



Politechnika Warszawska

Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

Instytut Podstaw Budowy Maszyn

Zakład Mechaniki

<http://www.ipbm.simr.pw.edu.pl/>



Teoria maszyn i podstawy automatyki

semestr zimowy 2016/2017

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 10

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki z przykładami.

Licencja: tylko do edukacyjnego użytku studentów Politechniki Warszawskiej.

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja operatorowa
Proporcjonalny (bezinercyjny)	$y(t) = ku(t)$	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{Ts + 1}$
Całkujący	$y(t) = k \int_0^t u(t) dt$ or $\frac{dy(t)}{dt} = ku(t)$	$\frac{k}{s}$

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja operatorowa
Różniczkujący idealny	$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	$\frac{ks}{Ts + 1}$

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja operatorowa
Opóźniający	$y(t) = u(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu (oscylacyjny)	$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

Element proporcjonalny

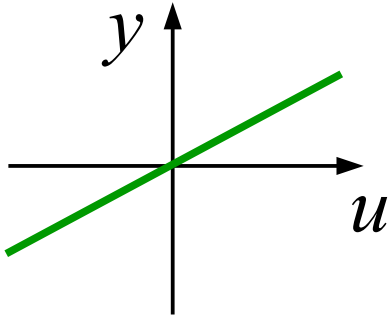
1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

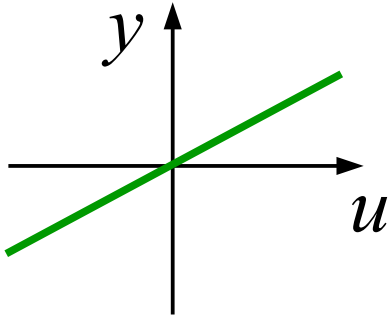
2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

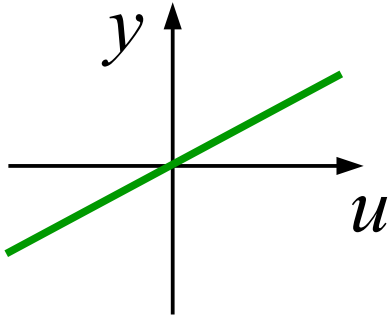


3. Transmitancja:

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

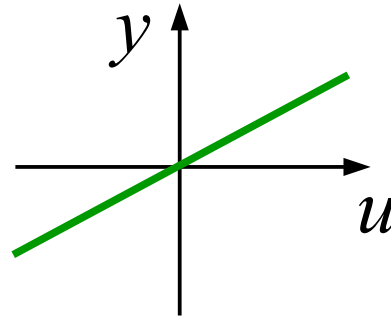


3. Transmitancja: $G(s) = k$

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



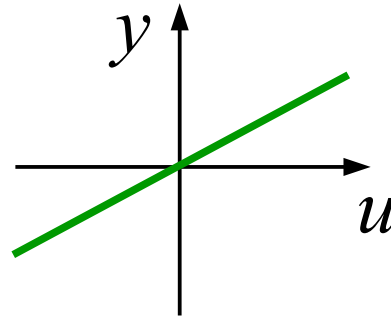
3. Transmitancja: $G(s) = k$

4. Odp. skokowa: for $u(t) = u_0 1(t)$

Element proporcjonalny

1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



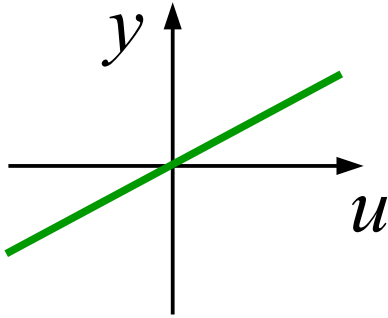
3. Transmitancja: $G(s) = k$

4. Odp. skokowa: $y(t) = k u_0 1(t)$ for $u(t) = u_0 1(t)$

Element proporcjonalny

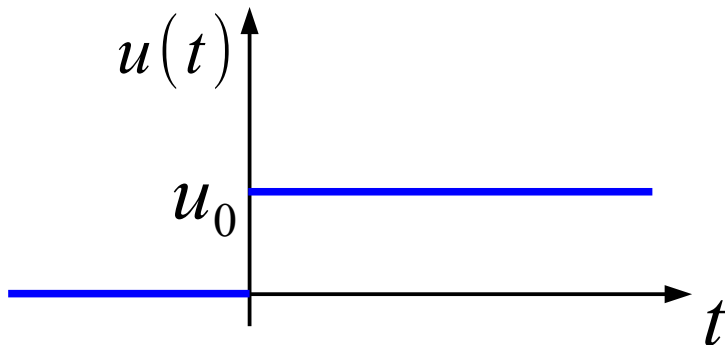
1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $G(s) = k$

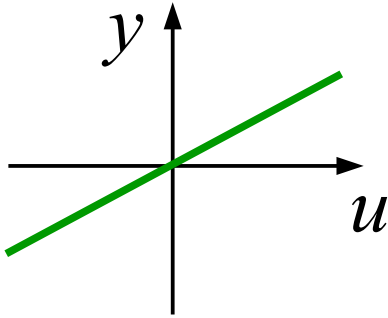
4. Odp. skokowa: $y(t) = k u_0 1(t)$ for $u(t) = u_0 1(t)$



Element proporcjonalny

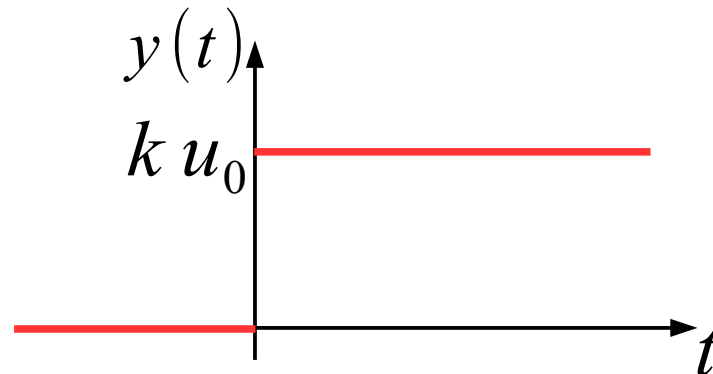
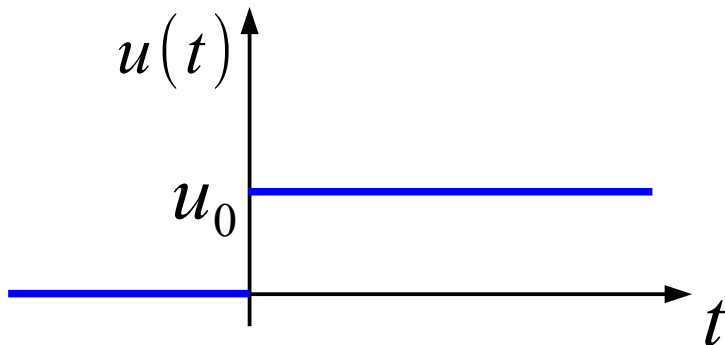
1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $G(s) = k$

4. Odp. skokowa: $y(t) = k u_0 1(t)$ for $u(t) = u_0 1(t)$



Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa:

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$ $P(\omega) = k$, $Q(\omega) = 0$

Element proporcjonalny

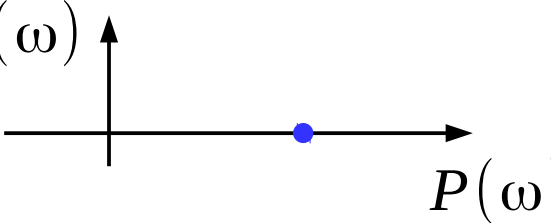
5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$ $P(\omega) = k$, $Q(\omega) = 0$

6. Wykres Nyquista:

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$ $P(\omega) = k$, $Q(\omega) = 0$

6. Wykres Nyquista: $Q(\omega)$

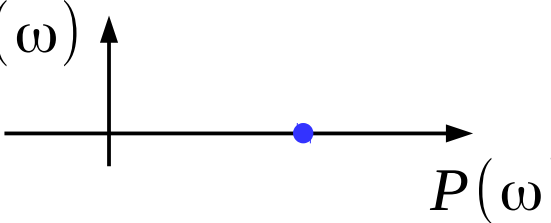


$P(\omega)$

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$ $P(\omega) = k$, $Q(\omega) = 0$

6. Wykres Nyquista: $Q(\omega)$



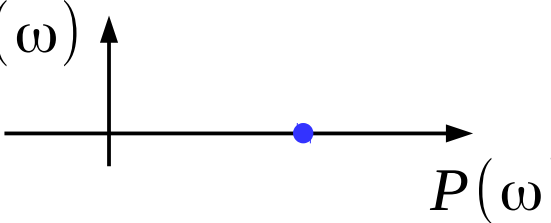
The diagram shows a Nyquist plot in the complex plane. The horizontal axis is labeled $P(\omega)$ and the vertical axis is labeled $Q(\omega)$. A single blue dot is plotted on the positive real axis, representing the frequency response of the proportional element.

7. Wykres Bodego:

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$ $P(\omega) = k$, $Q(\omega) = 0$

6. Wykres Nyquista: $Q(\omega)$



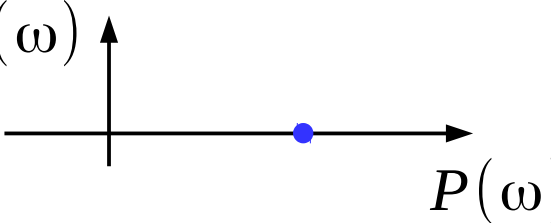
The diagram shows a Nyquist plot in the complex plane. The horizontal axis is labeled $P(\omega)$ and the vertical axis is labeled $Q(\omega)$. A single blue dot is plotted on the positive $P(\omega)$ axis, representing the frequency response of the proportional element.

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$
 $L(\omega) = 20 \log A(\omega)$

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$ $P(\omega) = k$, $Q(\omega) = 0$

6. Wykres Nyquista: $Q(\omega)$



The diagram shows a Nyquist plot in the complex plane. The horizontal axis is labeled $P(\omega)$ and the vertical axis is labeled $Q(\omega)$. A single blue dot is plotted on the positive $P(\omega)$ axis, representing the frequency response of a proportional element.

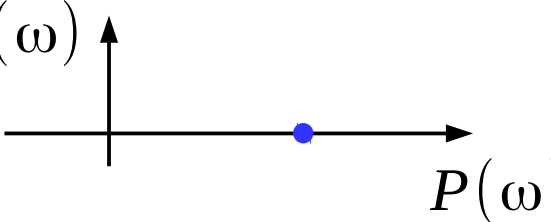
7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \geq 0 \\ \pi, & \text{dla } k < 0 \end{cases}$$

Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$ $P(\omega) = k$, $Q(\omega) = 0$

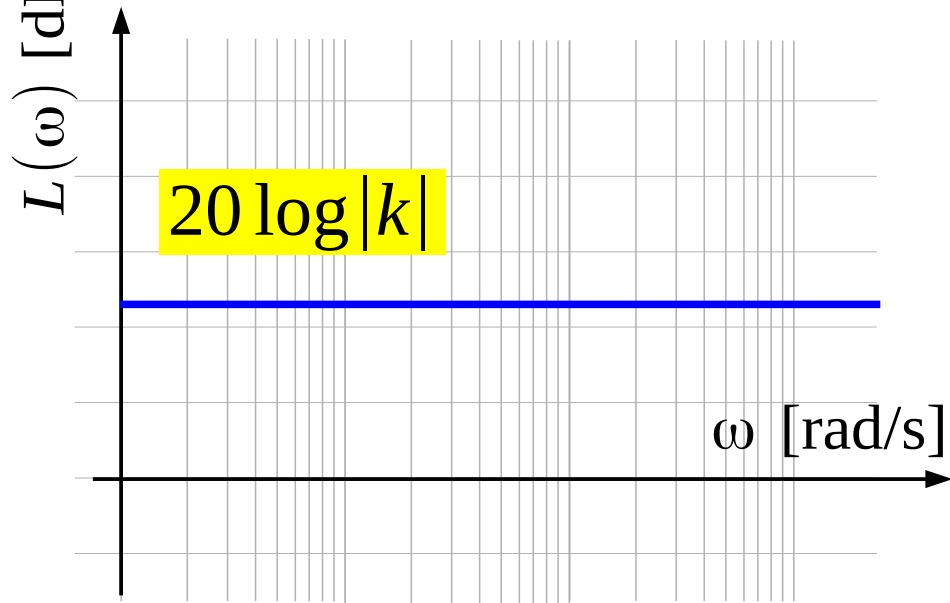
6. Wykres Nyquista: $Q(\omega)$



The Nyquist plot shows a horizontal axis labeled $P(\omega)$ and a vertical axis labeled $Q(\omega)$. A single blue dot is plotted on the positive $P(\omega)$ axis, representing the frequency response of a proportional element.

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$

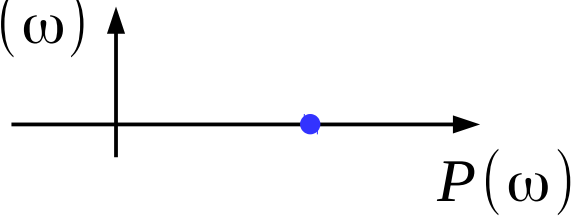
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \geq 0 \\ \pi, & \text{dla } k < 0 \end{cases}$$



Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$ $P(\omega) = k$, $Q(\omega) = 0$

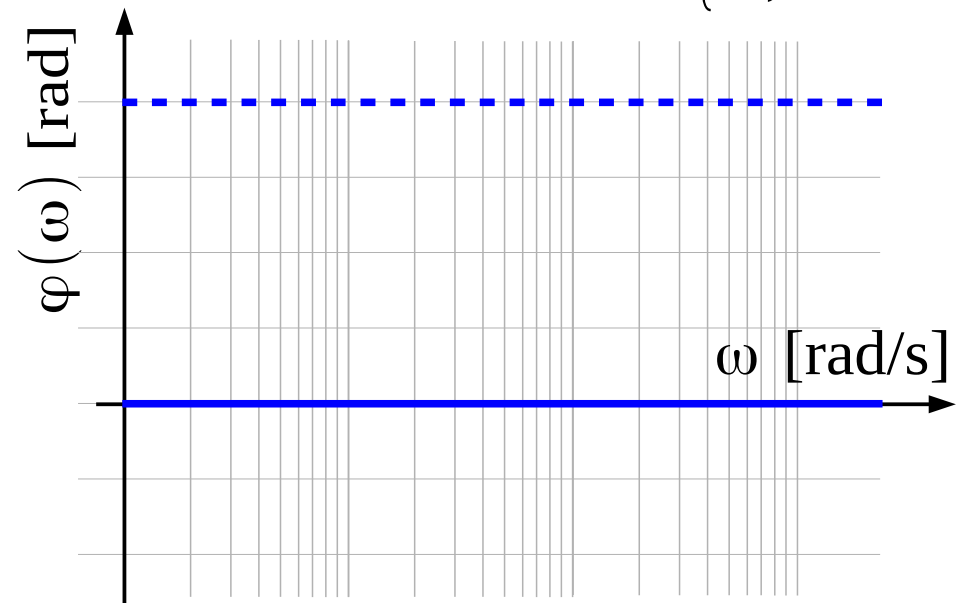
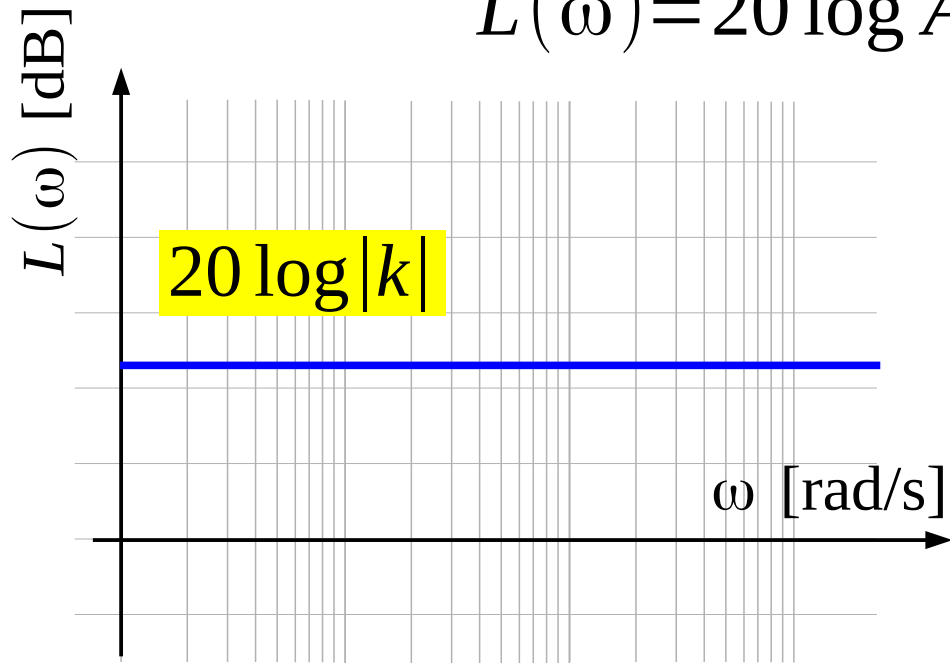
6. Wykres Nyquista: $Q(\omega)$



7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

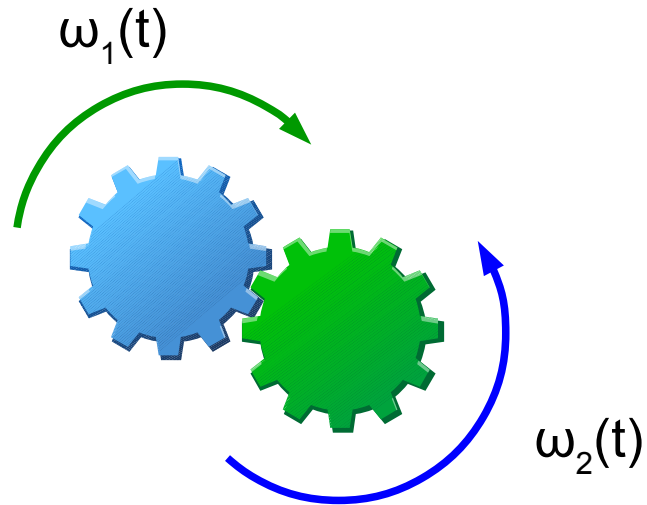
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \geq 0 \\ \pi, & \text{dla } k < 0 \end{cases}$$



Element proporcjonalny

Przykłady

1



przekładnia zębata:

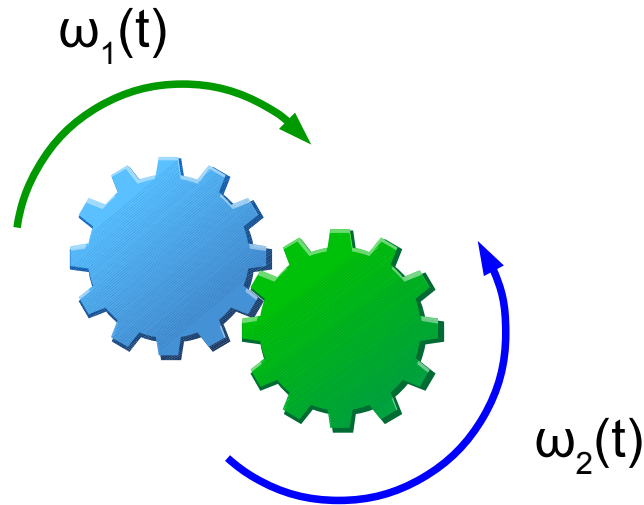
wejście – prędkość kąтова $\omega_1(t)$

wyjście – prędkość kąтова $\omega_2(t)$

Element proporcjonalny

Przykłady

1

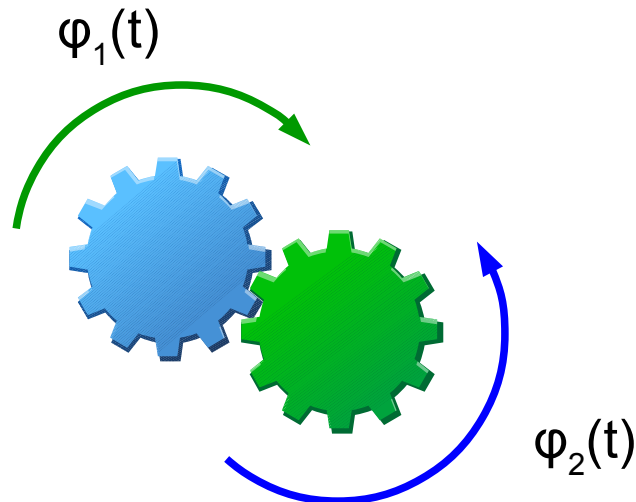


przekładnia zębata:

wejście – prędkość kątowna $\omega_1(t)$

wyjście – prędkość kątowna $\omega_2(t)$

2



przekładnia zębata:

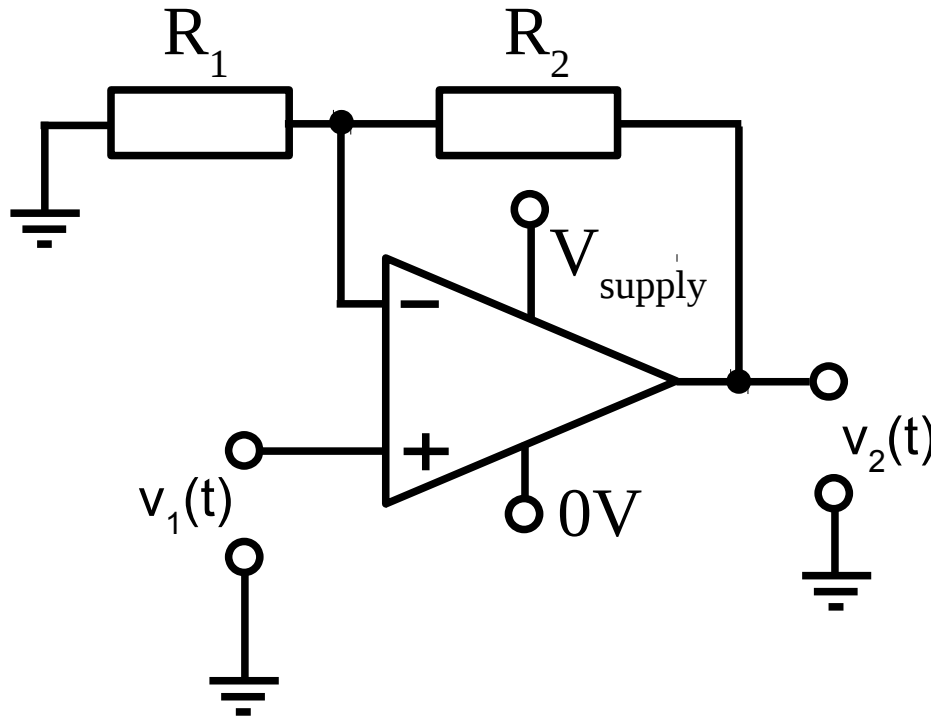
wejście – kąt obrotu $\varphi_1(t)$

wyjście – kąt obrotu $\varphi_2(t)$

Element proporcjonalny

Przykłady

3



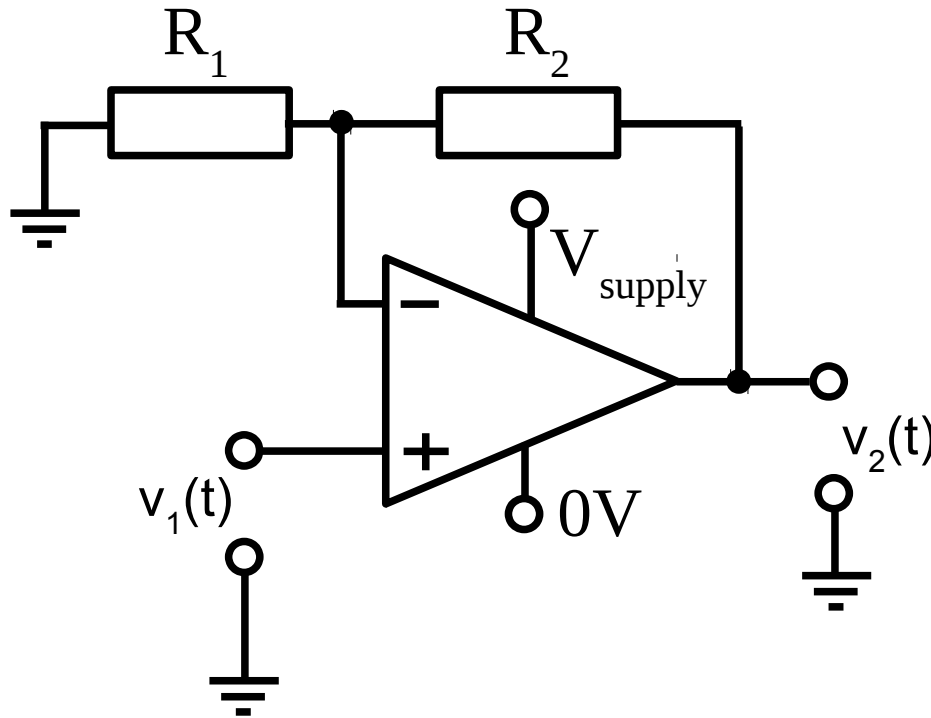
WZMACNIACZ
OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = v_1(t) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

Element proporcjonalny

Przykłady

3



WZMACNIACZ
OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = v_1(t) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

4

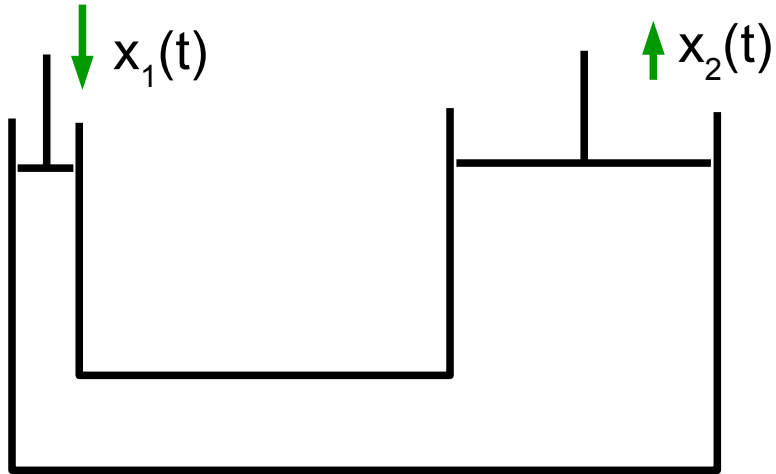


BELKA w stanie ustalonym:
wejście – siła F_1
wyjście – siła F_2

Element proporcjonalny

Przykłady

5

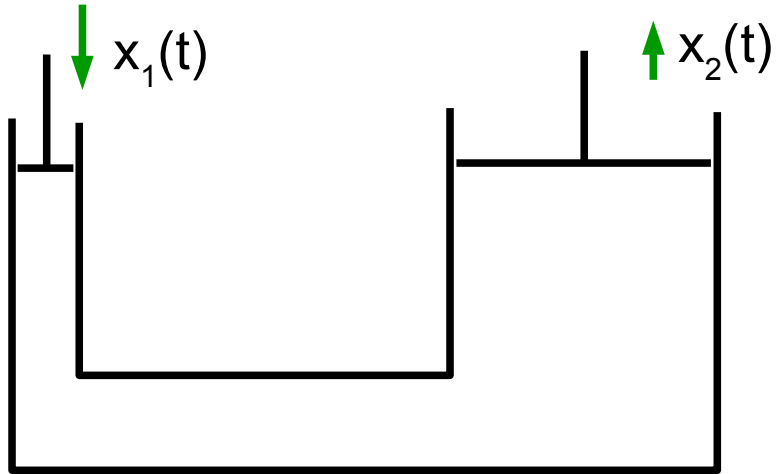


PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:
wejście – przemieszczenie $x_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x_2(t)$

Element proporcjonalny

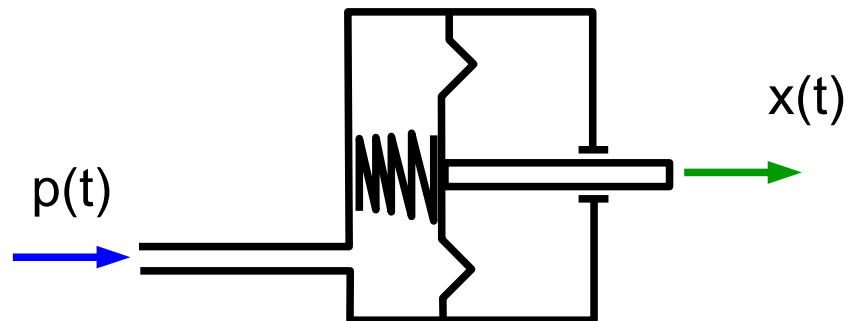
Przykłady

5



PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:
wejście – przemieszczenie $x_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x_2(t)$

6



SIŁOWNIK PNEUMATYCZNY:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x(t)$

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

Element inercyjny pierwszego rzędu

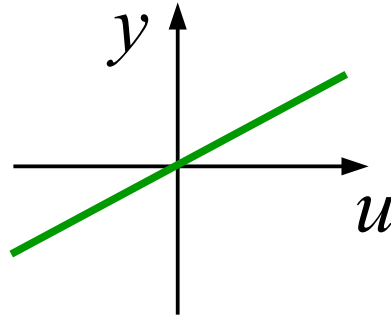
1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

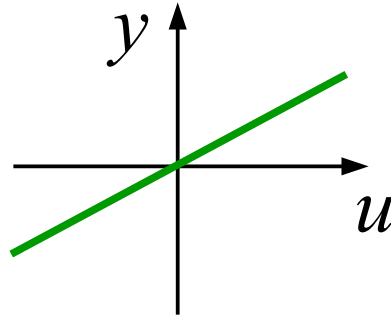
2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

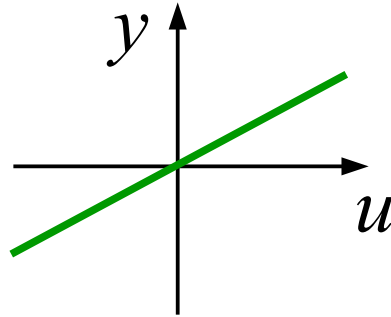


3. Transmitancja:

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $G(s) = \frac{k}{Ts+1}$

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa:

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(Ts + 1)}$

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa:

$$\text{Wejście: } u(t) = u_0 1(t)$$

$$\text{Transformata Laplace'a wejścia: } U(s) = u_0 \frac{1}{s}$$

$$\text{Transformata Laplacea wyjścia: } Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(Ts + 1)}$$

$$\text{Wyjście: } y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 (1 - e^{-t/T})$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

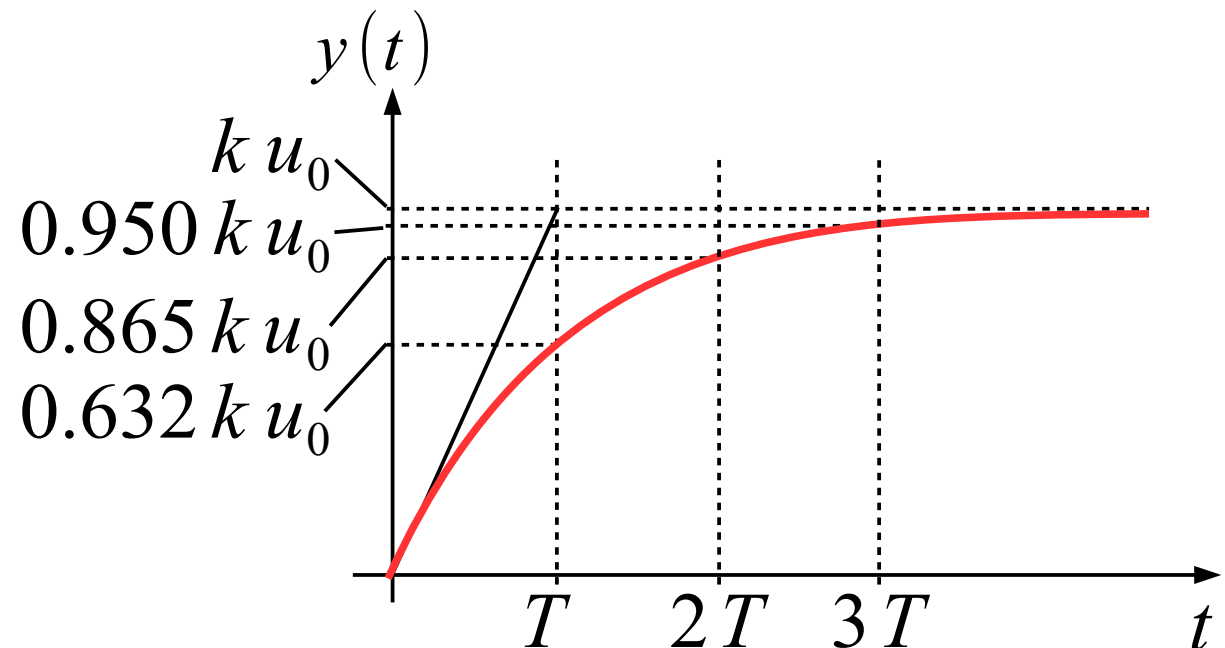
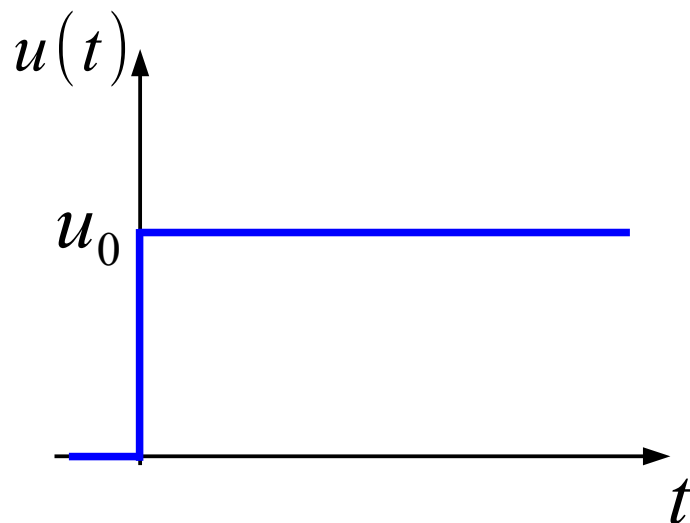
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(Ts + 1)}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 (1 - e^{-t/T})$



Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja
widmowa:

Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:

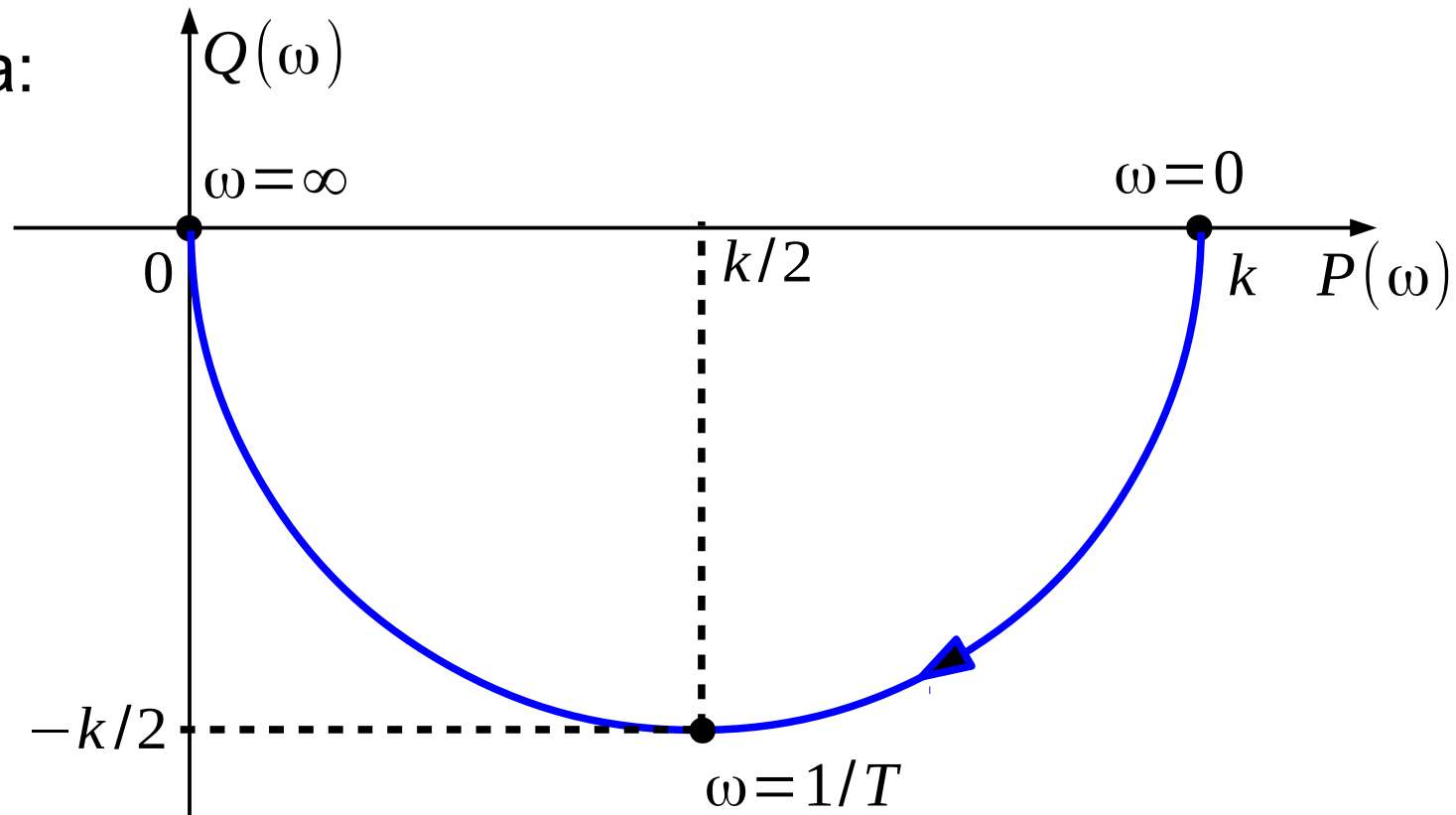
Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:
dla $k > 0$



Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego:

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

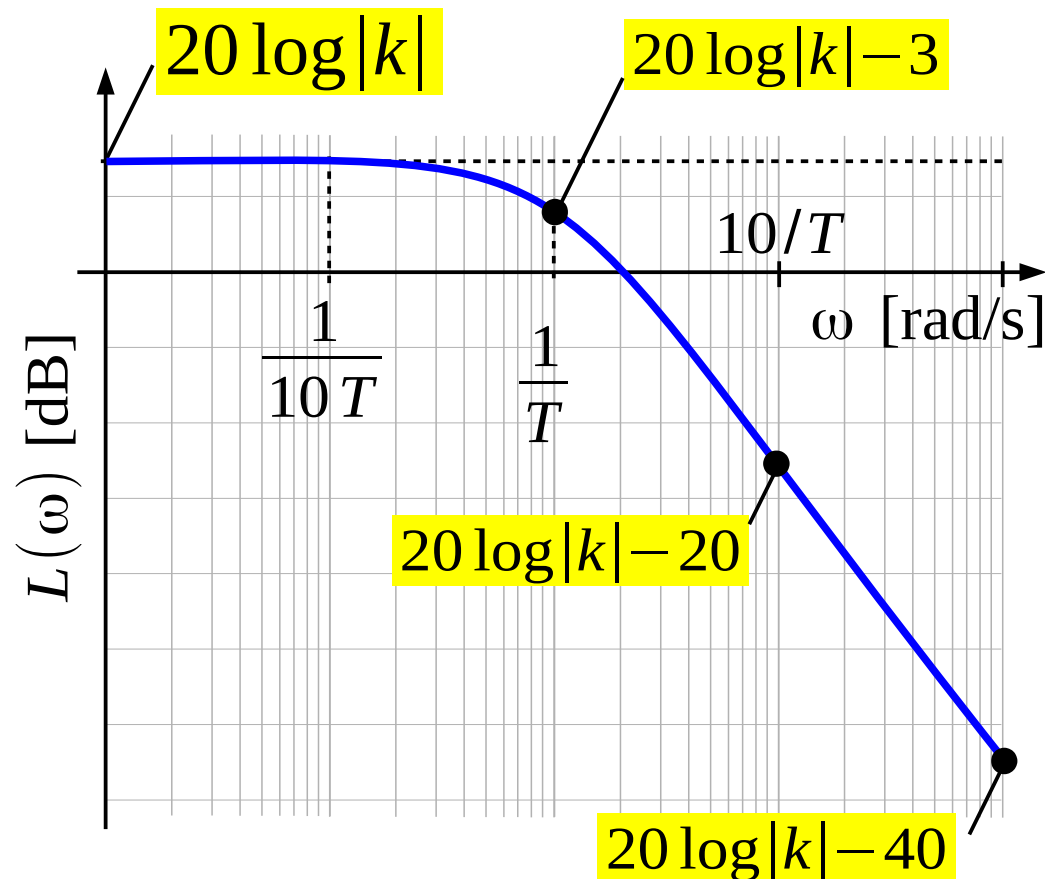
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$



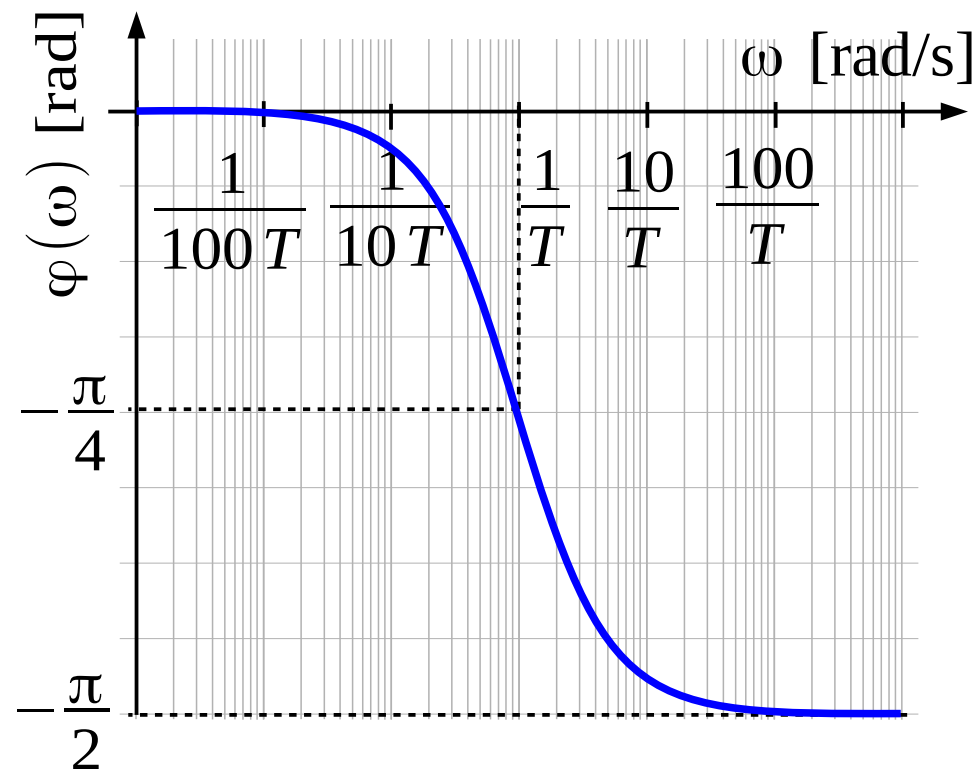
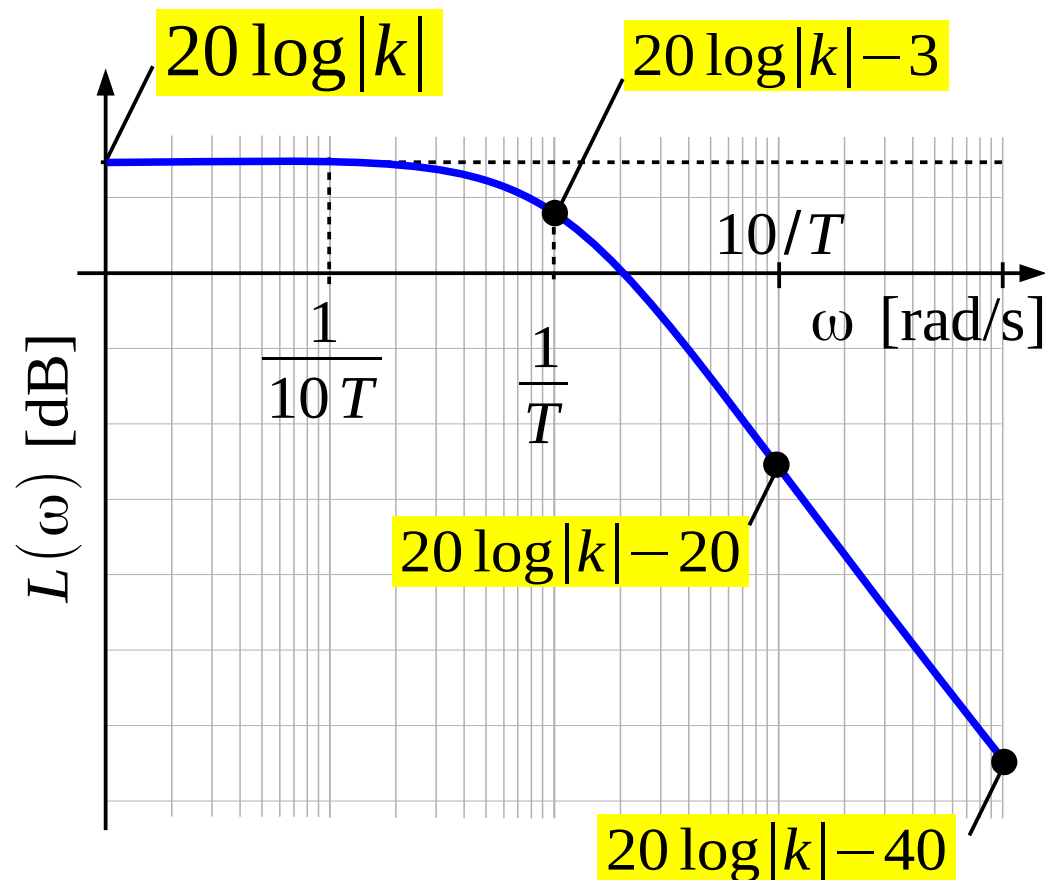
Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$

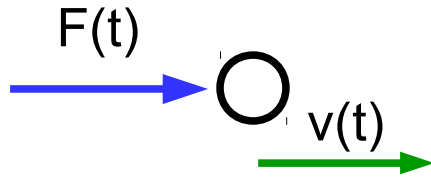
dla $k > 0$



Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

1



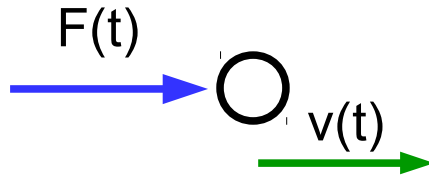
RUCH POSTĘPOWY PUNKTU
MATERIALNEGO Z LINIOWYM
TŁUMIENIEM:
wejście – siła $F(t)$
wyjście – prędkość $v(t)$

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

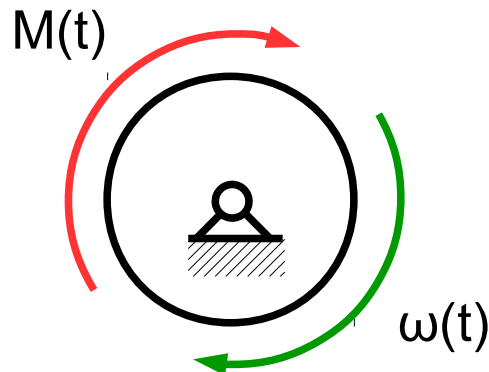
1



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU
MATERIALNEGO Z LINIOWYM
TŁUMIENIEM:
wejście – siła $F(t)$
wyjście – prędkość $v(t)$

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

2

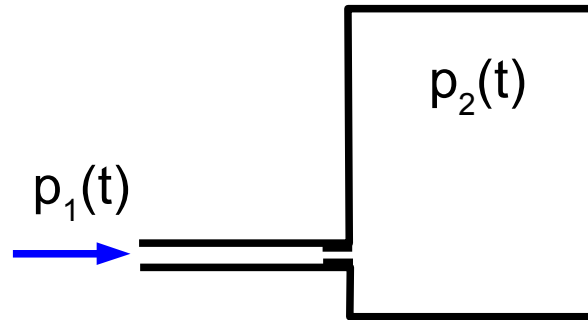


RUCH OBROTOWY BRYŁY
SZTYWNEJ Z LINIOWYM
TŁUMIENIEM:
wejście – moment $M(t)$
wyjście – prędkość kątowna $\omega(t)$

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

3

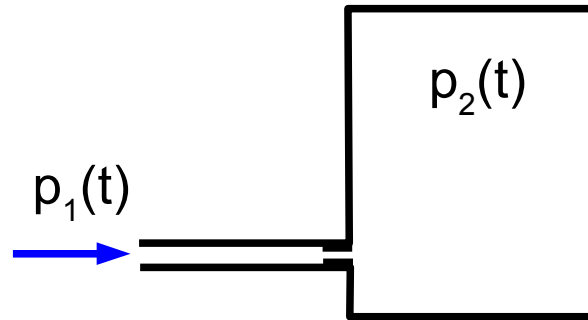


ZBIORNIK POWIETRZA:
wejscie – ciśnienie $p_1(t)$
wyjscie – ciśnienie $p_2(t)$

Element inercyjny pierwszego rzędu

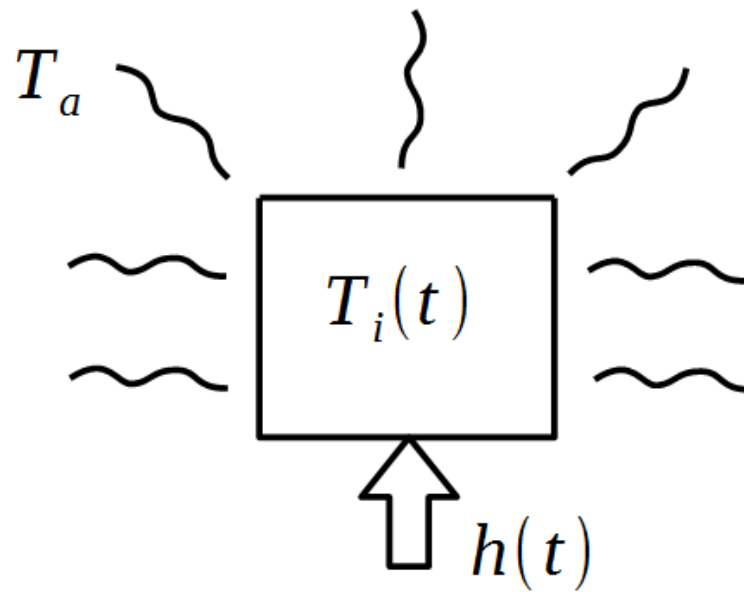
Przykłady

3



ZBIORNIK POWIETRZA:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – ciśnienie $p_2(t)$

4



OGRZEWANY OBIEKT O MAŁEJ
BEZWŁADNOŚCI:
wejście – moc grzałki $h(t)$
wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$

Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

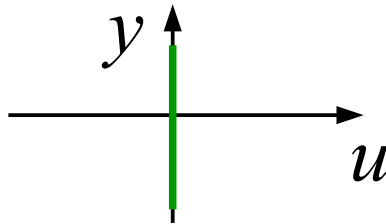
$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$u = 0$$

$$\text{for } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



Element całkujący

1. Równanie:

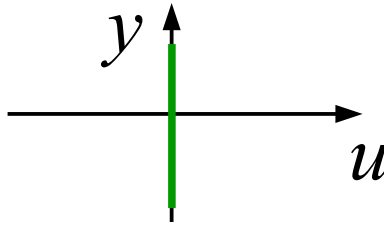
$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$u = 0$$

$$\text{for } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



3. Transmitancja:

Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

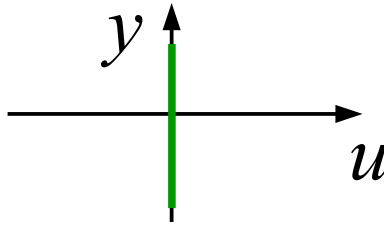
$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$u = 0$$

$$\text{for } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



3. Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

Element całkujący

4. Odp. skokowa:

Element całkujący

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Element całkujący

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s^2}$

Element całkujący

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s^2}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 t$

Element całkujący

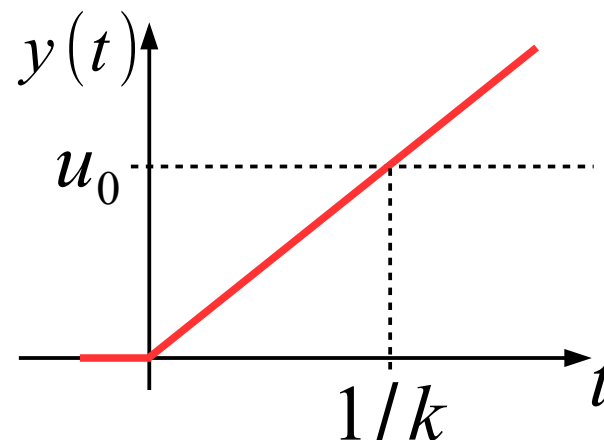
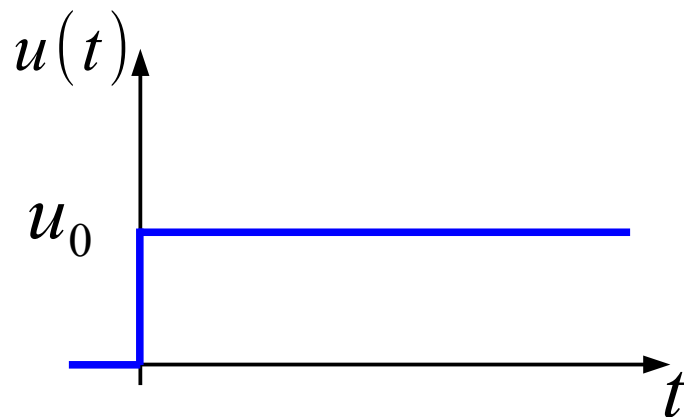
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k u_0}{s^2}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 t$



5. Transmitancja widmowa:

Element całkujący

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

Element całkujący

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

Element całkujący

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:

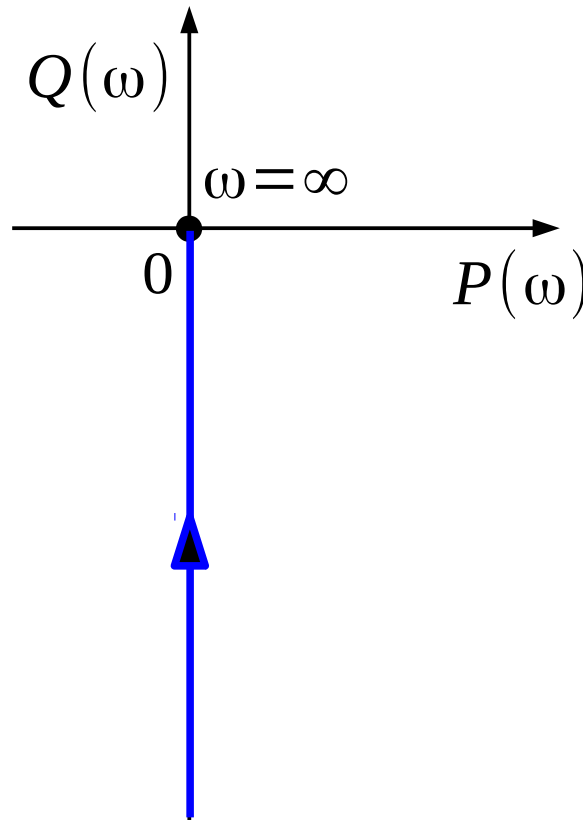
Element całkujący

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:
dla $k > 0$



Element całkujący

7. Wykres Bodego:

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right|$$

Element całkujący

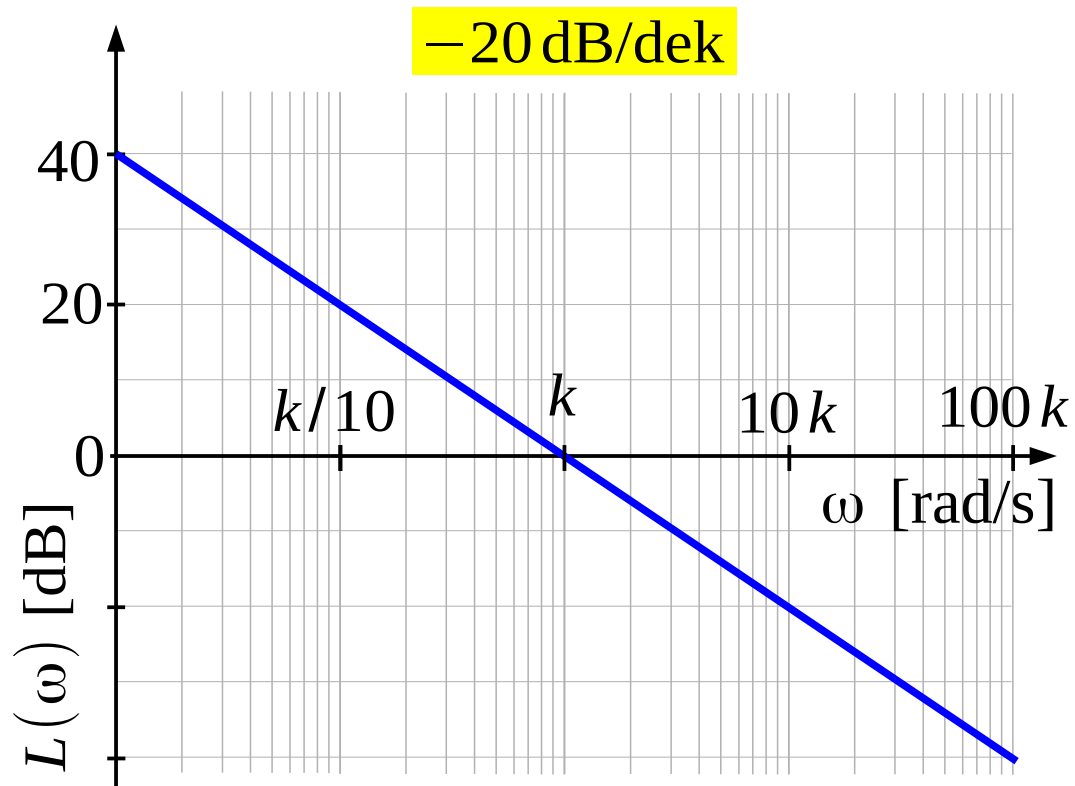
7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\infty)$$

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

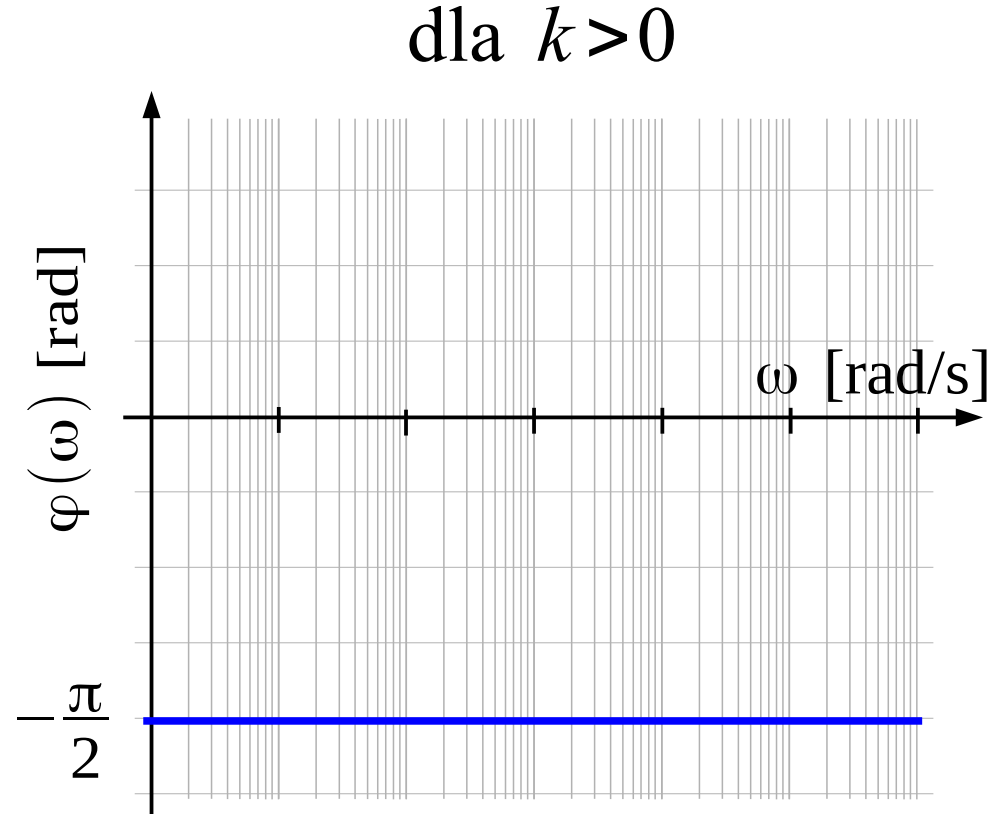
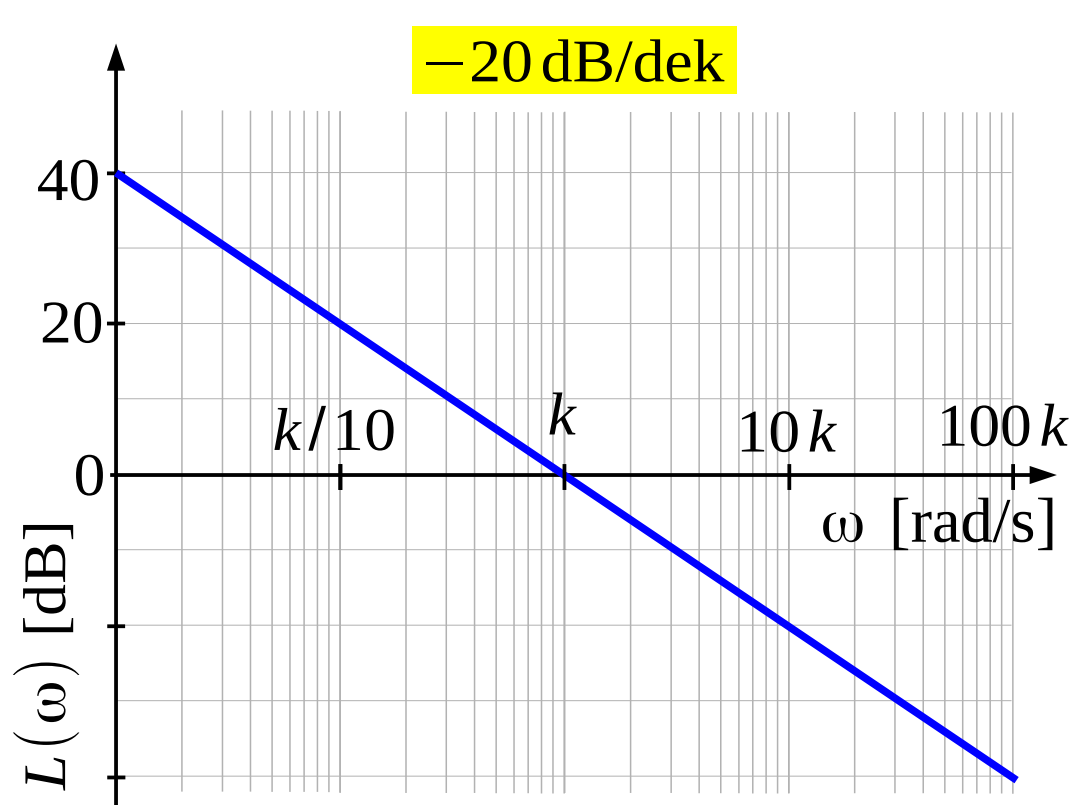
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\infty)$$



Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

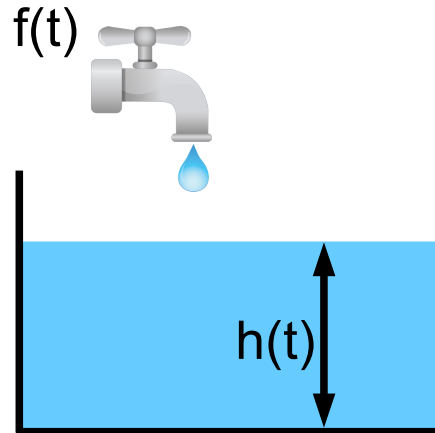
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\infty)$$



Element całkujący

Przykłady

1

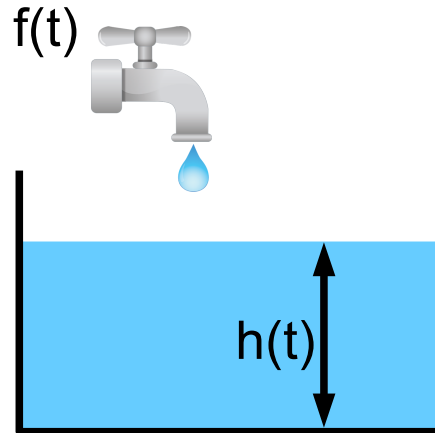


PROSTOPADŁOŚCIENNY
ZBIORNIK PŁYNU:
wejście – wydatek dopływu $f(t)$
wyjście – poziom cieczy $h(t)$

Element całkujący

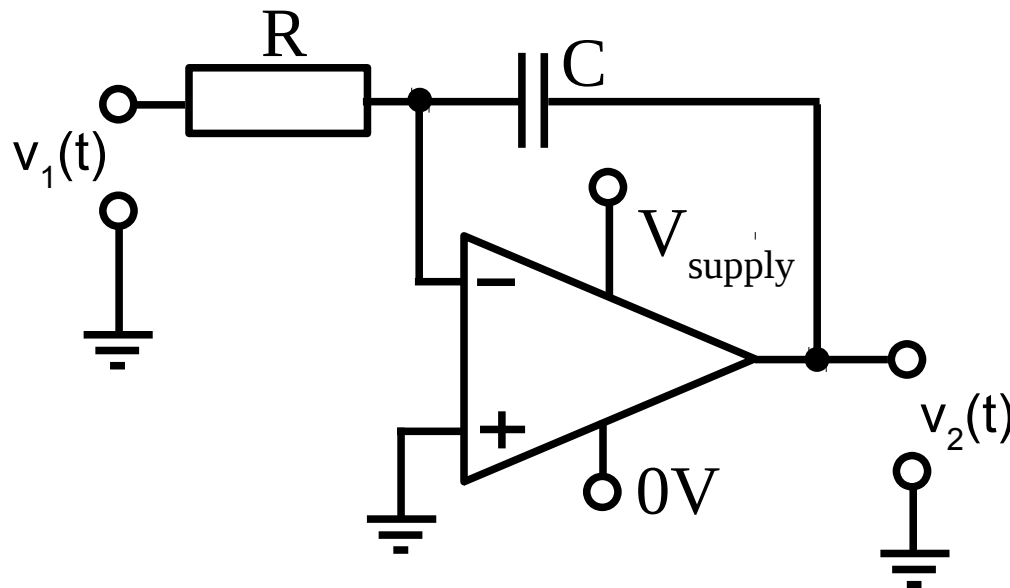
Przykłady

1



PROSTOPADŁOŚCIENNY
ZBIORNIK PŁYNU:
wejście – wydatek dopływu $f(t)$
wyjście – poziom cieczy $h(t)$

2



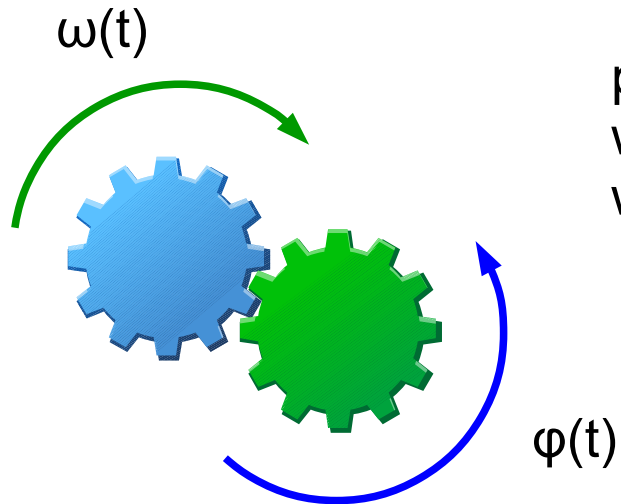
WZMACNIACZ
OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t v_1(t) dt$$

Element całkujący

Przykłady

3

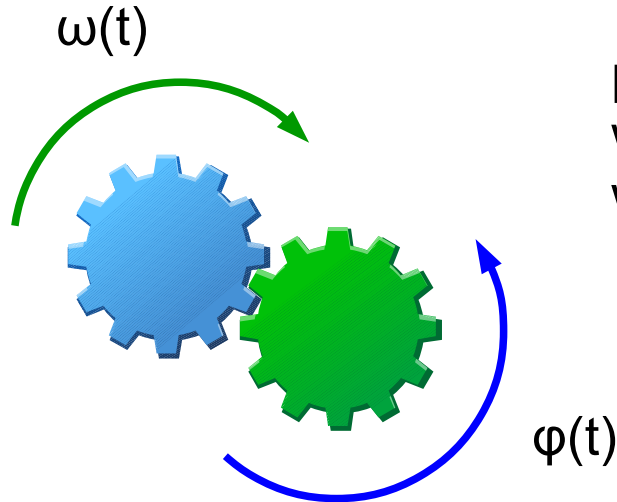


przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa $\omega(t)$
wyjście – kąt obrotu $\phi(t)$

Element całkujący

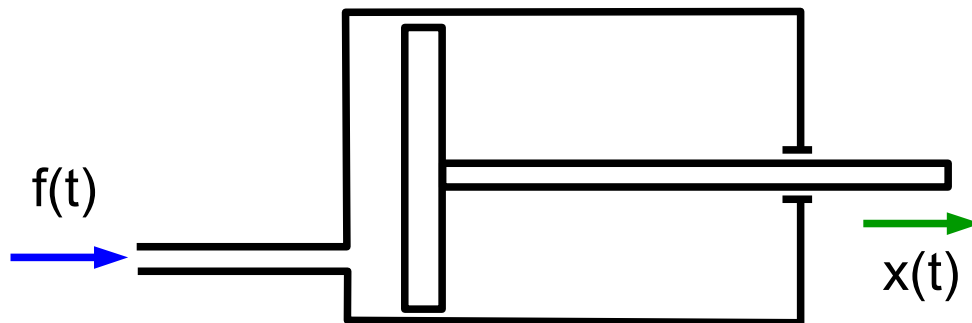
Przykłady

3



przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa $\omega(t)$
wyjście – kąt obrotu $\phi(t)$

4



CYLINDER HYDRAULICZNY:
wejście – wydatek cieczy $f(t)$
wyjście – przemieszczenie $x(t)$

Element różniczkujący idealny

1. Równanie:
$$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

Transformata Laplacea wyjścia:
$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}$$

Element różniczkujący idealny

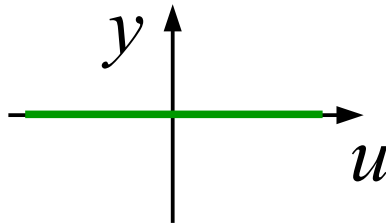
1. Równanie: $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

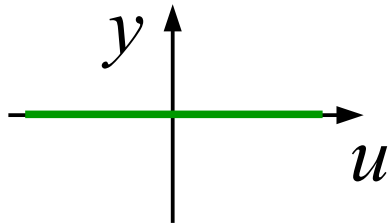
2. Charakterystyka statyczna: $y = 0$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = 0$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

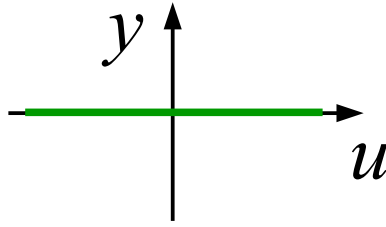


3. Transmitancja:

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = 0$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $G(s) = k s$

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa:

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = k u_0$

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa:

$$\text{Wejście: } u(t) = u_0 1(t)$$

$$\text{Transformata Laplacea wejścia: } U(s) = u_0 \frac{1}{s}$$

$$\text{Transformata Laplacea wyjścia: } Y(s) = G(s) U(s) = k u_0$$

$$\text{Wyjście: } y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 \delta(t)$$

Element różniczkujący idealny

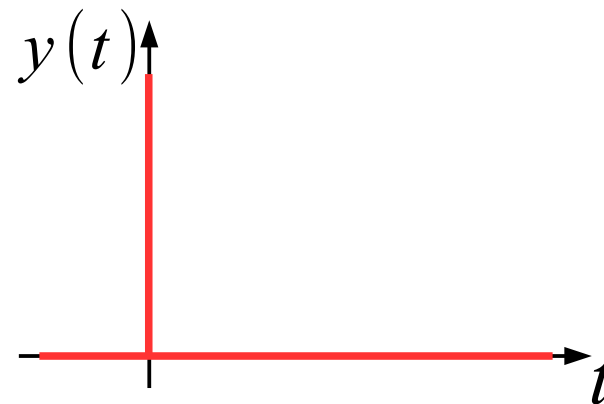
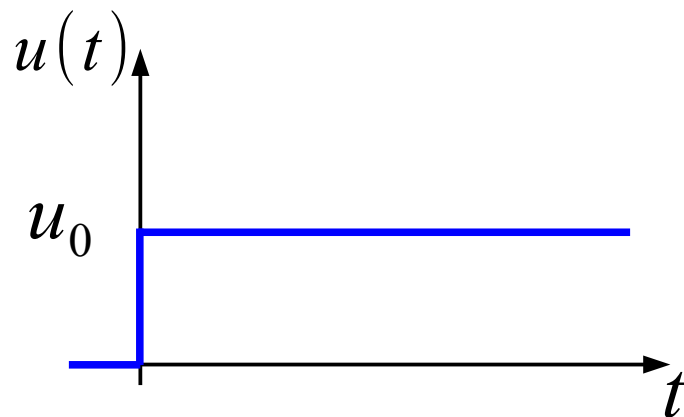
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = k u_0$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 \delta(t)$



Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja
widmowa:

Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

6. Wykres Nyquista:

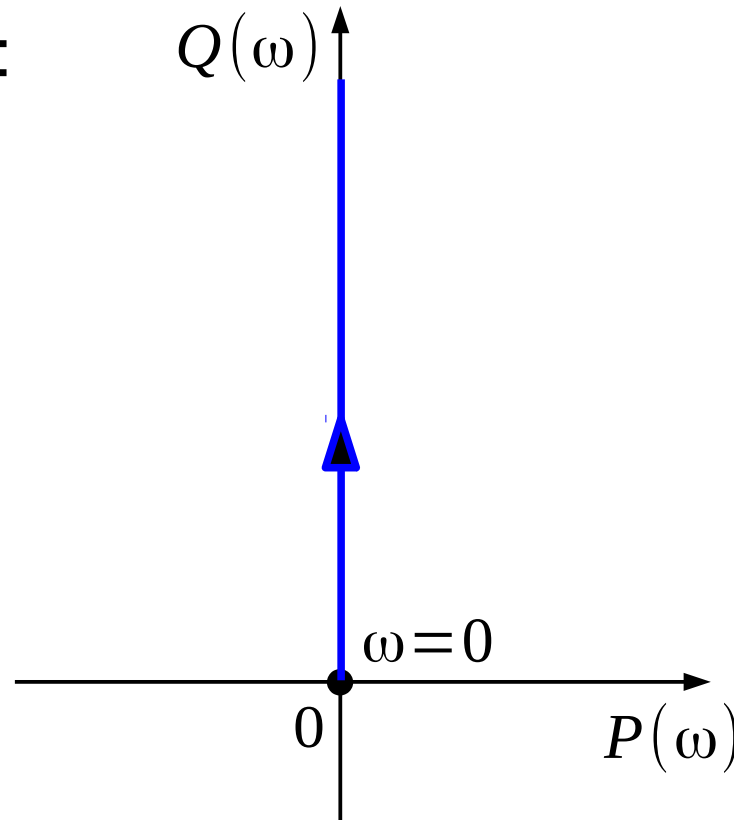
Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = jk\omega$$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

6. Wykres Nyquista:
dla $k > 0$



Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego:

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega|$$

Element różniczkujący idealny

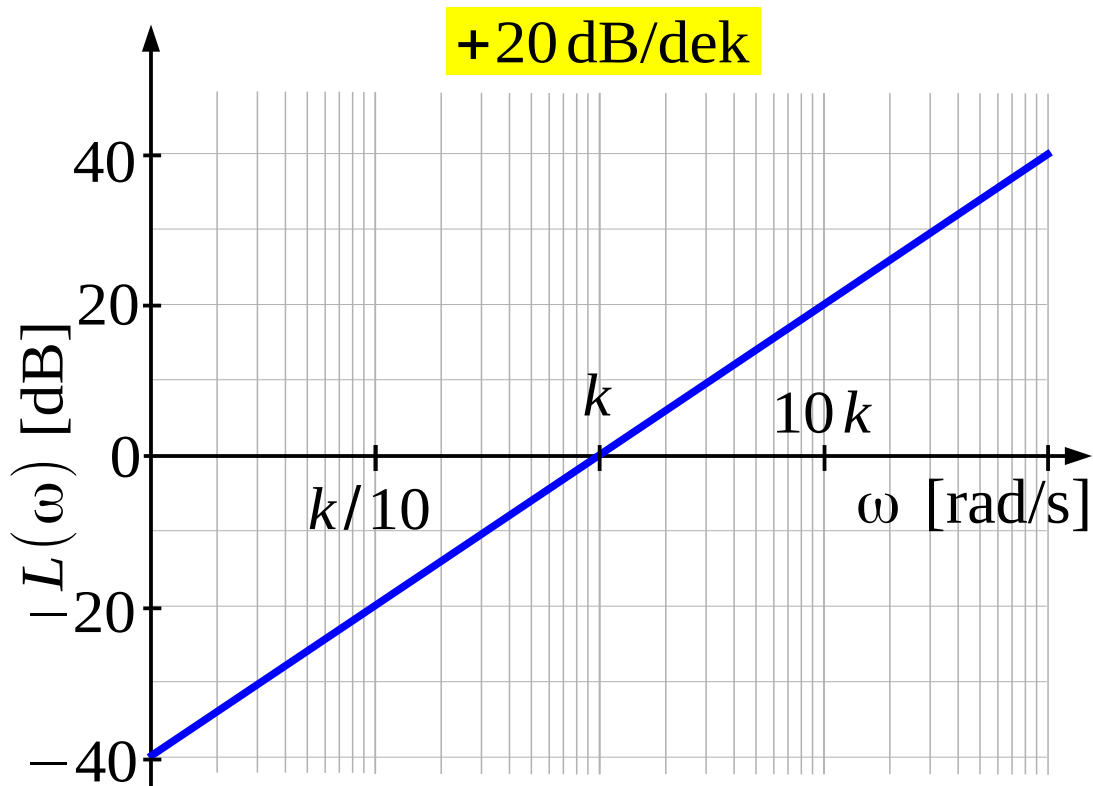
7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(\infty)$$

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(\infty)$$



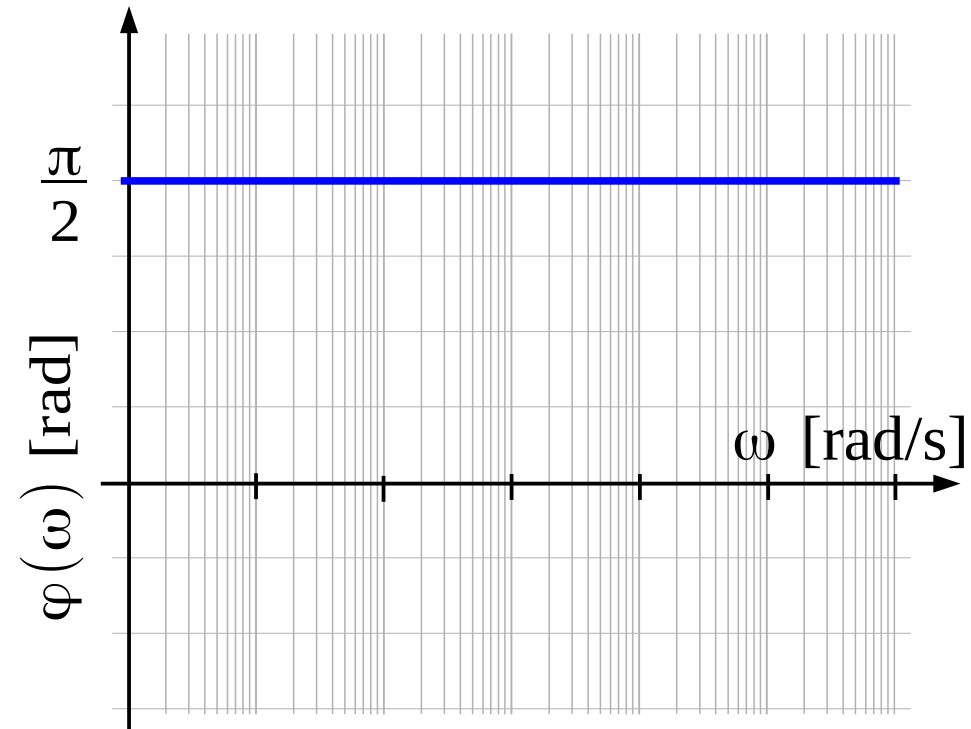
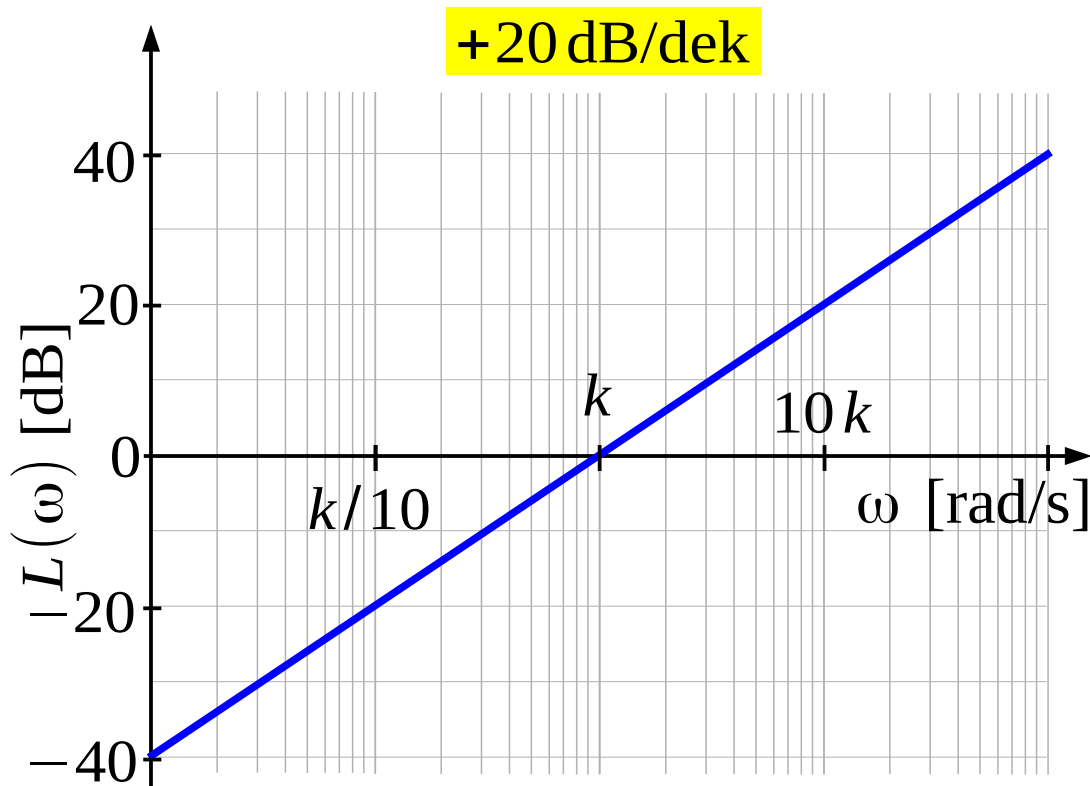
Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega|$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(\infty)$$

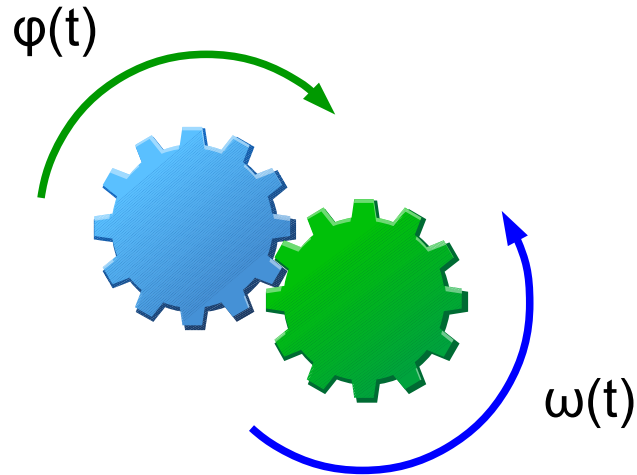
dla $k > 0$



Element różniczkujący idealny

Przykłady

1



PRZEKŁADNIA ZĘBATA:

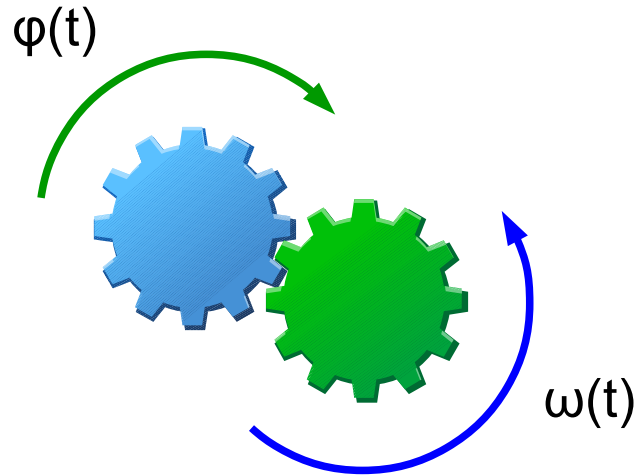
wejście – kąt obrotu $\varphi(t)$

wyjście – prędkość kątowna $\omega(t)$

Element różniczkujący idealny

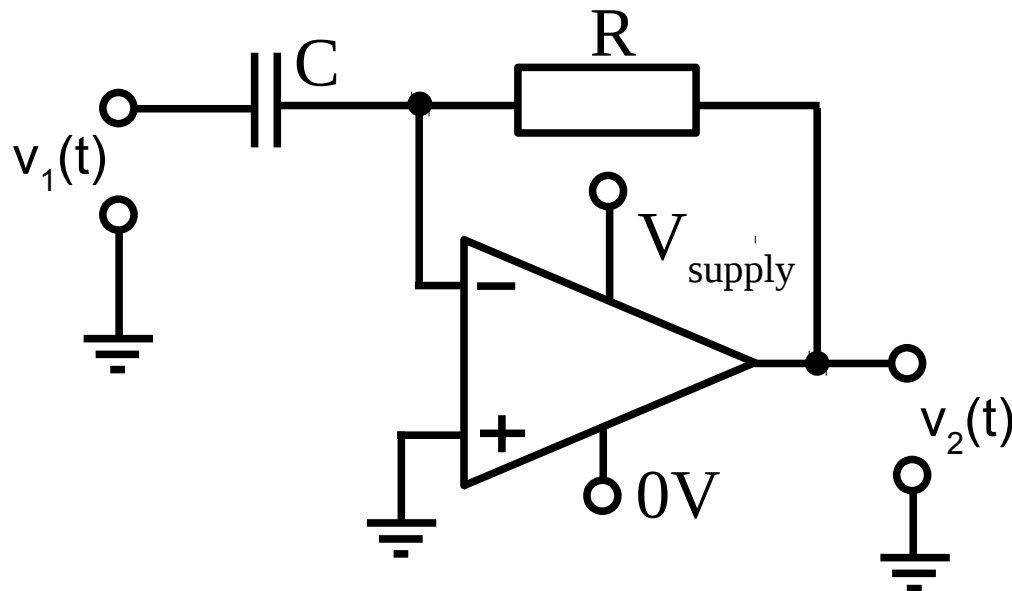
Przykłady

1



PRZEKŁADNIA ZĘBATA:
wejście – kąt obrotu $\varphi(t)$
wyjście – prędkość kątowna $\omega(t)$

2



WZMACNIACZ
OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = -RC \frac{dv_1(t)}{dt}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

Element różniczkujący rzeczywisty

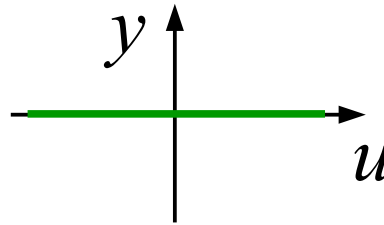
1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

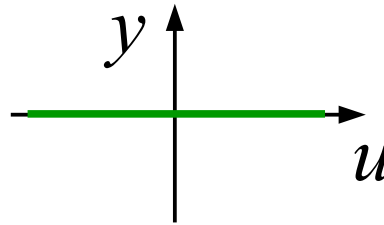
2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ for $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ for $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

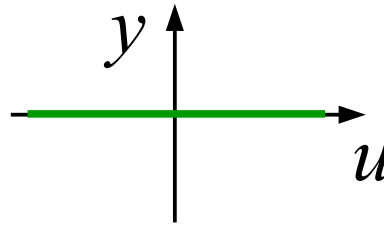


3. Transmitancja:

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ for $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $G(s) = \frac{k s}{T s + 1}$

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{Ts + 1}$

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

$$\text{Wejście: } u(t) = u_0 1(t)$$

$$\text{Transformata Laplacea wejścia: } U(s) = u_0 \frac{1}{s}$$

$$\text{Transformata Laplacea wyjścia: } Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{Ts + 1}$$

$$\text{Wyjście: } y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 e^{-t/T}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

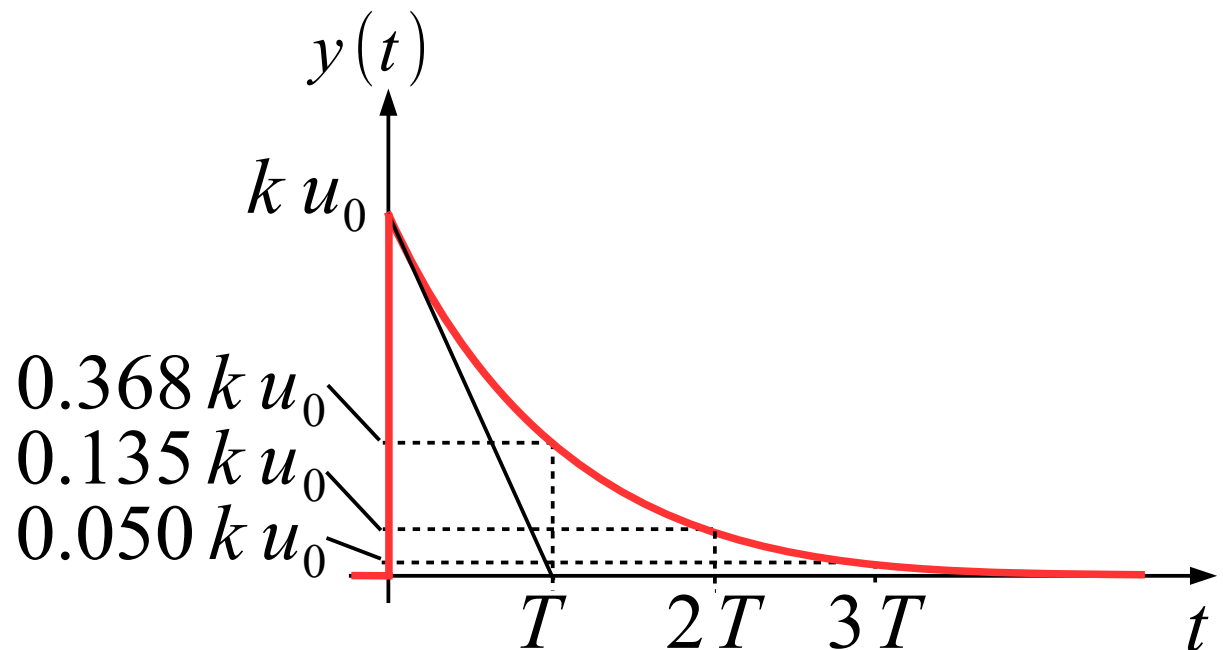
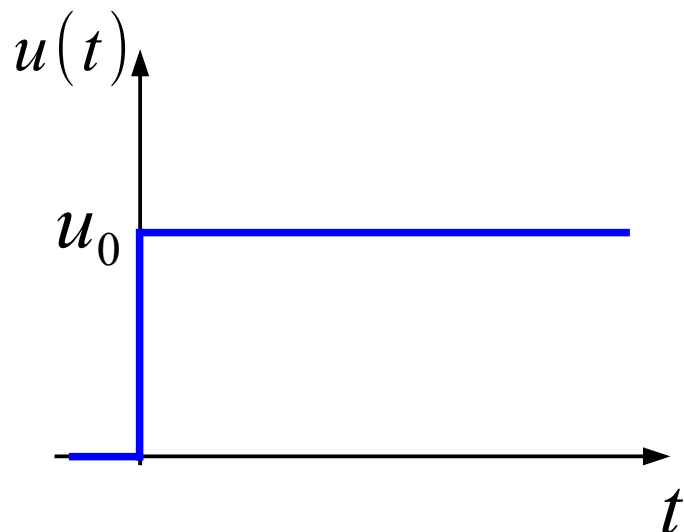
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{Ts + 1}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 e^{-t/T}$



Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja
widmowa:

Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k T \omega^2}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k T \omega^2}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:

Element różniczkujący rzeczywisty

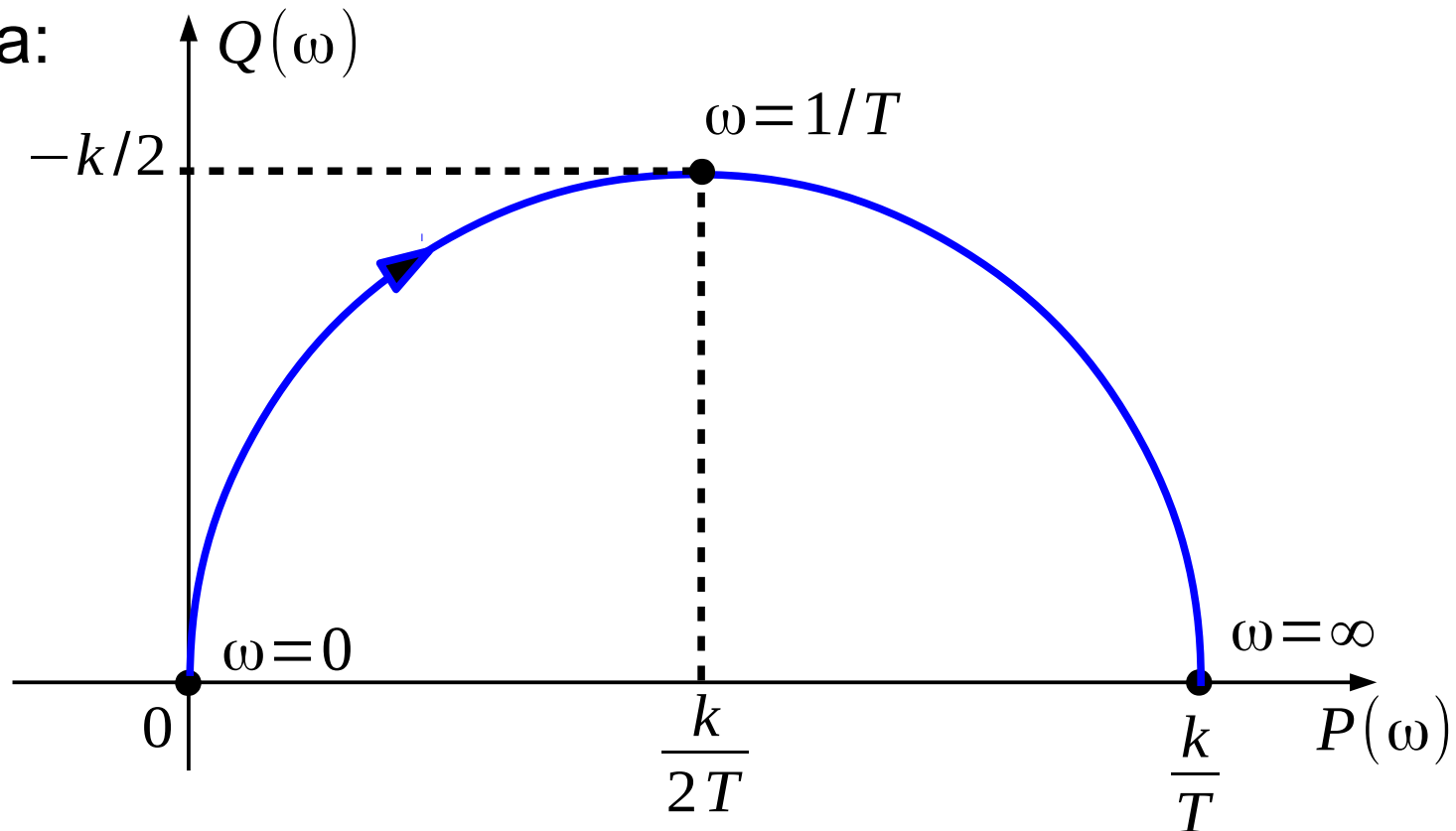
5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k T \omega^2}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k > 0$



Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego:

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

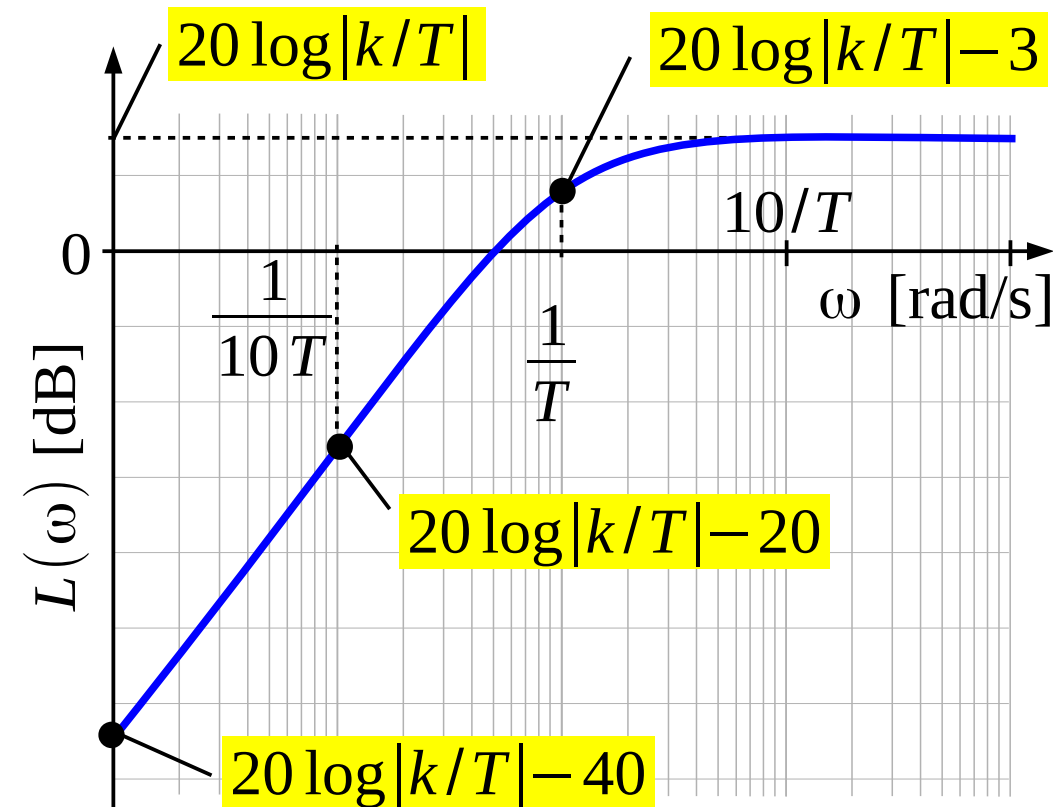
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left(\frac{1}{T \omega} \right)$$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left(\frac{1}{T \omega} \right)$$

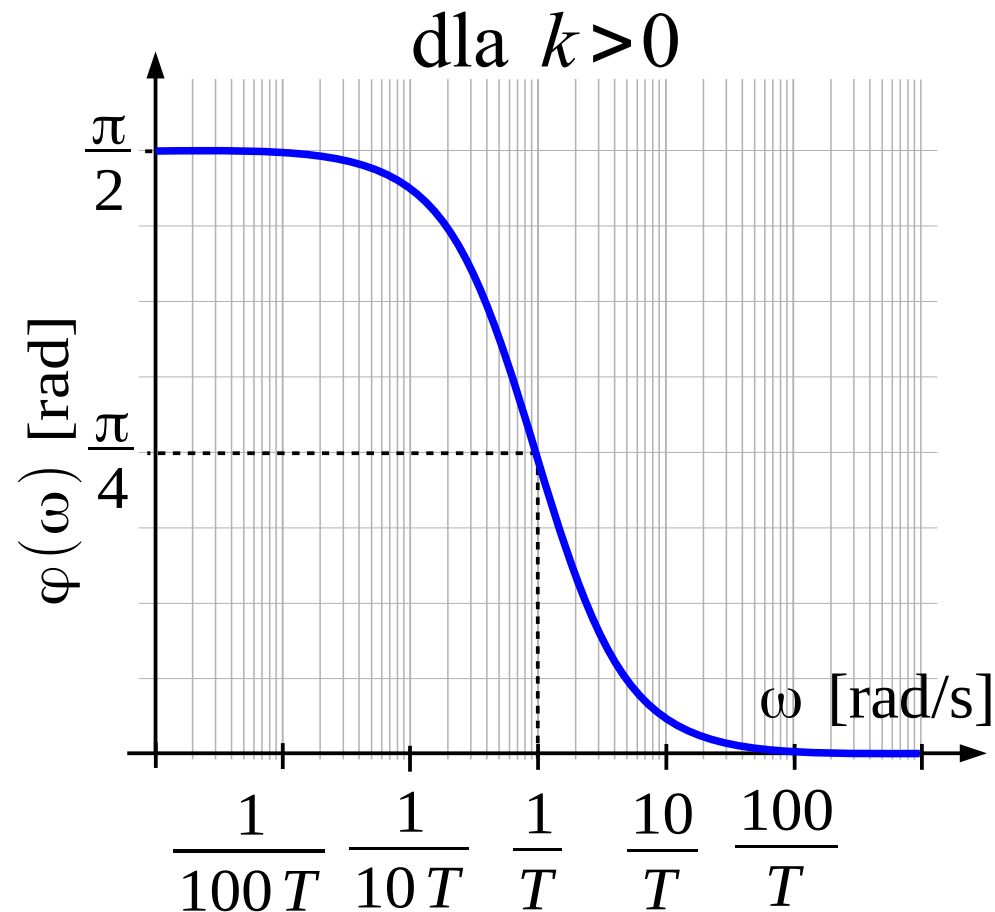
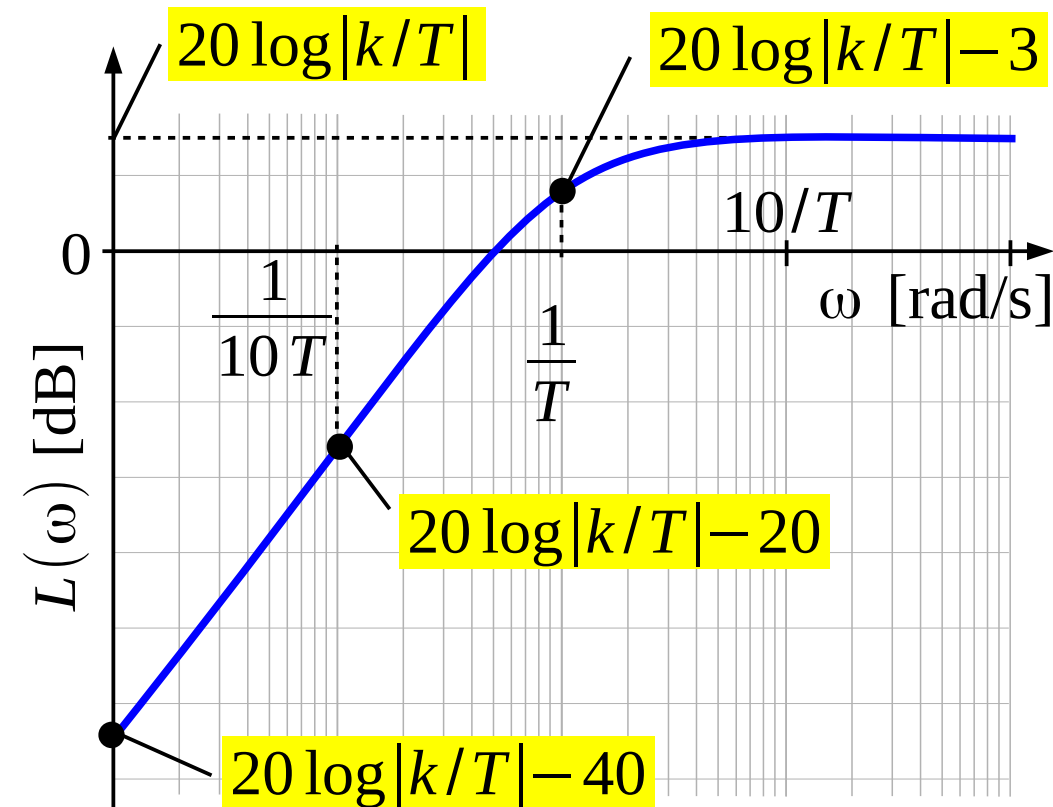


Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

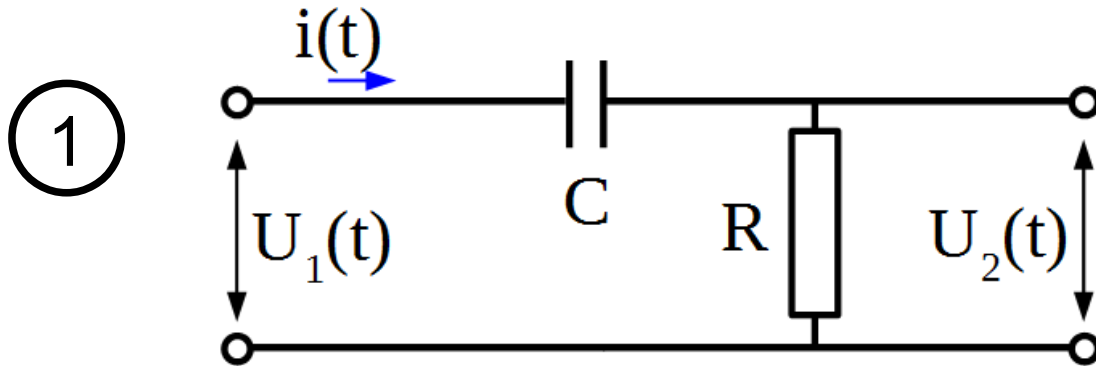
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left(\frac{1}{T \omega} \right)$$



Element różniczkujący rzeczywisty

Przykłady



OBWÓD RC:
wejście – napięcie $u_1(t)$
wyjście – napięcie $u_2(t)$

Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

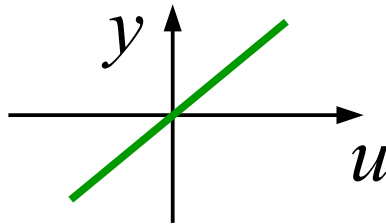
$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$y = u$$

for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

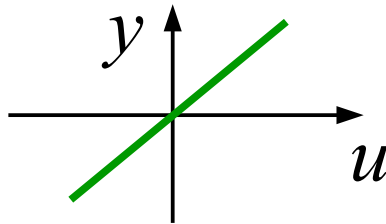
$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$y = u$$

for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:

Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

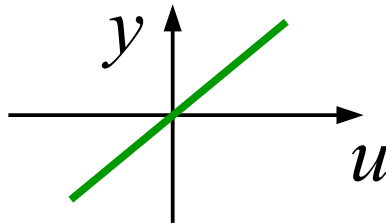
$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$y = u$$

for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

Element opóźniający

4. Odp. skokowa:

Element opóźniający

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Element opóźniający

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{u_0}{s} e^{-\tau s}$

Element opóźniający

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 \mathbf{1}(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{u_0}{s} e^{-\tau s}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = u_0 \mathbf{1}(t - \tau)$

Element opóźniający

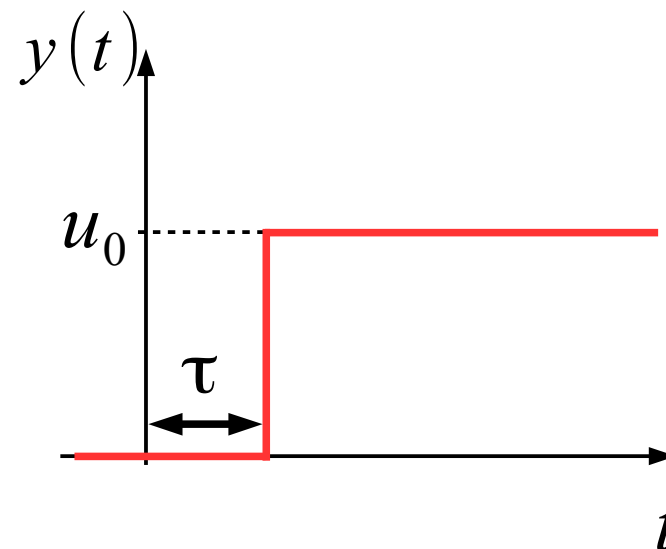
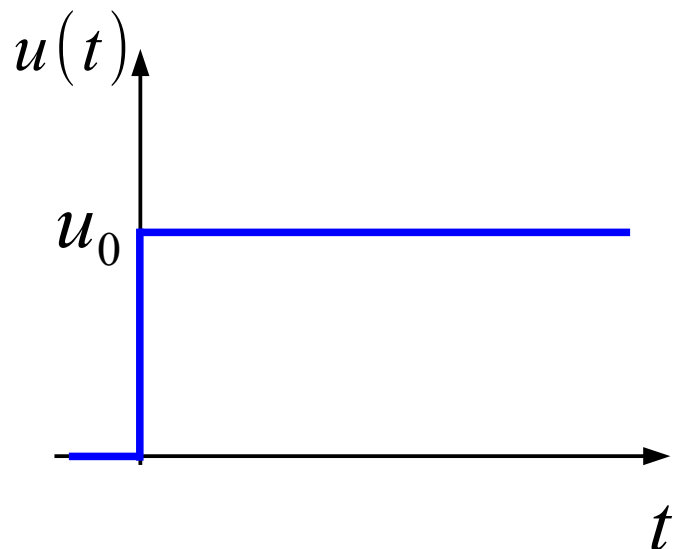
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{u_0}{s} e^{-\tau s}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = u_0 1(t - \tau)$



Element opóźniający

5. Transmitancja
widmowa:

Element opóźniający

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$

Element opóźniający

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

Element opóźniający

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:

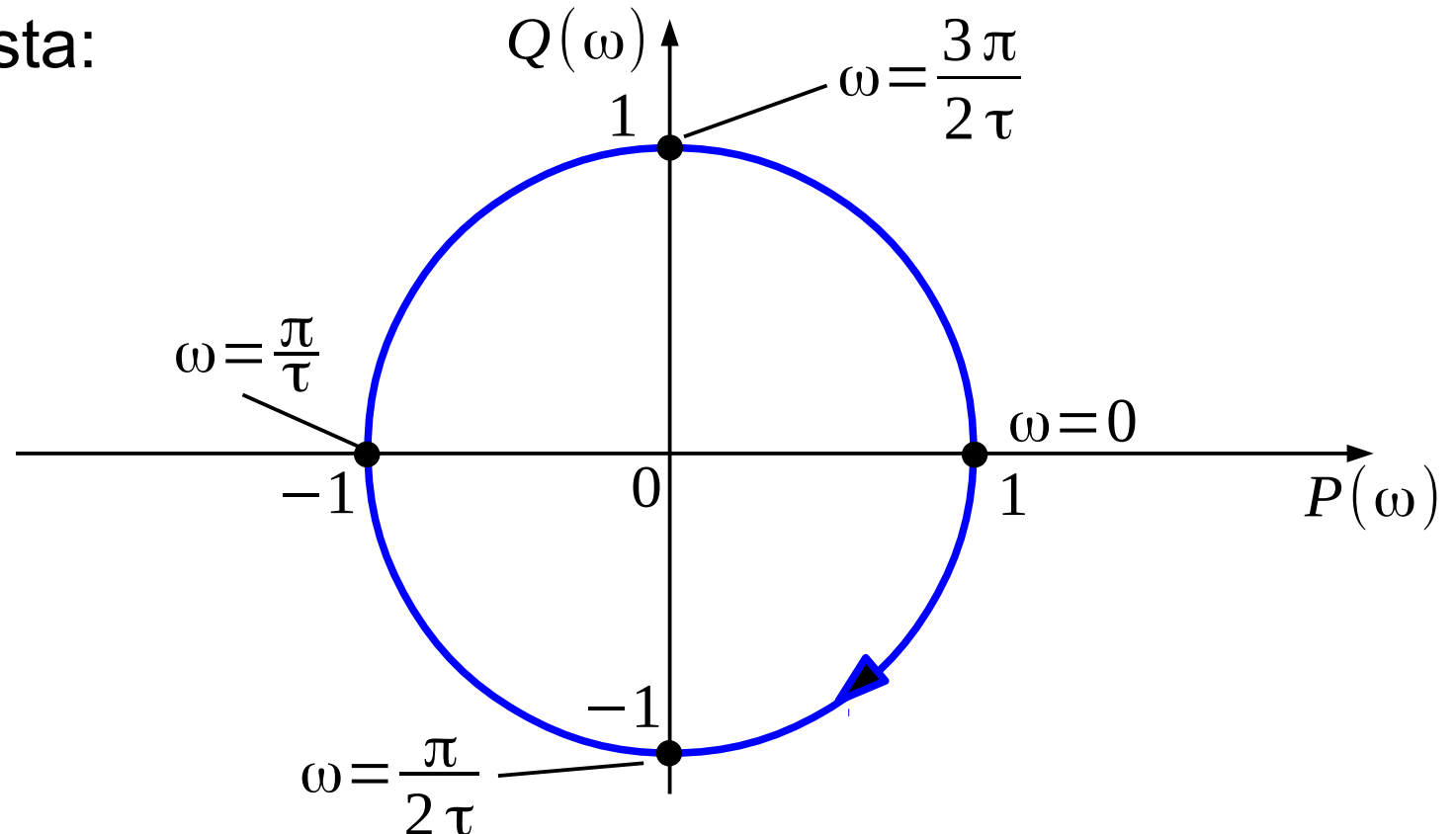
Element opóźniający

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:



Element opóźniający

7. Wykres Bodego:

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

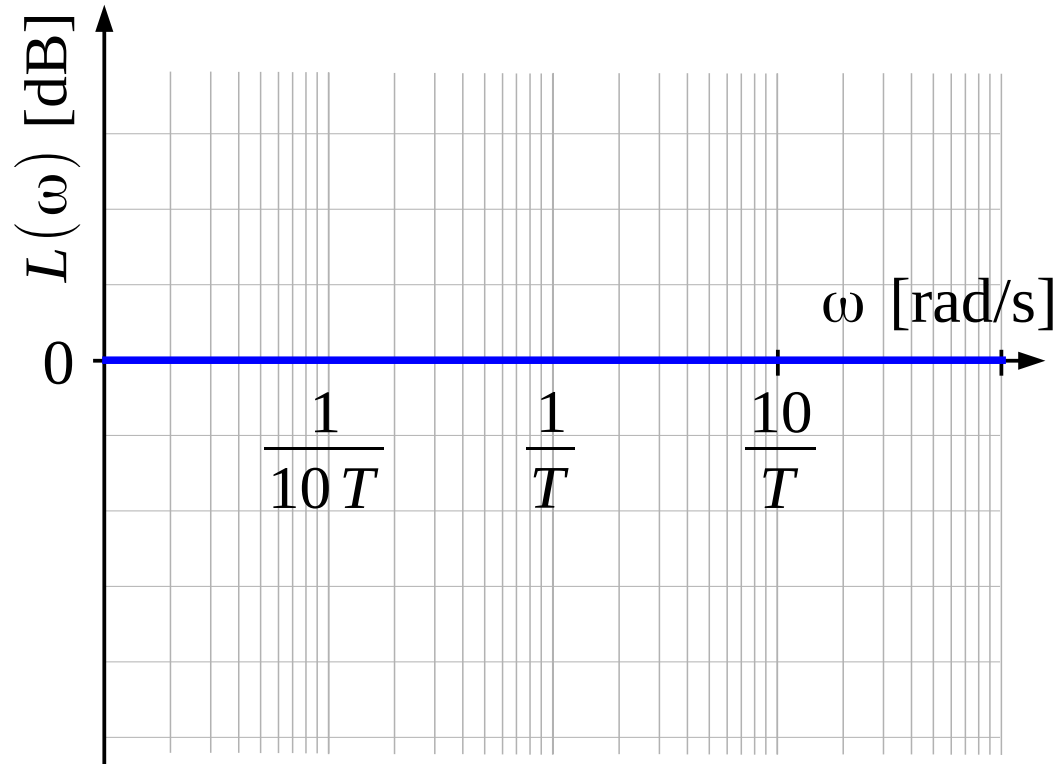
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\tan(\tau\omega)) = -\tau\omega$$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\tan(\tau \omega)) = -\tau \omega$$

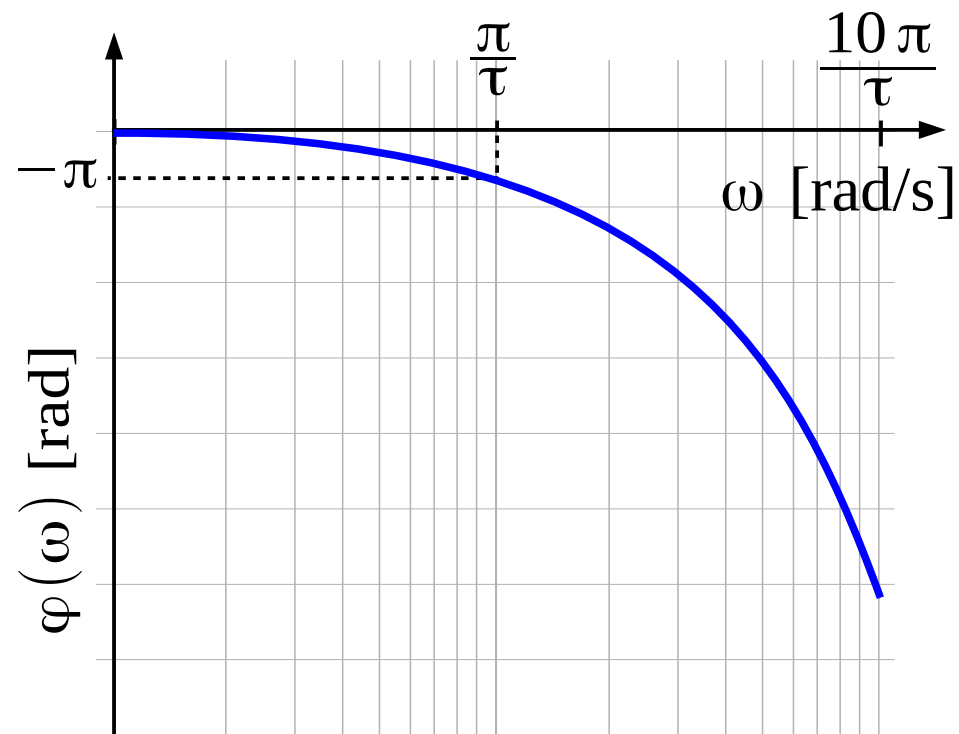
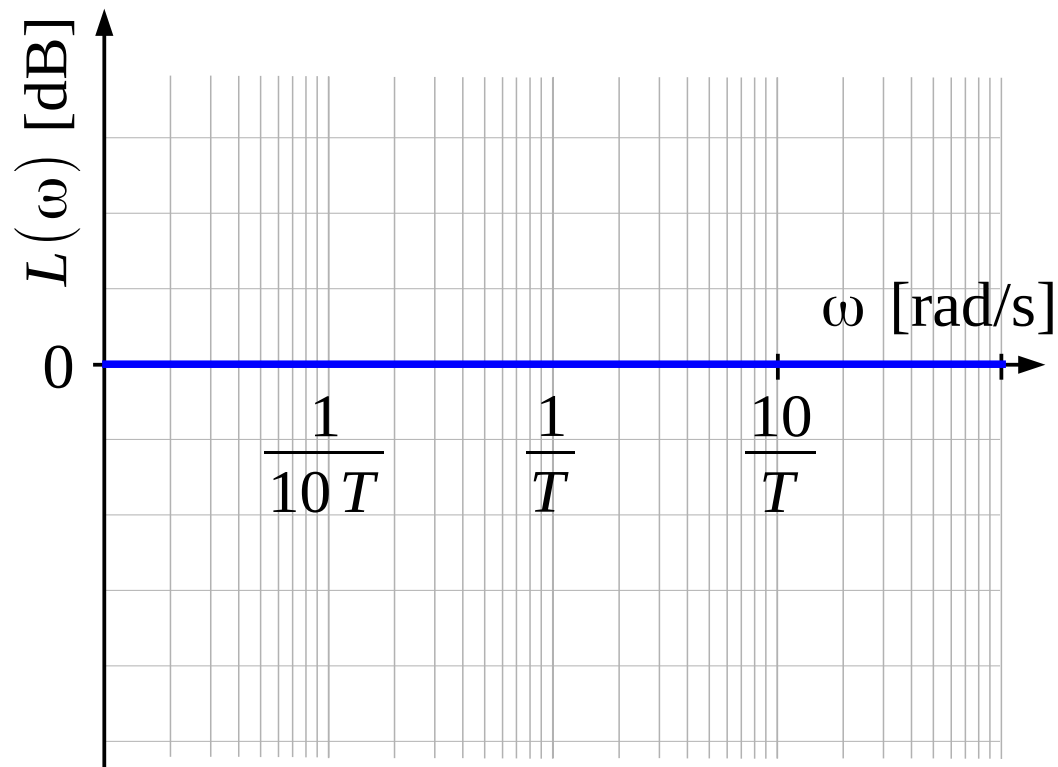


Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

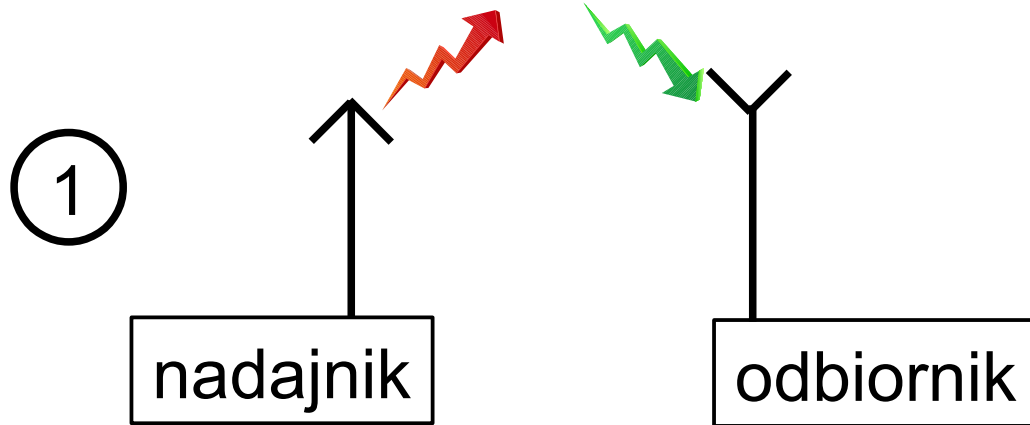
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\tan(\tau\omega)) = -\tau\omega$$



Element opóźniający

Przykłady



TRANSMISJA
BEZPRZEWODOWA:
wejście – dane wysłane
wyjście – dane odebrane

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

Element inercyjny drugiego rzędu

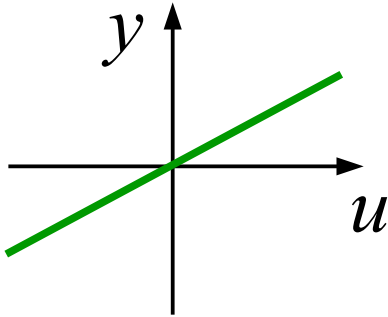
1. Równanie:
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna:
$$\text{for } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

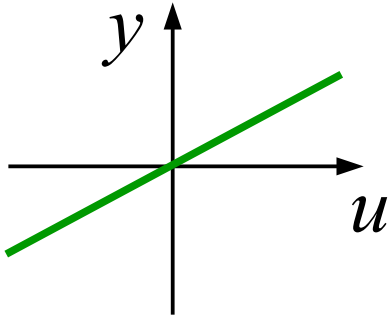
2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

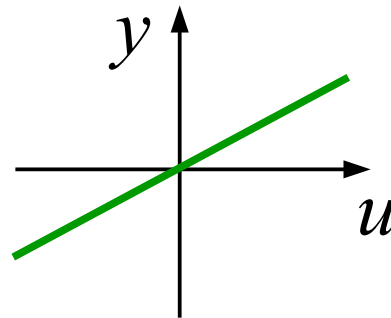


3. Transmitancja:

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ for $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:
$$G(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}$

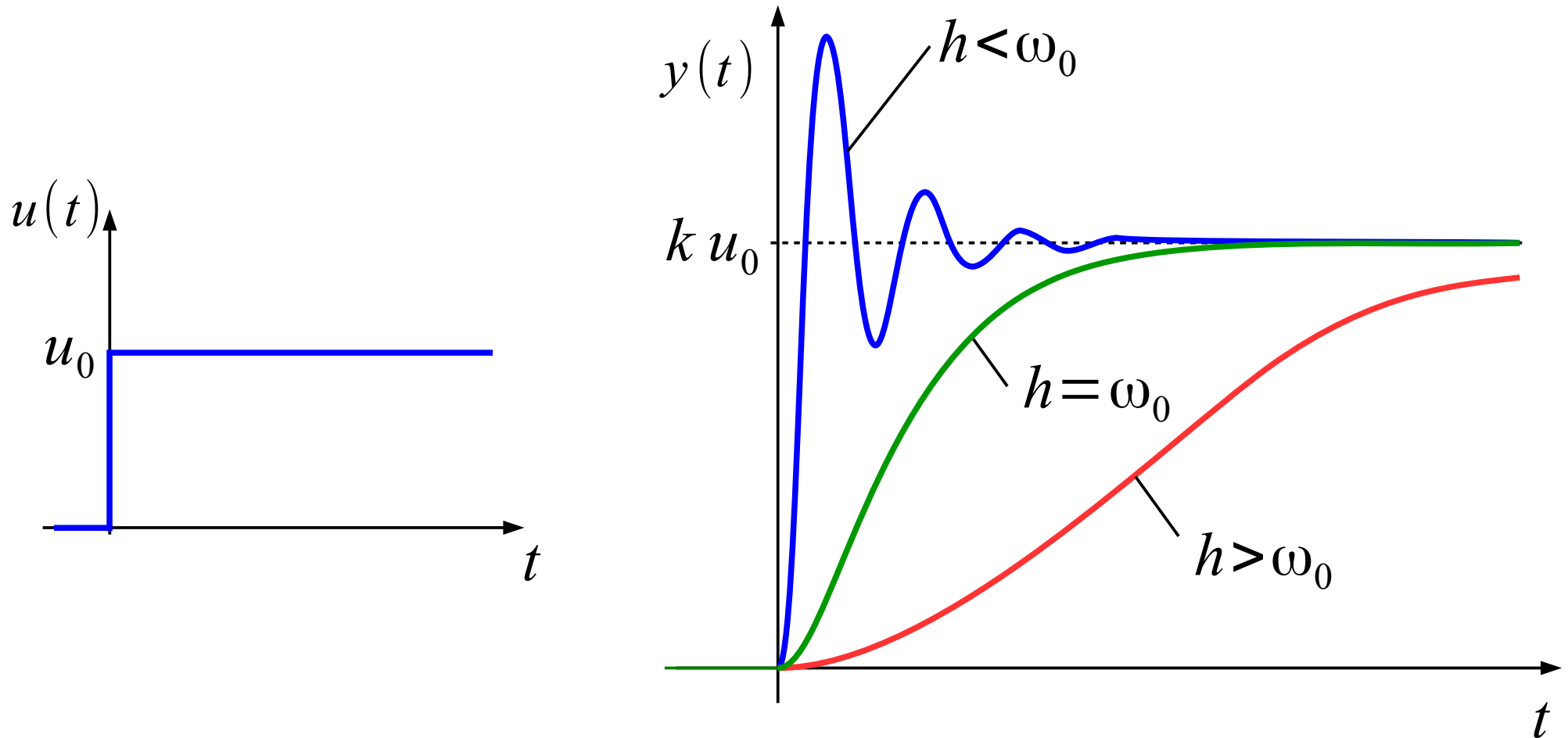
wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} =$

$$= \begin{cases} \frac{k u_0}{T_1^2} \left(1 - e^{-ht} \left(\cos \omega t + \frac{h}{\omega} \sin \omega t \right) \right), & \text{dla } h \leq \omega_0 \\ \frac{k u_0}{T_1^2} \left(1 + e^{-ht} \left(\left(\frac{h+w}{2w} - 1 \right) e^{-wt} - \frac{h+w}{2w} e^{wt} \right) \right), & \text{dla } h \geq \omega_0 \end{cases}$$

$$\text{gdzie: } h = \frac{T_2}{2T_1^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T_1}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad w = \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:



Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja
widmowa:

Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2\omega^2 + T_2j\omega + 1}$

Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2\omega^2 + T_2 j\omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2\omega^2)}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT_2\omega}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2\omega^2 + T_2 j\omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2\omega^2)}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT_2\omega}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}$$

6. Wykres Nyquista:

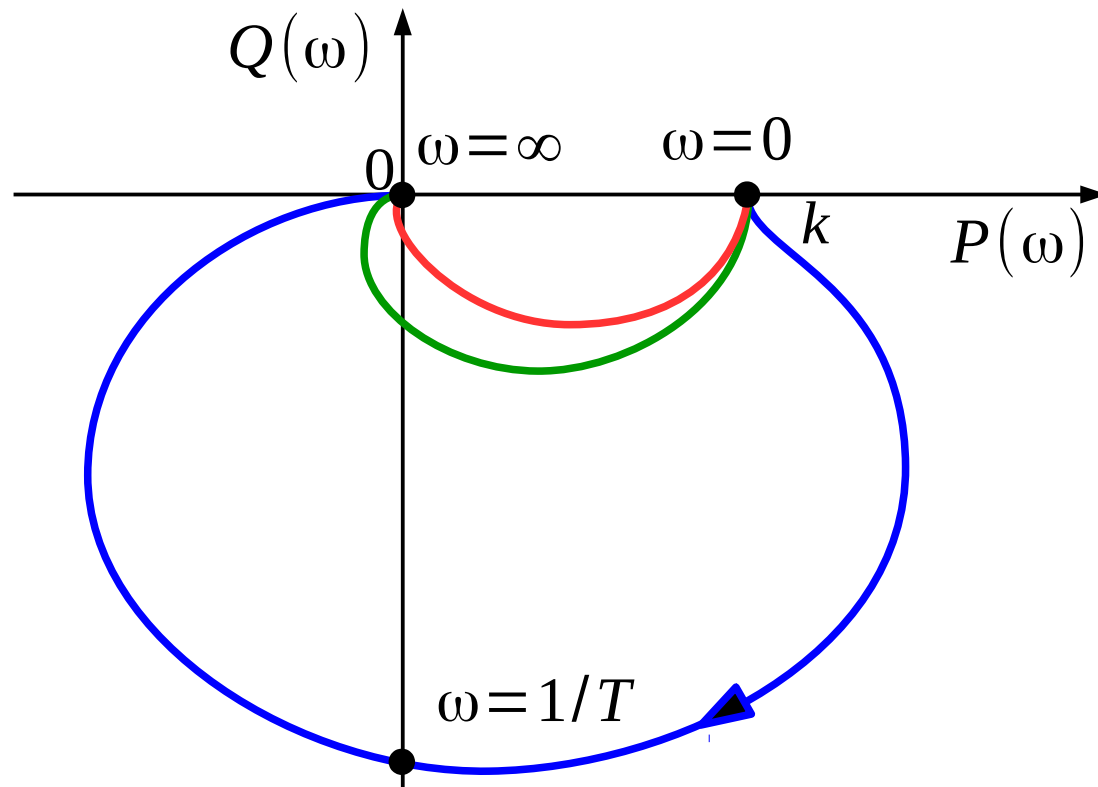
Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2 \omega^2 + T_2 j\omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2)}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-k T_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k > 0$



- dla $h < \omega_0$
- dla $h = \omega_0$
- dla $h > \omega_0$

Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego:

Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P}$$

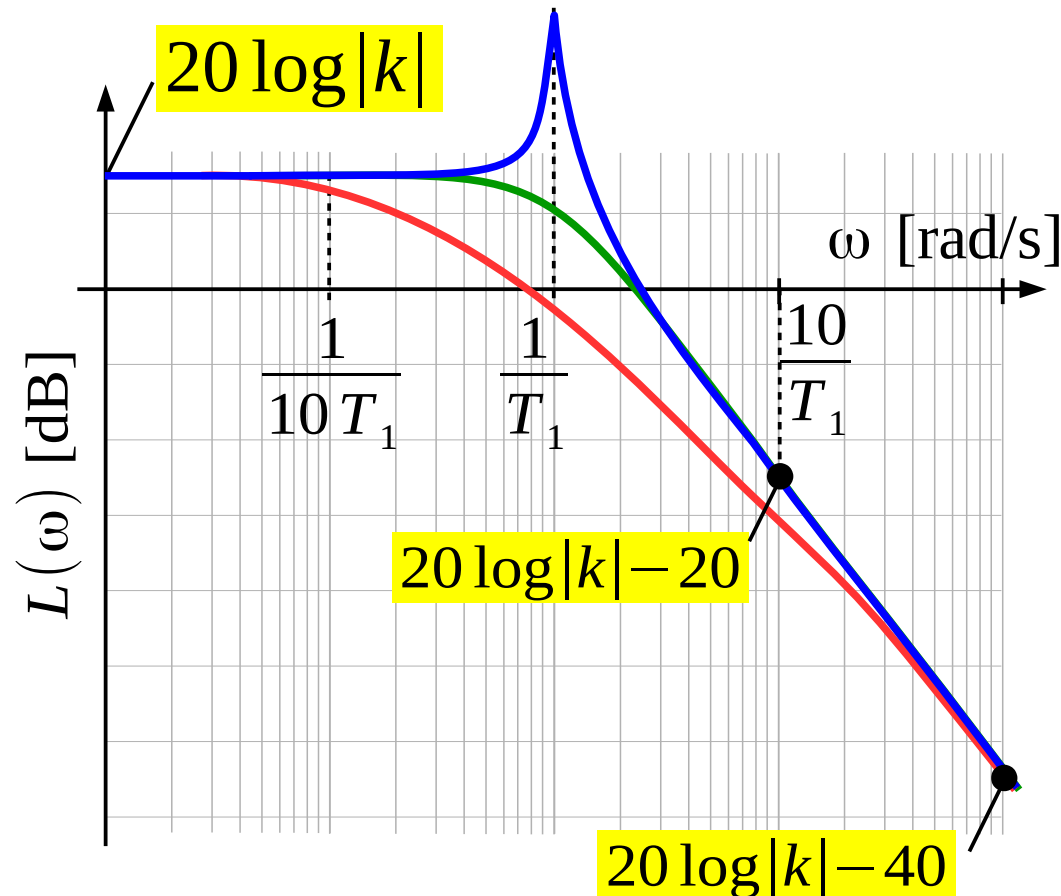
Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P}$$

- dla $h < \omega_0$
- dla $h = \omega_0$
- dla $h > \omega_0$



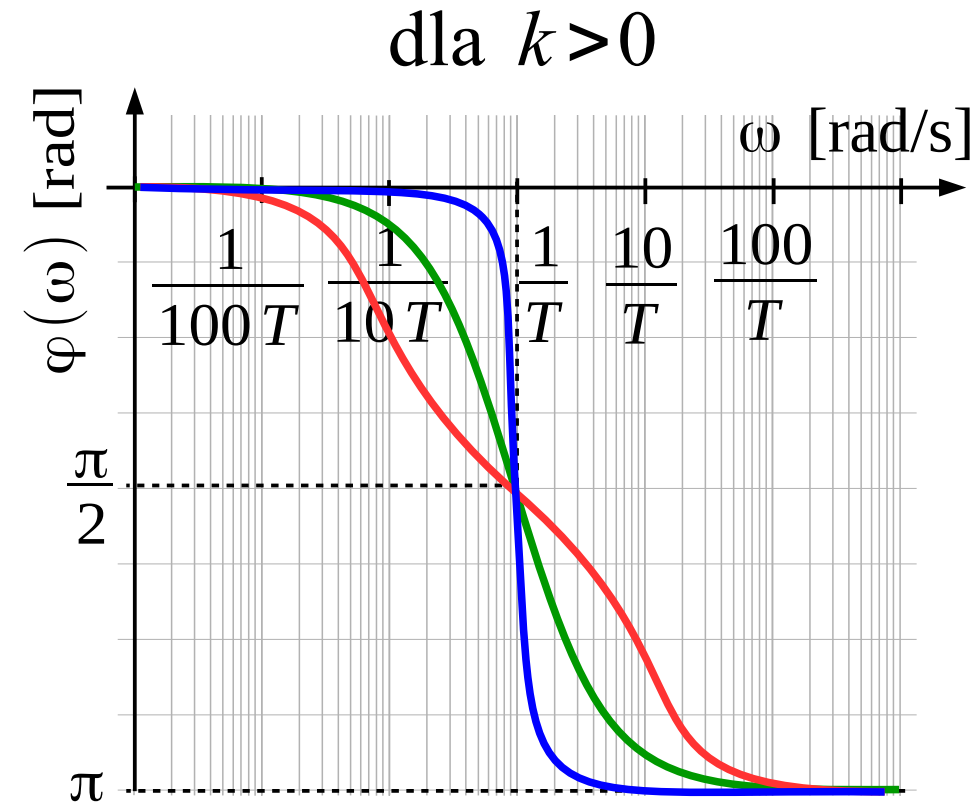
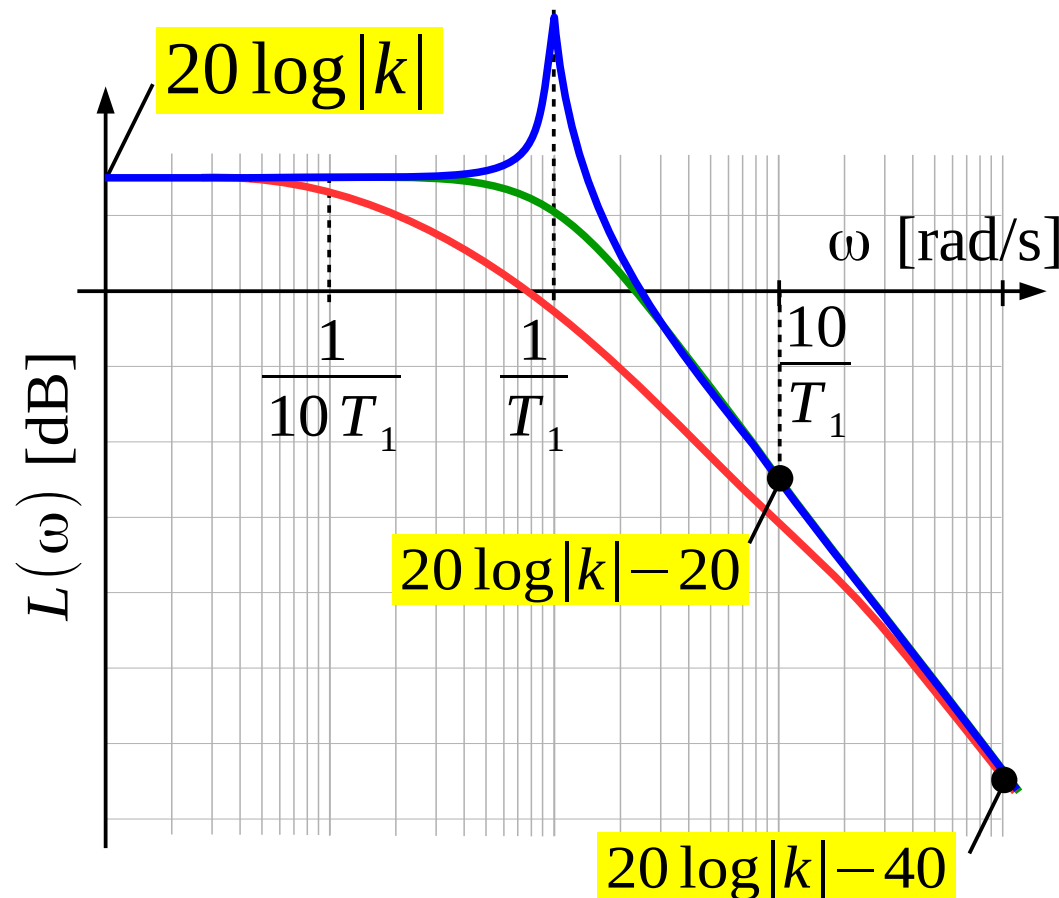
Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P}$$

- dla $h < \omega_0$
- dla $h = \omega_0$
- dla $h > \omega_0$



Element inercyjny drugiego rzędu

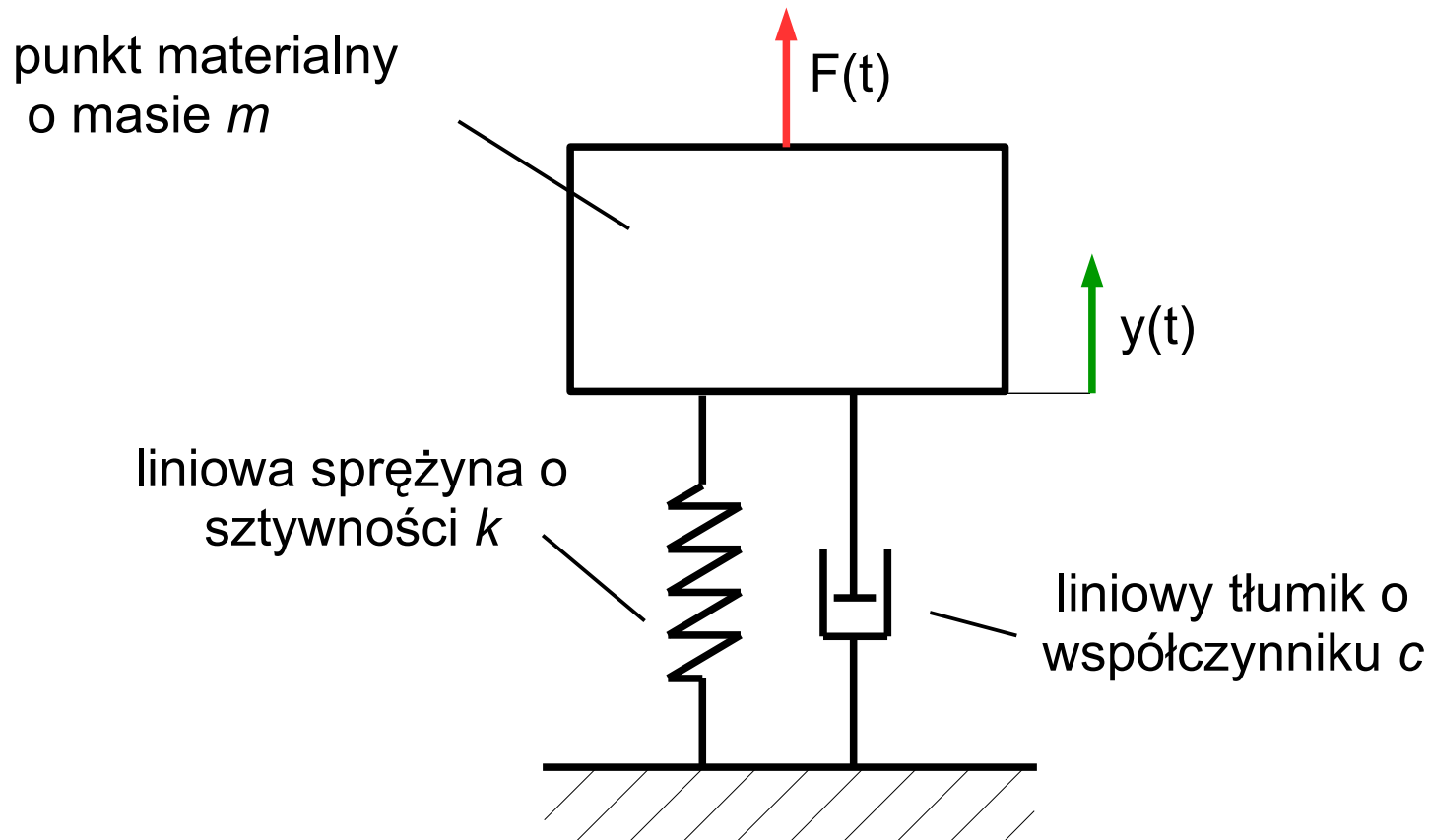
Przykłady

1

UKŁAD DRGAJĄCY:

wejscie – siła $F(t)$

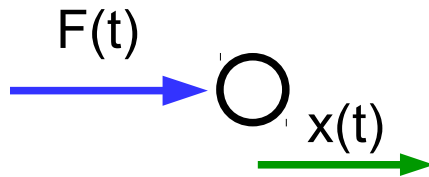
wyjscie – przemieszczenie $y(t)$



Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

1



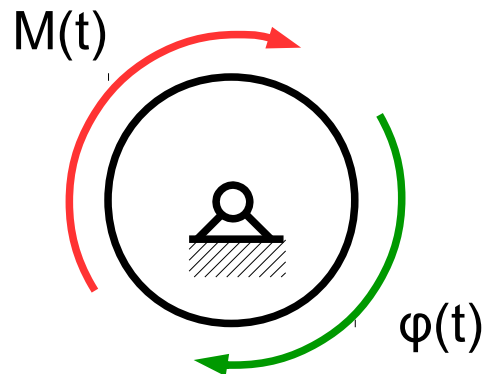
RUCH POSTĘPOWY PUNKTU
MATERIALNEGO Z LINIOWYM
TŁUMIENIEM:

wejście – siła $F(t)$

wyjście – przemieszczenie $x(t)$

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

2



RUCH OBROTOWY BRYŁY
SZTYWNEJ Z LINIOWYM
TŁUMIENIEM:

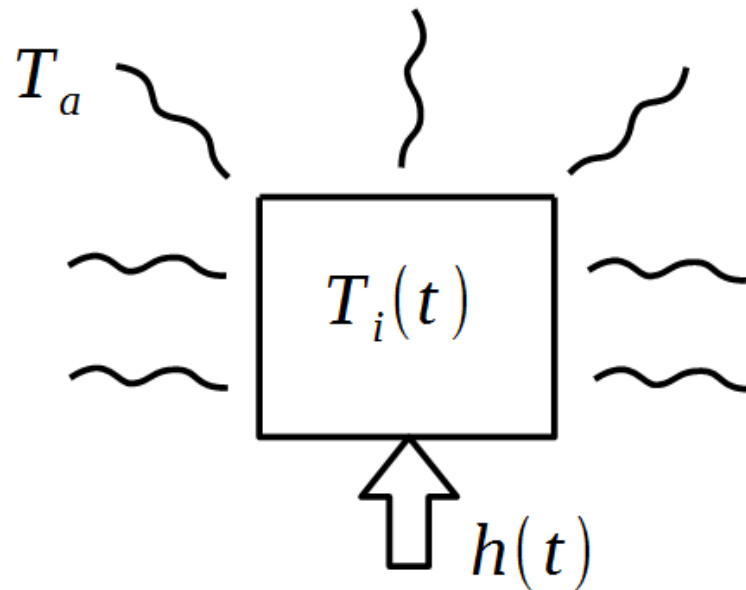
wejście – moment $M(t)$

wyjście – kąt obrotu $\varphi(t)$

Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

4



OGRZEWANY OBIEKT O DUŻEJ
BEZWŁADNOŚCI:
wejście – moc grzałki $h(t)$
wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

nazwa elementu	transmitancja
Proporcjonalny	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$