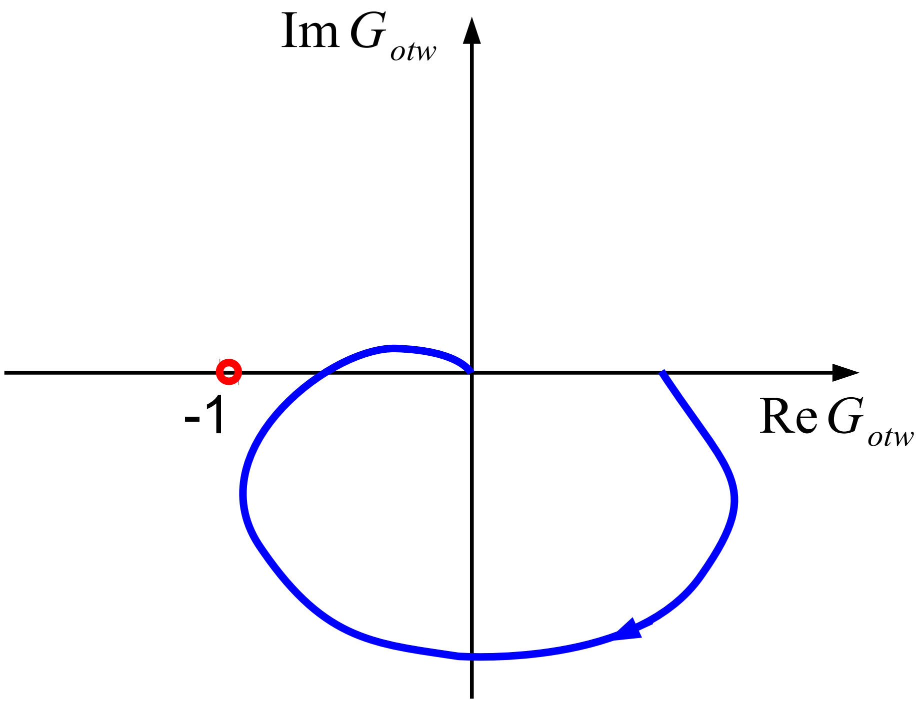


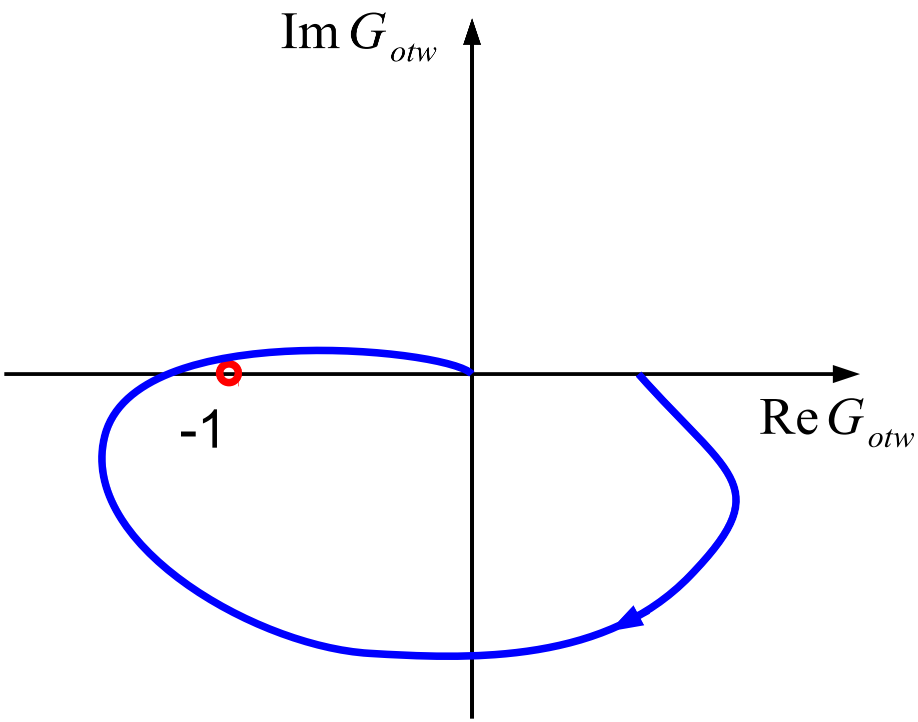
Kryterium Nyquista (szczególne)

Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:
1) układ otwarty jest stabilny i
2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu (-1,j0).
// punkt (-1,j0) jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //

Kryterium Nyquista (szczególne)

Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:
1) układ otwarty jest stabilny i
2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu (-1,j0).
// punkt (-1,j0) jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //





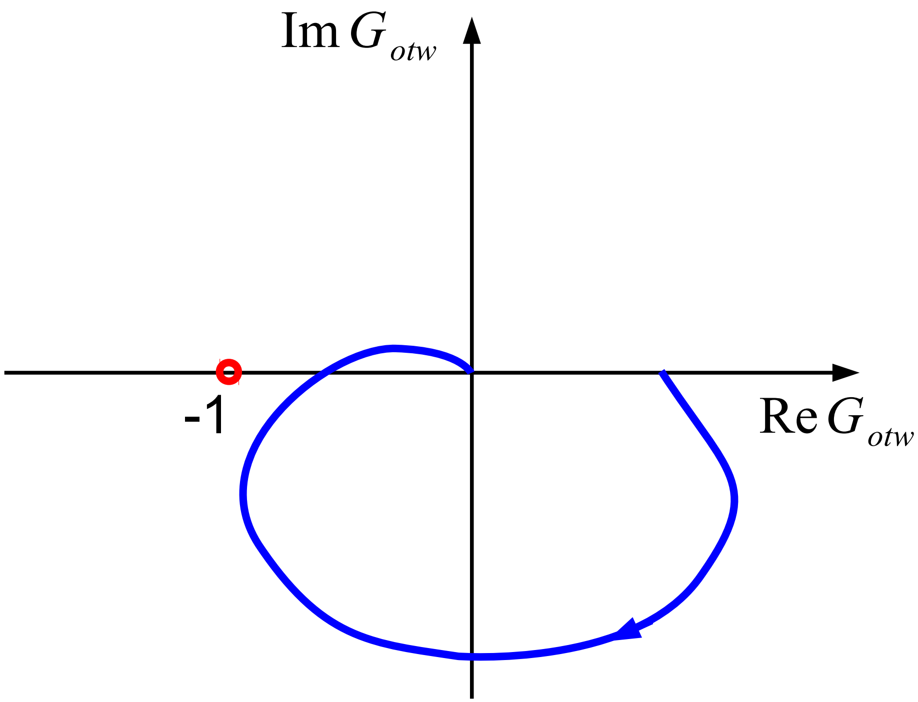
Kryterium Nyquista (szczególne)

Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:

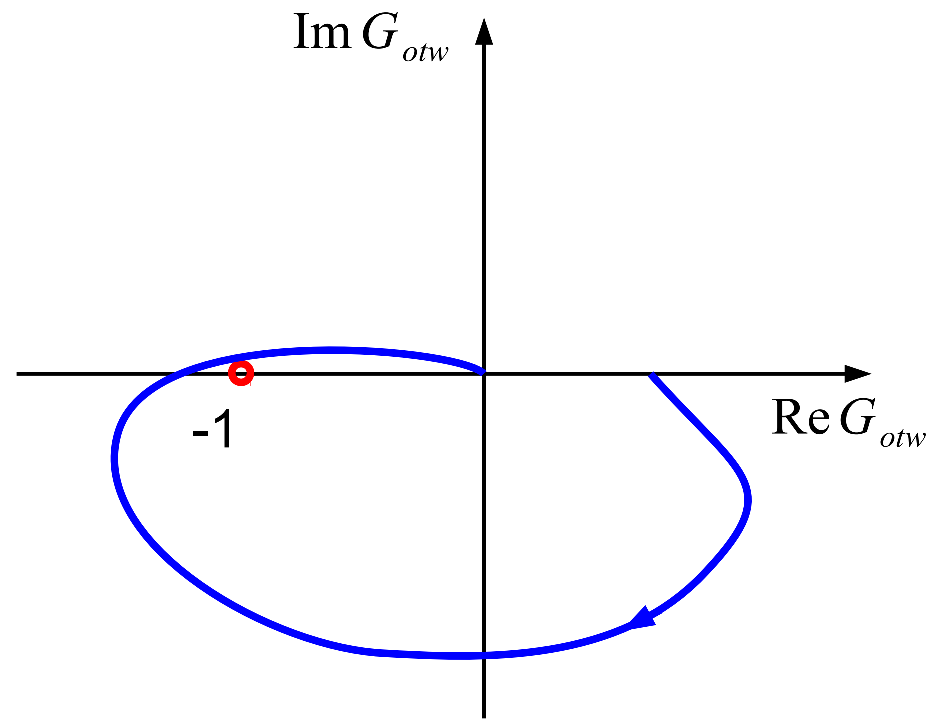
1) układ otwarty jest stabilny i

2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu (-1,j0).

// punkt (-1,j0) jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //



układ zamknięty stabilny

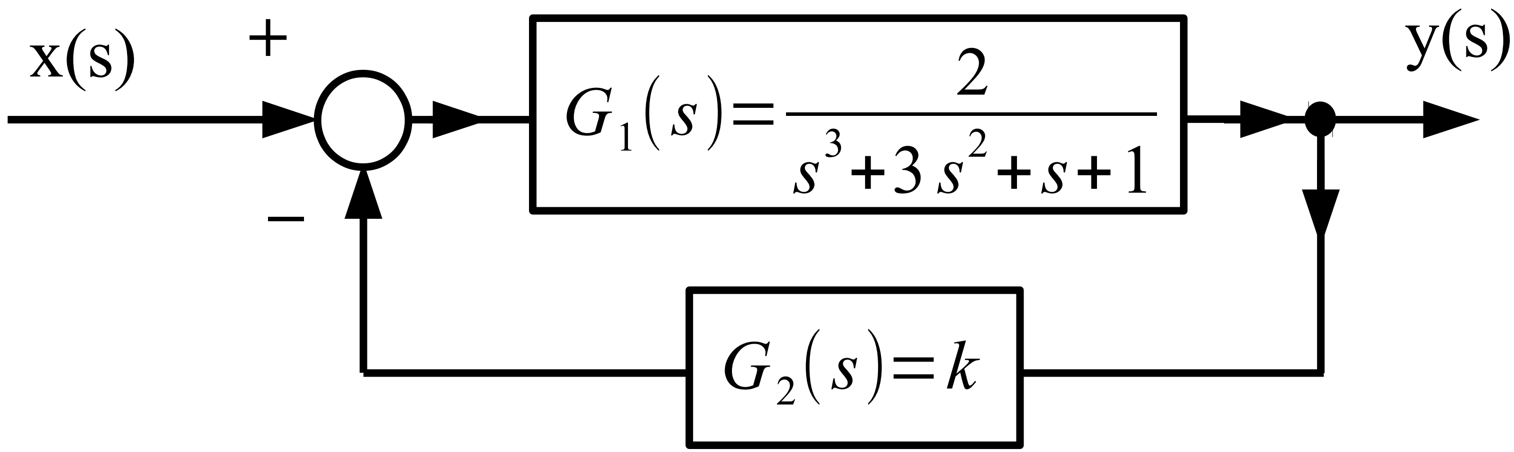


układ zamknięty niestabilny

Kryterium Nyquista

Przykład 8

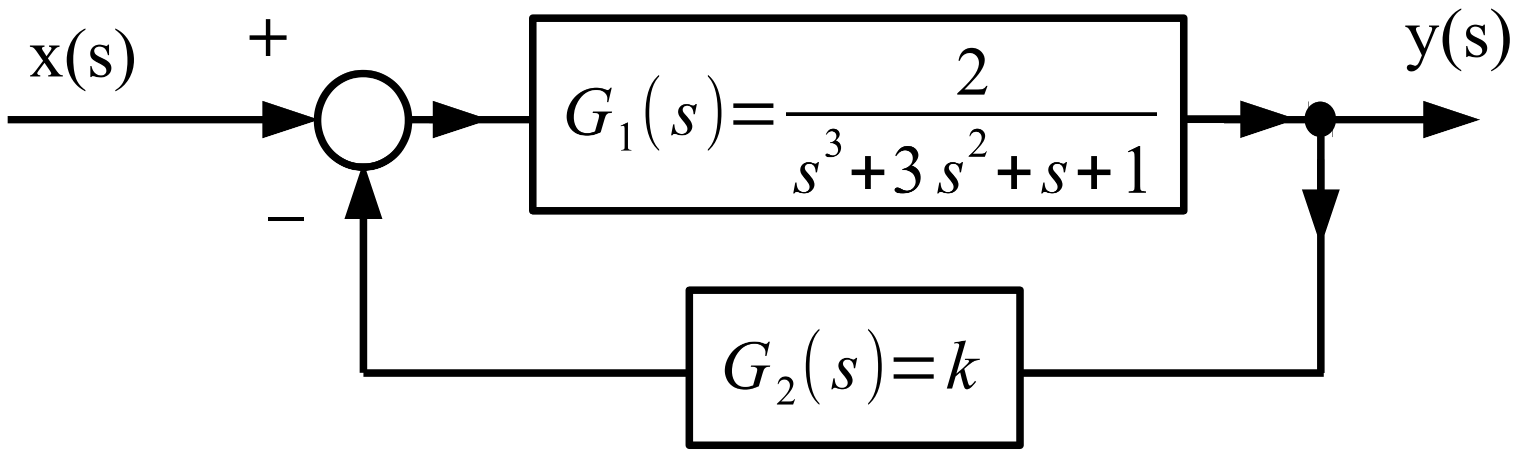
Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista



Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista

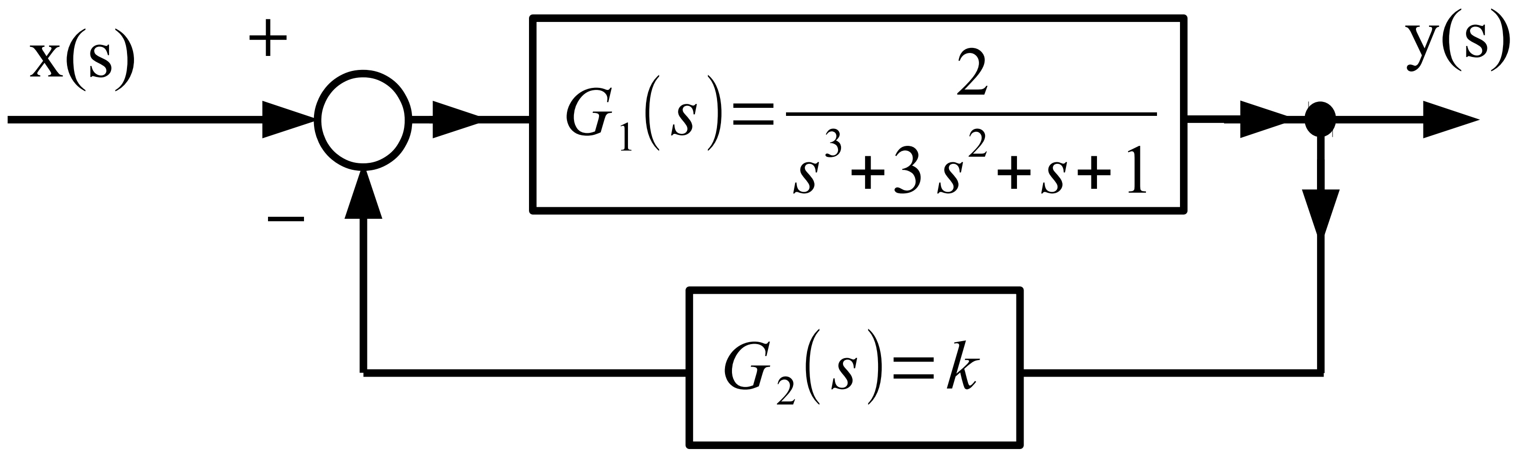


$$G_{otw}(s)=G_1 G_2=\frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista

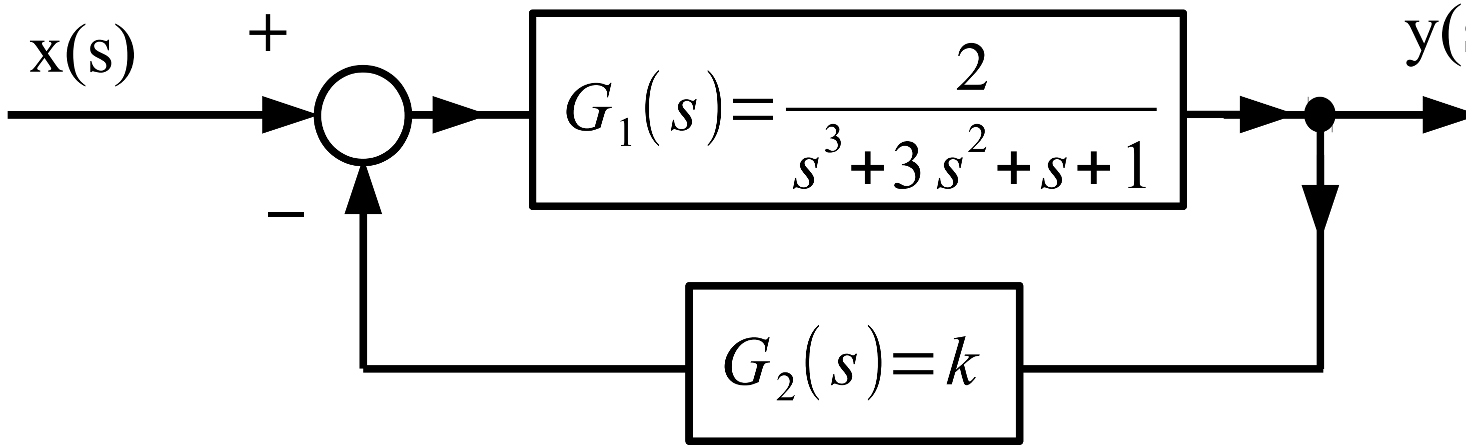


$$G_{otw}(s)=G_1 G_2=\frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$$ - stabilny z kryterium Hurwitza

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista



$$G_{otw}(s)=G_1 G_2=\frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$$ - stabilny z kryterium Hurwitza

$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

Kryterium Nyquista

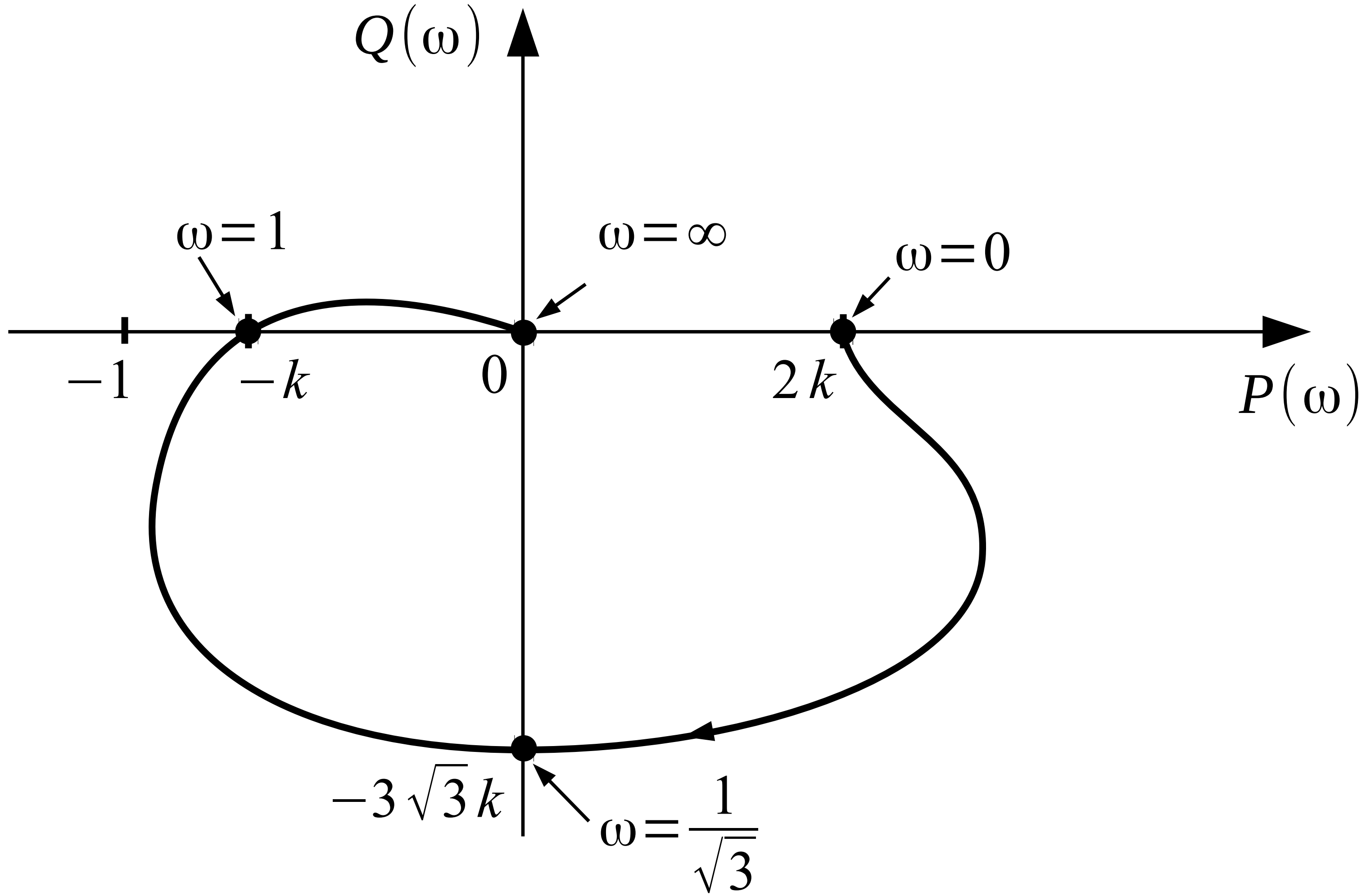
Przykład 8

$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

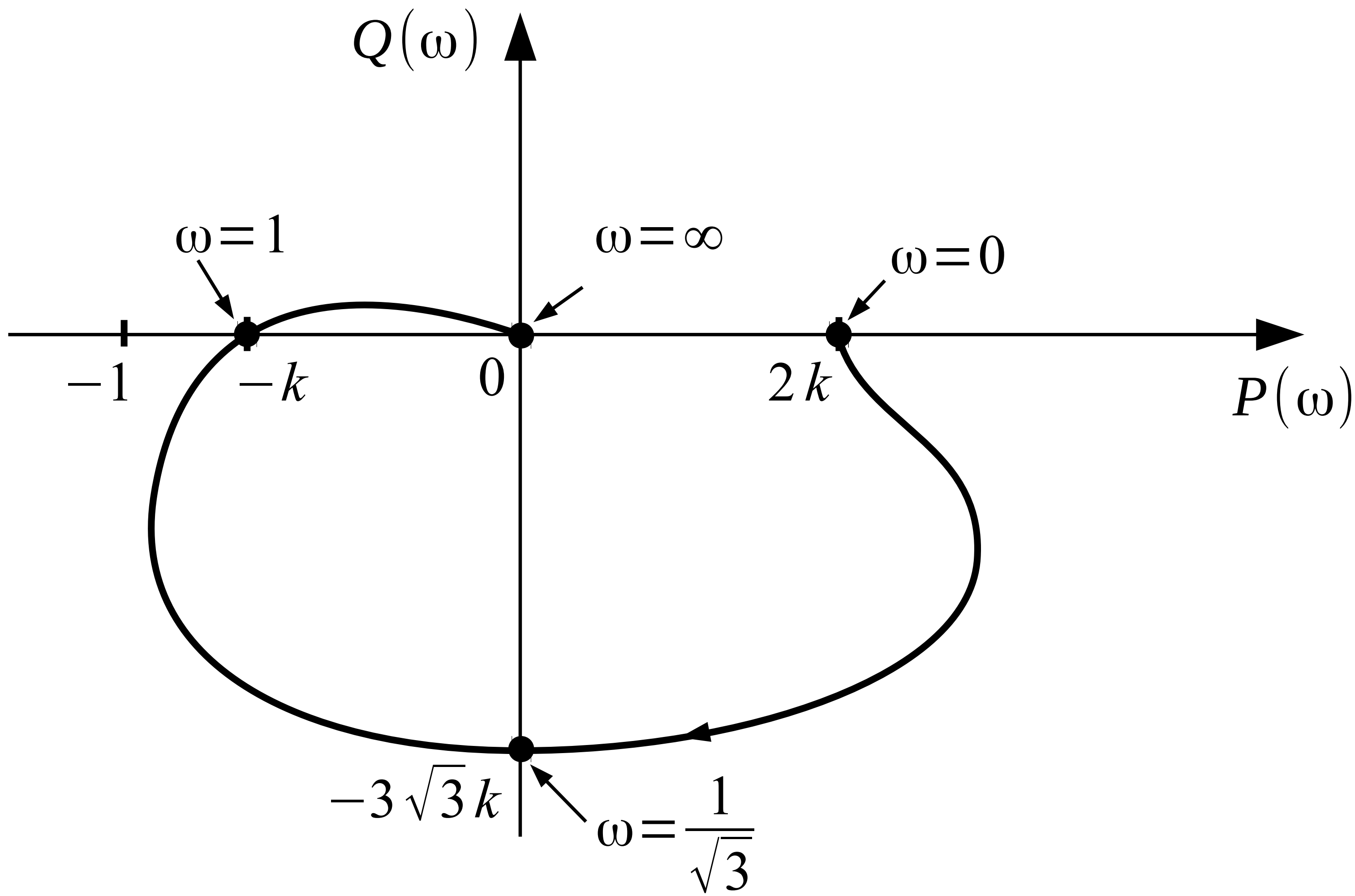
$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$



Kryterium Nyquista

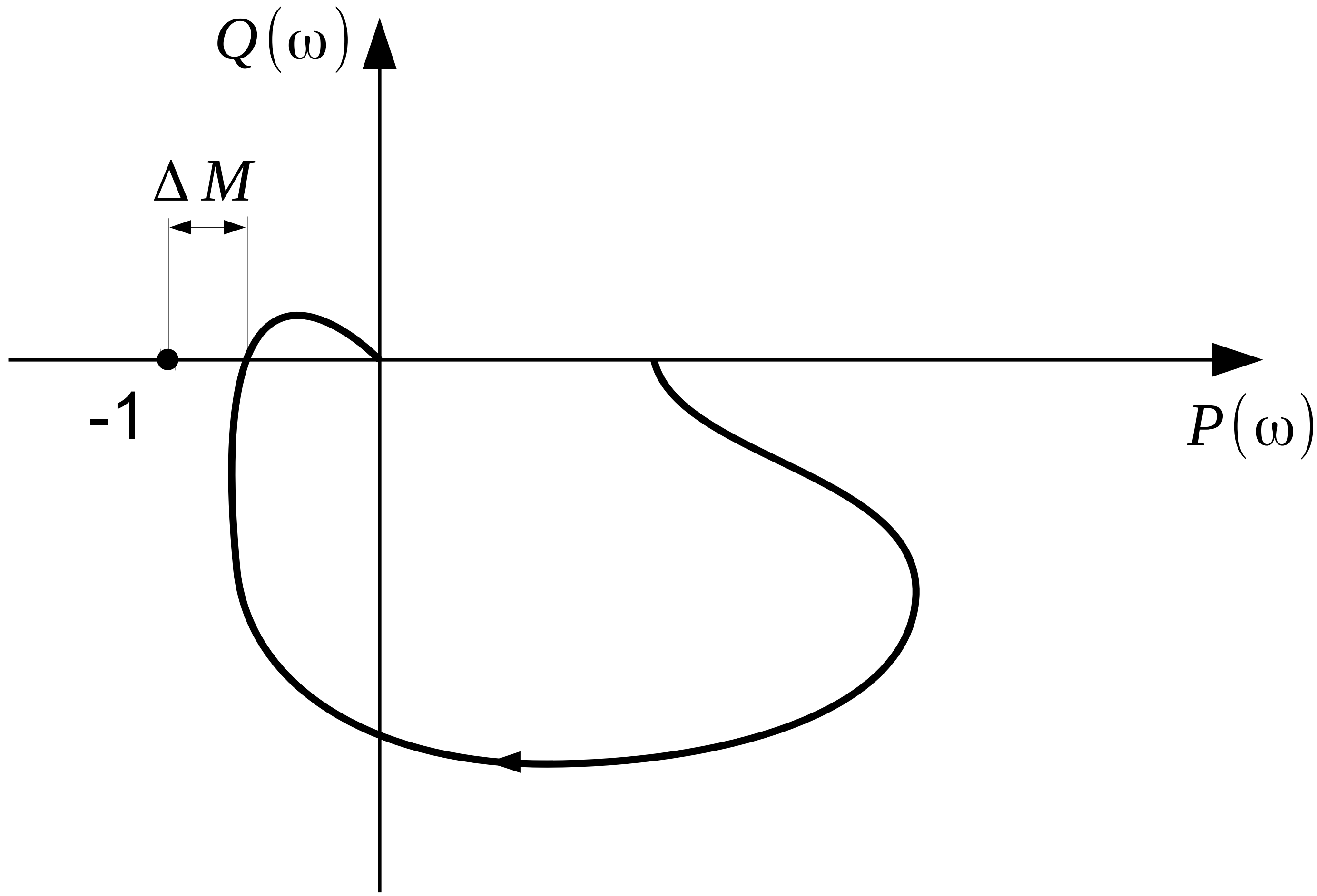
Przykład 8

$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

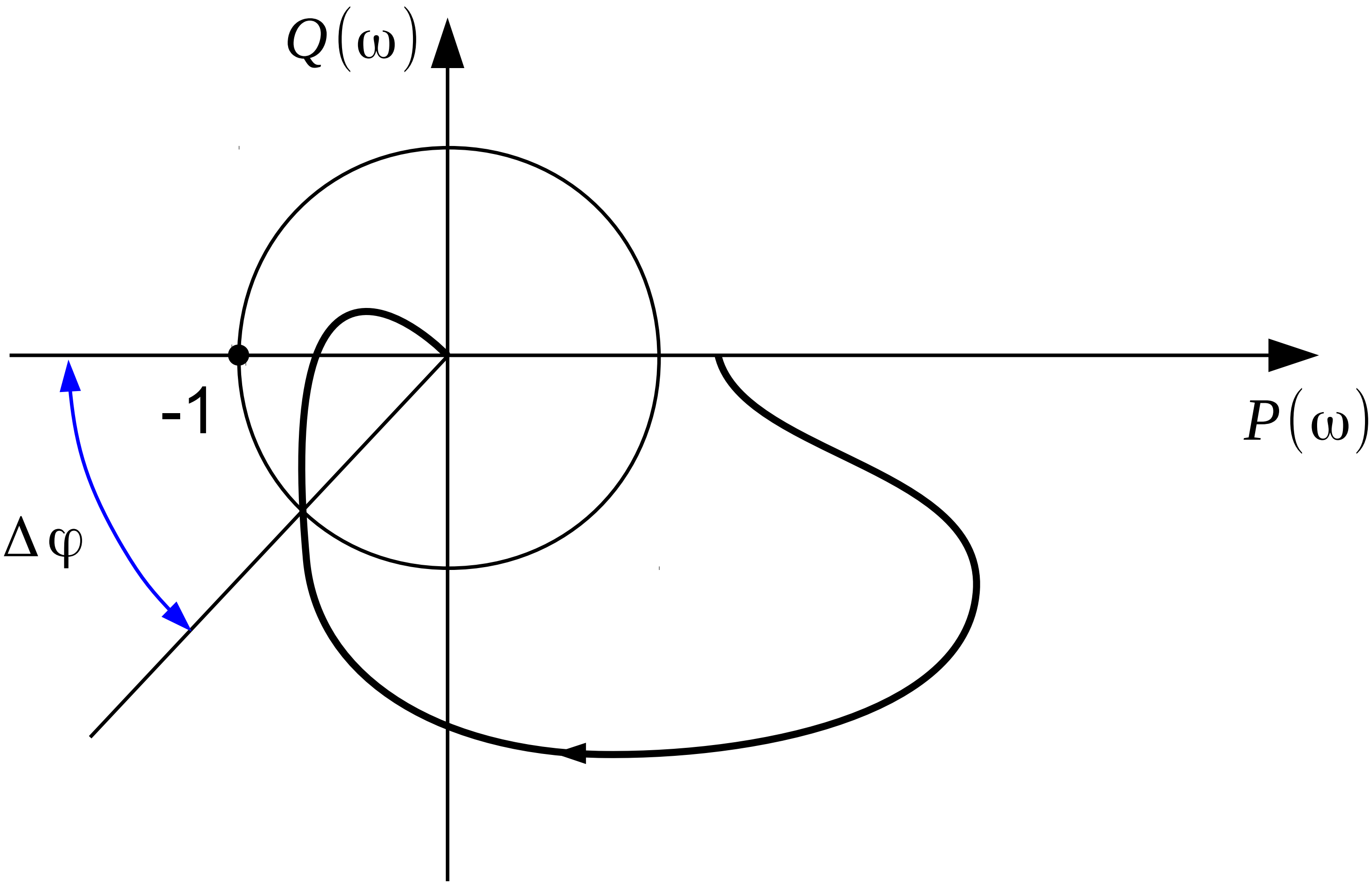


układ zamknięty stabilny dla $0 < k < 1$

Zapas modułu

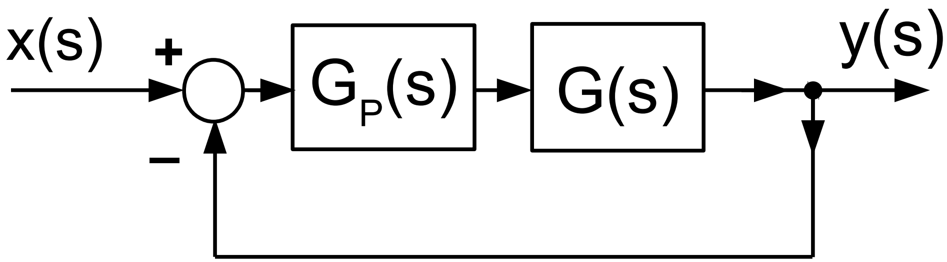


Zapas fazy



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P



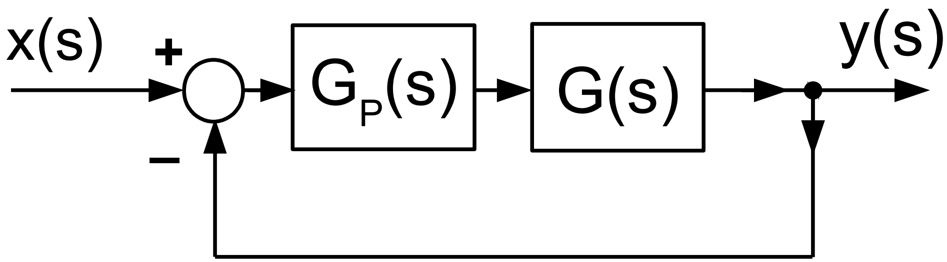
$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)\,G(s)}{1+G_P(s)\,G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)\,G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

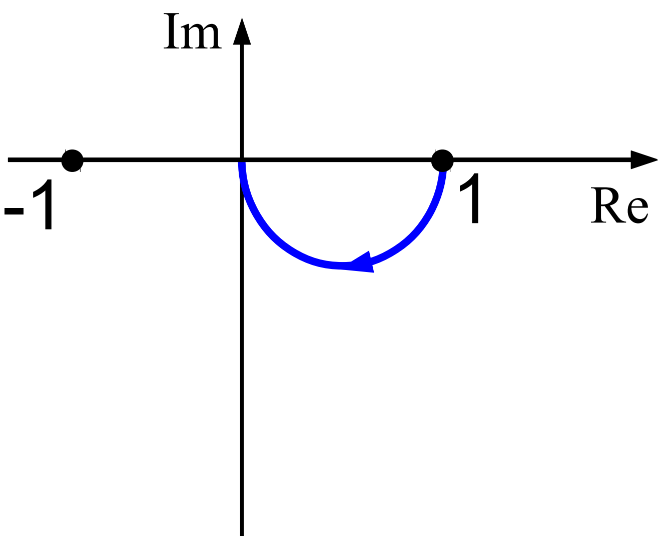


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

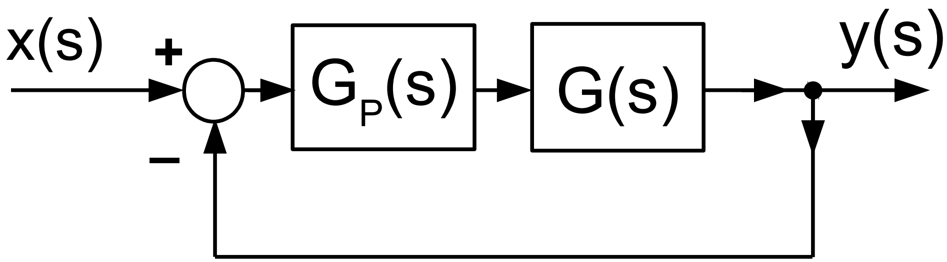
$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

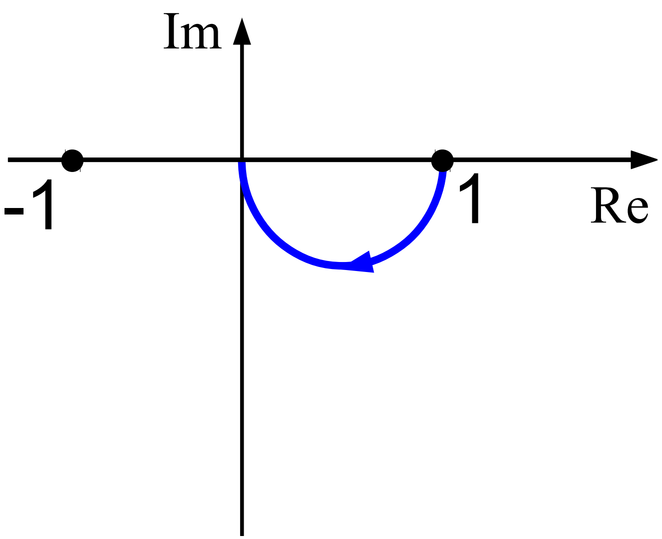


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

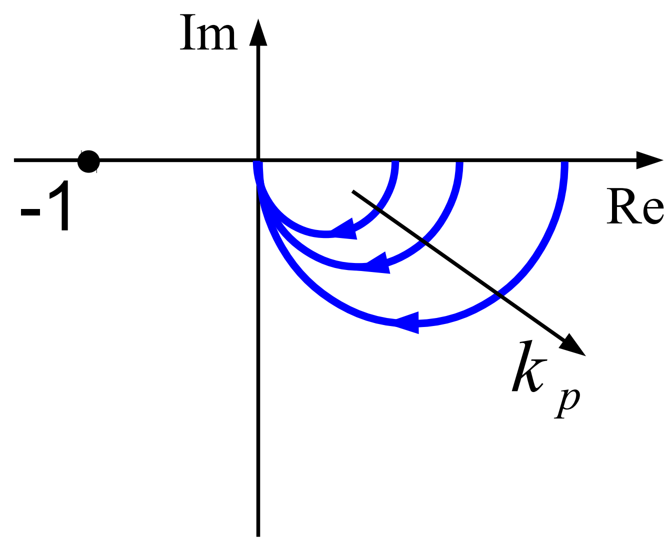
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$

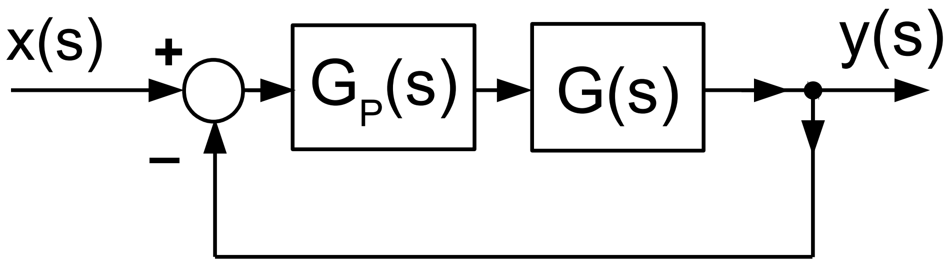


$$G_{otw}(s)=k_p\frac{1}{Ts+1}$$



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

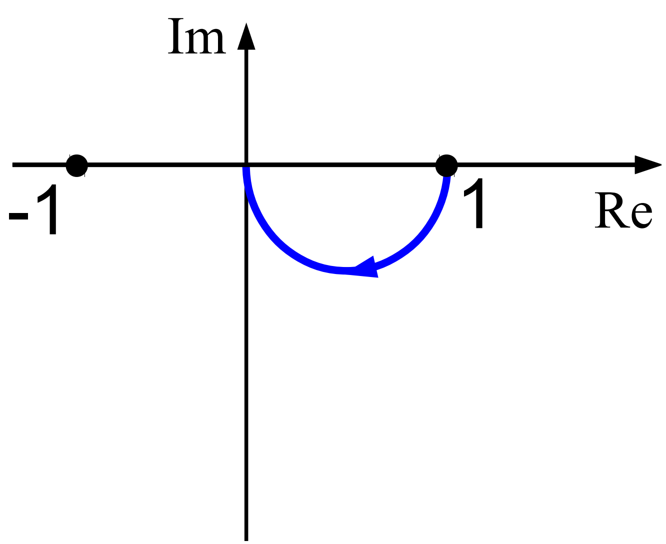


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)\,G(s)}{1+G_P(s)\,G(s)}$$

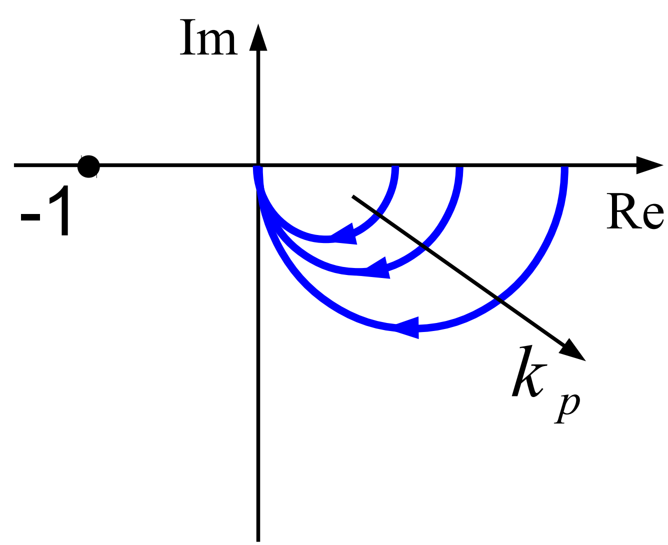
$$G_{otw}(s)=G_P(s)\,G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$



$$G_{otw}(s)=k_p\frac{1}{Ts+1}$$



G_{otw} zawsze stabilny,

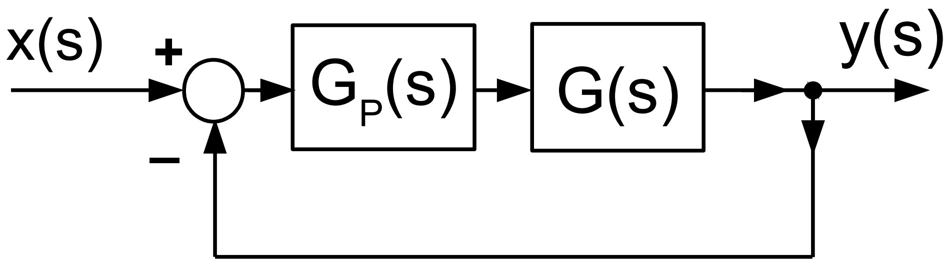
G_{zam} zawsze stabilny.

mnożnik błędu w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P+1}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P



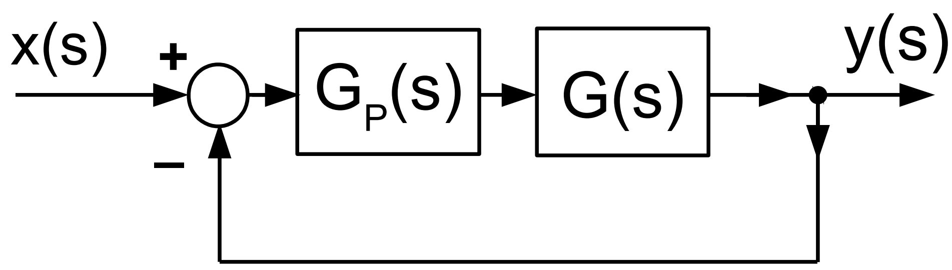
$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)\,G(s)}{1+G_P(s)\,G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)\,G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

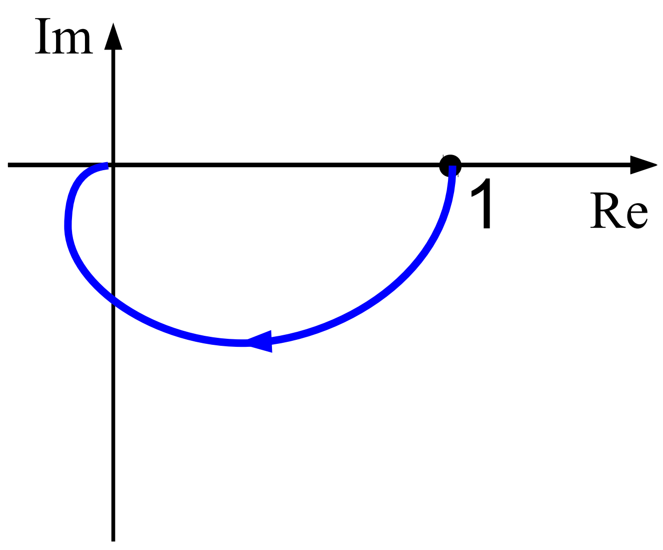


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)\,G(s)}{1+G_P(s)\,G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)\,G(s)$$

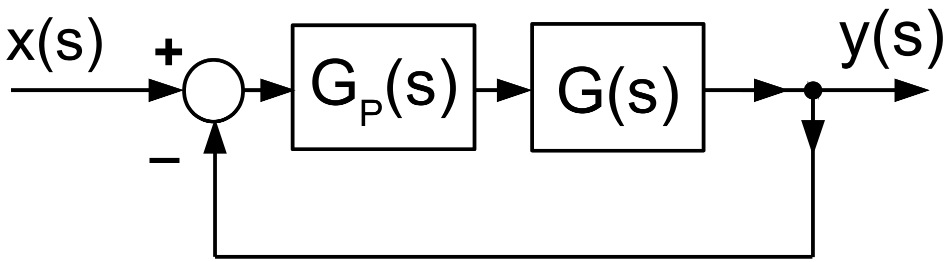
$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_1^2 s^2+T_2 s+1}$$



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

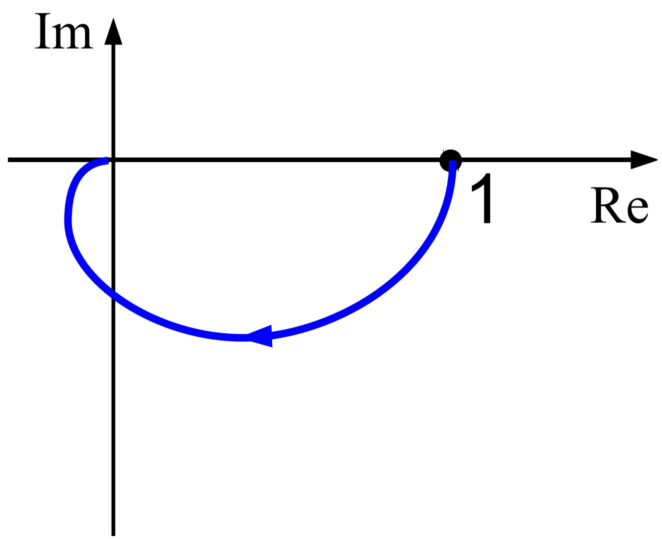


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

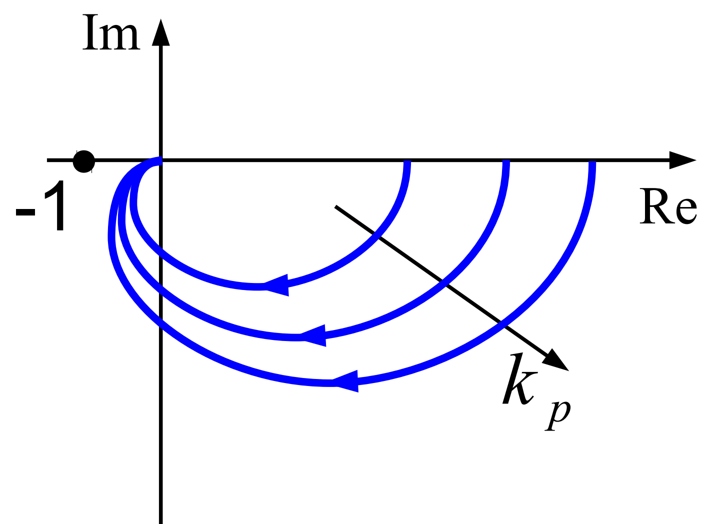
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_1^2 s^2+T_2 s+1}$$

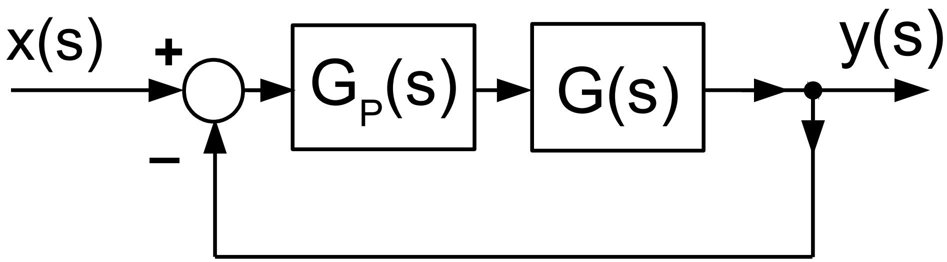


$$G_{otw}(s)=\frac{k_p}{T_1^2 s^2+T_2 s+1}$$



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

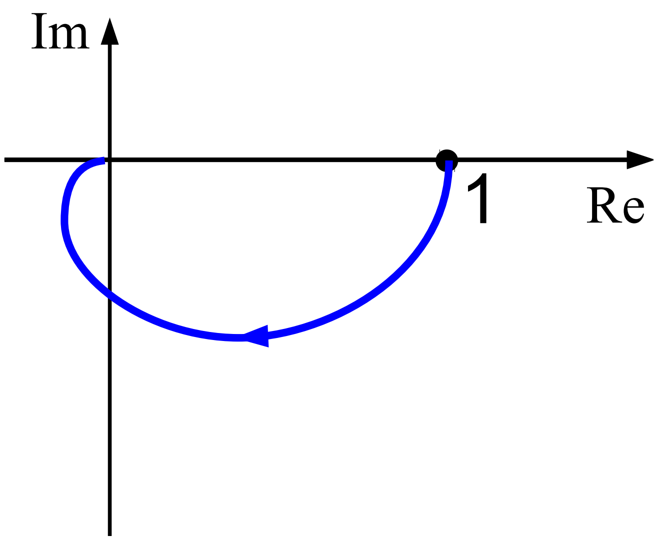


$$G_{zam}(s) = \frac{G_P(s)\,G(s)}{1 + G_P(s)\,G(s)}$$

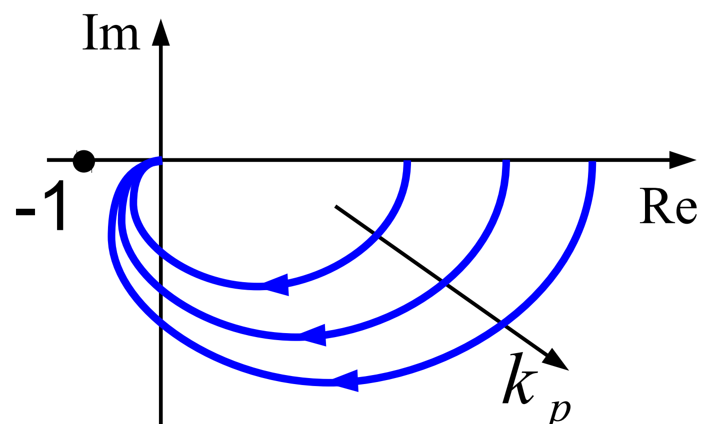
$$G_{otw}(s) = G_P(s)\,G(s)$$

$$G_P(s) = k_P$$

$$G(s) = \frac{1}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$



$$G_{otw}(s) = \frac{k_p}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$



G_{otw} zawsze stabilny,

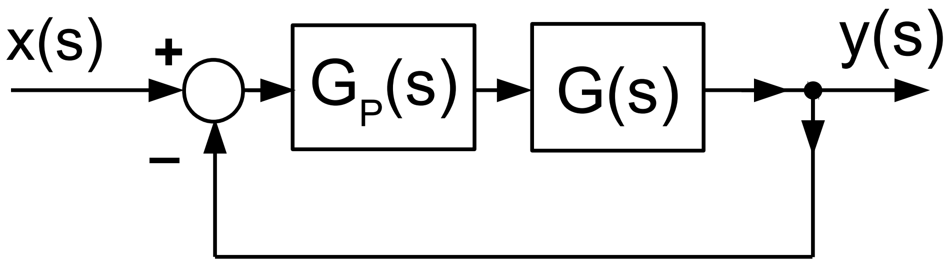
G_{zam} zawsze stabilny.

mnożnik błędu w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P + 1}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P



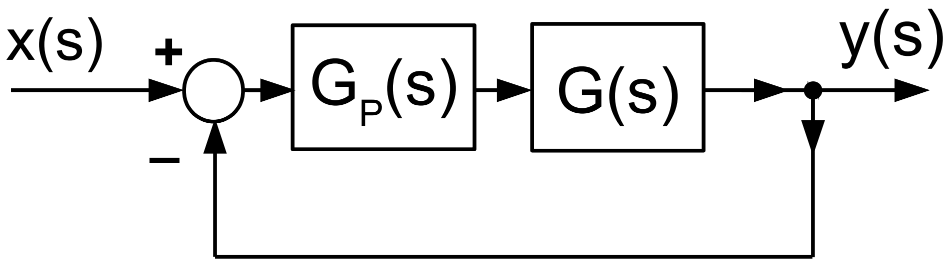
$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

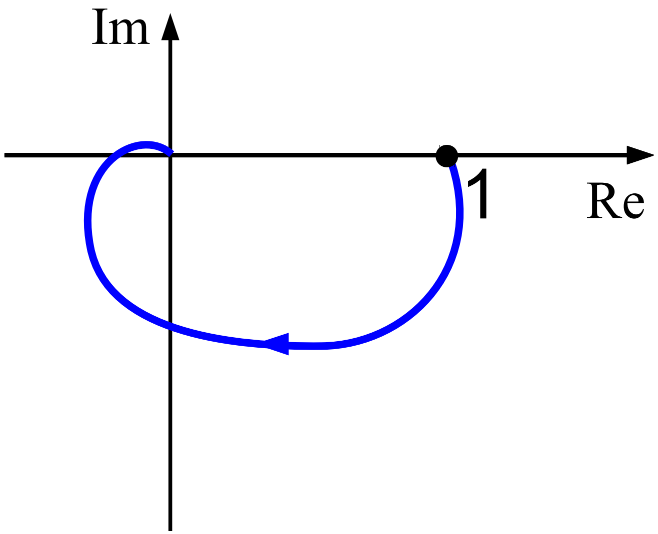


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)\,G(s)}{1+G_P(s)\,G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)\,G(s)$$

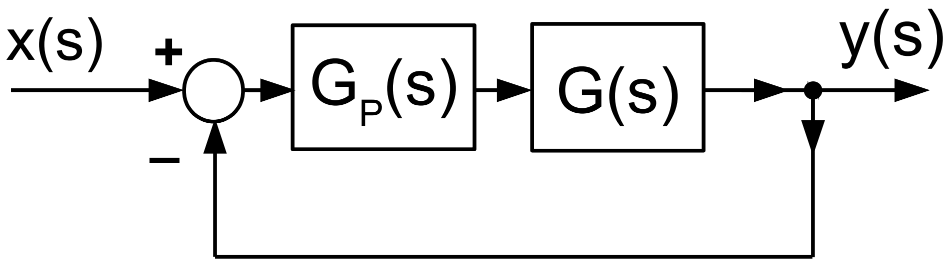
$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

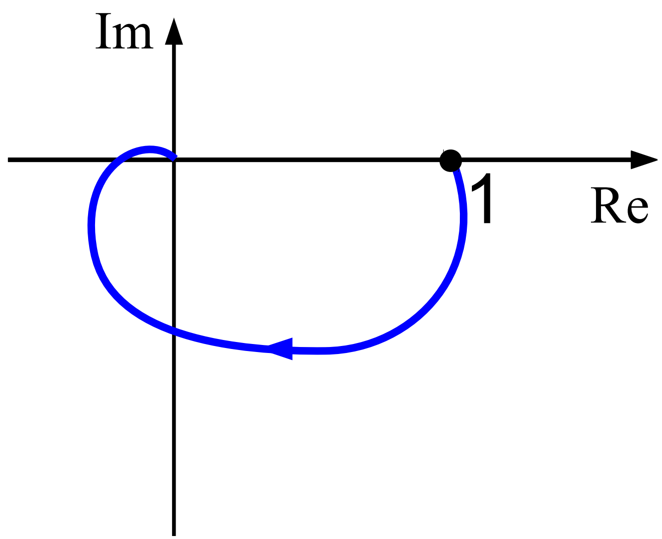


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

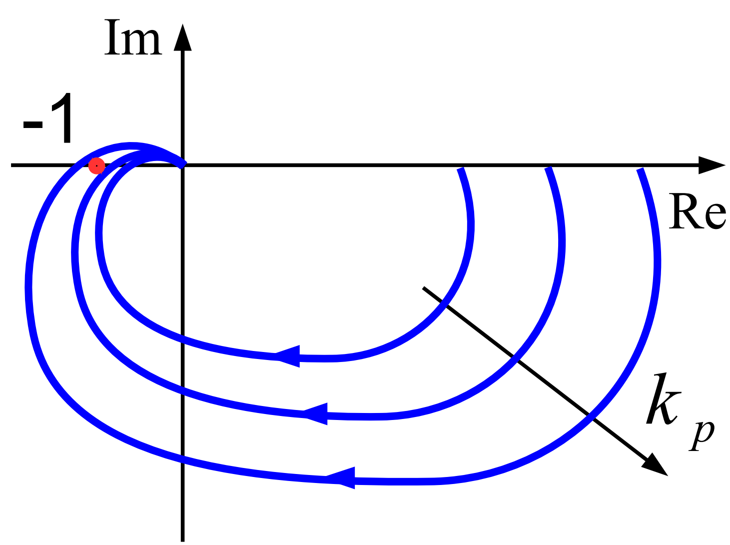
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$

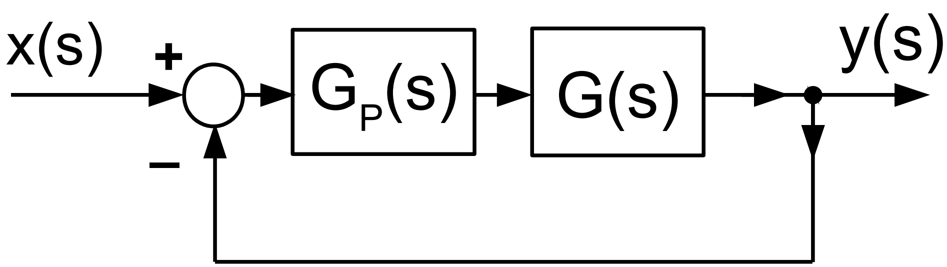


$$G_{otw}(s)=\frac{k_p}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

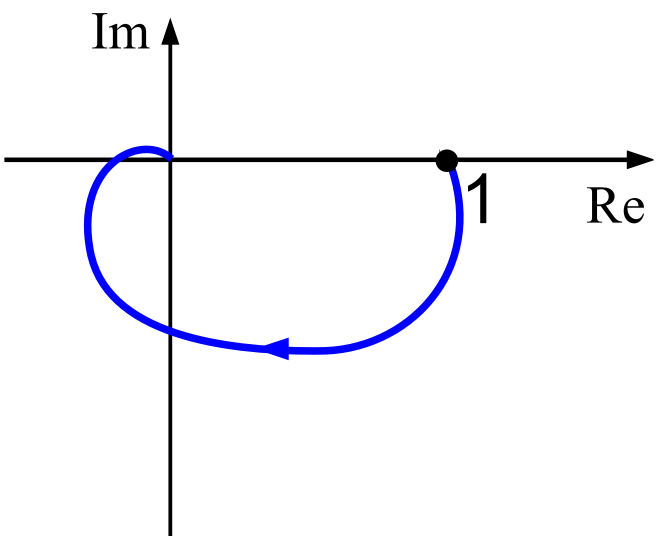


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

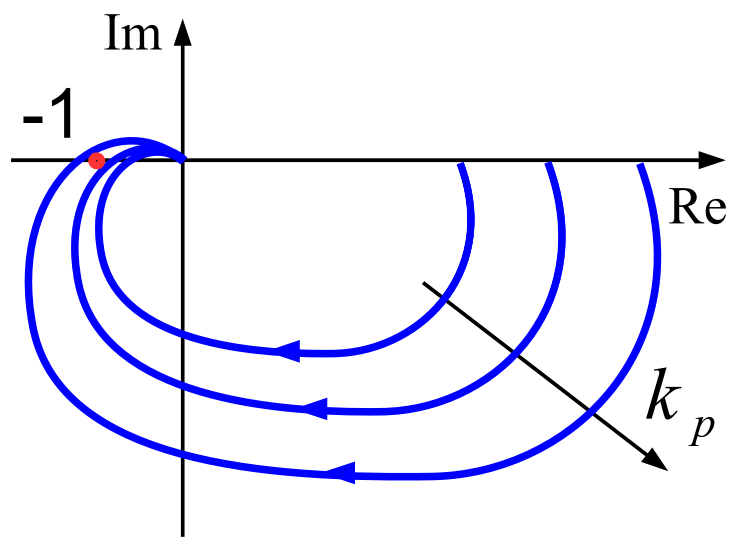
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$



$$G_{otw}(s)=\frac{k_p}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$



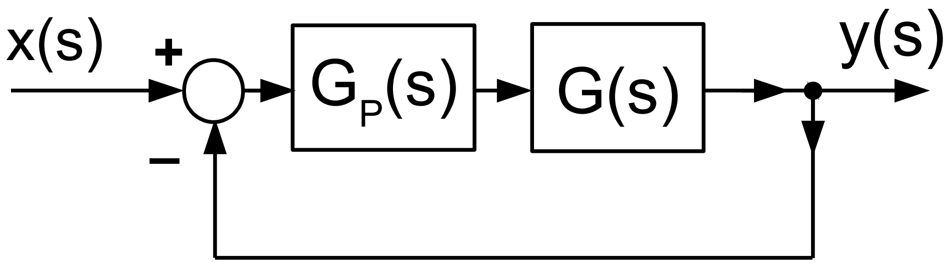
G_{otw} może być stabilny lub niestabilny i może obejmować punkt (-1,j0)

mnożnik błędu w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P+1}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

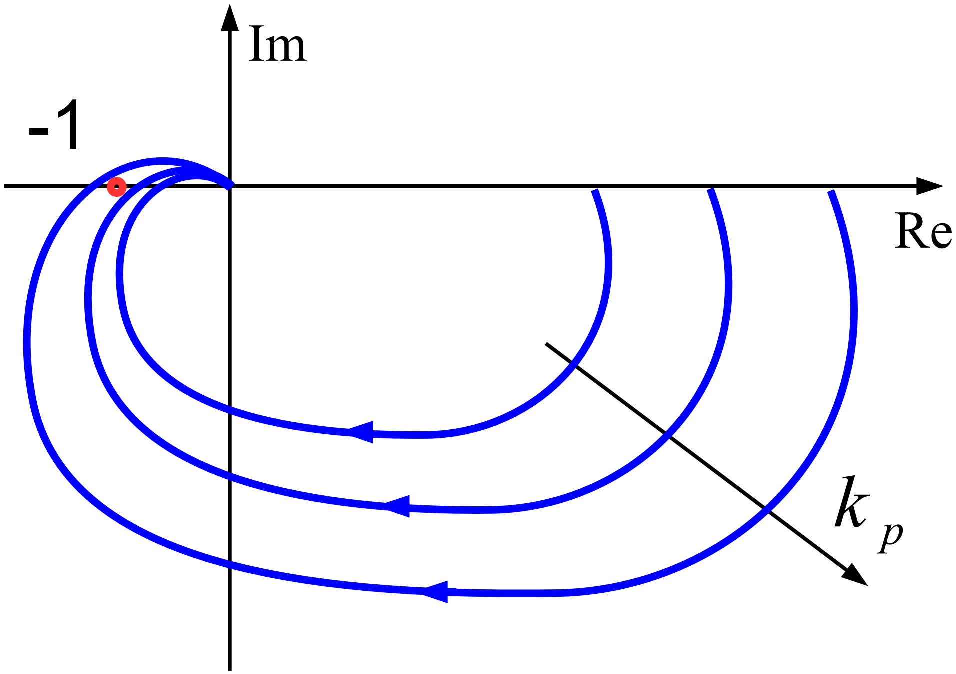


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)\,G(s)}{1+G_P(s)\,G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)\,G(s)$$

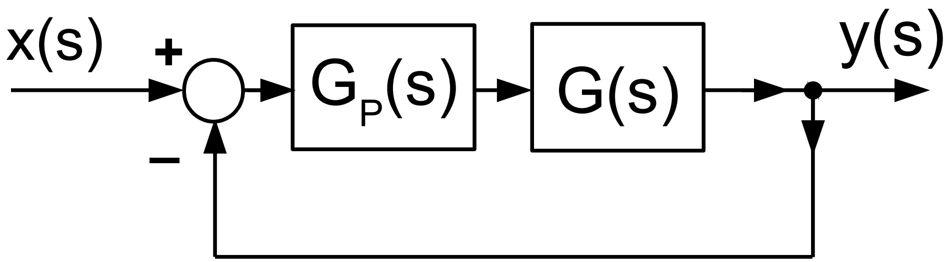
$$G_P(s)=k_P$$

podsumowanie:
większy kp → mniejszy błąd
w stanie ustalonym
mniejszy kp → większy zapas modułu



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem PI

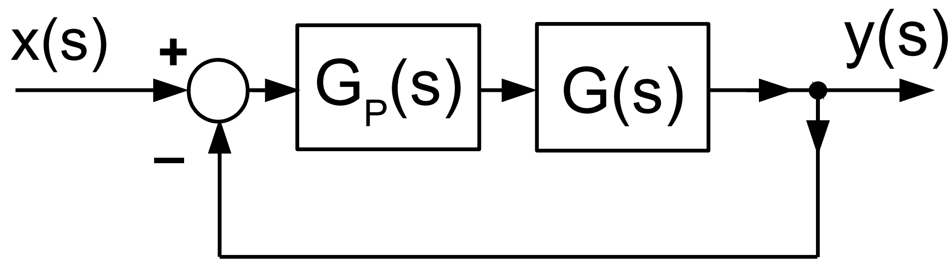


$$G_P(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)\,G(s)$$

Kryterium Nyquista

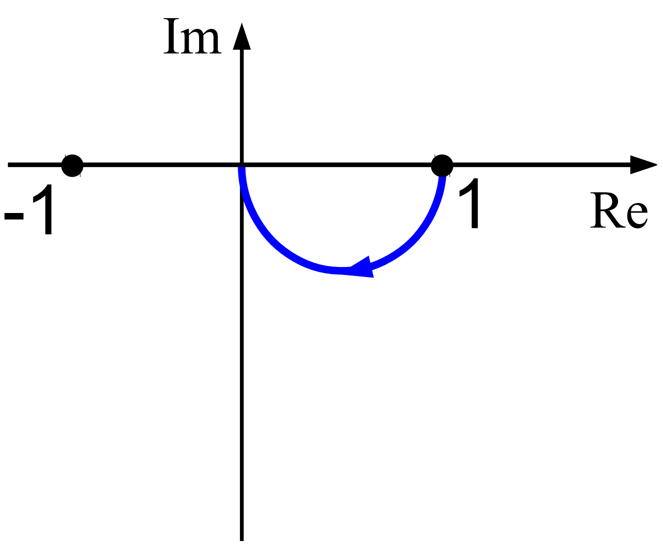
Układ sterowania z regulatorem PI



$$G_P(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

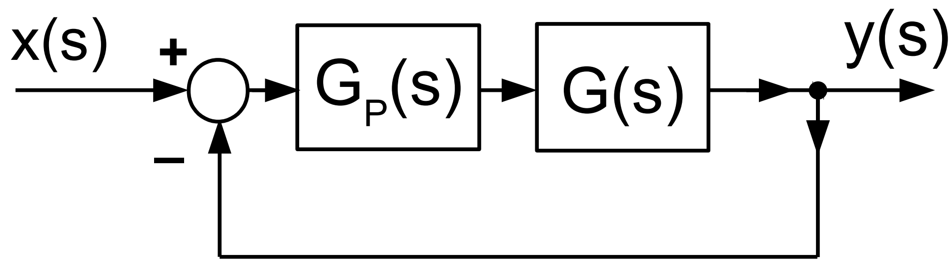
$$G_{otw}(s) = G_P(s)\,G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$



Kryterium Nyquista

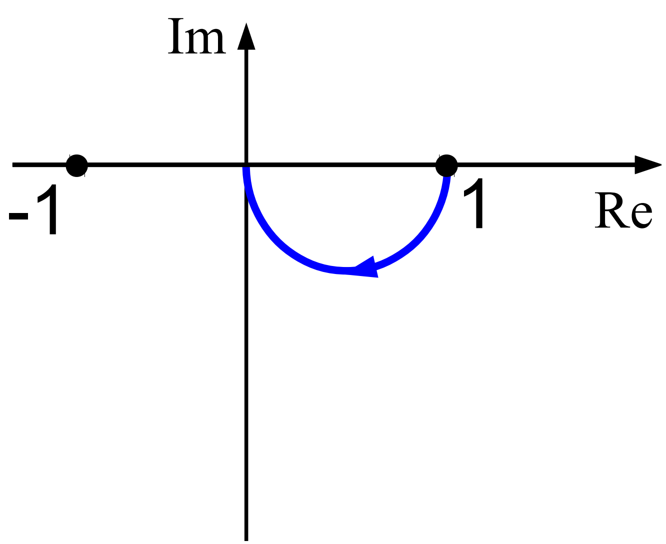
Układ sterowania z regulatorem PI



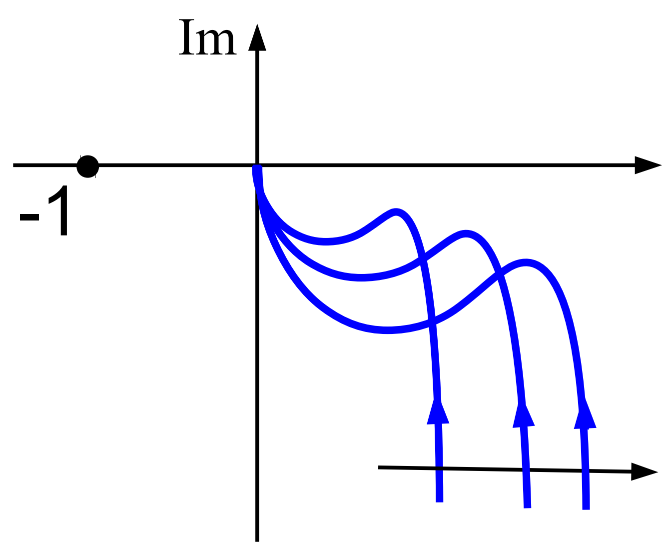
$$G_P(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)\,G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

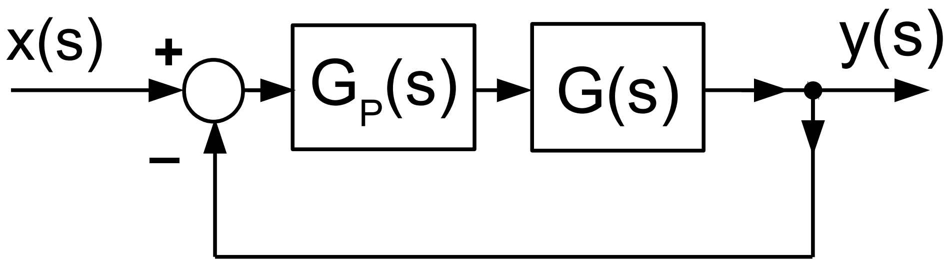


$$G_{otw}(s) = k_p \frac{s T_i + 1}{T_i T s^2 + T_i s}$$



Kryterium Nyquista

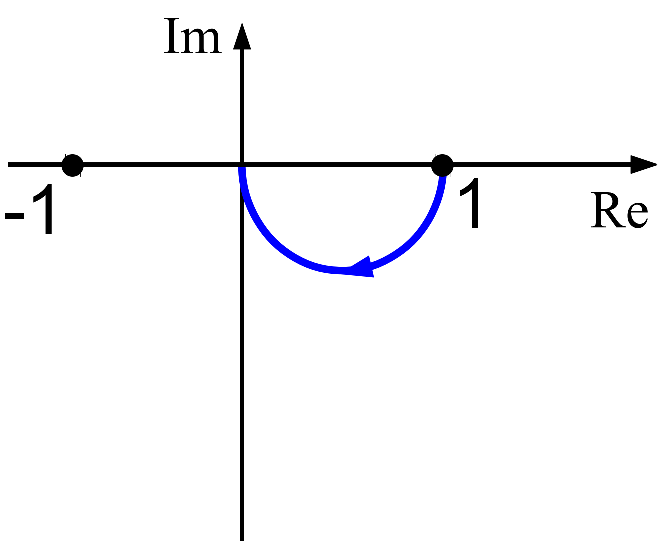
Układ sterowania z regulatorem PI



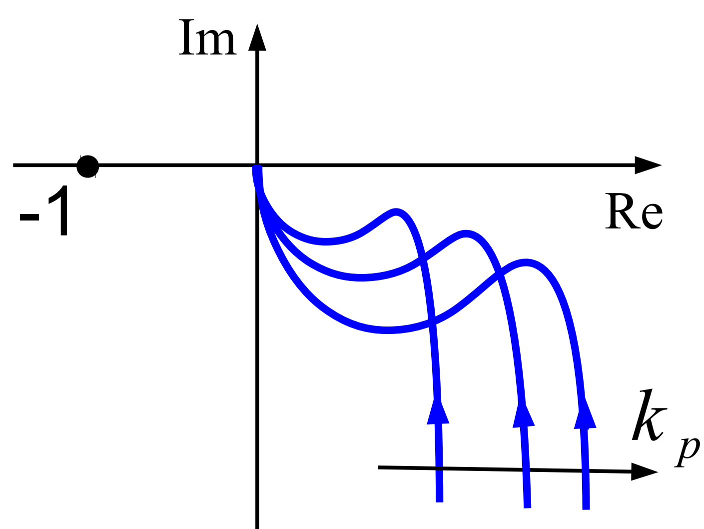
$$G_P(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)\,G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$



$$G_{otw}(s) = k_p^2 \frac{s T_i^2 + 2 T_i}{T_i^3 T s^2 + T_i^2 s}$$



G_{otw} jest na granicy stabilności,

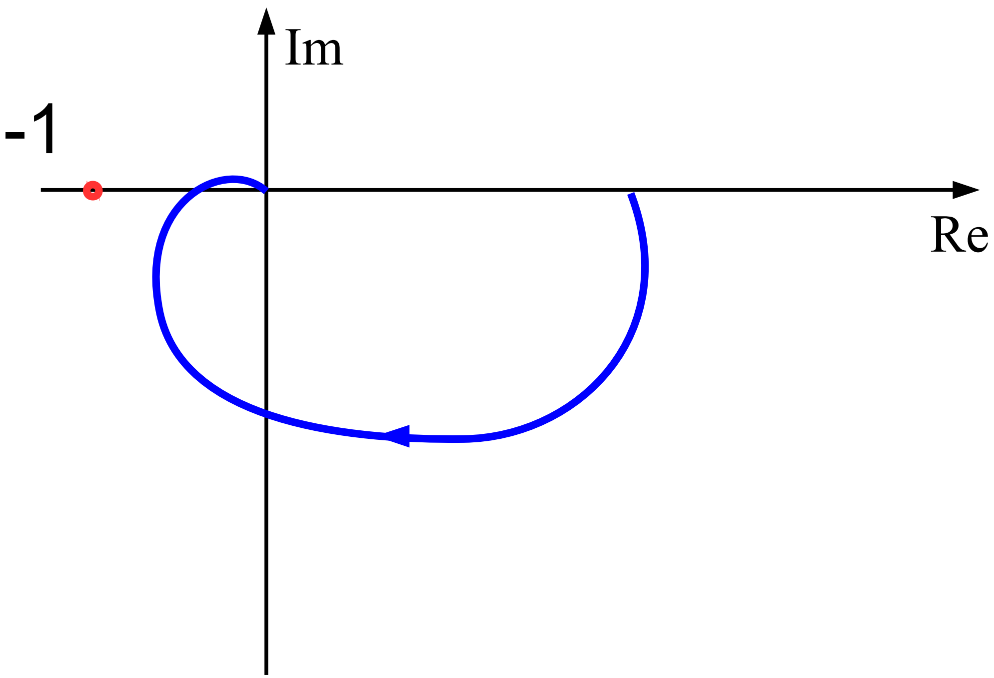
G_{zam} jest stabilny

$G_{otw}\ (\omega=0) \rightarrow \infty$ więc błąd w stanie ustalonym $\rightarrow 0$

Korekcja

Wpływ dodatkowego wzmocnienia na układ

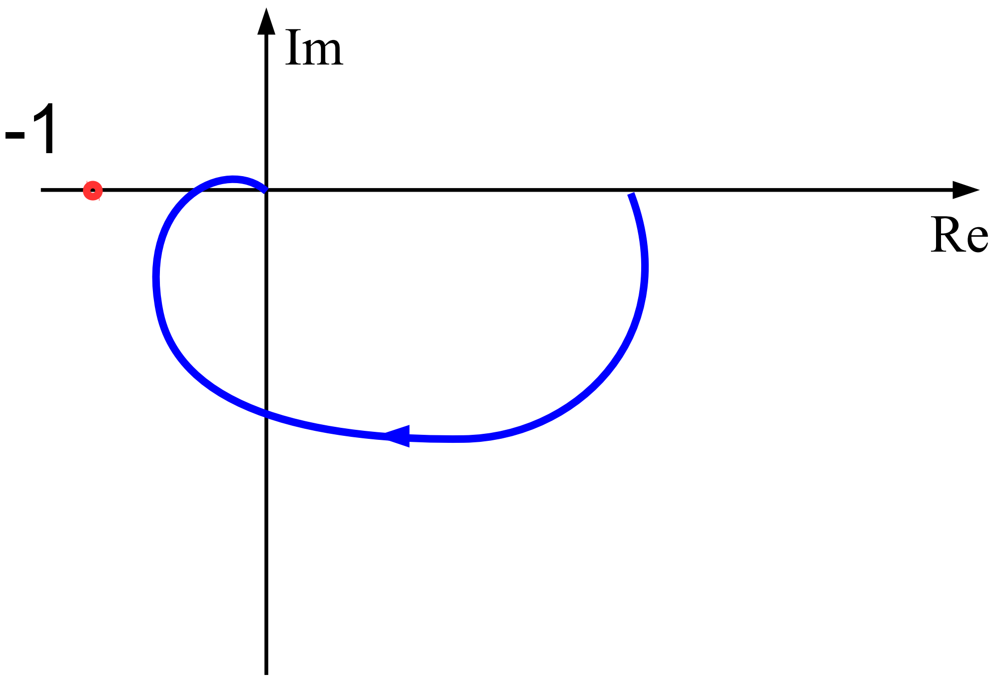
$$G(s)$$



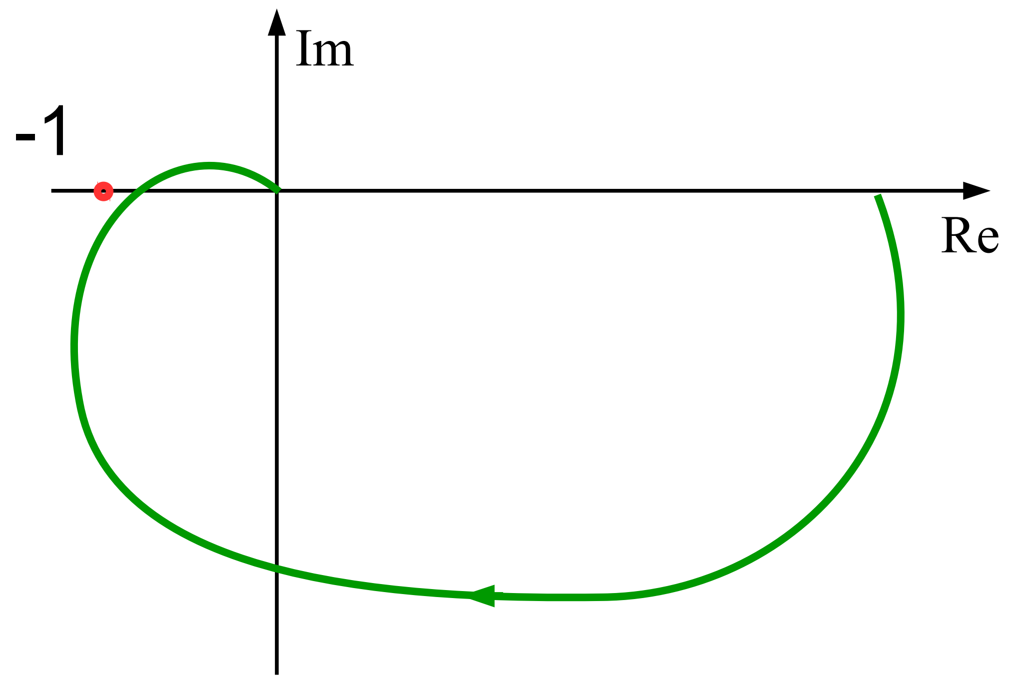
Korekcja

Wpływ dodatkowego wzmocnienia na układ

$G(s)$



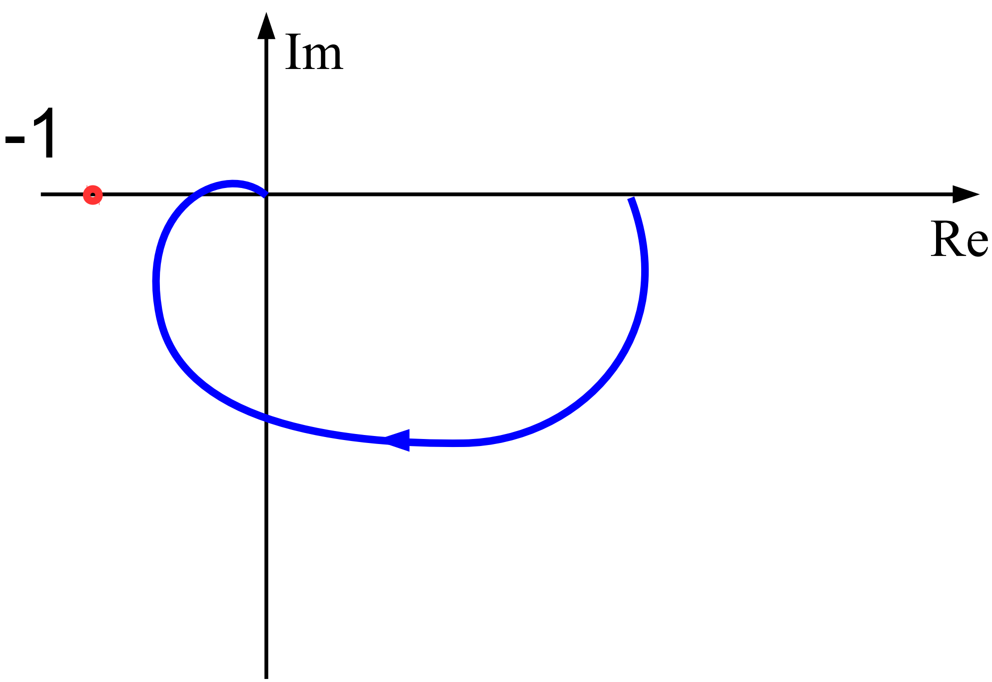
$k \cdot G(s)$



Korekcja

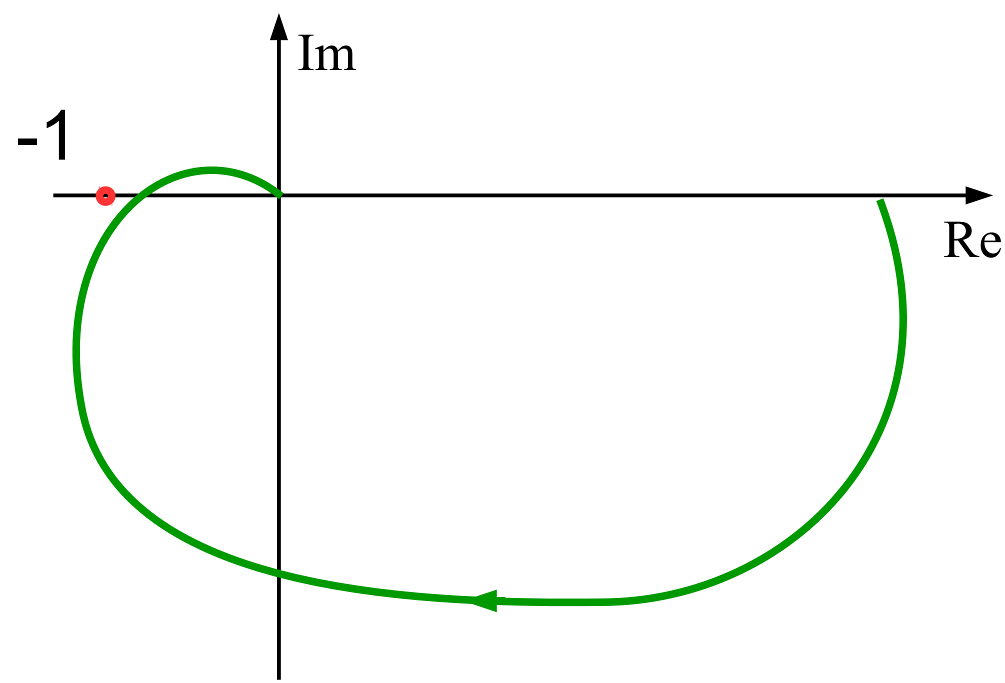
Wpływ dodatkowego wzmocnienia na układ

$G(s)$



Większy zapas
modułu i fazy

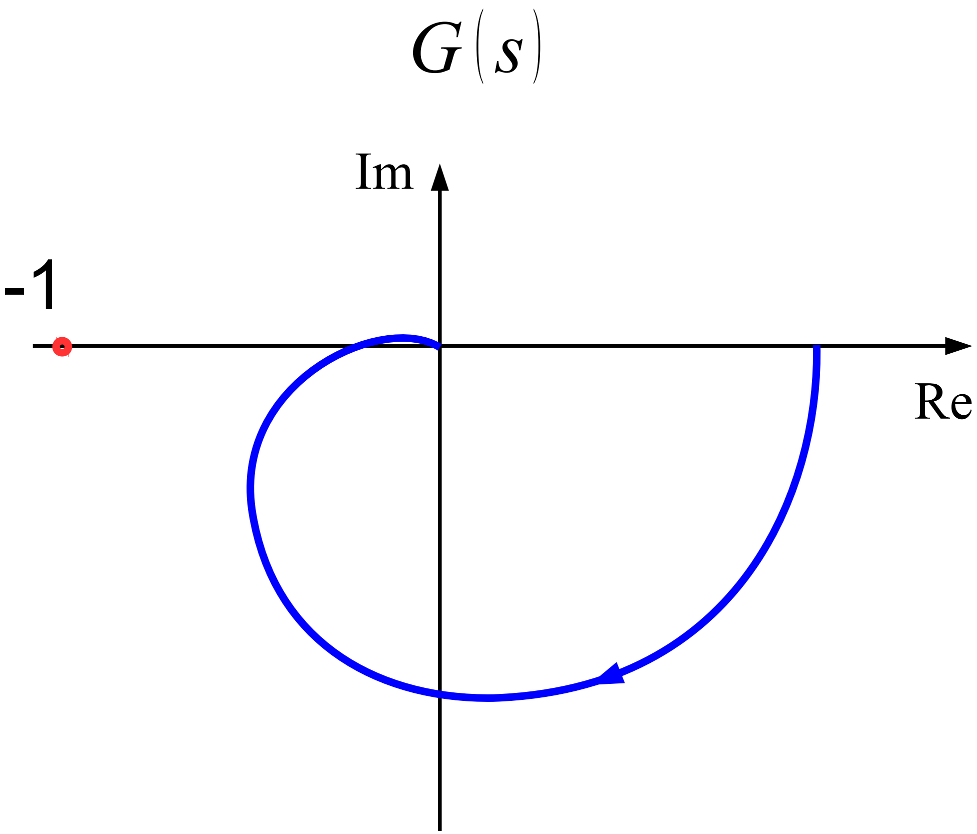
$k \cdot G(s)$



mniejsze błędy

Korekcja

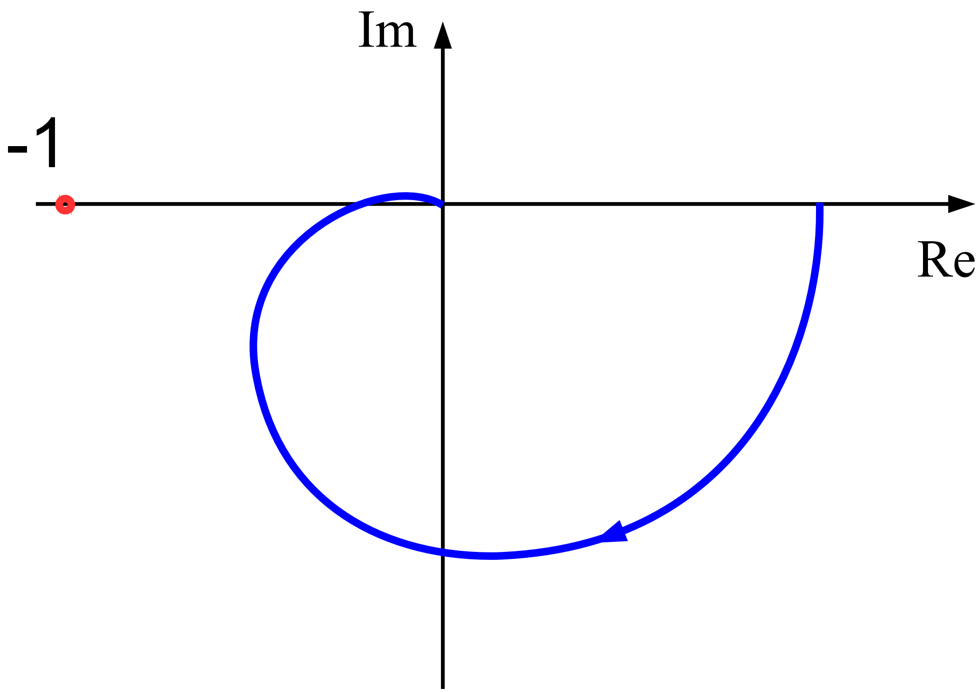
Wpływ opóźnienia na układ



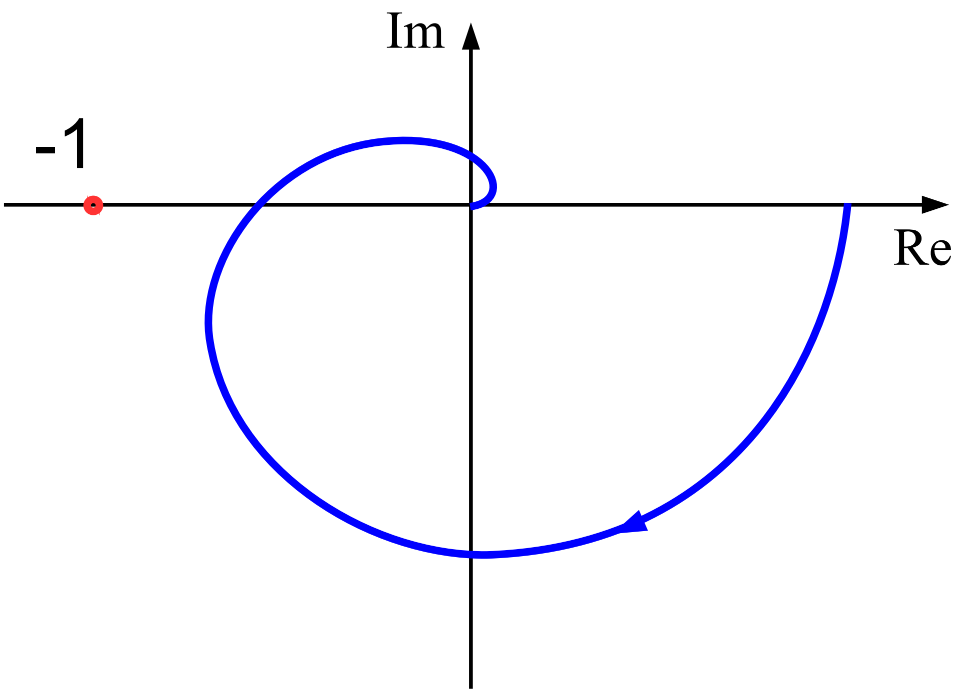
Korekcja

Wpływ opóźnienia na układ

$G(s)$



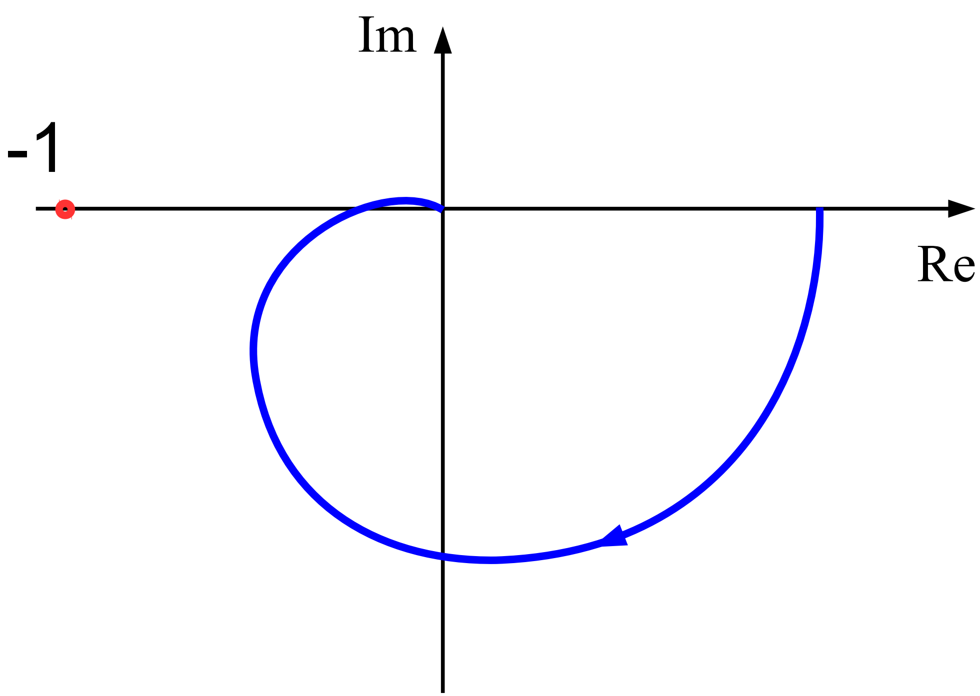
$G(s) \cdot e^{-\tau s}$



Korekcja

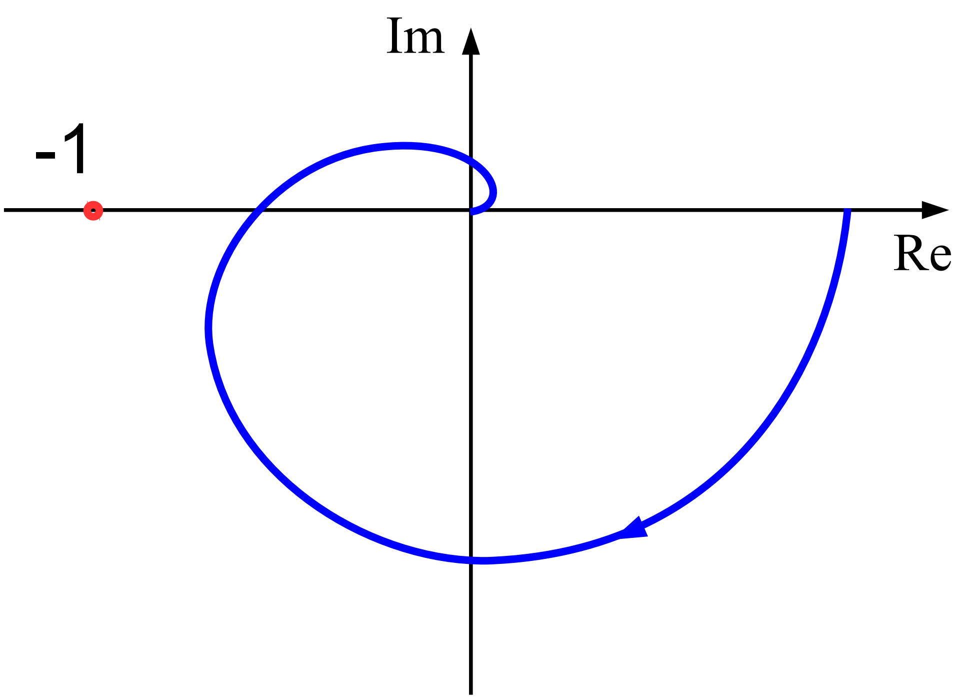
Wpływ opóźnienia na układ

$G(s)$



Większy zapas
modułu i fazy

$G(s) \cdot e^{-\tau s}$



Mniejszy zapas
modułu i fazy

Korekcja

Przez opóźnienie $$K(s)=\frac{1+Ts}{1+as+bs^2}$$

Układem PD $$K(s)=k_P\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1},\ \alpha<1$$

Przez całkowanie $$K(s)=1+\frac{k}{1+Ts}$$

Układem PI $$K(s)=\alpha\frac{Ts+1}{\alpha Ts+1},\ \alpha>1$$

Układem PID $$K(s)=k\left(T_d s+1\right)\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$$

Materiał na egzamin – wykłady od 1 do 13
(1120 slajdów...)

Wykład 14 – powtórzenie, uzupełnienie,
informacje o egzaminie,
konsultacje, ankiety

Wykład 15 – współczesne problemy teorii
sterowania, konsultacje