



# Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Teoria maszyn i podstawy automatyki*  
semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

# Wykład 9

Transmitancja widmowa.  
Klasyfikacja podstawowych obiektów  
automatyki.

# Transmitancja operatorowa

Dany jest liniowy niezależny od czasu układ typu SISO o ciągłym sygnale wejściowym  $x(t)$  i wyjściowym  $y(t)$

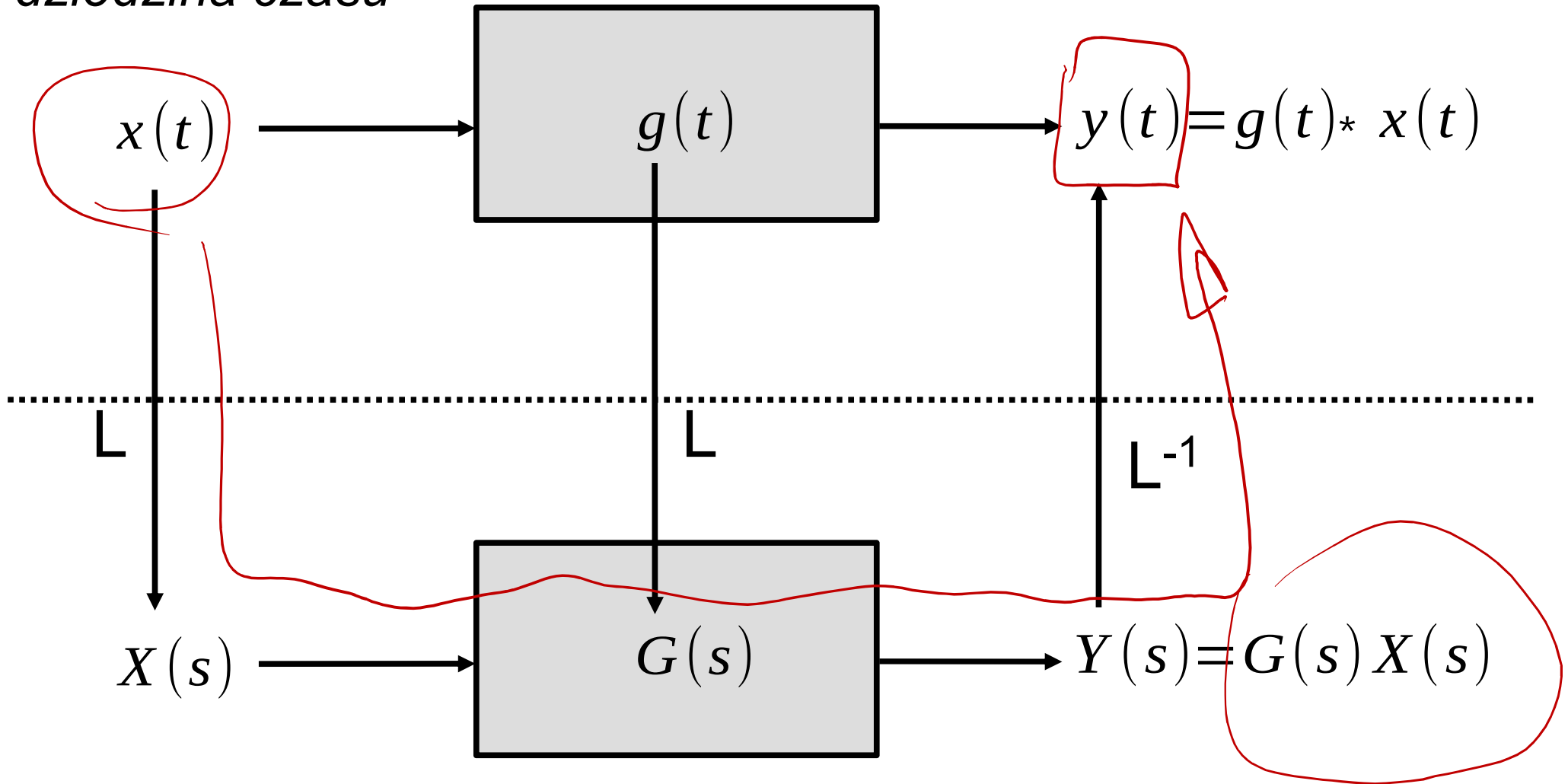
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$Y(s)$  - transformata Laplace'a sygnału wyjściowego

$X(s)$  - transformata Laplace'a sygnału wejściowego

# Wejście i wyjście

*dziedzina czasu*



*dziedzina zespolona*

# Transmitancja operatorowa i widmowa

Transmitancja  
operatorowa

$$G(s)$$

pełen opis dynamiki układu  
(dla dowolnych sygnałów wejściowych)

# Transmitancja operatorowa i widmowa

Transmitancja operatorowa

$$G(s)$$

pełen opis dynamiki układu  
(dla dowolnych sygnałów wejściowych)

$$s = j\omega$$

Transmitancja widmowa

$$G(j\omega)$$

opis dynamiki układu w stanie ustalonym dla harmonicznego sygnału wejściowego

# Transmitancja widmowa

wejście:

$$x(t) = \sin(\omega t)$$

wymuszenie harmoniczne

transmitancja:  $G(s)$

wyście:  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

w stanie ustalonym

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

# Transmitancja widmowa

wejście:  $x(t) = \sin(\omega t)$

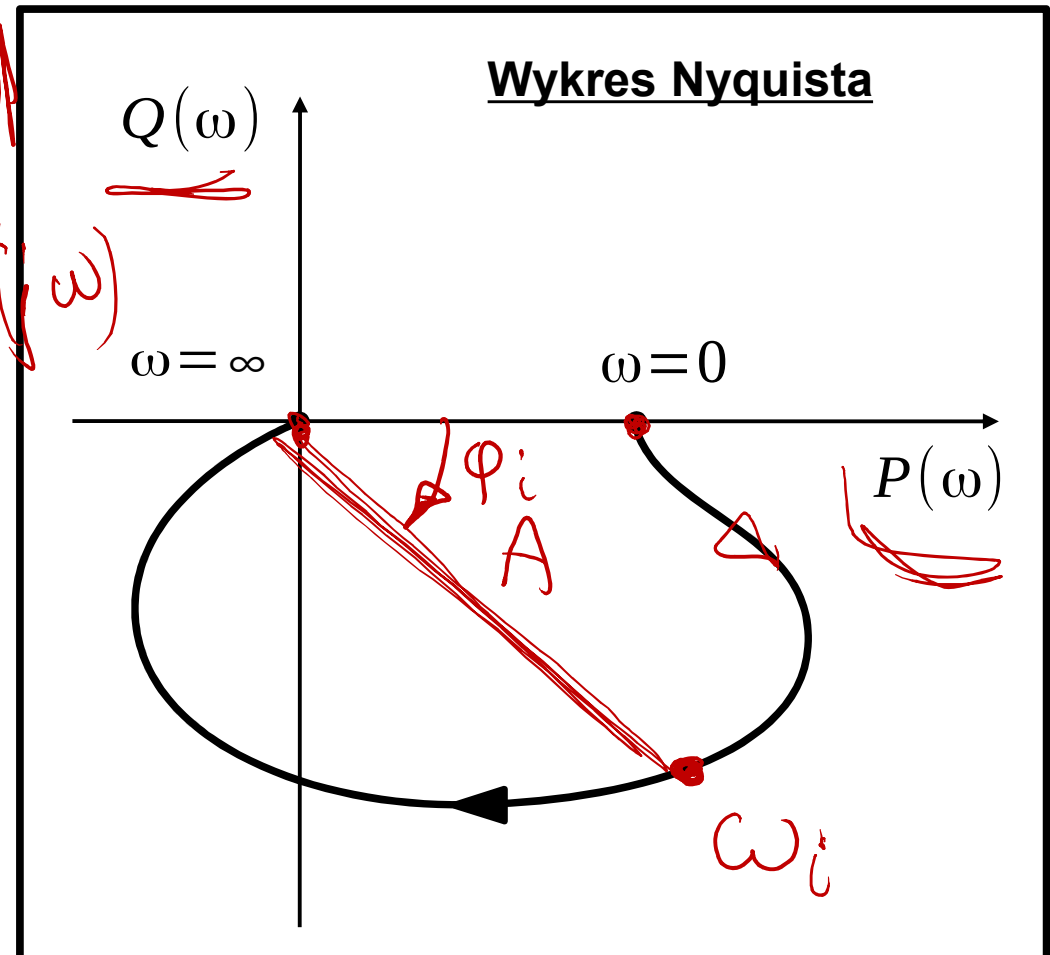
transmitancja:  $G(s)$

wyjście:  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega_i) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |G(j\omega)|$$

$$\varphi_i(\omega_i) = \arctan \frac{Q}{P} = \text{Arg } G(j\omega)$$



# Transmitancja widmowa

wejście:  $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja:  $G(s)$

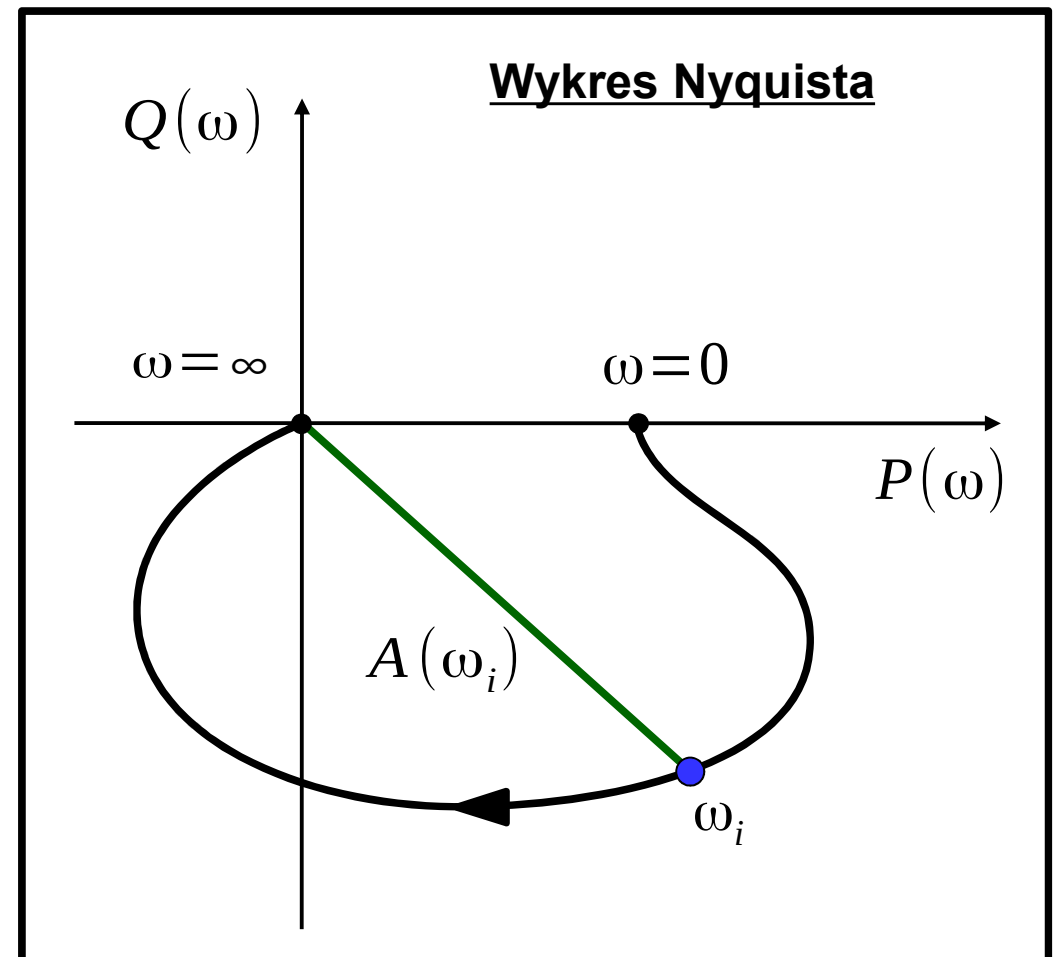
wyjście:  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

wzmocnienie

$$\varphi(\omega) = \text{Arg } G(j\omega) = \text{arctg } \frac{Q}{P}$$



# Transmitancja widmowa

wejście:  $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja:  $G(s)$

wyjście:  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

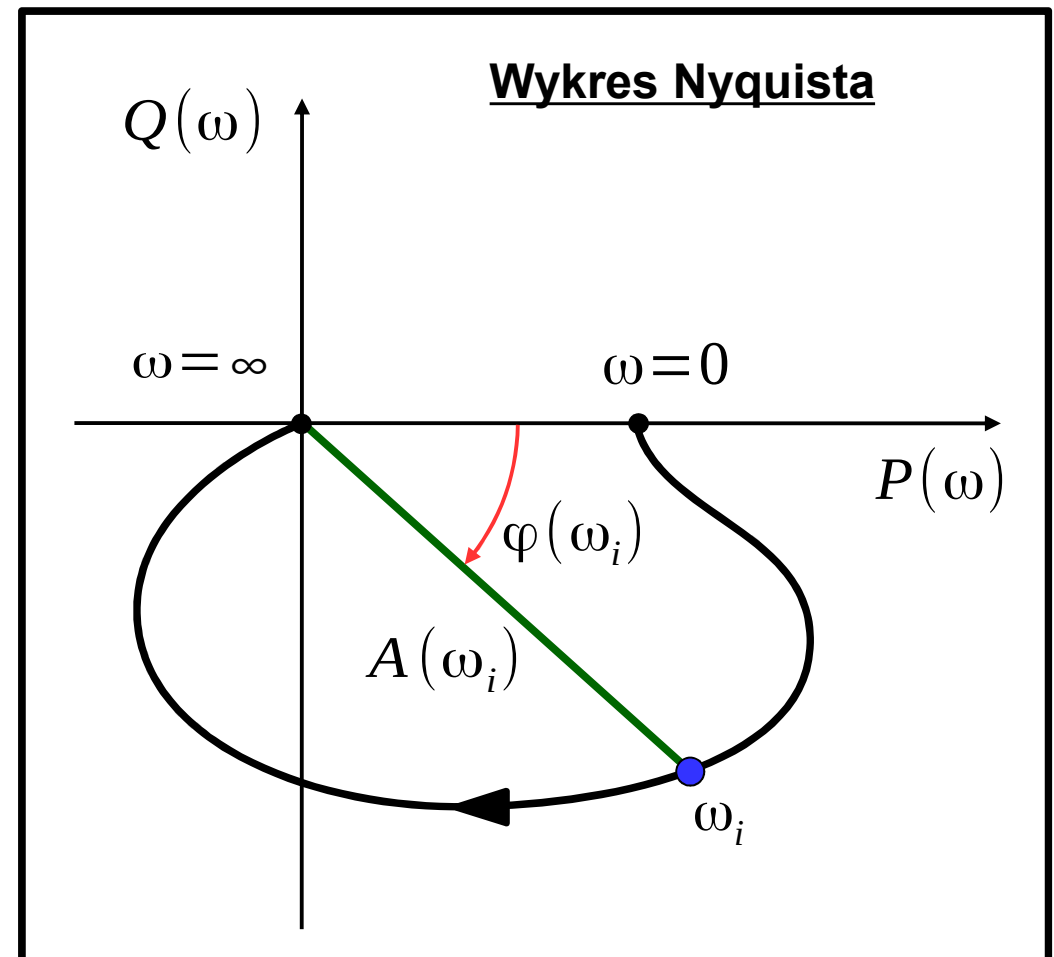
$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

wzmocnienie

$$\varphi(\omega) = \text{Arg } G(j\omega) = \text{arctg } \frac{Q}{P}$$

opóźnienie



# Transmitancja widmowa

wejście:  $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja:  $G(s)$

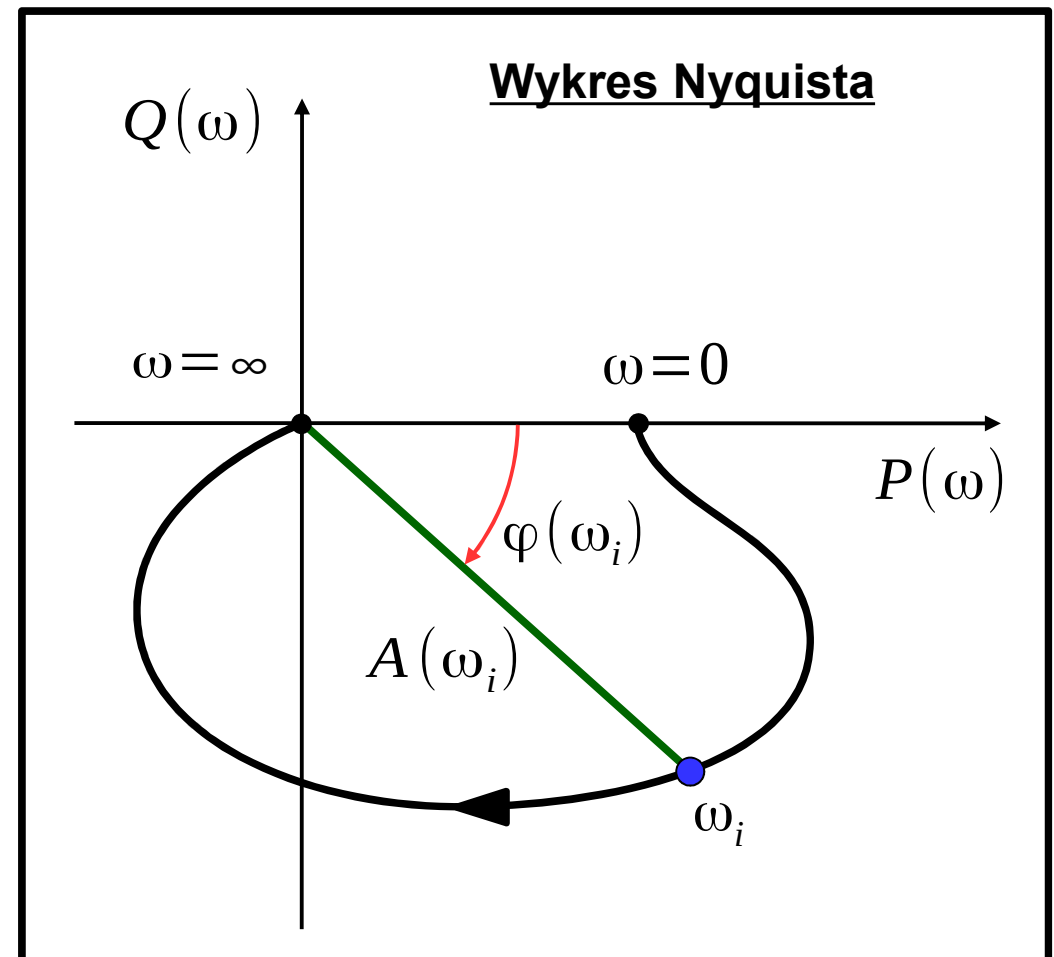
wyjście:  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \text{Arg } G(j\omega) = \text{arctg } \frac{Q}{P}$$

- Wykres transmitancji widmowej
- Częstościowa charakterystyka amplitudowo-fazowa



# Transmitancja widmowa

wejście:  $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja:  $G(s)$

wyjście:  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

## Wykres Bodego

wykres wzmocnienia  
(amplitudowo-częstościowy)

wykres przesunięcia fazowego  
(fazowo-częstościowy,  
opóźnienie)

# Transmitancja widmowa

wejście:  $x(t) = \sin(\omega t)$

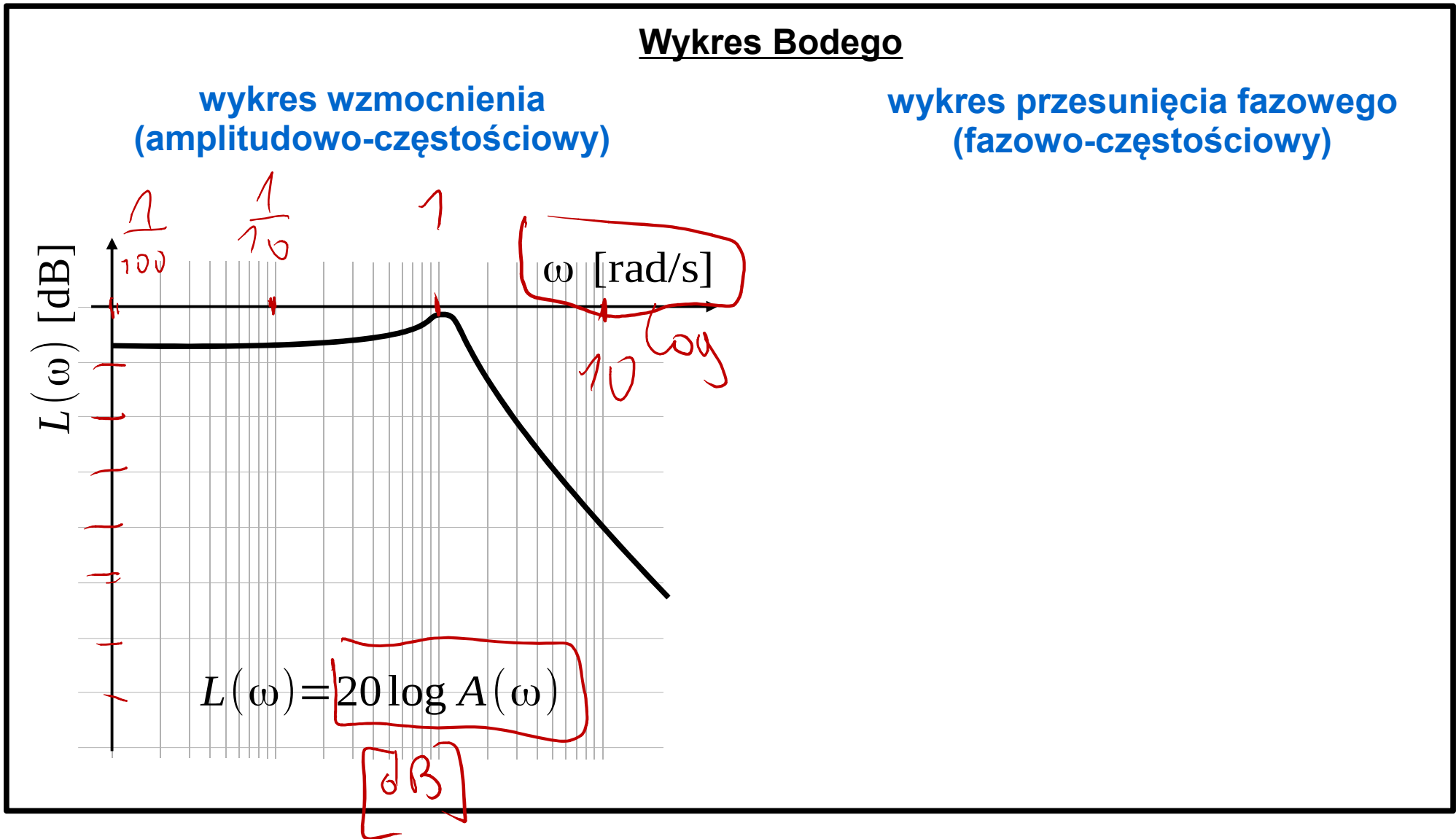
transmitancja:  $G(s)$

wyjście:  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

## Wykres Bodego

wykres wzmocnienia  
(amplitudowo-częstościowy)

wykres przesunięcia fazowego  
(fazowo-częstościowy)

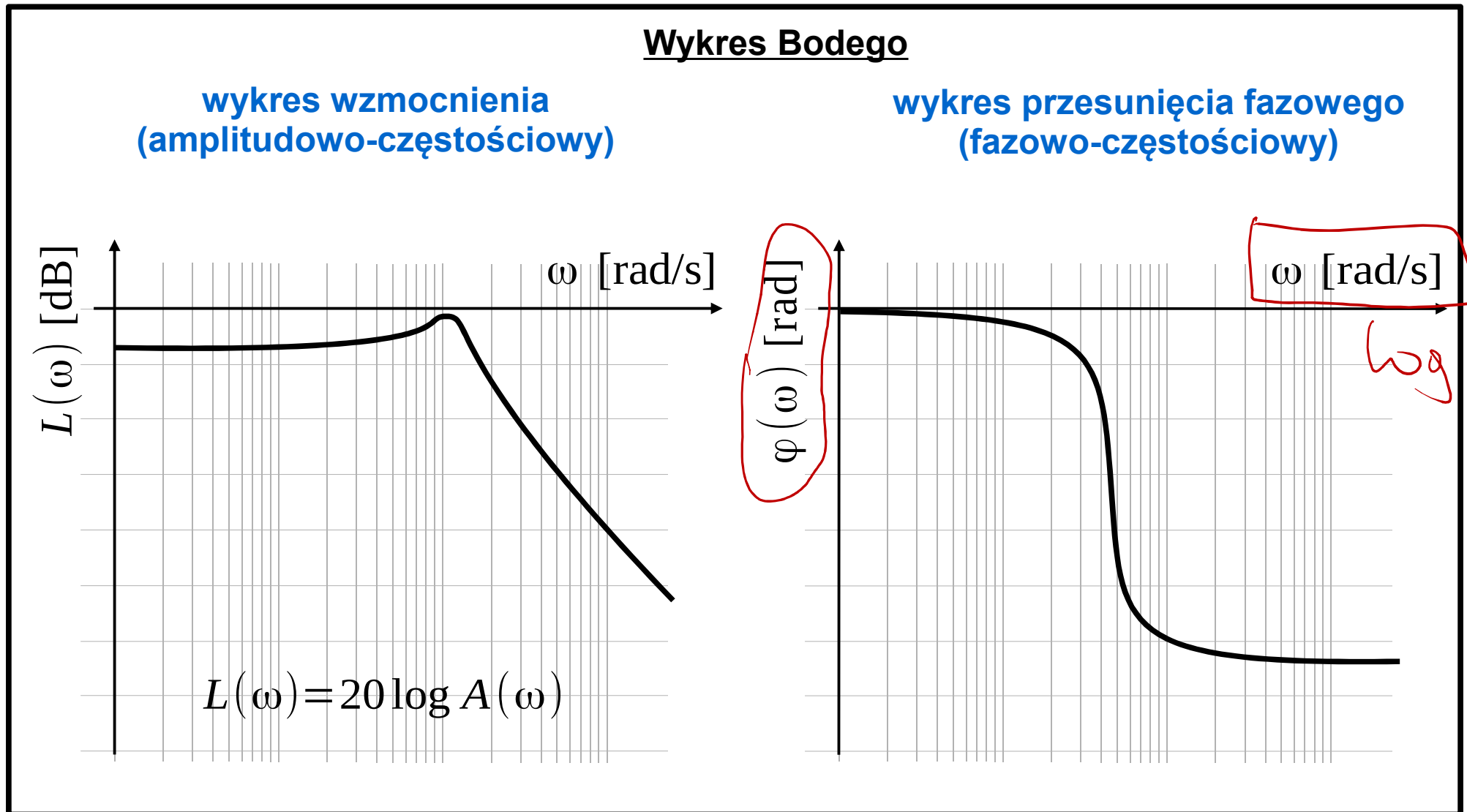


# Transmitancja widmowa

wejście:  $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja:  $G(s)$

wyjście:  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$



oś pozioma w skali logarytmicznej, oś pionowa w skali liniowej!

# Transmitancja widmowa

## Skala liniowa i logarytmiczna

$$20 \log \frac{P_i}{P_o}$$

A (wzmocnienie)	20logA [dB]
1000	60
100	40
10	20
1	0
0,1	-20
0,01	-40
0,001	-60

$$20 \log 1$$

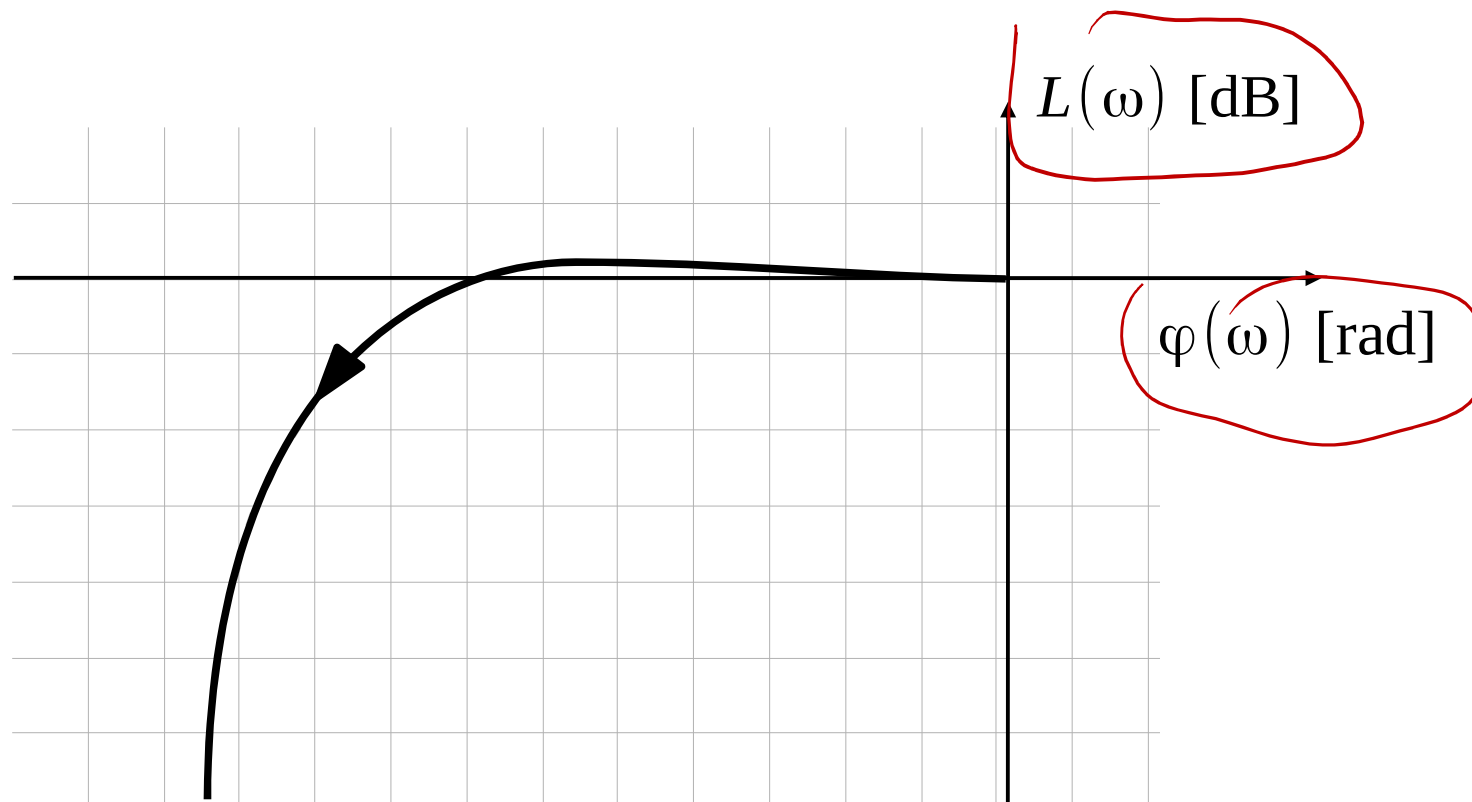
# Transmitancja widmowa

wejście:  $x(t) = \sin(\omega t)$

transmitancja:  $G(s)$

wyście:  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

## Wykres Nicholisa (współrzędne Blacka)



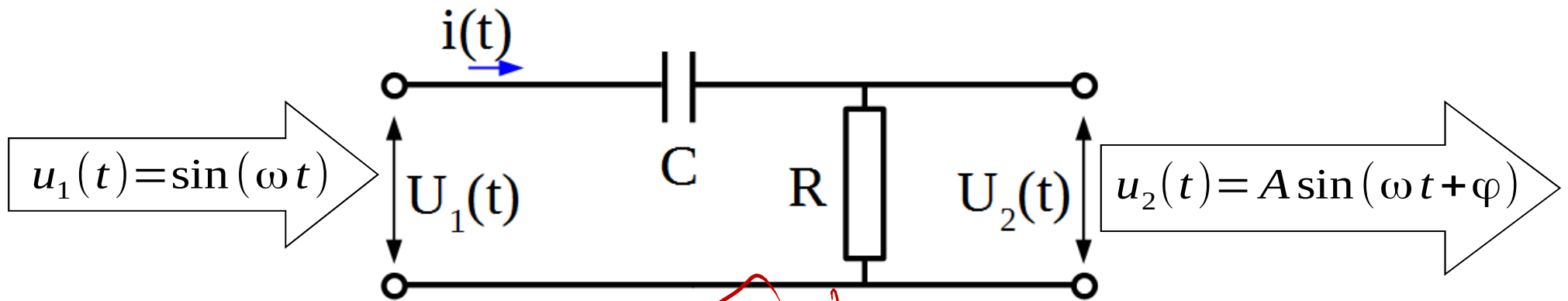
# Transmitancja widmowa

Transmitancja widmowa znajduje zastosowanie do opisu własności m.in.:

- układów sterowania (obiekty sterowane, regulatory)
- układów drgających (zawieszenia, układy napędowe)
- układów audio (wzmacniacze, mikrofony, głośniki, kable)
- układów bezprzewodowej transmisji danych (wzmacniacze, anteny)

# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC



$G(s) = \frac{Ts}{1+Ts}$  - z poprzedniego wykładu

$$G(j\omega) = \frac{Tj\omega}{1+Tj\omega} = \frac{Tj\omega}{(1+Tj\omega)} \cdot \frac{(1-Tj\omega)}{(1-Tj\omega)} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}$$
$$= \frac{Tj\omega - T^2j^2\omega^2}{1^2 - T^2j^2\omega^2} = \frac{Tj\omega + T^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2} = \frac{T^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2} + j \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$G(s) = \frac{Ts}{1+Ts}$$

$$P(\omega) = \frac{T^2 \omega^2}{1+T^2 \omega^2}$$

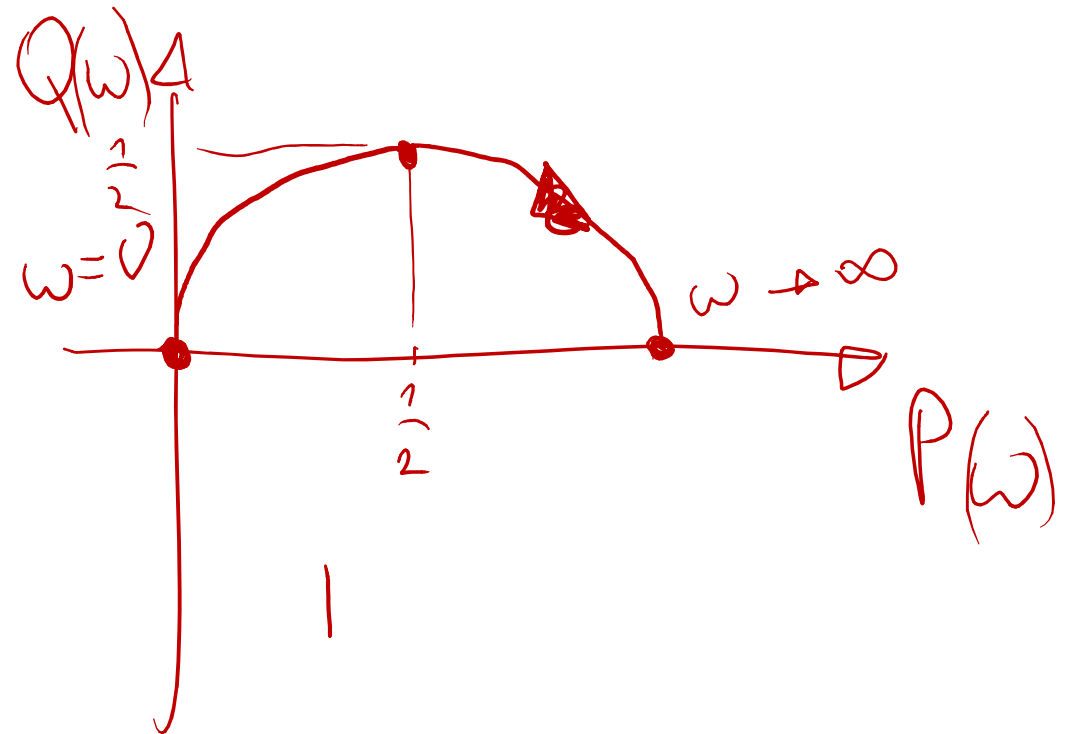
$$Q = \frac{T\omega}{1+T^2 \omega^2}$$

$$P\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{2} \quad Q\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = \frac{1}{2}$$

$$P(\omega \rightarrow \infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{T^2 \omega^2}{1+T^2 \omega^2} =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{T^2}{\frac{1}{\omega^2} + T^2} = 1$$

$$Q(\omega \rightarrow \infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega}{\frac{1}{\omega^2} + T^2} = 0$$



# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$G(s) = \frac{Ts}{1+Ts}$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{\frac{T^2 \omega^4}{(T^2 \omega^2 + 1)^2} + \frac{T^2 \omega^2}{(T^2 \omega^2 + 1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{T^2 \omega^2 (T^2 \omega^2 + 1)}{(T^2 \omega^2 + 1)^2}} = \frac{T\omega}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20 \log_{10} \frac{T\omega}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} = 20 \log_{10} T\omega - 20 \log_{10} \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \frac{1}{T\omega}$$

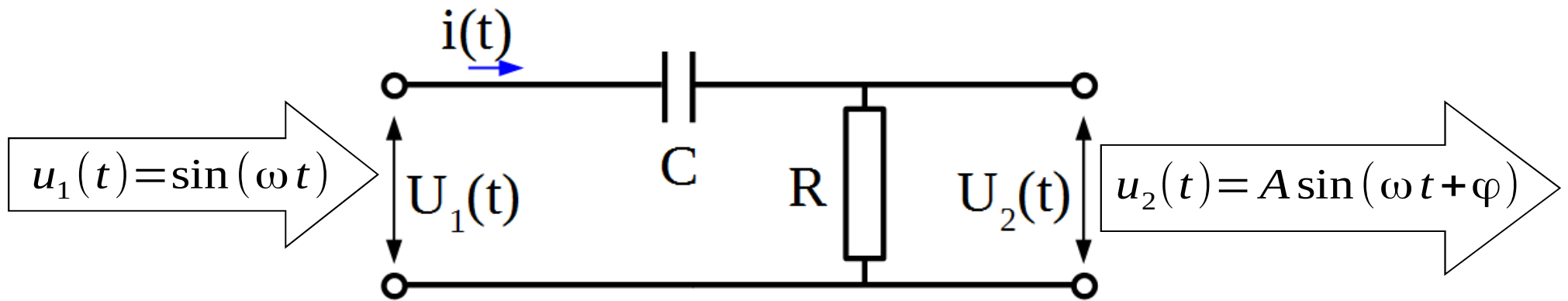
# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$G(s) = \frac{Ts}{1 + Ts}$$

# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC



$$G(s) = \frac{Ts}{1+Ts} \quad \text{- z poprzedniego wykładu}$$

$$s = j\omega$$

$$G(j\omega) = \frac{Tj\omega}{1+Tj\omega} = \frac{Tj\omega}{1+Tj\omega} \cdot \frac{1-Tj\omega}{1-Tj\omega} = \frac{Tj\omega - T^2j^2\omega^2}{1^2 - T^2j^2\omega^2} = \frac{Tj\omega + T^2\omega^2}{1^2 + T^2\omega^2} = \frac{T^2\omega^2}{1^2 + T^2\omega^2} + j \frac{T\omega}{1^2 + T^2\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{T^2\omega^2}{1+T^2\omega^2} \quad Q(\omega) = \frac{T\omega}{1+T^2\omega^2} \quad A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = 20 \log T\omega - 20 \log \sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left( \frac{1}{T\omega} \right)$$

# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$P(\omega) = \frac{T^2 \omega^2}{1 + T^2 \omega^2} \quad Q(\omega) = \frac{T \omega}{1 + T^2 \omega^2}$$

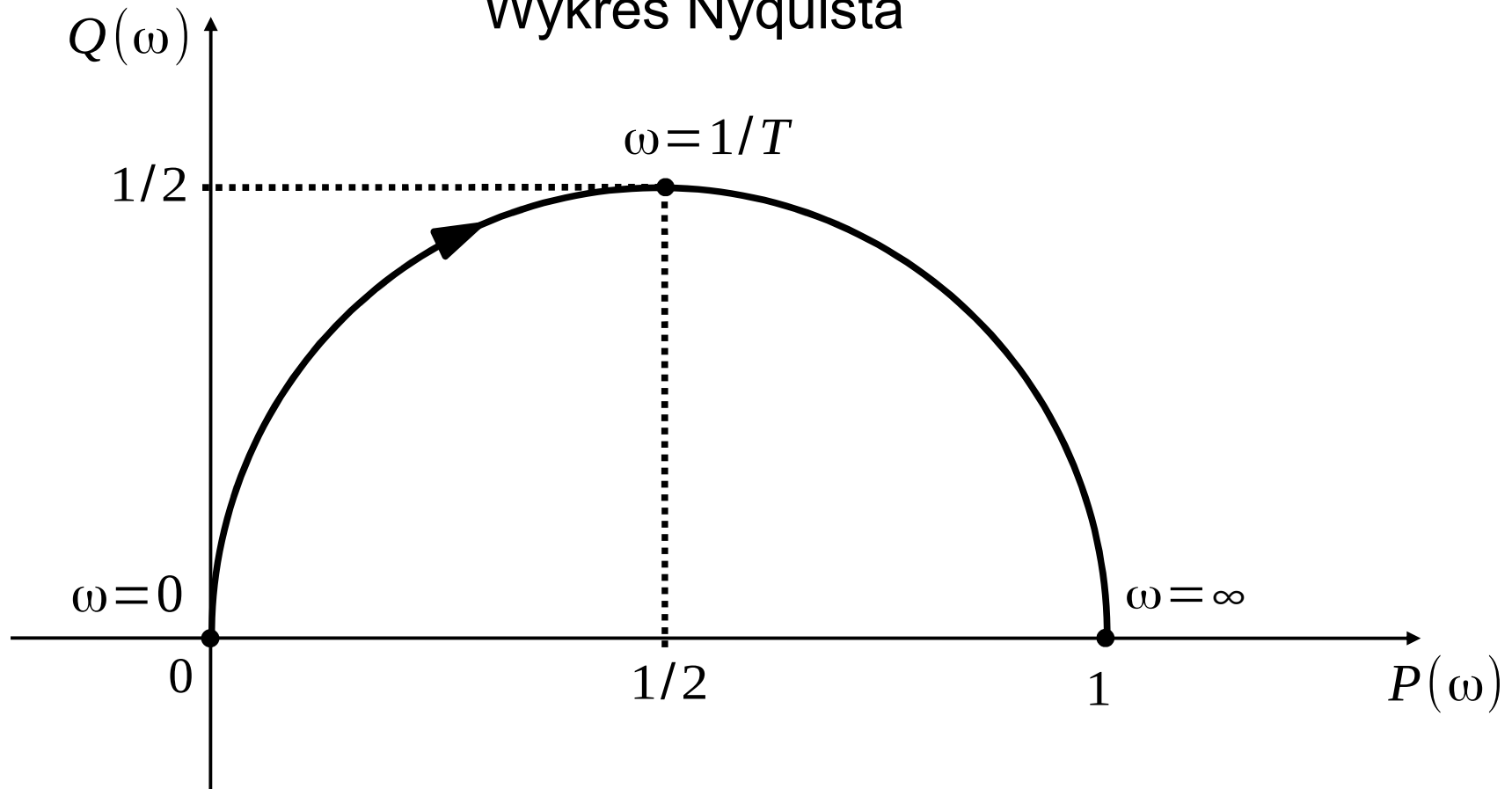
Wykres Nyquista

# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$P(\omega) = \frac{T^2 \omega^2}{1 + T^2 \omega^2} \quad Q(\omega) = \frac{T \omega}{1 + T^2 \omega^2}$$

Wykres Nyquista



# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$A(\omega) = \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

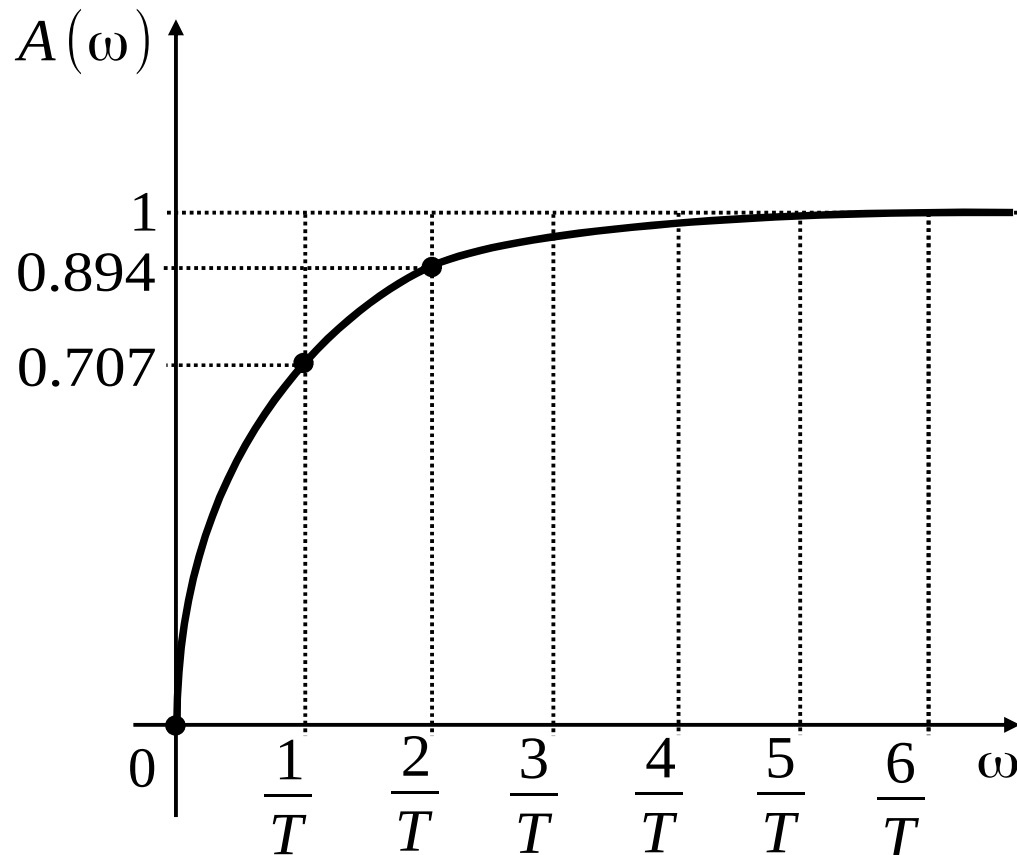
$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$A(\omega) = \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

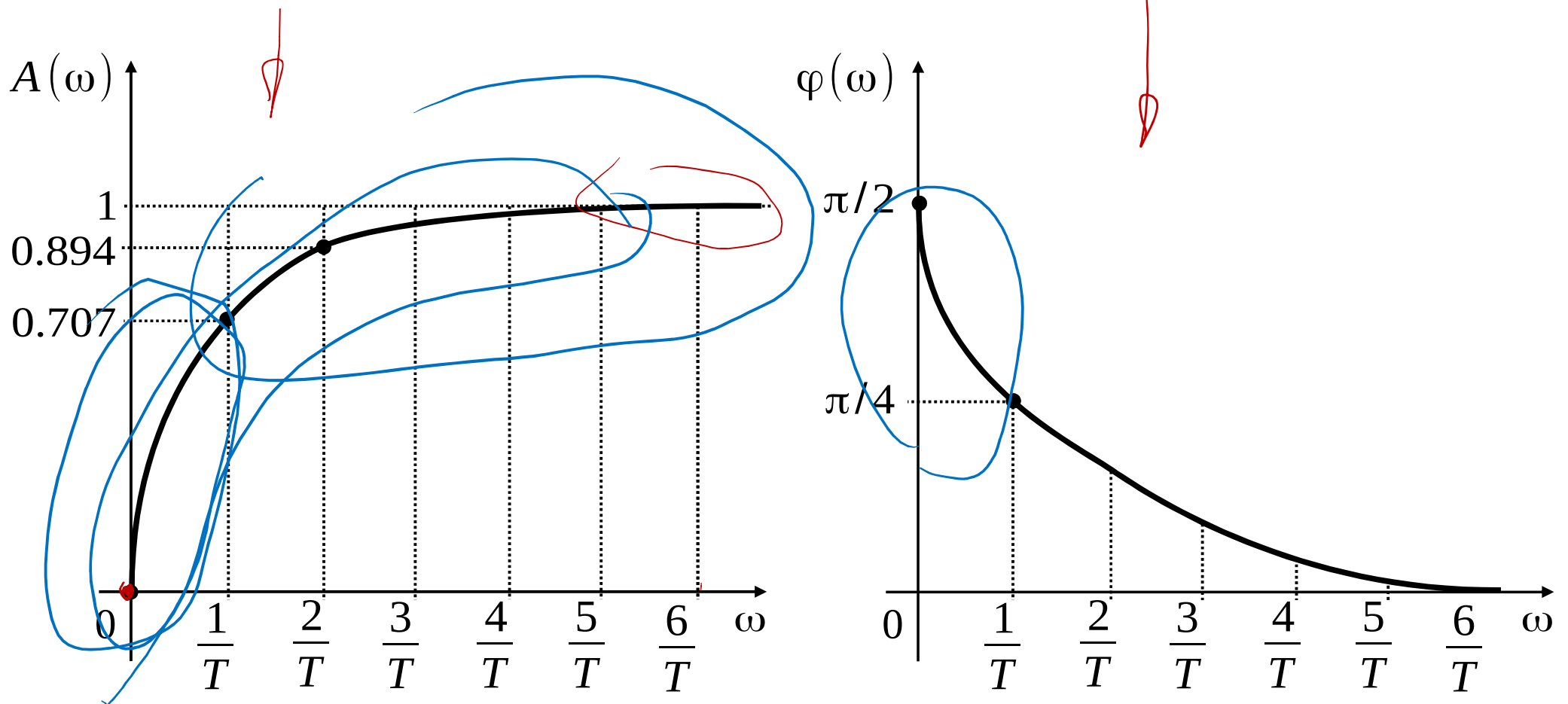


# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$A(\omega) = \frac{T\omega}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$



# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1} \qquad \varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{1}{T \omega} \right)$$

Wykres Bodego

# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

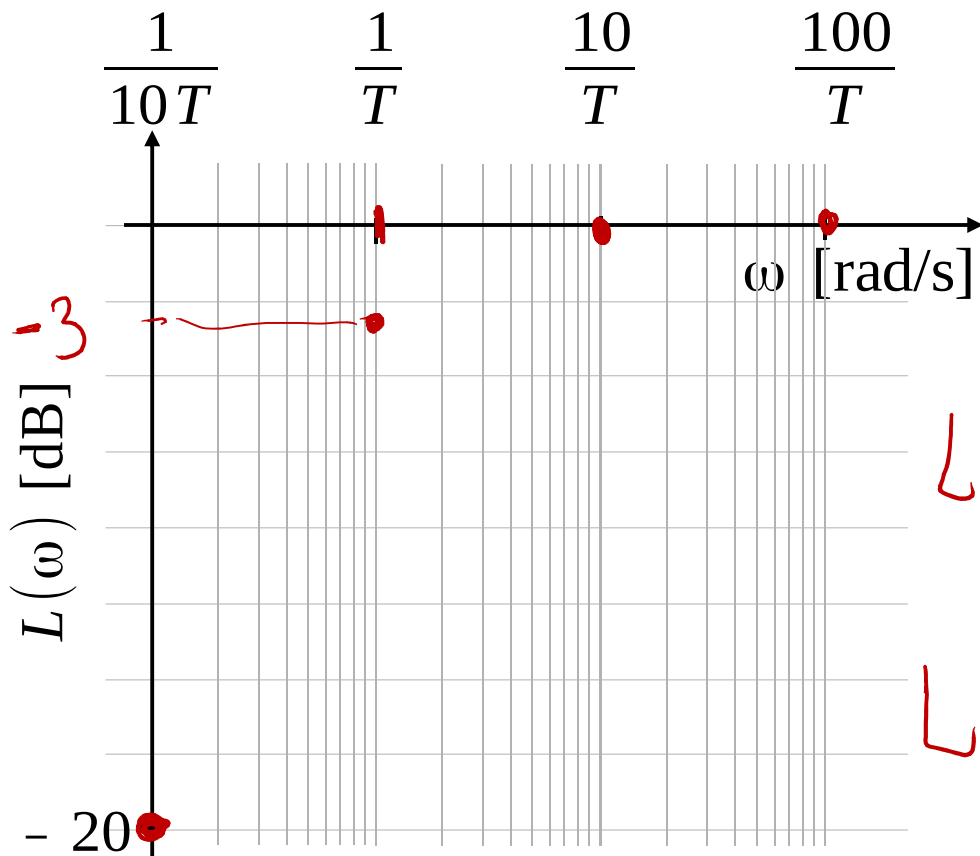
$$L\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{2} \approx -3$$

$$L\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = 20 \log 10 - 20 \log \sqrt{101} \approx 0$$

$$L\left(\omega = \frac{100}{T}\right) = 20 \log 100 - 20 \log \sqrt{10001} = 0$$

$$L\left(\omega = \frac{1}{10T}\right) = 20 \log \frac{1}{10} - 20 \log \sqrt{\frac{101}{100}} = -20$$

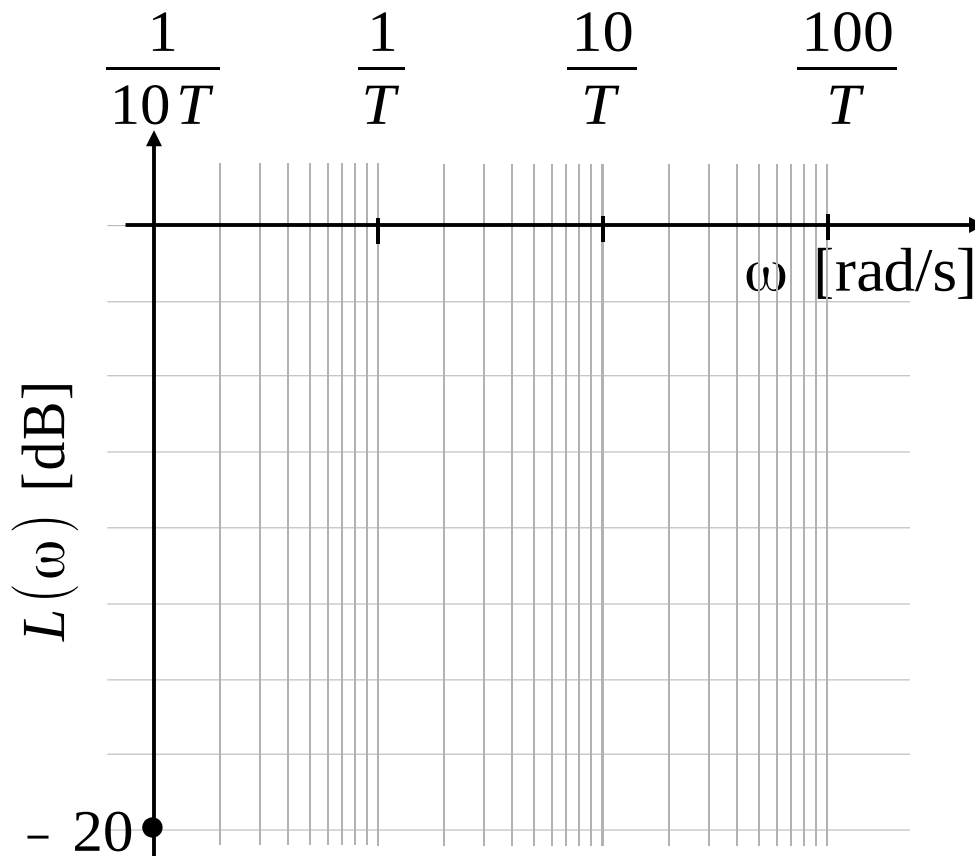
$$L\left(\omega = \frac{1}{100T}\right) = 20 \log \frac{1}{100} = -40$$



# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$



$$L\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{2} \approx -3$$

$$L\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = 20 \log 10 - 20 \log \sqrt{101} \approx 0$$

$$L\left(\omega = \frac{100}{T}\right) = 20 \log 100 - 20 \log \sqrt{10001} \approx 0$$

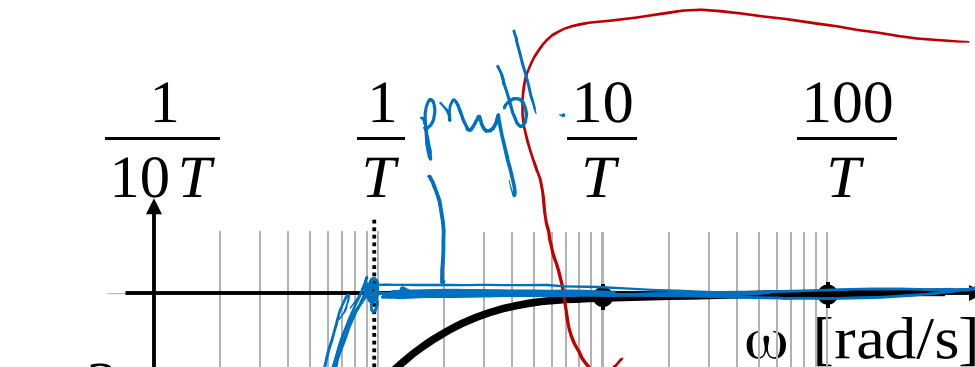
$$L\left(\omega = \frac{1}{10T}\right) = 20 \log 0,1 - 20 \log \sqrt{1,01} \approx -20$$

$$L\left(\omega = \frac{1}{100T}\right) = 20 \log 0,01 - 20 \log \sqrt{1,0001} \approx -40$$

# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$



$$L\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{2} \approx -3$$

$$L\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = 20 \log 10 - 20 \log \sqrt{101} \approx 0$$

$$L\left(\omega = \frac{100}{T}\right) = 20 \log 100 - 20 \log \sqrt{10001} \approx 0$$

$$L\left(\omega = \frac{1}{10T}\right) = 20 \log 0,1 - 20 \log \sqrt{1,01} \approx -20$$

$$L\left(\omega = \frac{1}{100T}\right) = 20 \log 0,01 - 20 \log \sqrt{1,0001} \approx -40$$

*-20 dB/dek.*

# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$\varphi\left(\frac{1}{T}\right) = \arctan(1) = 45^\circ$$

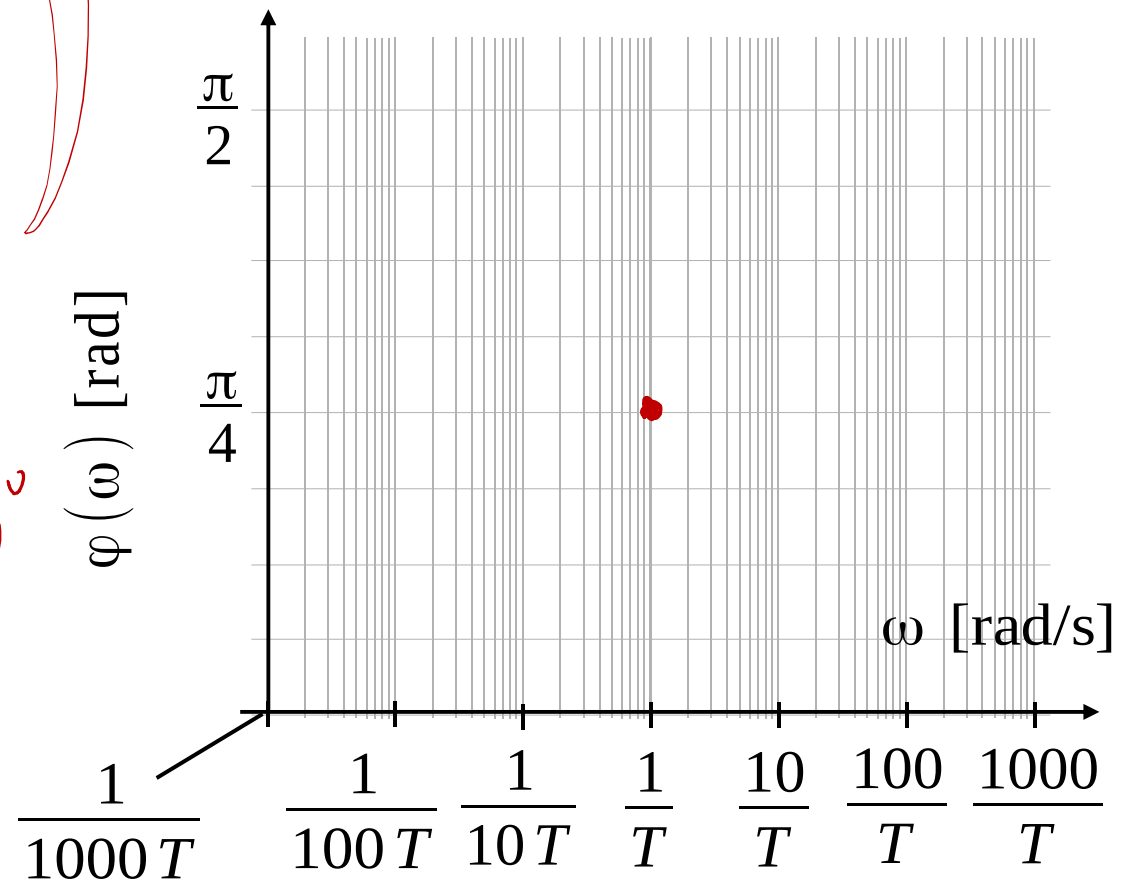
$$\varphi\left(\frac{10}{T}\right) = \arctan\left(\frac{1}{10}\right) \approx 6^\circ$$

$$\varphi\left(\frac{100}{T}\right) = \arctan\left(\frac{1}{100}\right) \approx 0^\circ$$

$$\varphi\left(\frac{1}{10T}\right) = \arctan(10) \approx 84^\circ$$

$$\varphi\left(\frac{1}{100T}\right) = \arctan(100) \approx 90^\circ$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$



# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

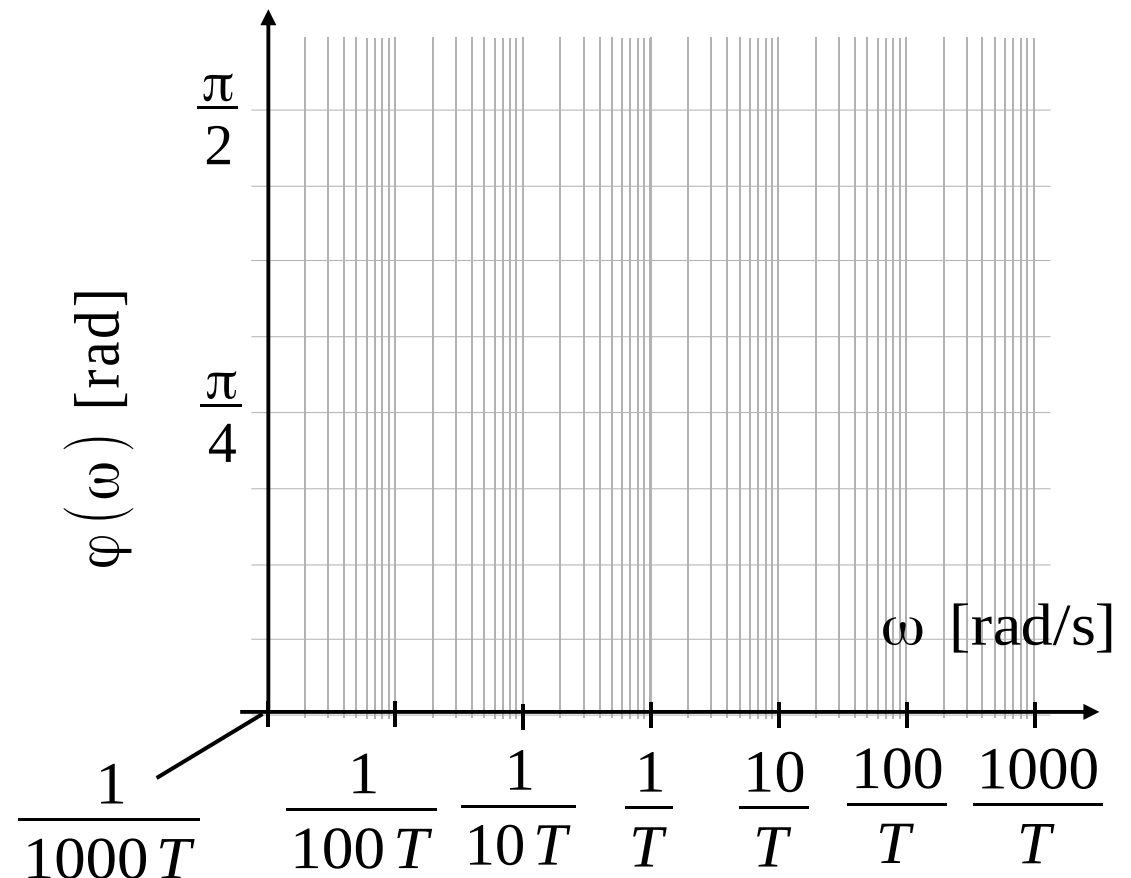
$$\varphi\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = \arctan \frac{1}{10} = 0,1 = 5,71^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{100}{T}\right) = \arctan \frac{1}{100} = 0,01 = 0,57^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1000}{T}\right) = \arctan \frac{1}{1000} = 0,001 = 0,06^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{10T}\right) = \arctan 10 = 1,47 = 84,29^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{100T}\right) = \arctan 100 = 1,56 = 89,43^\circ$$



# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{T}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

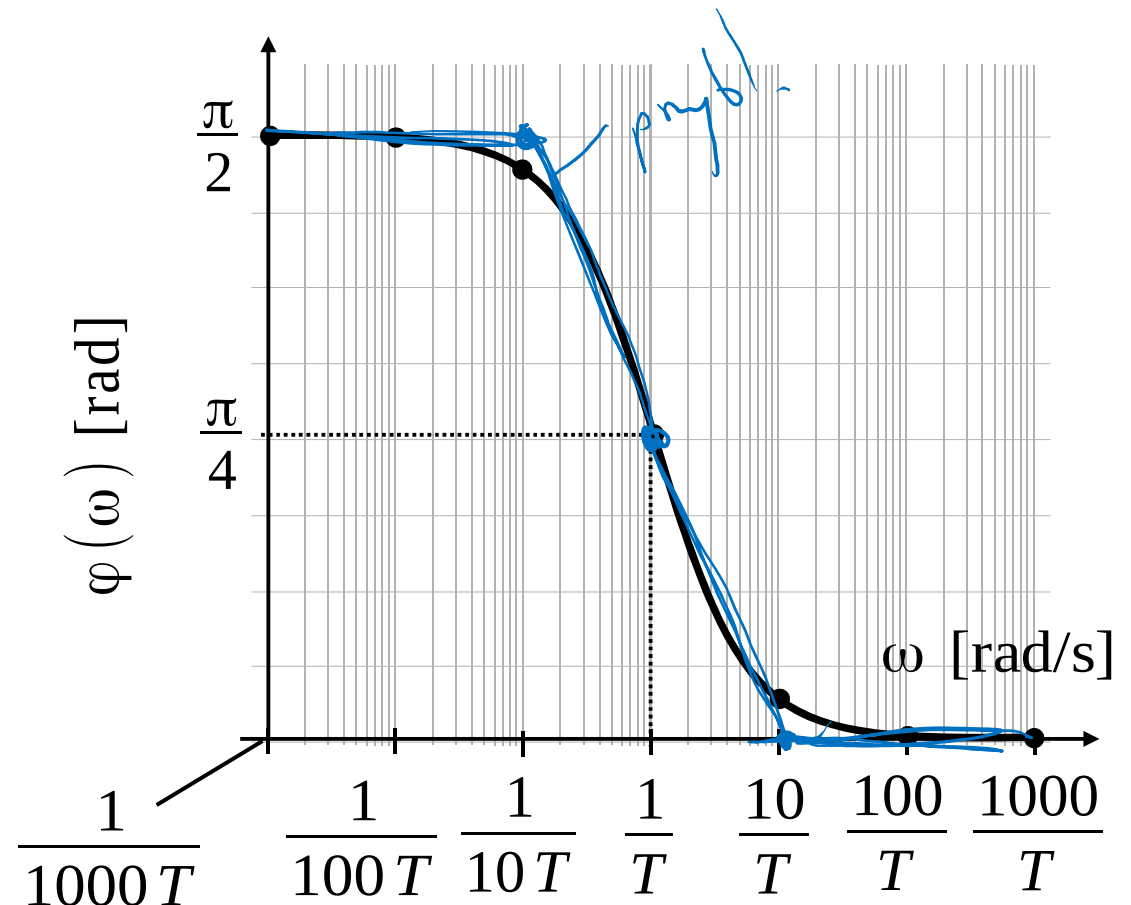
$$\varphi\left(\omega = \frac{10}{T}\right) = \arctan \frac{1}{10} = 0,1 = 5,71^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{100}{T}\right) = \arctan \frac{1}{100} = 0,01 = 0,57^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1000}{T}\right) = \arctan \frac{1}{1000} = 0,001 = 0,06^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{10T}\right) = \arctan 10 = 1,47 = 84,29^\circ$$

$$\varphi\left(\omega = \frac{1}{100T}\right) = \arctan 100 = 1,56 = 89,43^\circ$$



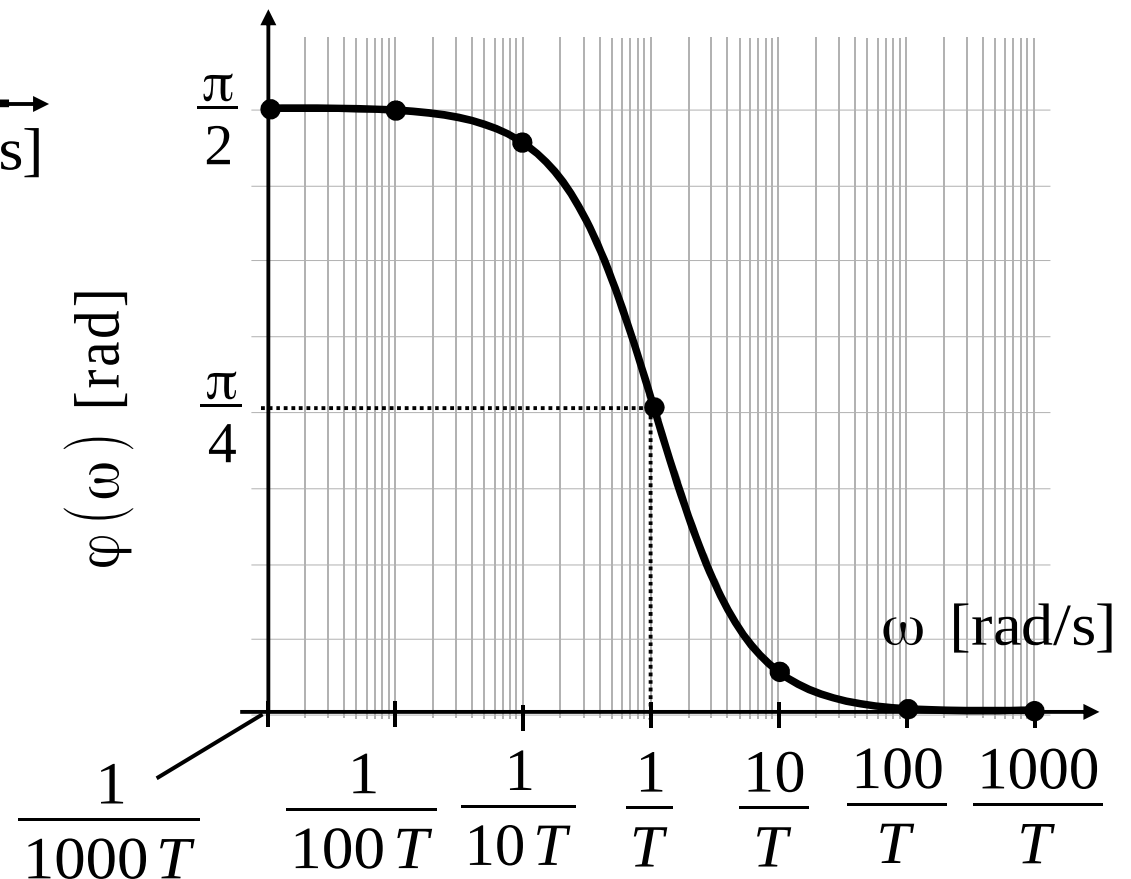
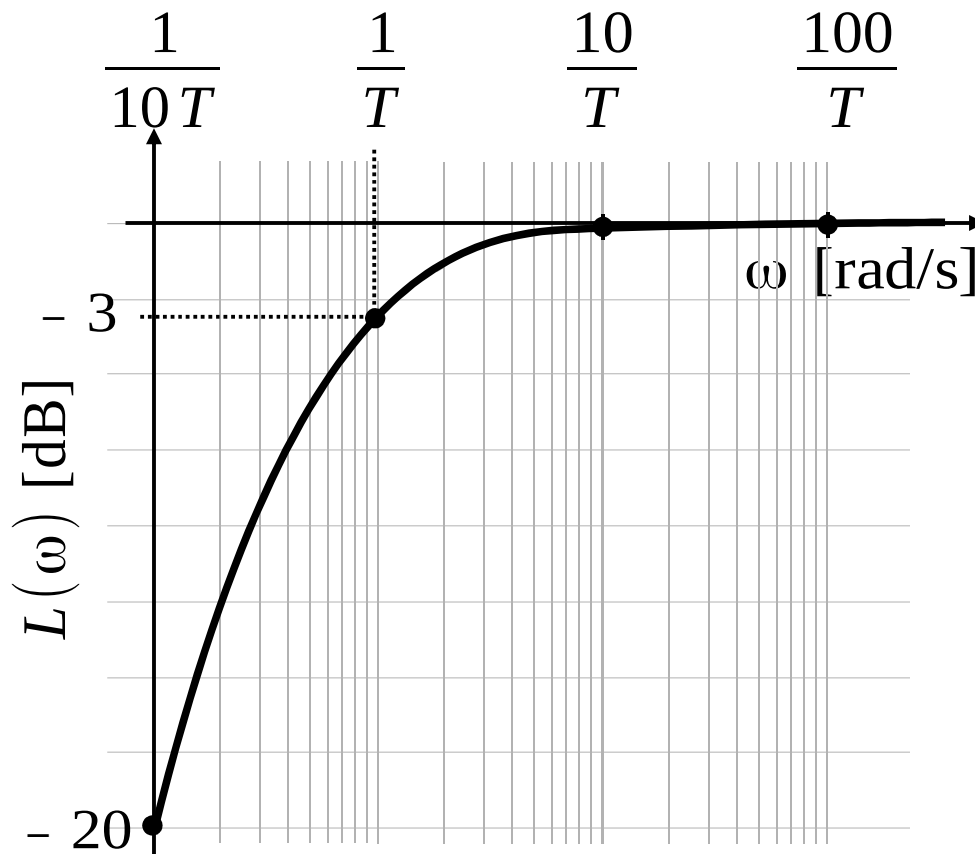
# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$L(\omega) = 20 \log T \omega - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

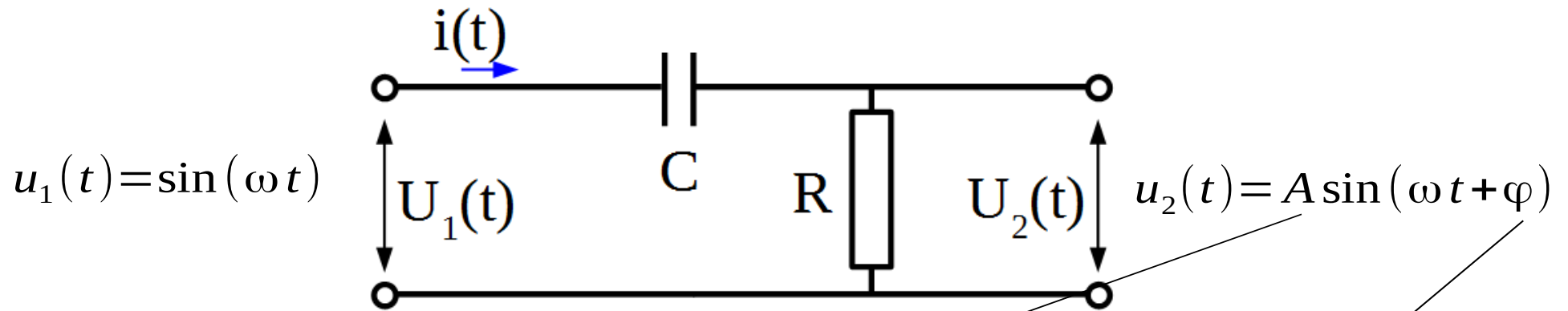
$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{1}{T \omega}\right)$$

Wykres Bodego



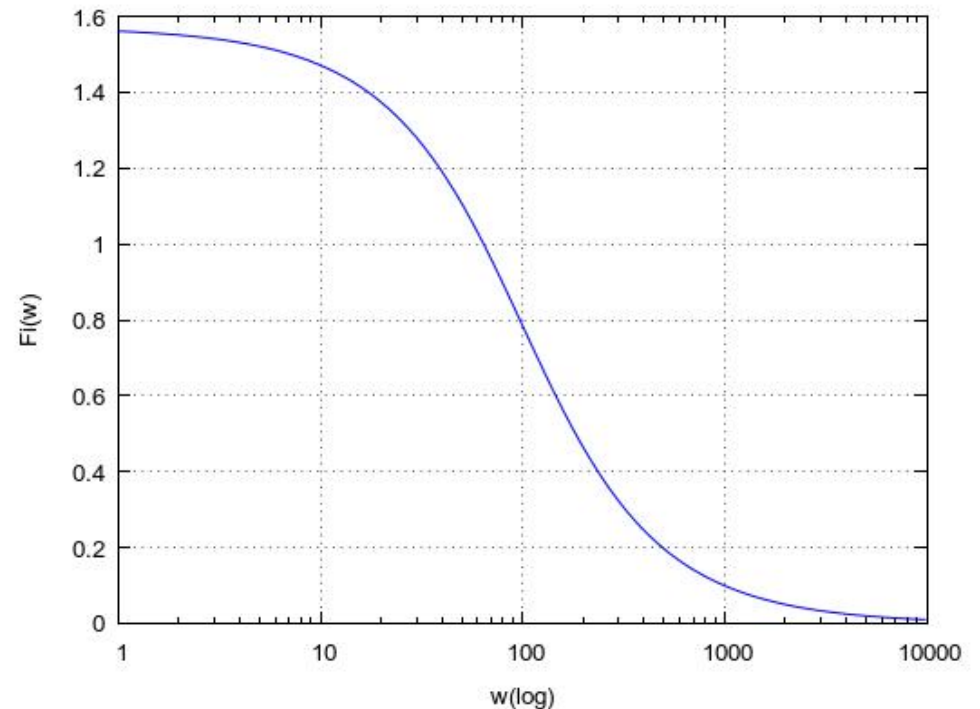
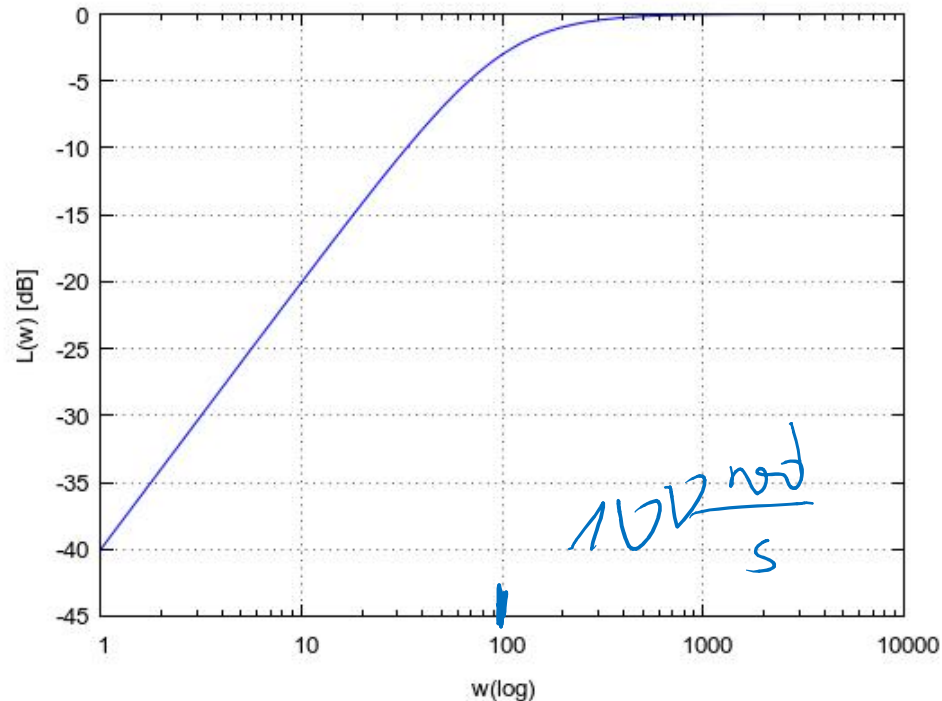
# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC



Przykładowe dane:

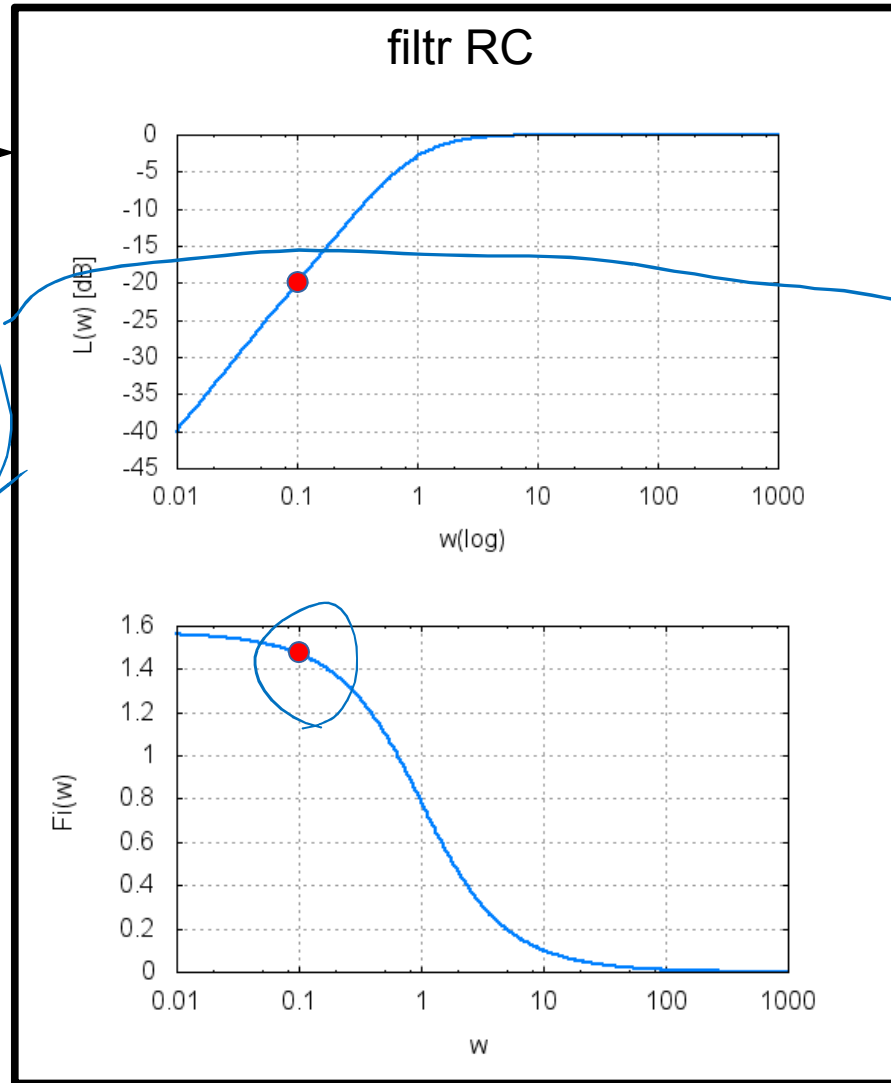
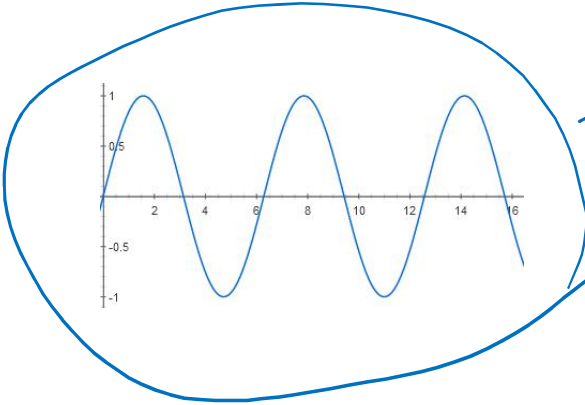
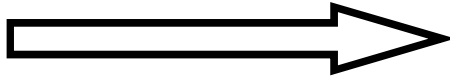
$R = 1 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10 \mu\text{F}$



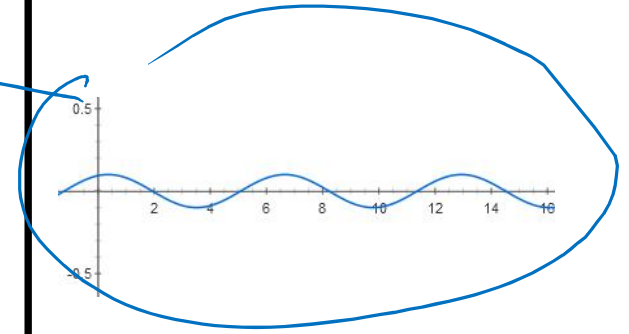
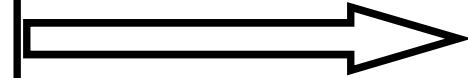
# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$u_1(t) = \sin(\omega t)$$



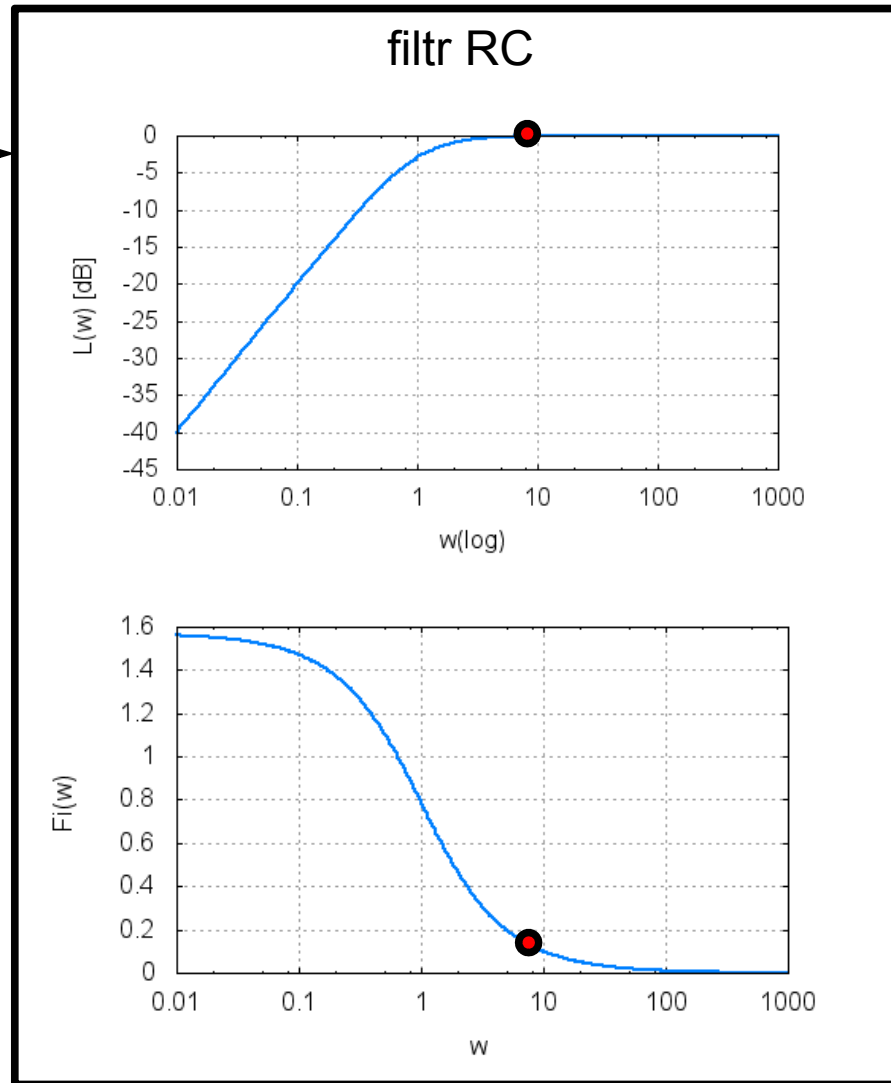
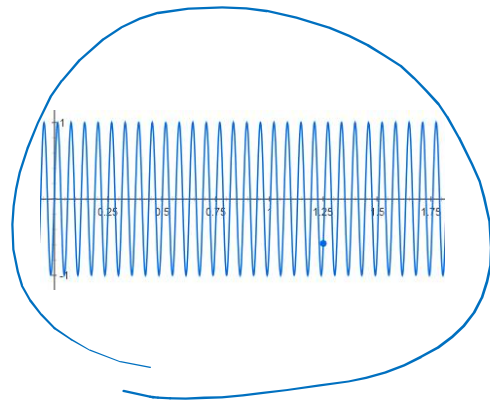
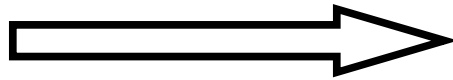
$$u_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$



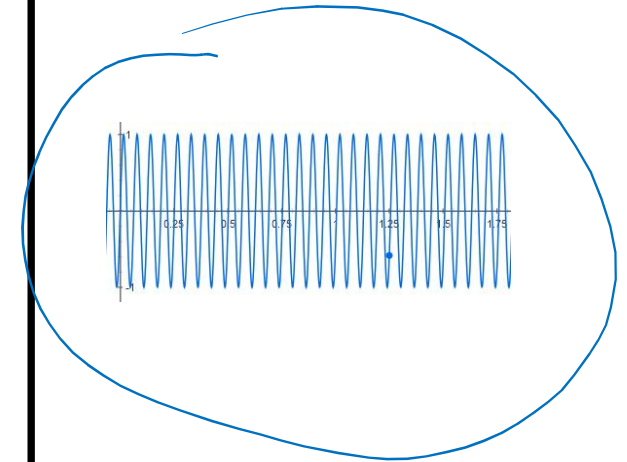
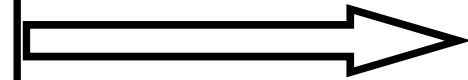
# Transmitancja widmowa

## Przykład 1 - obwód RC

$$u_1(t) = \sin(\omega t)$$

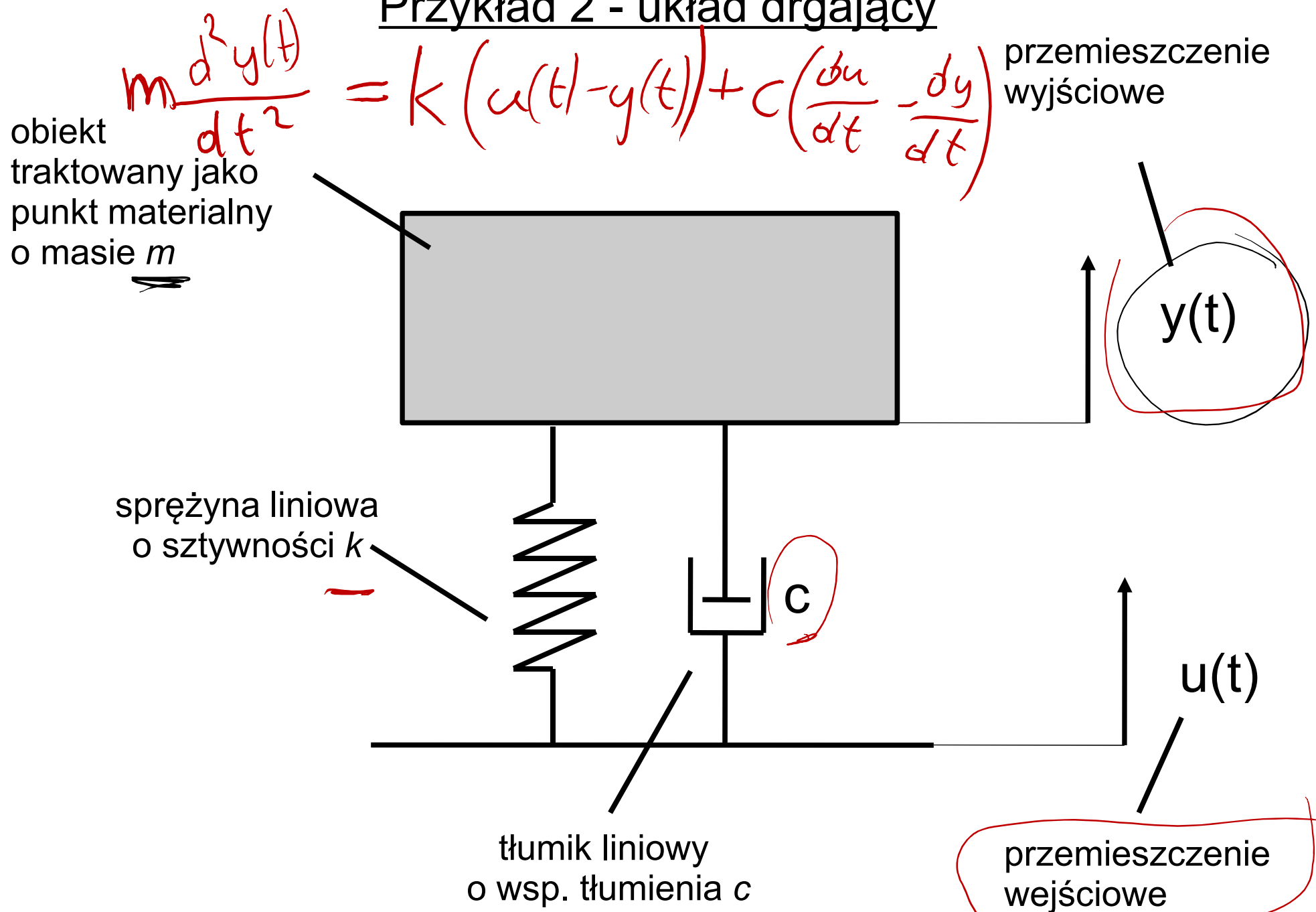


$$u_2(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$



# Transmitancja widmowa

## Przykład 2 - układ drgający



# Transmitancja widmowa

## Przykład 2 - układ drgający

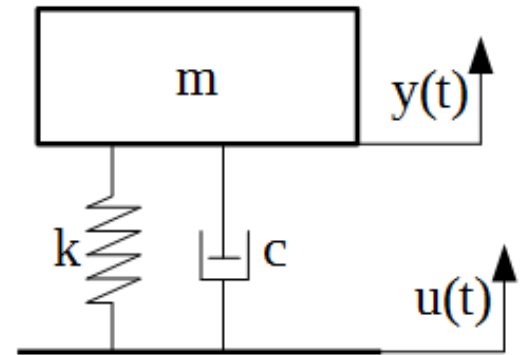
$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = c \dot{u}(t) + k u(t)$$

$$m s^2 Y(s) + c s Y(s) + k Y(s) = c s U(s) + k U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c s + k}{m s^2 + c s + k}$$

$$G(j\omega) = \frac{c j\omega + k}{-m\omega^2 + c j\omega + k} = \frac{j c \omega + k}{(k - m\omega^2) + j c \omega} =$$

$$= \frac{(j c \omega + k)((k - m\omega^2) - j c \omega)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2} = P(\omega) + j Q(\omega)$$

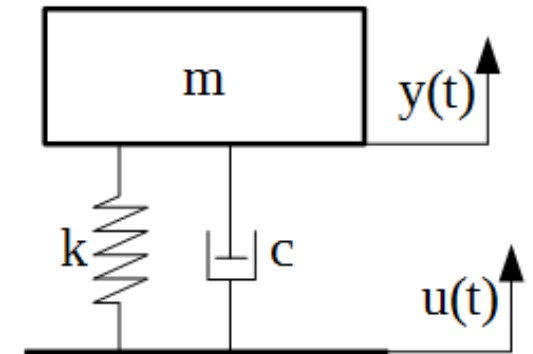


# Transmitancja widmowa

## Przykład 2 - układ drgający

$$m \ddot{y}(t) + c \dot{y}(t) + k y(t) = c \dot{u}(t) + k u(t)$$

$$G(s) = \frac{cs + k}{ms^2 + cs + k}$$



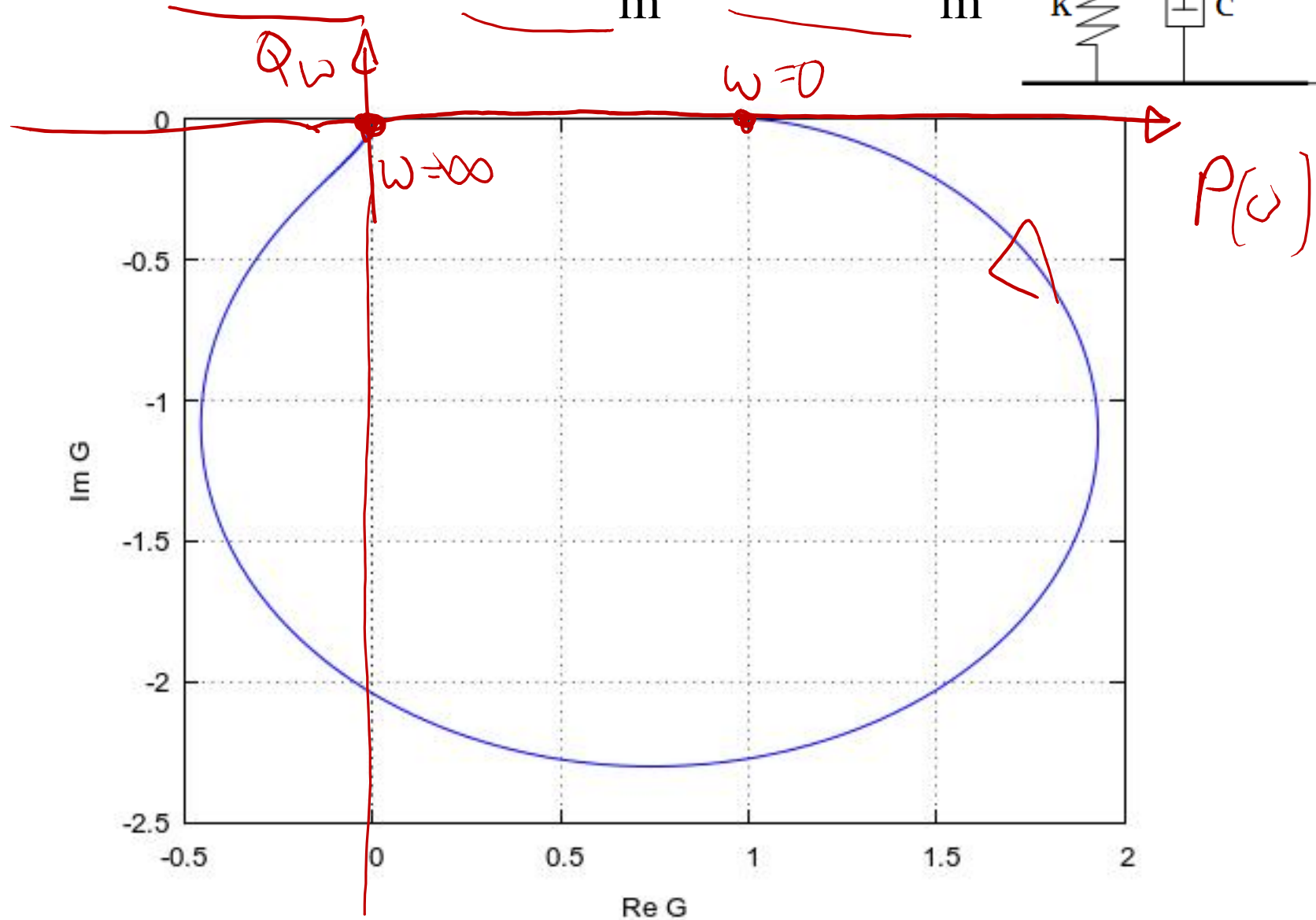
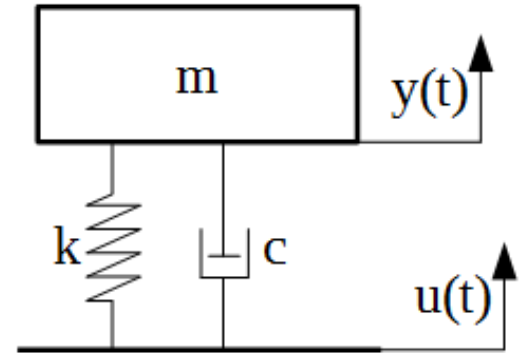
$$P(\omega) = \frac{k^2 + c^2 \omega^2 - km\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-cm\omega^3}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

# Transmitancja widmowa

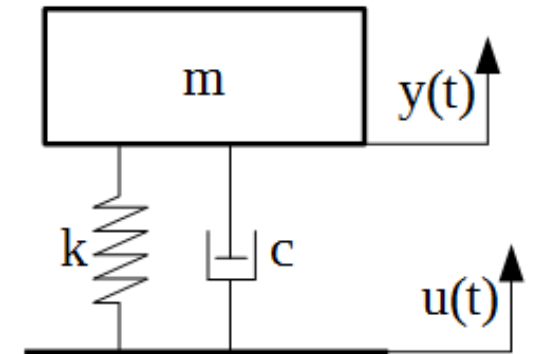
## Przykład 2 - układ drgający

Wykresy dla:  $m = 300 \text{ kg}$ ,  $c = 800 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$ ,  $k = 11000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

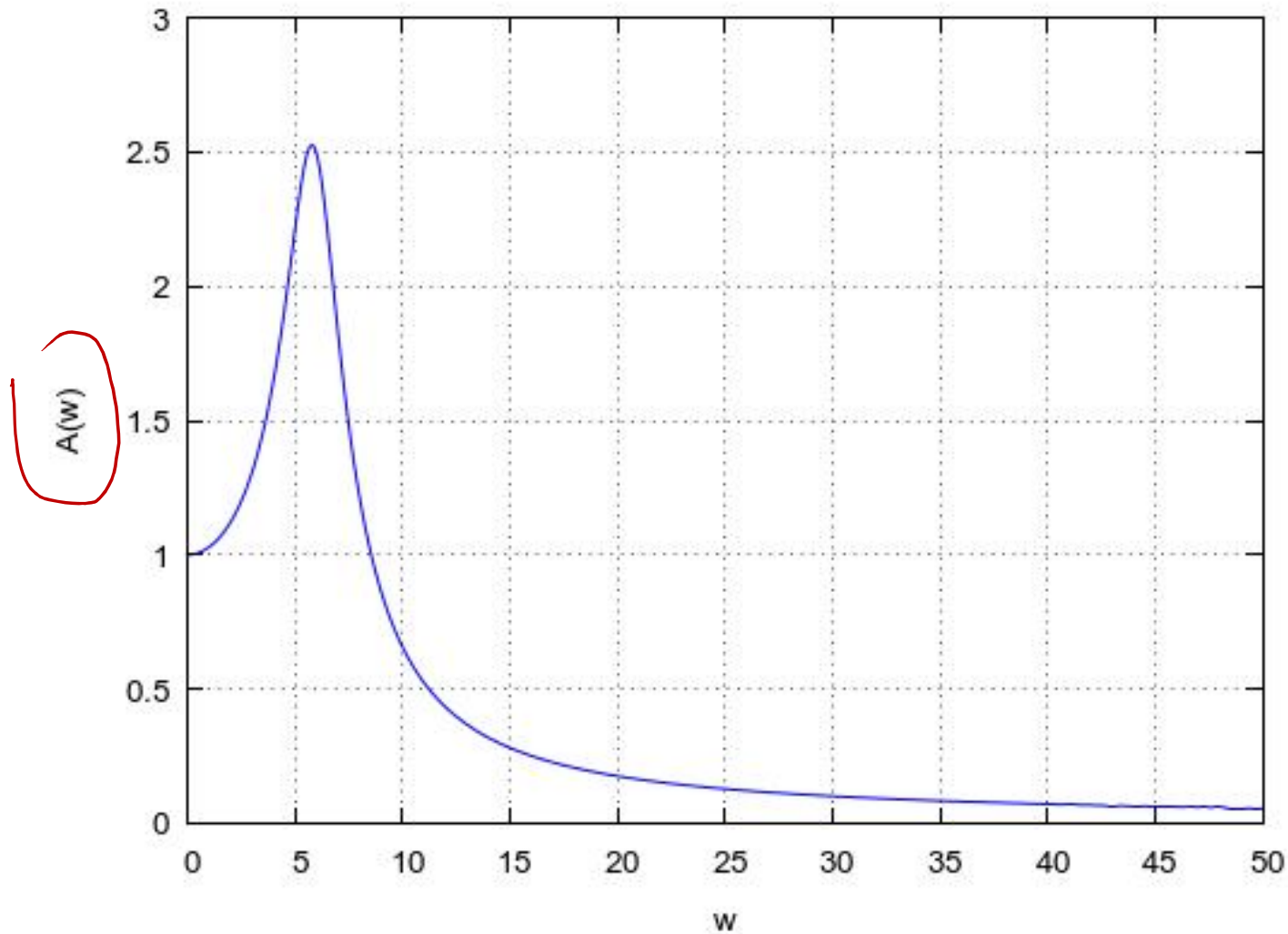


# Transmitancja widmowa

## Przykład 2 - układ drgający

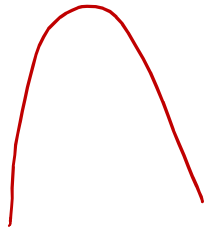


$$A(\omega)$$

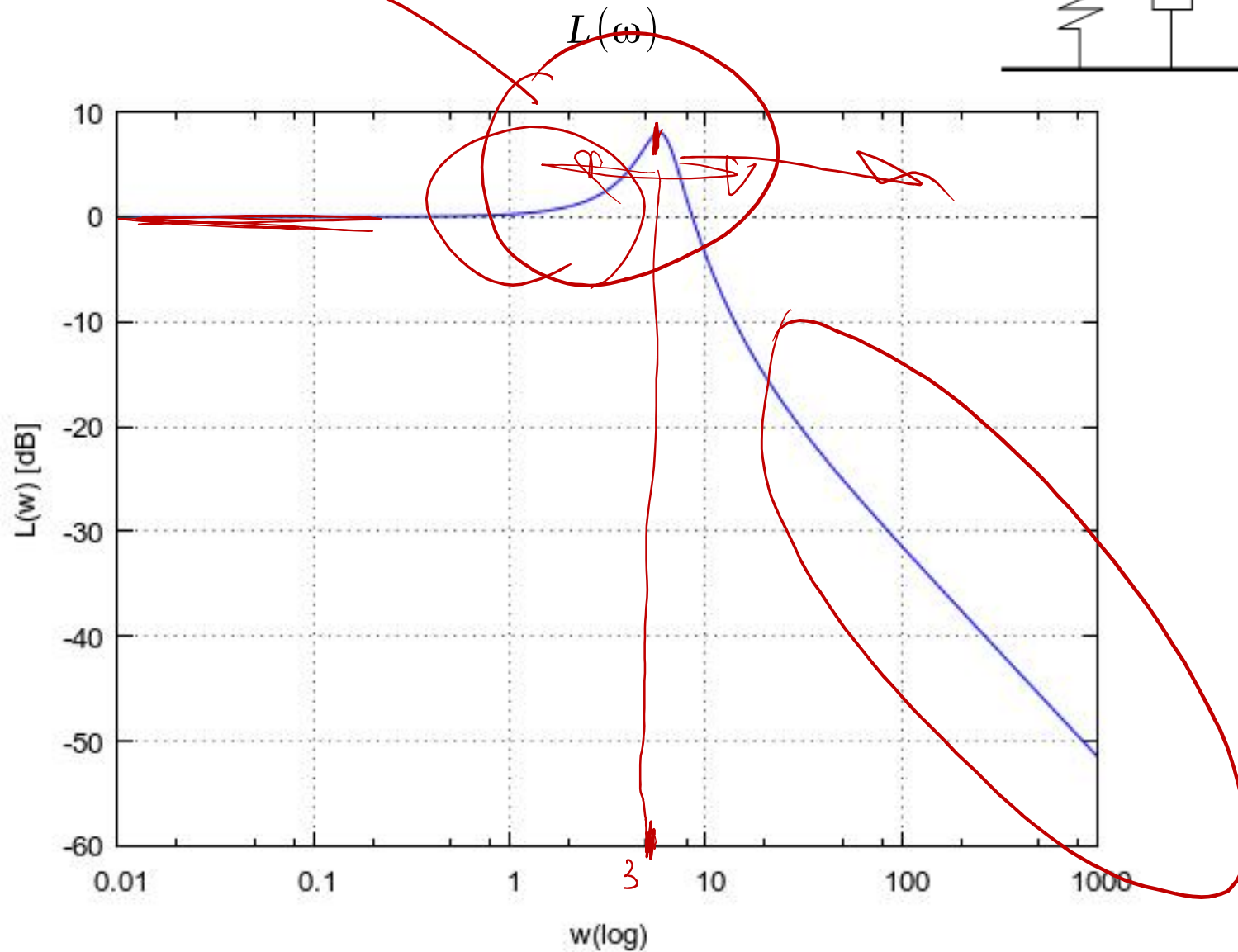
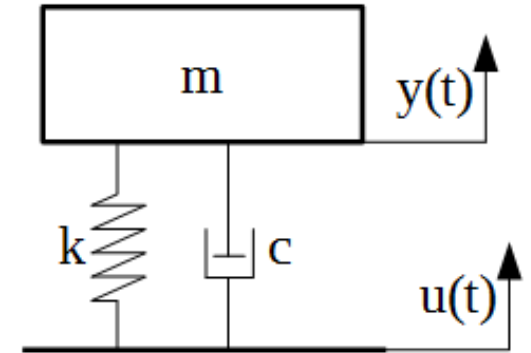


# Transmitancja widmowa

## Przykład 2 - układ drgający

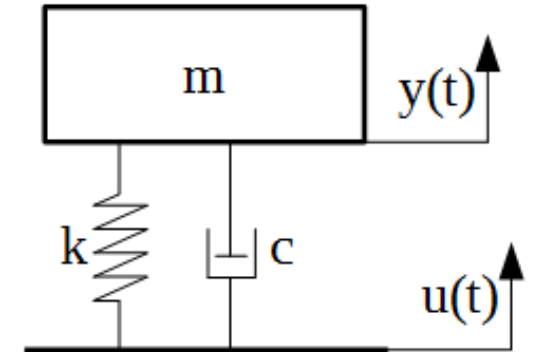


*rezonans*

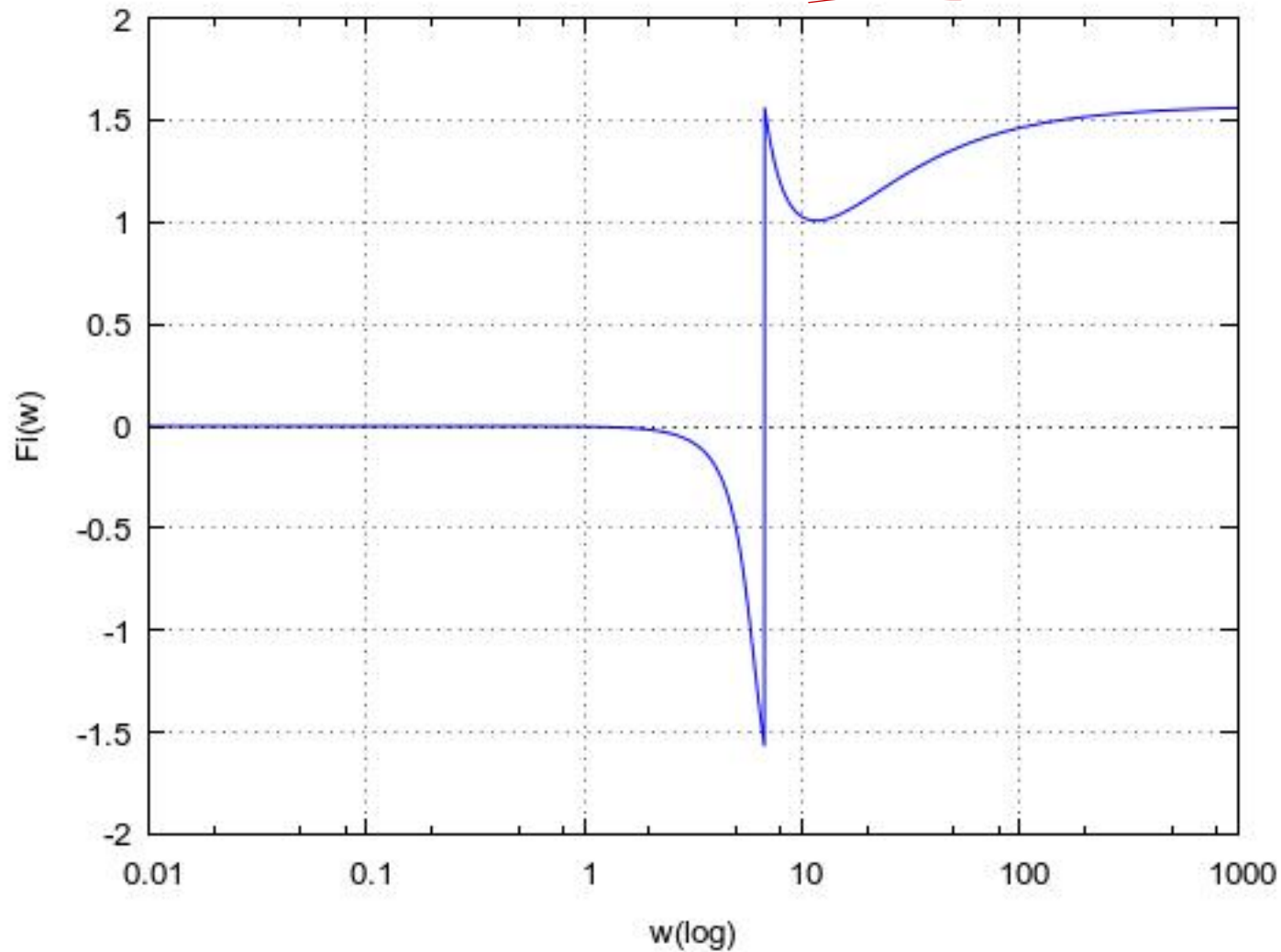


# Transmitancja widmowa

## Przykład 2 - układ drgający

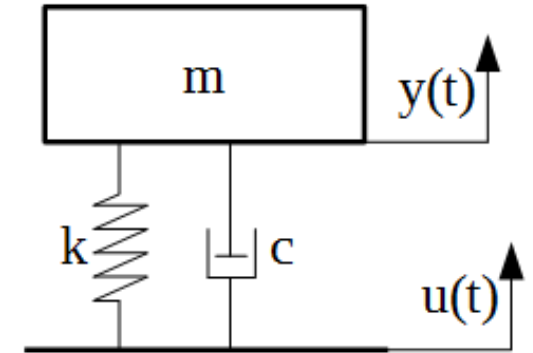


$\varphi(\omega)$  dla obliczeń z użyciem „atan”

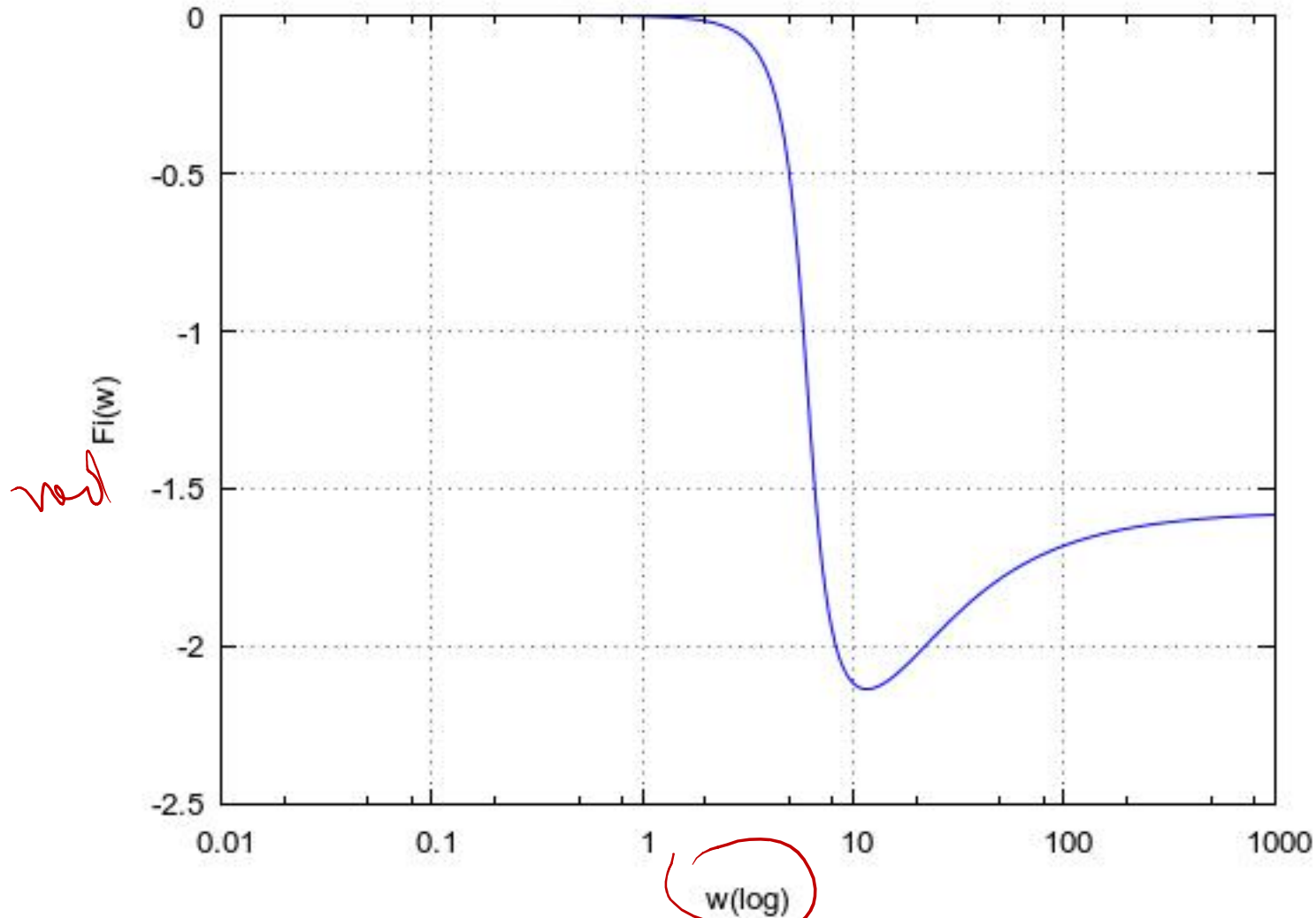


# Transmitancja widmowa

## Przykład 2 - układ drgający



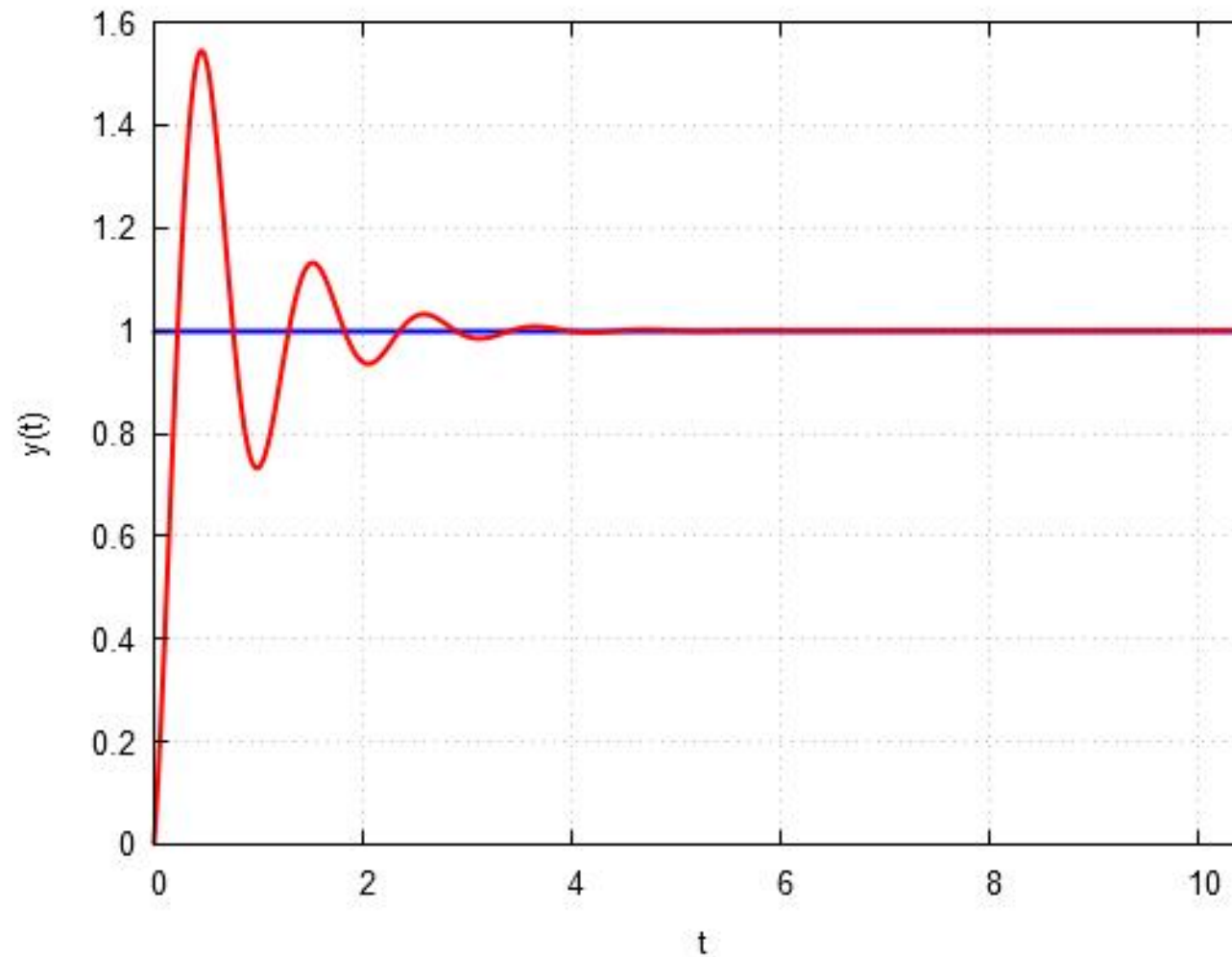
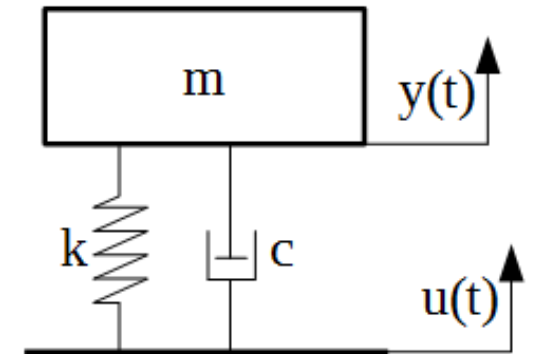
$\varphi(\omega)$  dla obliczeń z użyciem „atan2”



# Transmitancja widmowa

## Przykład 2 - układ drgający

Odp. na wymuszenie skokowe



# Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa elementu	Równanie	Transmitancja
proporcjonalny (bezinercyjny)	$y(t) = ku(t)$	$k$
inercyjny I rzędu	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{Ts + 1}$
całkujący	$y(t) = k \int_0^t u(t) dt$ $\frac{dy(t)}{dt} = ku(t)$	$\frac{k}{s}$

# Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa	Równanie	Transmitancja
różniczkujący <del>ciągły</del>	$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	$ks$ $k \in \mathbb{R}$
<del>różniczkujący</del> <del>rzeczywisty</del> (z bezwładnością)	$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$	$\frac{ks}{Ts + 1}$

$$ks \cdot \frac{1}{Ts + 1}$$

# Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

Nazwa	Równanie	Transmitancja
<u>opóźniający</u>	$y(t) = u(t - \tau)$ <p style="text-align: right;"><math>\tau \in \mathbb{R}_+</math></p>	$e^{-\tau s}$
<u>inercyjny II rzędu (oscylacyjny)</u>	$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$

$k \in \mathbb{R}$   
 $T_1, T_2 \in \mathbb{R}_+ [s]$

# Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

nazwa elementu	transmitancja
Proporcjonalny	$k$
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	$ks$
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$        $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$        $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

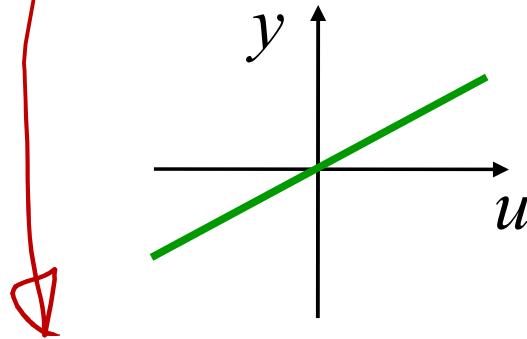
2. Charakterystyka statyczna:  $u(t) = \text{const.} \Rightarrow y(t) = \text{const.}$

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$        $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$       dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



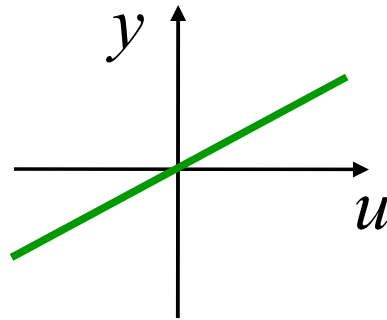
3. Transmitancja:  $Y(s) = k \cdot U(s)$   
 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k$

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$        $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$       dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:  $G(s) = k$

---

4. Odp. skokowa:  $u(t) = u_0 \cdot \mathbb{1}(t) \rightarrow U(s) = u_0 \cdot \frac{1}{s}$

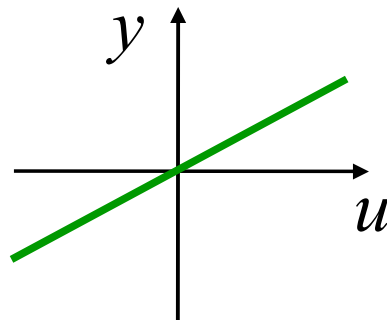
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = k \cdot u_0 \frac{1}{s} \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 \mathbb{1}(t)$$

# Element proporcjonalny

1. Równanie:  $y(t) = ku(t)$   $u(t)$  - wejście,  $y(t)$  - wyjście

---

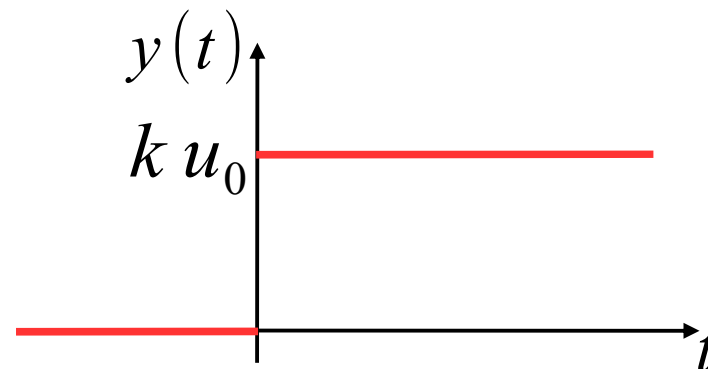
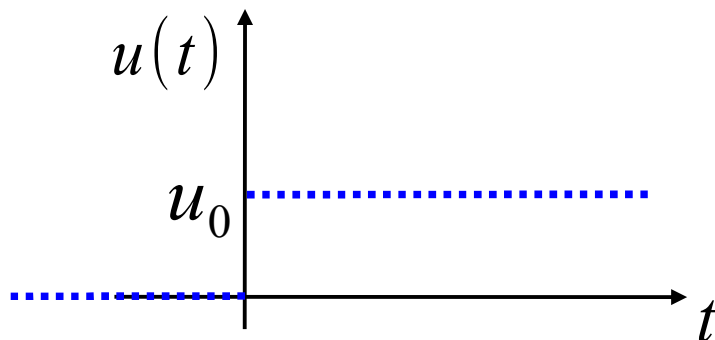
2. Charakterystyka statyczna:  $y = ku$  dla  $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:  $G(s) = k$

---

4. Odp. skokowa:  $y(t) = k u_0 1(t)$  dla  $u(t) = u_0 1(t)$



# Element proporcjonalny

---

5. Transmitancja widmowa:  $a(j\omega) = k$

$$P(\omega) = k ; \quad Q(\omega) = 0$$

# Element proporcjonalny

---

## 5. Transmitancja widmowa:

# Element proporcjonalny

---

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

---

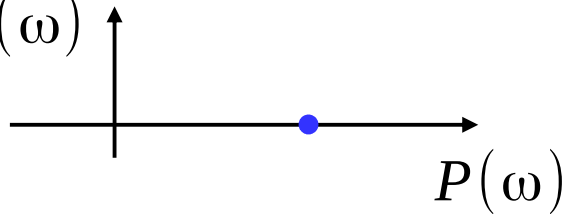
6. Wykres Nyquista:



# Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa:  $G(j\omega) = k$      $P(\omega) = k$ ,  $Q(\omega) = 0$

6. Wykres Nyquista:  $Q(\omega)$

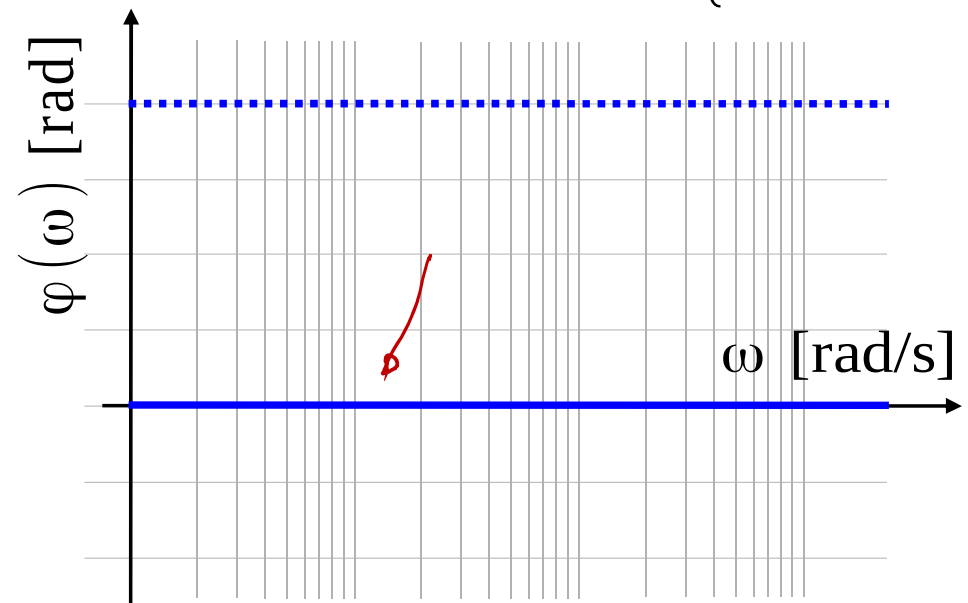
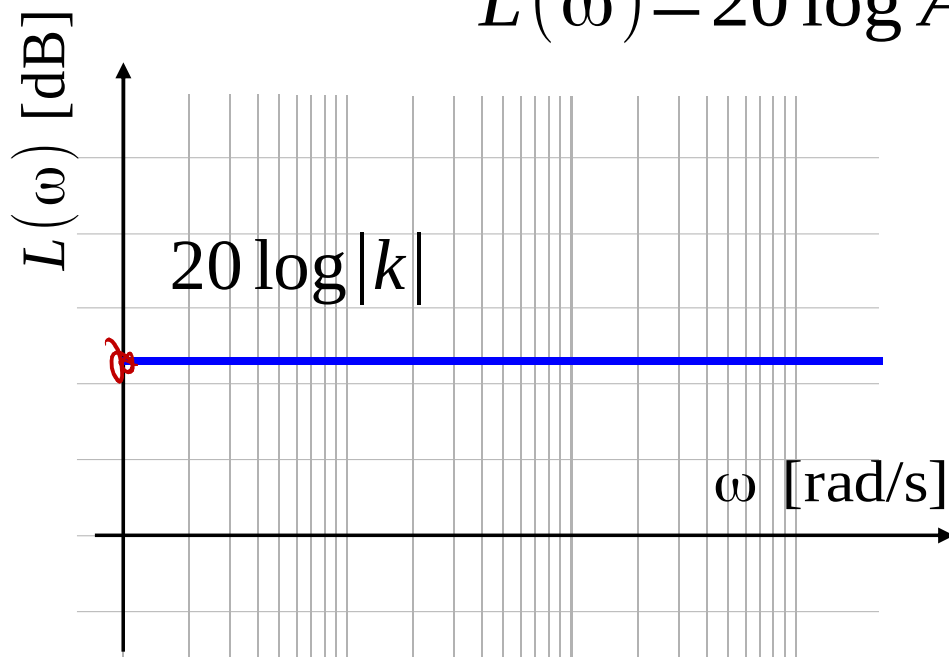


dla  $k > 0$

7. Wykres Bodego:  $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

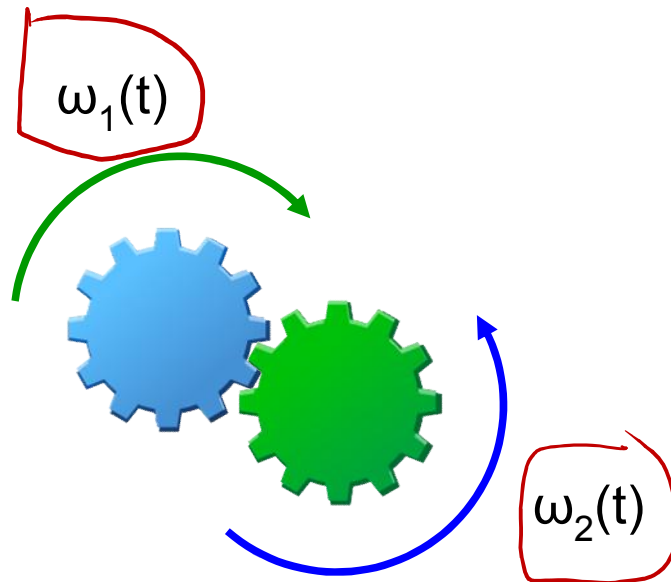
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \geq 0 \\ \pi, & \text{dla } k < 0 \end{cases}$$



# Element proporcjonalny

## Przykłady

1



przekładnia zębata:

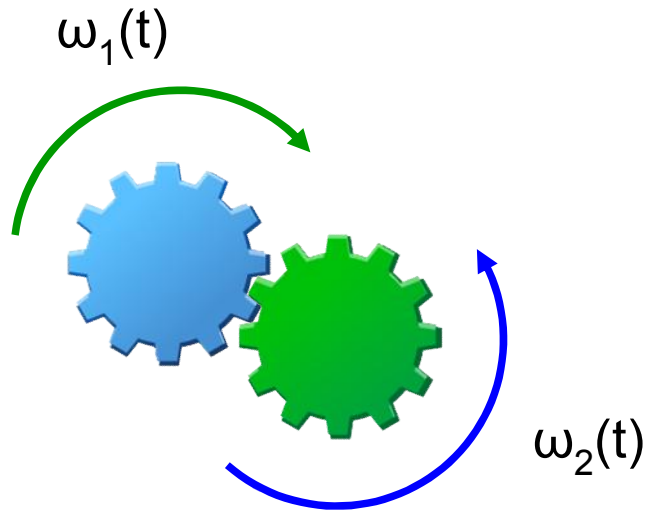
wejście – prędkość kątowna  $\omega_1(t)$

wyjście – prędkość kątowna  $\omega_2(t)$

# Element proporcjonalny

## Przykłady

1

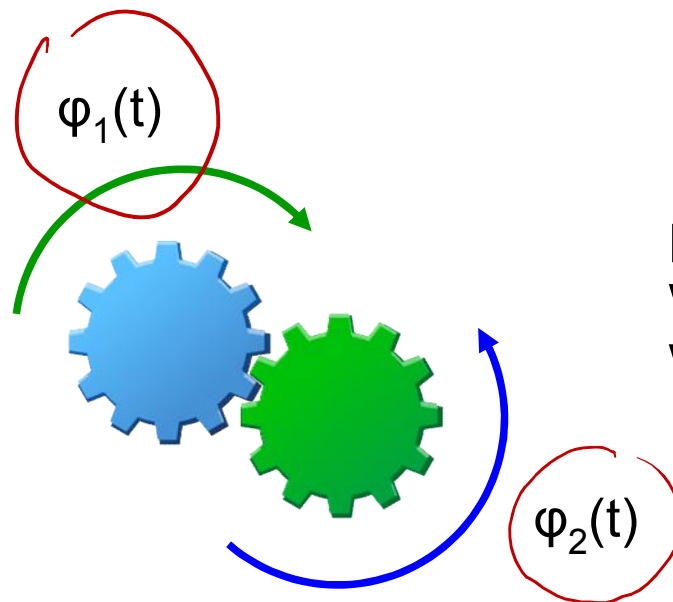


przekładnia zębata:

wejscie – prędkość kątowna  $\omega_1(t)$

wyjście – prędkość kątowna  $\omega_2(t)$

2



przekładnia zębata:

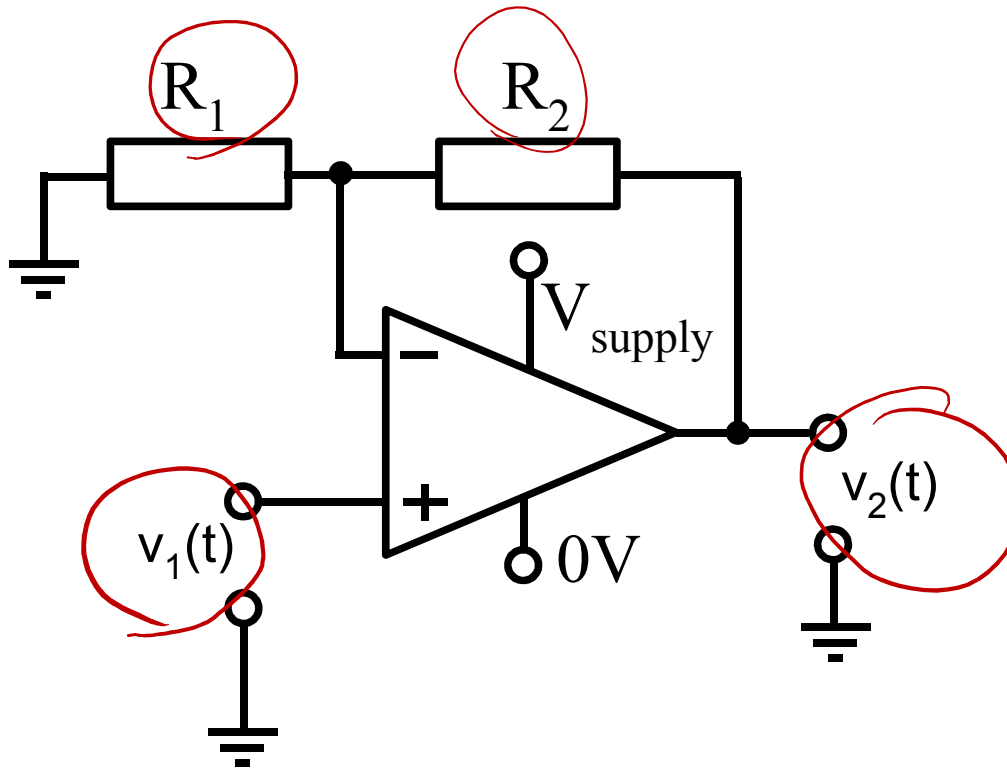
wejscie – kąt obrotu  $\varphi_1(t)$

wyjście – kąt obrotu  $\varphi_2(t)$

# Element proporcjonalny

## Przykłady

3



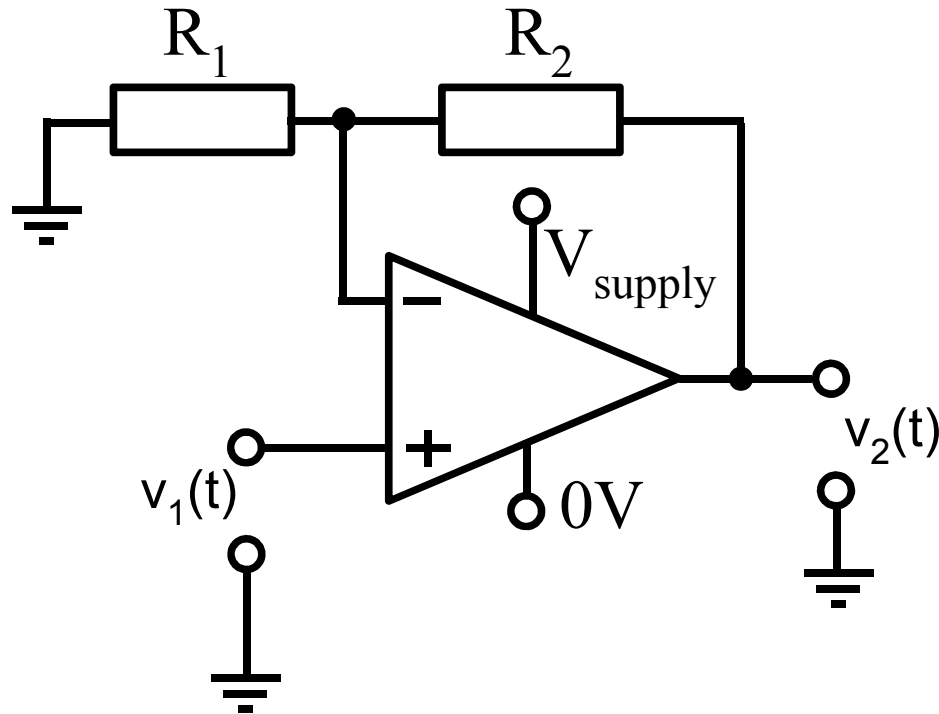
WZMACNIACZ  
OPERACYJNY:  
wejście – napięcie  $v_1(t)$   
wyjście – napięcie  $v_2(t)$

$$v_2(t) = v_1(t) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

# Element proporcjonalny

## Przykłady

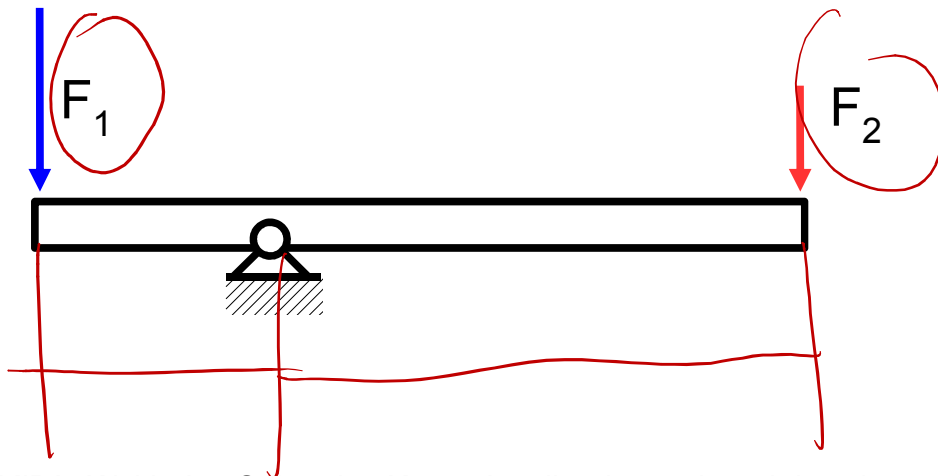
3



WZMACNIACZ  
OPERACYJNY:  
wejście – napięcie  $v_1(t)$   
wyjście – napięcie  $v_2(t)$

$$v_2(t) = v_1(t) \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

4

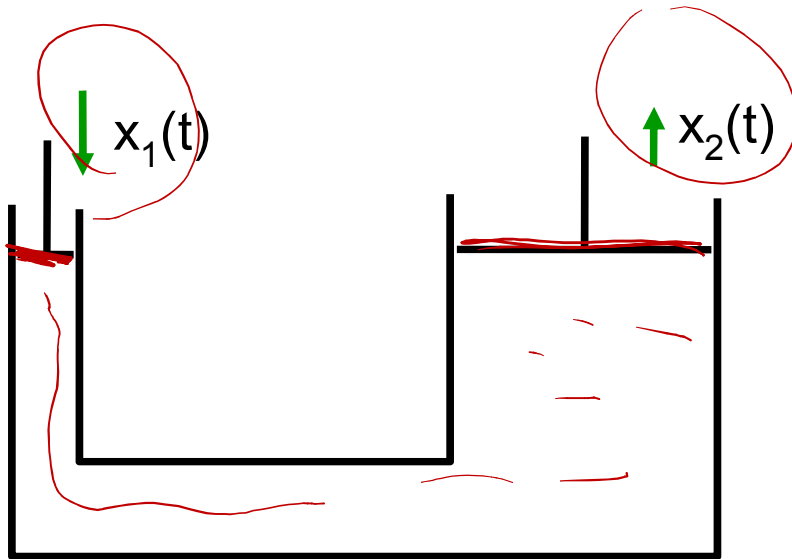


BELKA w stanie ustalonym:  
wejście – siła  $F_1$   
wyjście – siła  $F_2$

# Element proporcjonalny

## Przykłady

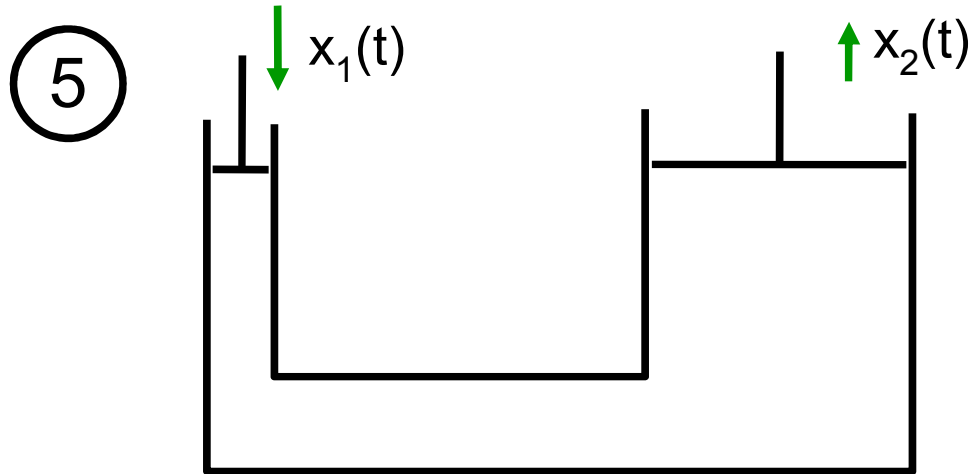
5



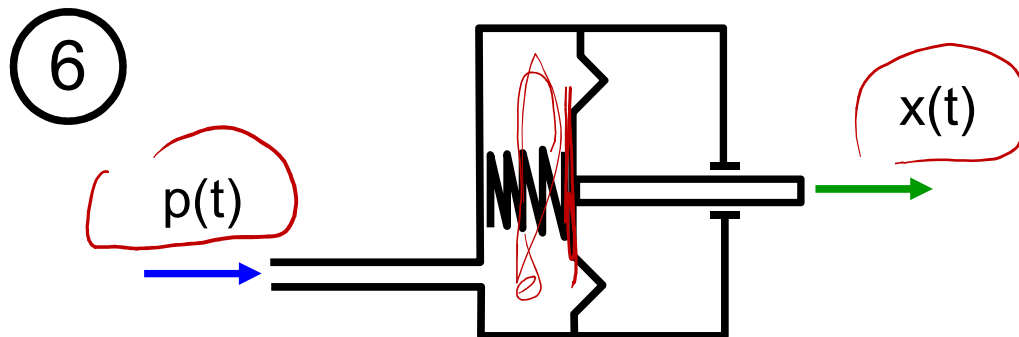
PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:  
wejście – przemieszczenie  $x_1(t)$   
wyjście – przemieszczenie  $x_2(t)$

# Element proporcjonalny

## Przykłady



PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:  
wejście – przemieszczenie  $x_1(t)$   
wyjście – przemieszczenie  $x_2(t)$



SIŁOWNIK PNEUMATYCZNY:  
wejście – ciśnienie  $p_1(t)$   
wyjście – przemieszczenie  $x(t)$

$$p(t) \cdot A = k \cdot x(t)$$

# Metody obliczeń komputerowych na potrzeby analizy transmitancji

Oprogramowanie do obliczeń symbolicznych:

- Strona internetowa: [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com)
- Maxima (darmowe)
- Wolfram Mathematica (<http://www.wolfram.com/mathematica/>)
- Mathcad

*MathWeb*

Wykresy sporządzić można również w arkuszu kalkulacyjnym  
(np. Excel, LibreOffice Calc)

# Oprogramowanie – przykład wykorzystania



transfer function  $(8*s+4)/(2*s^4+7*s^3+11*s^2+19*s+6)$



[Examples](#) [Random](#)

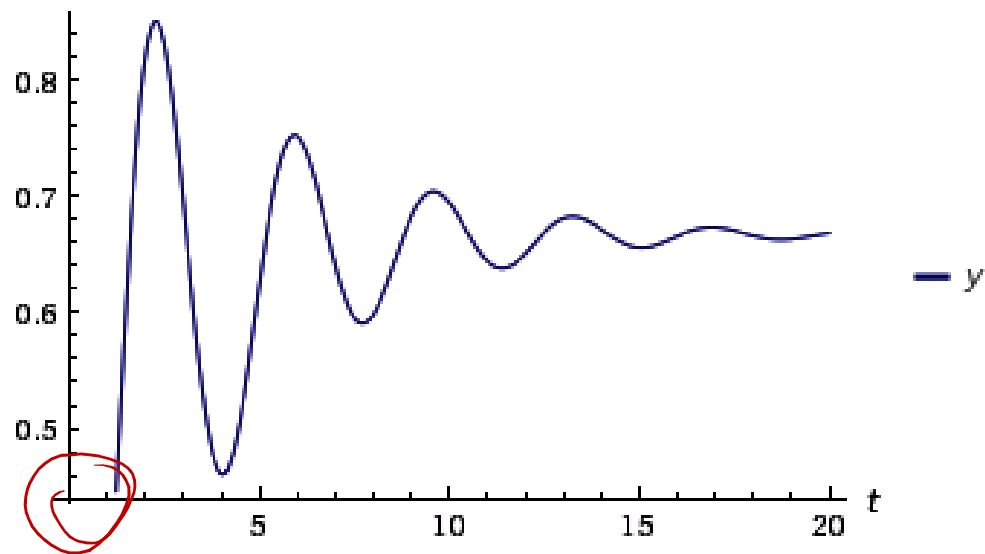
Input interpretation:

systems model

transfer function 
$$\frac{4 + 8 s}{6 + 19 s + 11 s^2 + 7 s^3 + 2 s^4}$$

# Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.

Unit step response plot:

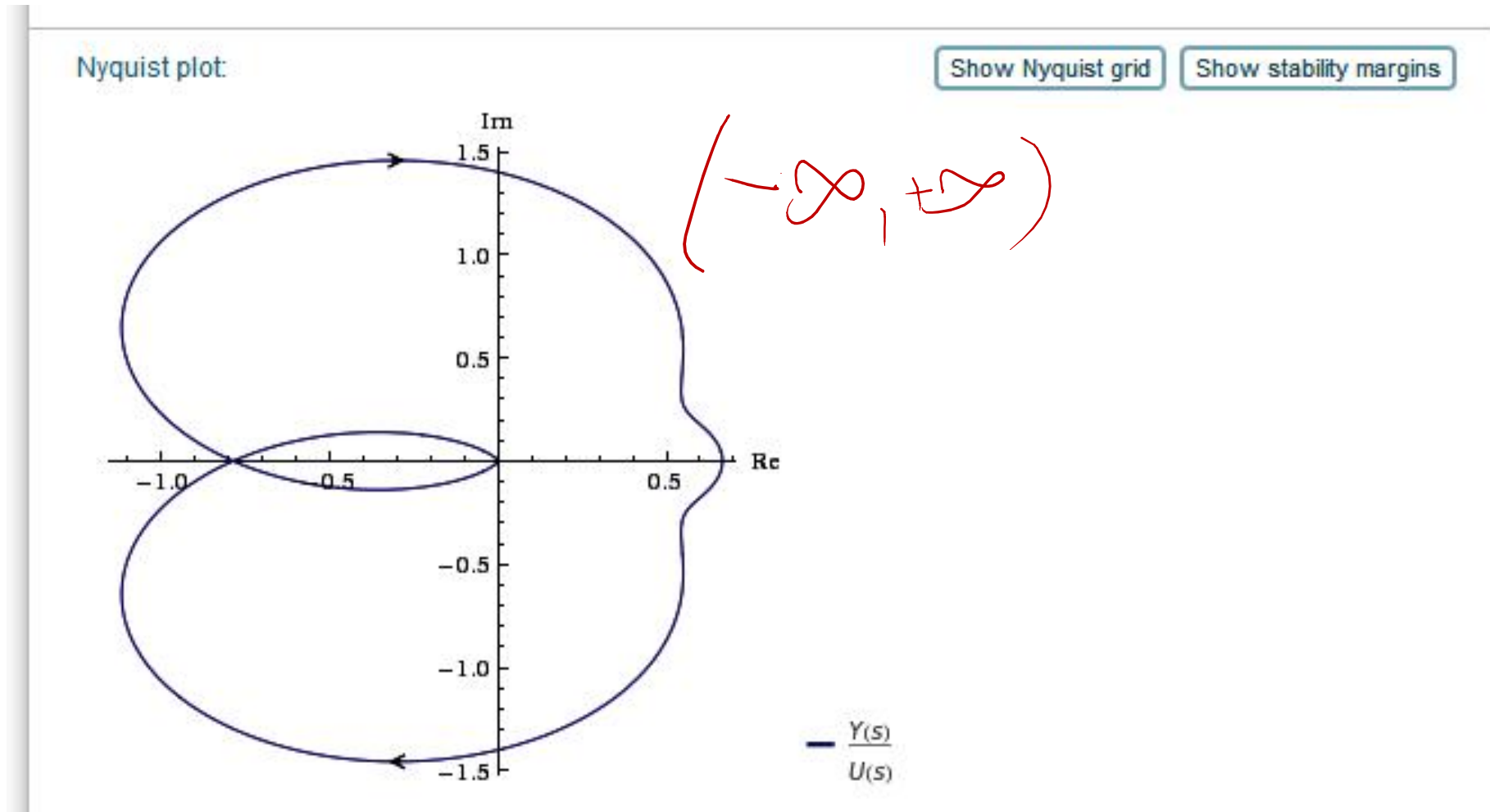


Less time

More time

Unit step ▼

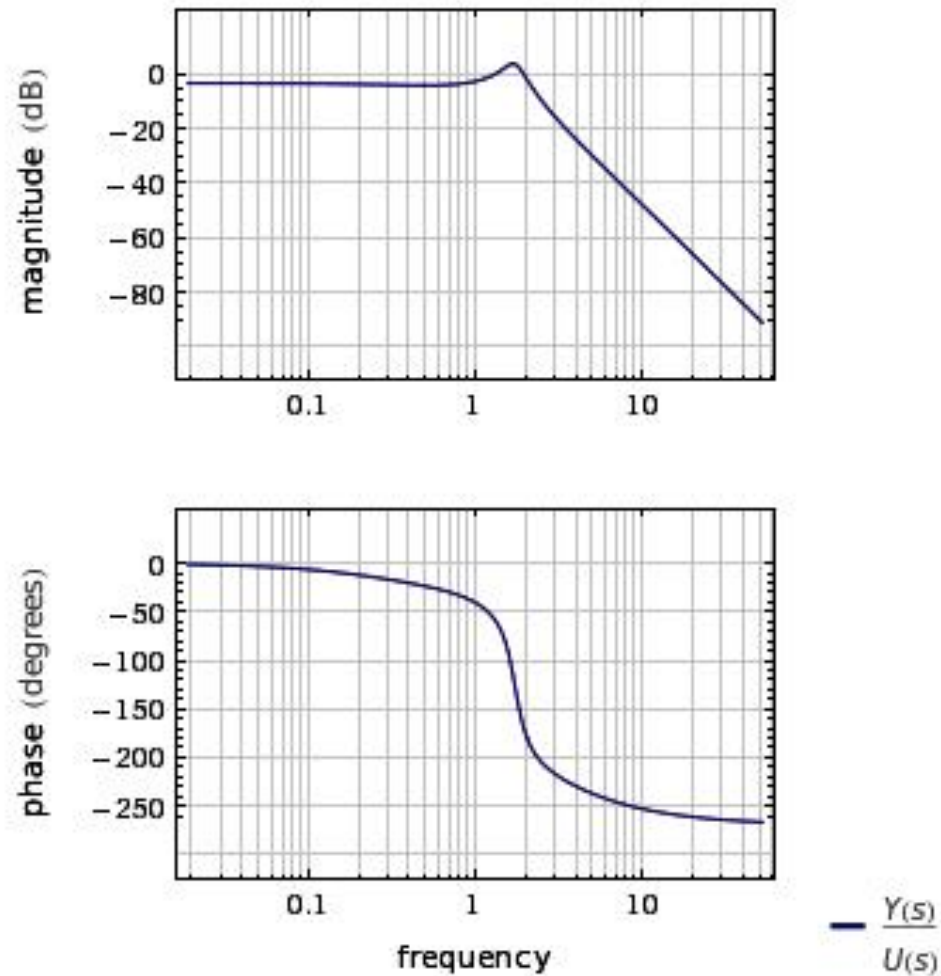
# Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.



# Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.

Bode plot:

Show stability margins



# Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.



partial fraction decomposition  $s/(s^3+4*s^2+5*s+2)$



Examples ↻ Random

Assuming "s" is a variable | Use as a [unit](#) instead

Input

partial fractions

$$\frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Result:

$$\frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = -\frac{2}{s + 2} + \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{(s + 1)^2}$$

Step-by-step solution

# Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.



inverse laplace transform  $s/(s^3 + 4s^2 + 5s + 2)$



Examples Random

Assuming "s" is a variable | Use as a [unit](#) instead

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}\right](t)$$

$\mathcal{L}_s^{-1}[f(s)](t)$  is the inverse Laplace transform of  $f(s)$  with real variable  $t$

Result:

$$-e^{-2t} (e^t t - 2e^t + 2)$$