Wydział Samochodów
i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Teoria maszyn i podstawy automatyki

semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 8

Transformata Laplace'a.
Transmitancja.
Wyznaczanie odpowiedzi układu.

Transformata Laplace'a

$x(t)$; $\boxed{x(t)=0 \text{ dla } t<0}$ $s\in\mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} \overset{def.}{=} \int_0^\infty \underline{x(t)e^{-st}\,dt} = \underline{X}(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t)$$

Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a

Założenie: $x(t)$ - sygnał taki, że dla $t<0 \quad x(t)=0$

Transformata Laplace'a funkcji x(t):

$$X(s)=L\{x(t)\}=\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$$

$$\text{gdzie: } s\in\mathbb{C}, \quad s=\sigma+j\omega, \quad j=\sqrt{-1}$$

Warunkiem koniecznym istnienia całki jest lokalna całkowalność x(t) dla t <0, ∞).

Odwrotna transformata Laplace'a x(t):

$$x(t)=L^{-1}\{X(s)\}=\boxed{\frac{1}{2\pi j}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-j\omega}^{\gamma+j\omega}X(s)e^{st}ds}$$

Transformata Laplace'a

Przykład 1

Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji x(t) korzystając z definicji.

$$\boxed{x(t)=e^{-2t}}$$

$$X(s)=\mathcal{L}\{e^{-2t}\}=\int_0^\infty e^{-2t}e^{-st}\,dt=$$

$$=\int_0^\infty e^{-(2+s)t}\,dt=\left[\frac{e^{-(2+s)t}}{-(2+s)}\right]_0^\infty=$$

$$=\lim_{\substack{t\to\infty\\ Re(s)>-2}}\frac{\overset{0}{\boxed{e^{-(2+s)t}}}}{-(2+s)}-\frac{\overset{1}{\boxed{e^{-(2+s)\cdot 0}}}}{-(2+s)}=\frac{1}{2+s}$$

Transformata Laplace'a

Przykład 1

Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji x(t) korzystając z definicji.

$$x(t)=e^{-2t}$$

Transformata Laplace'a

Przykład 1

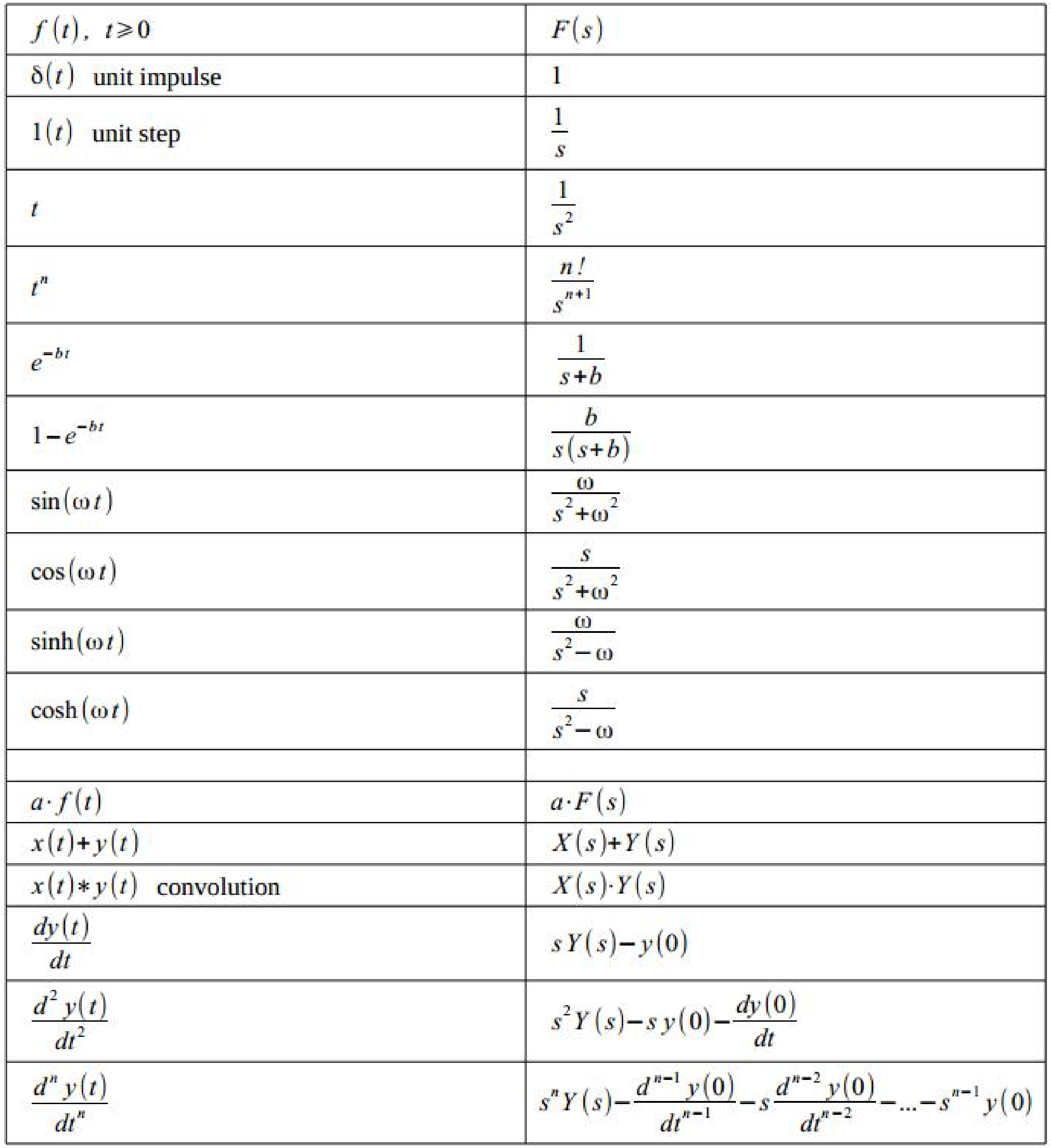
Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji x(t) korzystając z definicji.

$$x(t)=e^{-2t}$$

$$X(s)=L\{e^{-2t}\}=\int_0^\infty e^{-2t}e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-(2+s)t}dt=\left[\frac{e^{-(2+s)t}}{-(2+s)}\right]_0^\infty=$$

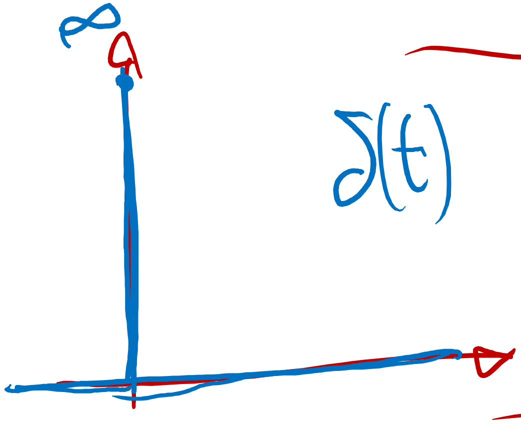
$$=\lim_{(t\to\infty,\Re(s)>-2)}\left(\frac{e^{-(2+s)t}}{-(2+s)}\right)-\frac{e^{-(2+s)0}}{-(2+s)}=\frac{0}{-(2+s)}-\frac{1}{-(2+s)}=\frac{1}{s+2}$$

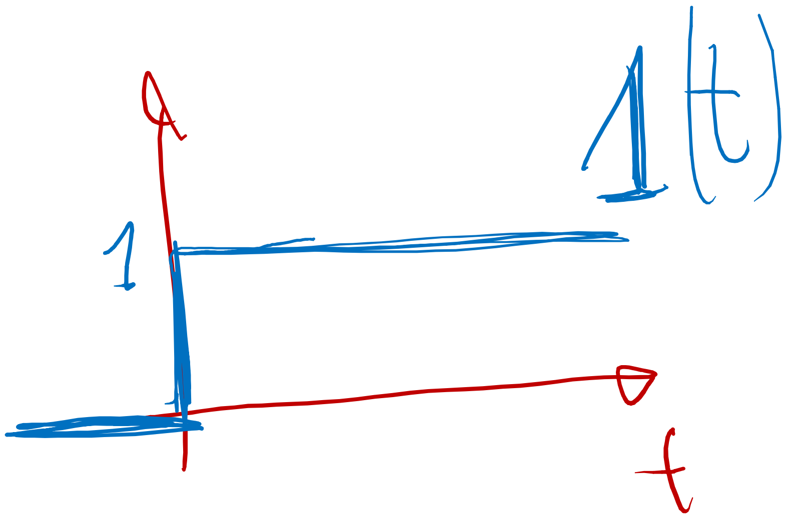
Transformata Laplace'a

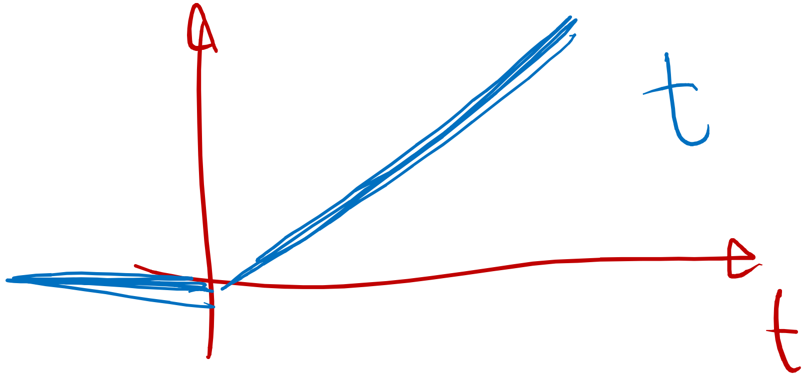


$f(t),\ t \geqslant 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ unit impulse	1
$1(t)$ unit step	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega}$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(s)$
$x(t)+y(t)$	$X(s)+Y(s)$
$x(t)*y(t)$ convolution	$X(s) \cdot Y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s)-y(0)$
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$	$s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}$
$\frac{d^ny(t)}{dt^n}$	$s^nY(s)-\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}-s\frac{d^{n-2}y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1}y(0)$

tabela na stronie www







$f(t),\ t\geqslant 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ impuls jednostkowy	1
$1(t)$ skok jednostkowy	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega}$

Własności transformaty Laplace'a

Własności transformaty Laplace'a

$a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\left\{a \cdot f(t)\right\} = a \cdot \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = a \cdot F(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{f(t) + g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \cdot \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{f(t) \cdot g(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} * \mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d f(t)}{dt}\right\} = s \cdot \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(t=0)$$

Własności transformaty Laplace'a

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - s f(t=0) - \frac{d f(t=0)}{dt}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(t)\,dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s}$$

Własności transformaty Laplace'a

$f(t),\ t\geqslant 0$	$F(s)$
$a\cdot f(t)$	$a\cdot F(s)$
$x(t)+y(t)$	$X(s)+Y(s)$
$x(t)*y(t)$ splot	$X(s)\cdot Y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s)-y(0)$
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$	$s^2Y(s)-s\,y(0)-\frac{dy(0)}{dt}$
$\frac{d^ny(t)}{dt^n}$	$s^nY(s)-\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}-s\frac{d^{n-2}y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1}y(0)$
$\int\limits_{t=0}^{\infty} f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$\underbrace{\int\int\ldots\int}_{n} f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s^n}$
$f(t-\tau)$ $\tau>0$	$e^{-\tau s}F(s)$ $\cdot e^{-\tau s}$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t), \quad \frac{dy(0)}{dt} = 2, \; y(0) = 3, \; t \geqslant 0$$

$$\mathcal{L}\left\{1(t)\right\} = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{L}\left\{2y(t)\right\} = 2Y(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{3\frac{dy(t)}{dt}\right\} = 3\left(sY(s) - 3\right)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} = s^2 Y(s) - 3s - 2$$

$$s^2 Y(s) - 3s - 2 - 3sY(s) + 9 + 2Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Big|\cdot s$$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t)\,,\ \frac{dy(0)}{dt} = 2,\ y(0) = 3,\ t \geqslant 0$$

$$s^3 Y(s) \underline{-3s^2} - \underline{2}s - 3s^2 Y(s) \underline{+9s} + 2sY(s) = 1$$

$$Y(s)\left(s^3 - 3s^2 + 2s\right) = 1 - 7s + 3s^2$$

$$Y(s) = \frac{3s^2 - 7s + 1}{s(s^2 - 3s + 2)} = \frac{3s^2 - 7s + 1}{s(s-1)(s-2)}$$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=1(t)\,,\quad \frac{dy(0)}{dt}=2,\ y(0)=3,\ t\geqslant 0$$

$$\frac{\boxed{3}s^2\boxed{-7}s\boxed{+1}}{s(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}$$

$$=\frac{A(s-1)(s-2)+Bs(s-2)+Cs(s-1)}{s(s-1)(s-2)}=$$

$$=\frac{s^2\boxed{(A+B+C)}+s\boxed{(-3A-2B-C)}+\boxed{2A}}{s(s-1)(s-2)}$$

$$A=\frac{1}{2}$$

$$B=3$$

$$C=-\frac{1}{2}$$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t)\,,\ \frac{dy(0)}{dt} = 2,\ y(0) = 3,\ t \geqslant 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + 3\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}1(t) + 3e^{+1t} - \frac{1}{2}e^{+2t}$$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t)\,,\ \frac{dy(0)}{dt} = 2,\ y(0) = 3,\ t \geqslant 0$$

po transformacie Laplace'a

$$Y(s) = \frac{1 - 7s + 3s^2}{s(s-1)(s-2)}$$

po rozkładzie na ułamki proste

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}$$

po odwrotnej transformacie Laplace'a

$$y(t) = \frac{1}{2}1(t) + 3e^{t} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

Transmitancja – definicja

operatorowa

Dla układu liniowego niezależnego od czasu, o jednym wejściu i jednym wyjściu oraz ciągłych sygnałach wejściowym x(t) i wyjściowym y(t), transmitancja jest stosunkiem transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego i transformaty Laplace'a sygnału wejściowego dla zerowych warunków początkowych.

$$\boxed{H(s)=\frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}=\frac{Y(s)}{X(s)}}$$

Forma transmitancja

Standardowa:

$$\boxed{G(s)=\frac{b^{m}s^{m}+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_{1}s+b_{0}}{a_{n}s^{n}+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_{1}s+a_{0}}}$$

Iloczynowa:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{(s-z_{1})(s-z_{2})\ldots(s-z_{m})}{(s-p_{1})(s-p_{2})\ldots(s-p_{n})}$$

$\boxed{z_{1}, z_{2}, \ldots, z_{m}}$ - zera transmitancji

$\boxed{p_{1}, p_{2}, \ldots, p_{n}}$ - bieguny transmitancji

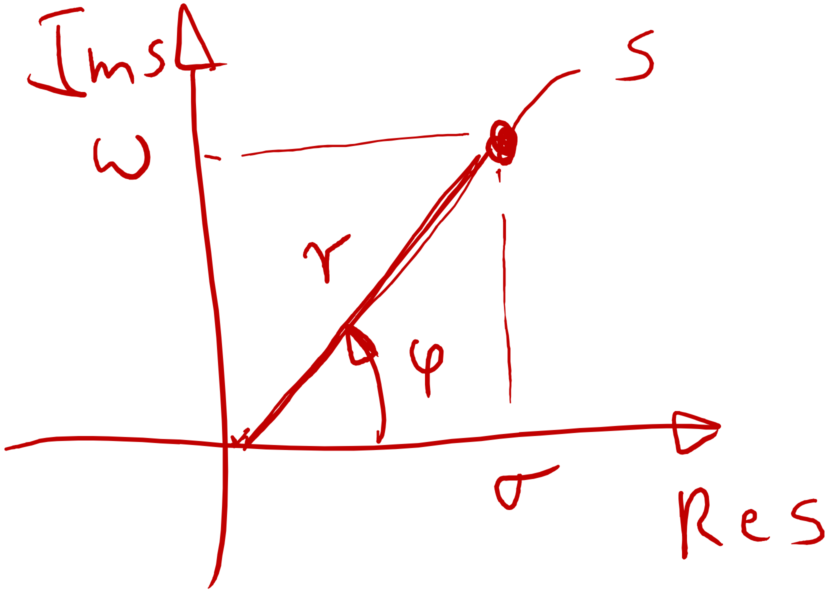
Liczby zespolone – przypomnienie

$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$r = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} = |s|$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{\sigma} = \mathrm{Arg}\,s$$



$$s = r\cos\varphi + j r \sin\varphi$$

$$s = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

$$s = r e^{j\varphi}$$

$$s = |s| e^{j\,\mathrm{Arg}\,s}$$

Transmitancja

Prezentacja graficzna

$$\boxed{G(s)}=\boxed{|G(s)|}e^{j\boxed{\arg G(s)}}$$

dla każdego $s\in\mathbb{C}$
liczymy $G(s)\in\underline{\mathbb{C}}$

4D

dla każdego $s\in\underline{\mathbb{C}}$
liczymy $\underline{|G(s)|\in\mathbb{R}}$

3D

dla każdego $s\in\underline{\mathbb{C}}$
liczymy $\underline{\operatorname{Arg}G(s)\in\mathbb{R}}$

3D

Transmitancja

Przykład

$$\boxed{G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}}, \text{ narysować: } \underline{|G(s)|} \text{ i } \underline{\arg G(s)}$$

Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}=\frac{s-2}{(s-1)(s+j+1)(s-j+1)}$$

Transmitancja

Przykład

$\sigma + j\omega$

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}=\frac{s-2}{(s-1)(s+j+1)(s-j+1)}$$

Bieguny: $p_1=1,\ \ p_2=-1-j,\ \ p_3=-1+j$ zera: $z_1=2$

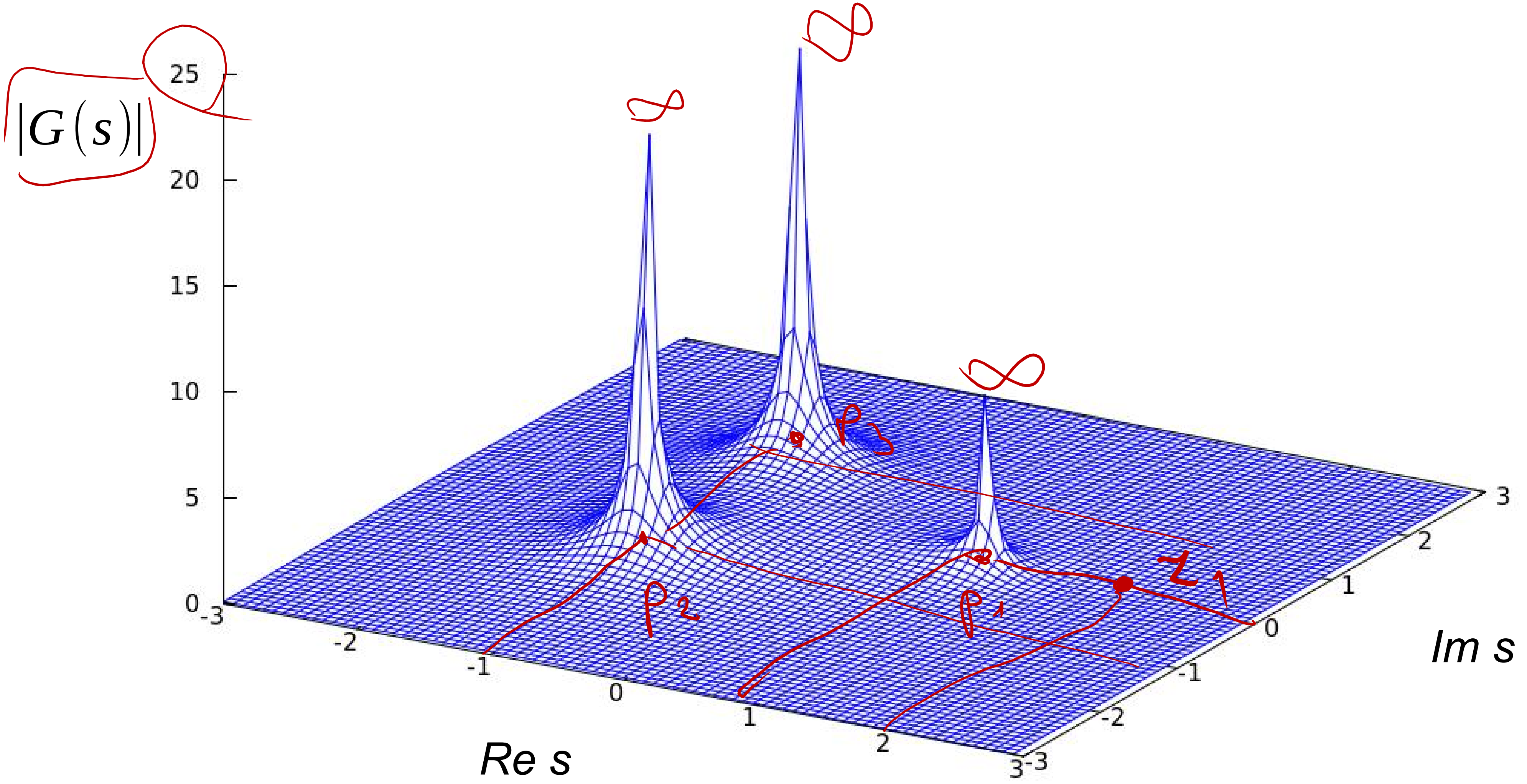
Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Bieguny: $p_1=1,\ \underline{p_2=-1-j},\ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$



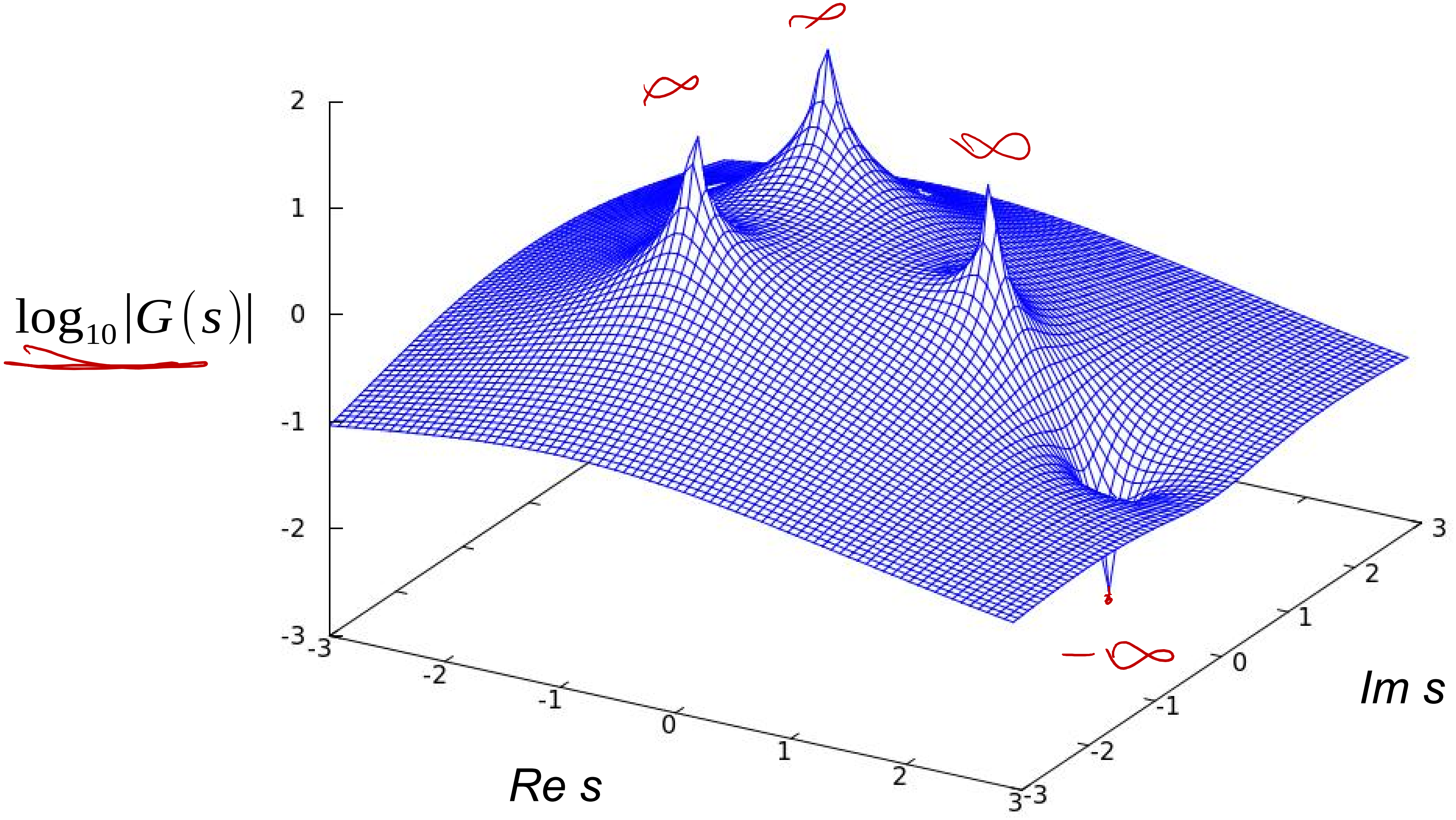
Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Bieguny: $p_1=1,\ p_2=-1-j,\ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$



Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

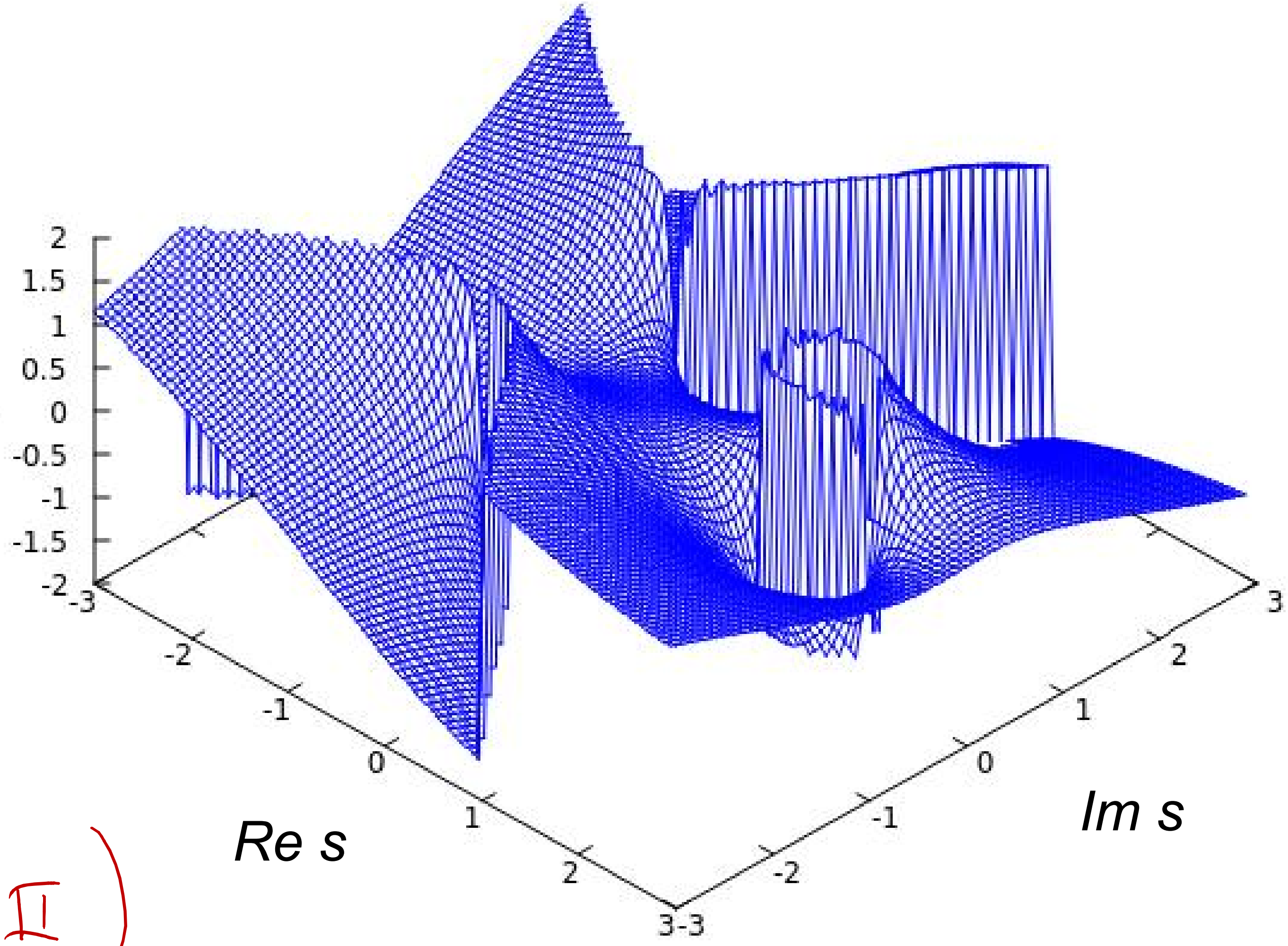
Bieguny: $p_1=1,\ \ p_2=-1-j,\ \ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$

$\operatorname{Arg} G(s)$

arctan

$\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$



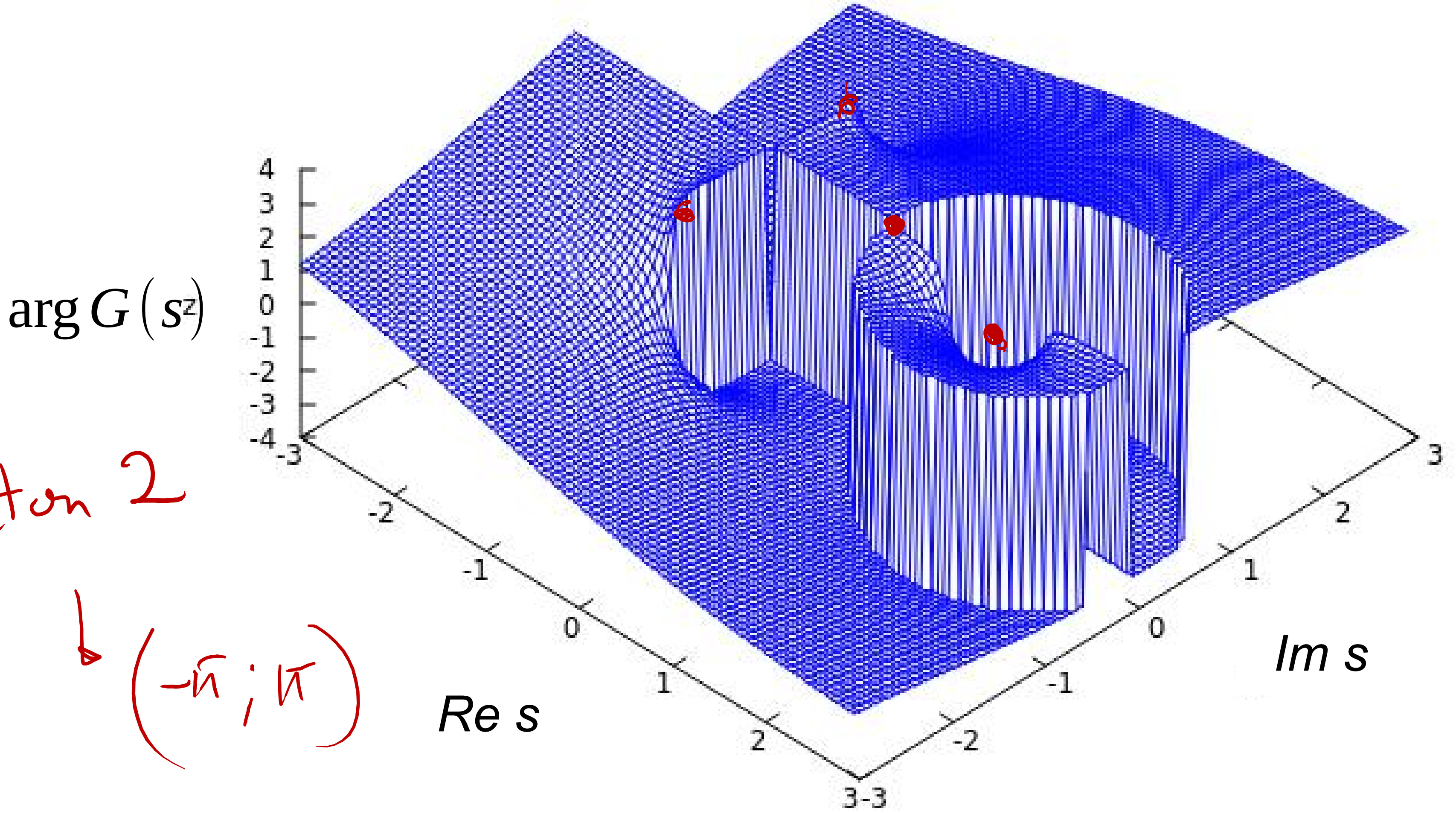
Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Bieguny: $p_1=1,\ p_2=-1-j,\ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$



atan 2

↳ $(-\pi; \pi)$

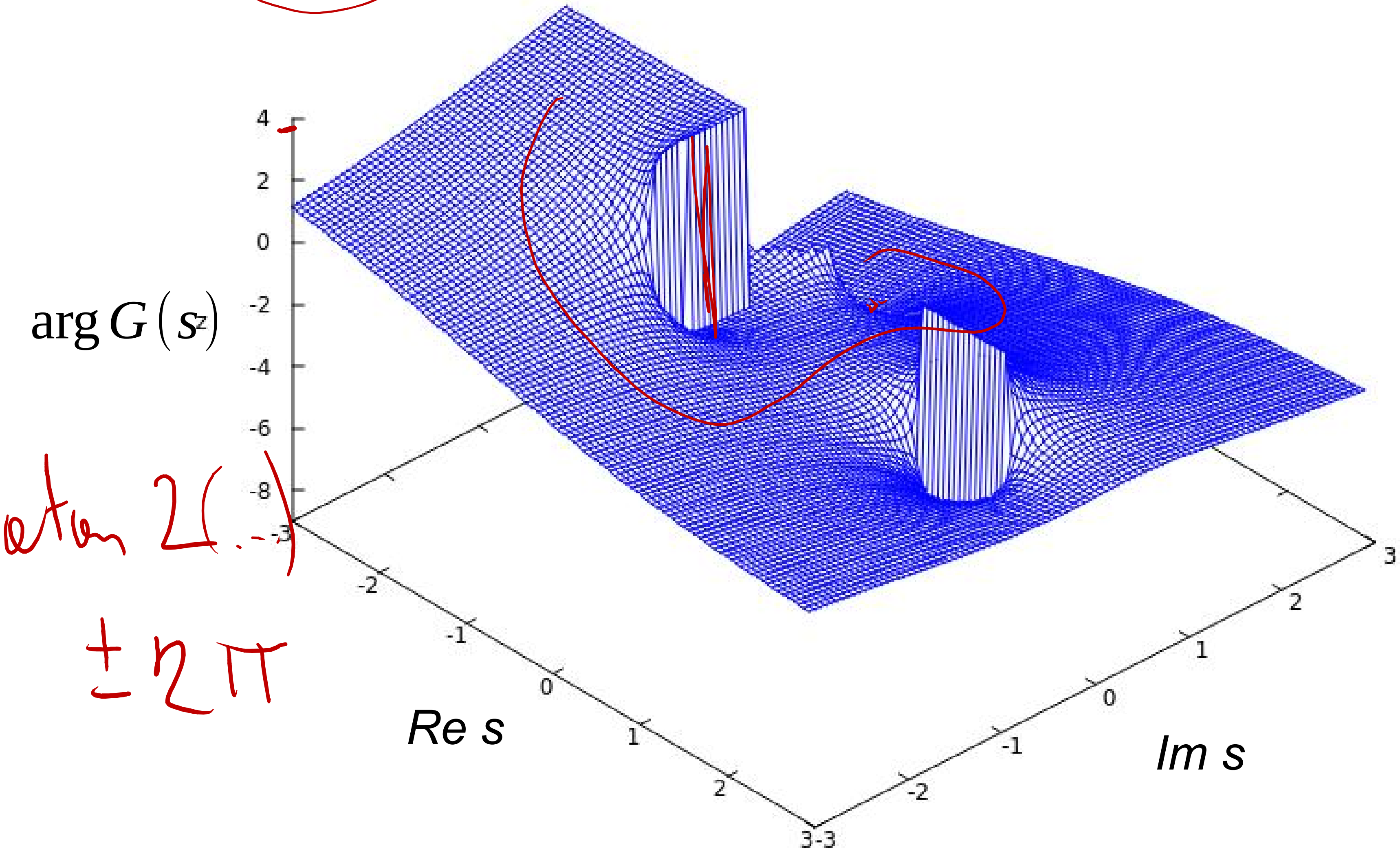
Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Bieguny: $p_1=1,\ p_2=-1-j,\ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$



atan 2(...)

$\pm 2\pi$

Wejście i wyjście

Transmitancja: $\boxed{G(s)}=\boxed{\frac{Y(s)}{X(s)}}$

$$\overset{wy}{Y}(s) = G(s)\cdot X(s)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$$

$$= \underset{\uparrow}{g(t)} * \overset{WE}{x}(t)$$

odpow. impulsowa

Wejście i wyjście

Transmitancja: $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

Wejście i wyjście

Transmitancja: $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)X(s)$

Wyjście w dziedzinie czasu: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$

$$y(t)=L^{-1}\{G(s)X(s)\}=L^{-1}\{G(s)\}*L^{-1}\{X(s)\}=g(t)*x(t)$$

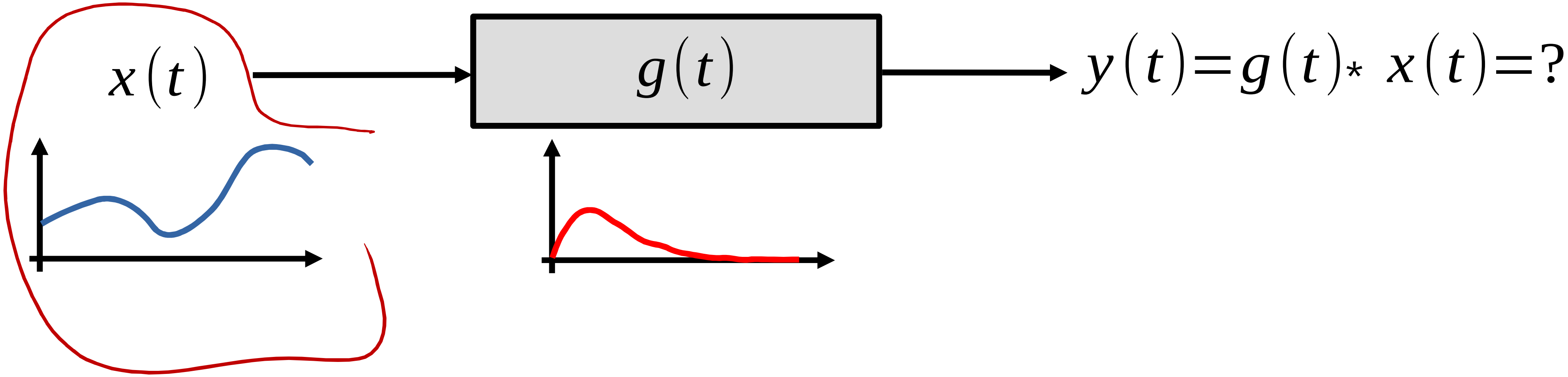
$g(t)$ - odpowiedź impulsowa układu ($y(t)$ dla $x(t)=\delta(t)$)

Splot

$$\underline{g(t)* x(t)}=\boxed{\int_0^\infty g(\tau)x(t-\tau)d\tau}$$

Splot

$$g(t)*x(t)=\int_0^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)d\tau$$



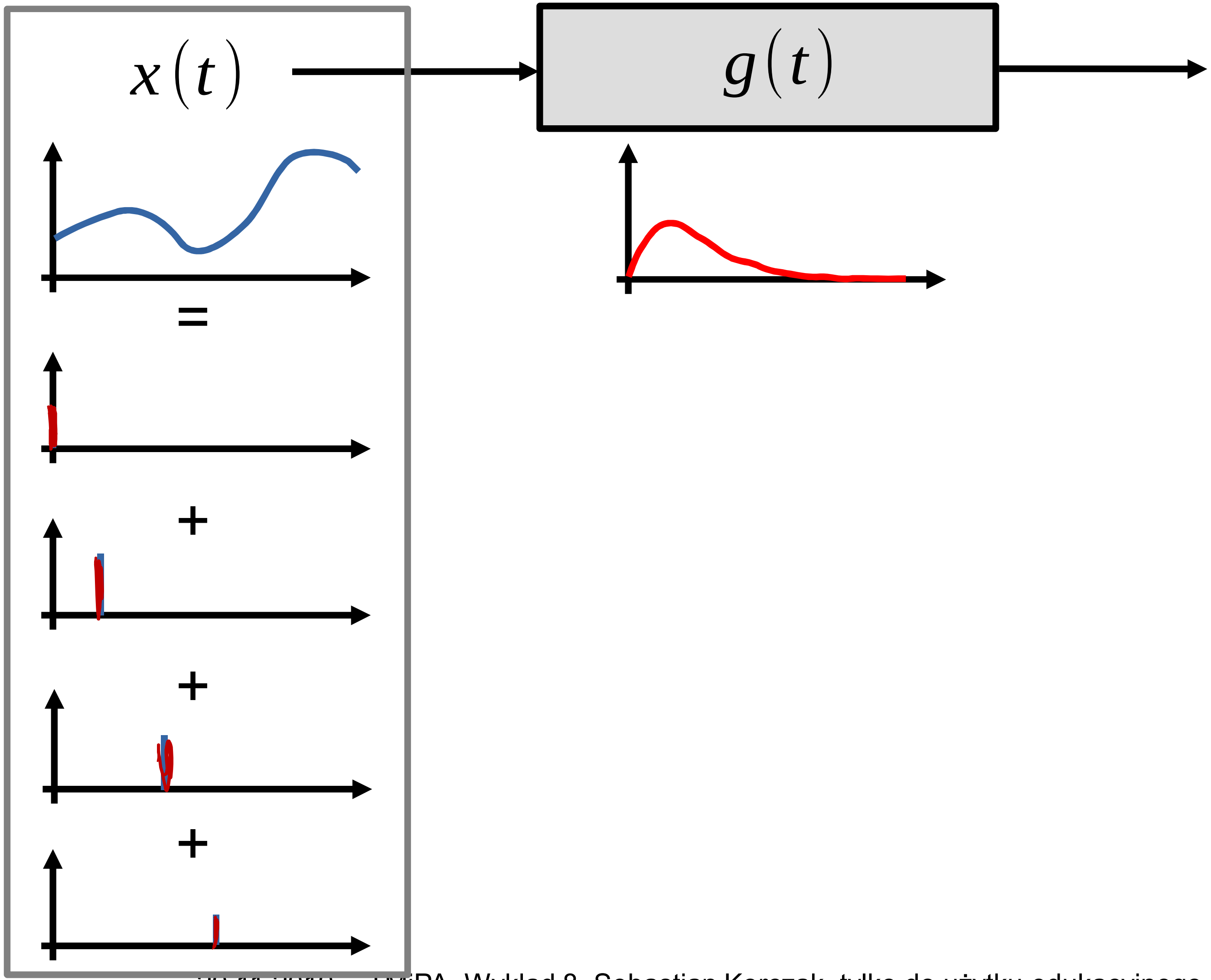
$x(t)$

$g(t)$

$y(t)=g(t)*x(t)=?$

Splot

$$g(t) * x(t) = \int_{0}^{\infty} g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$



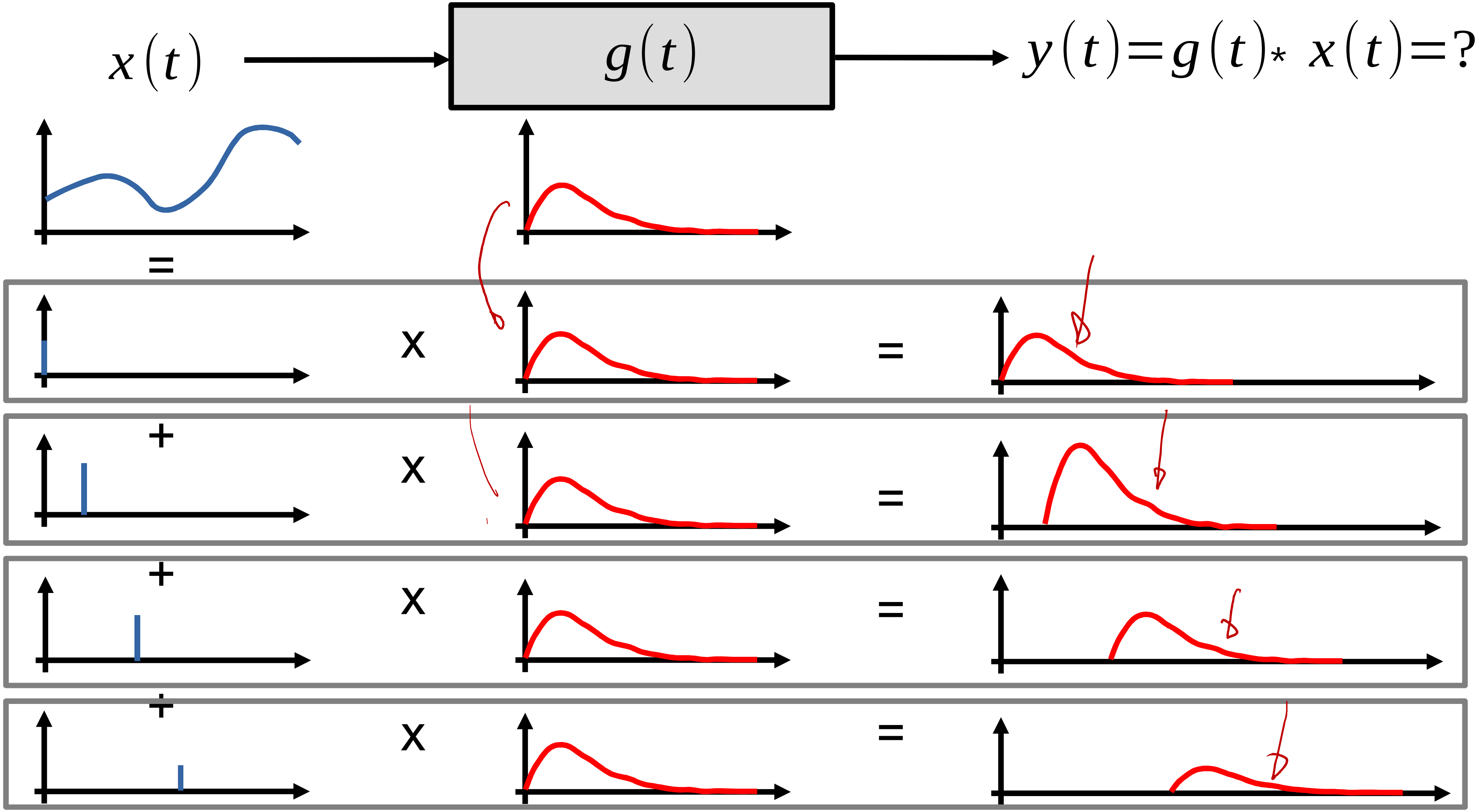
$x(t)$

$g(t)$

$y(t) = g(t) * x(t) = ?$

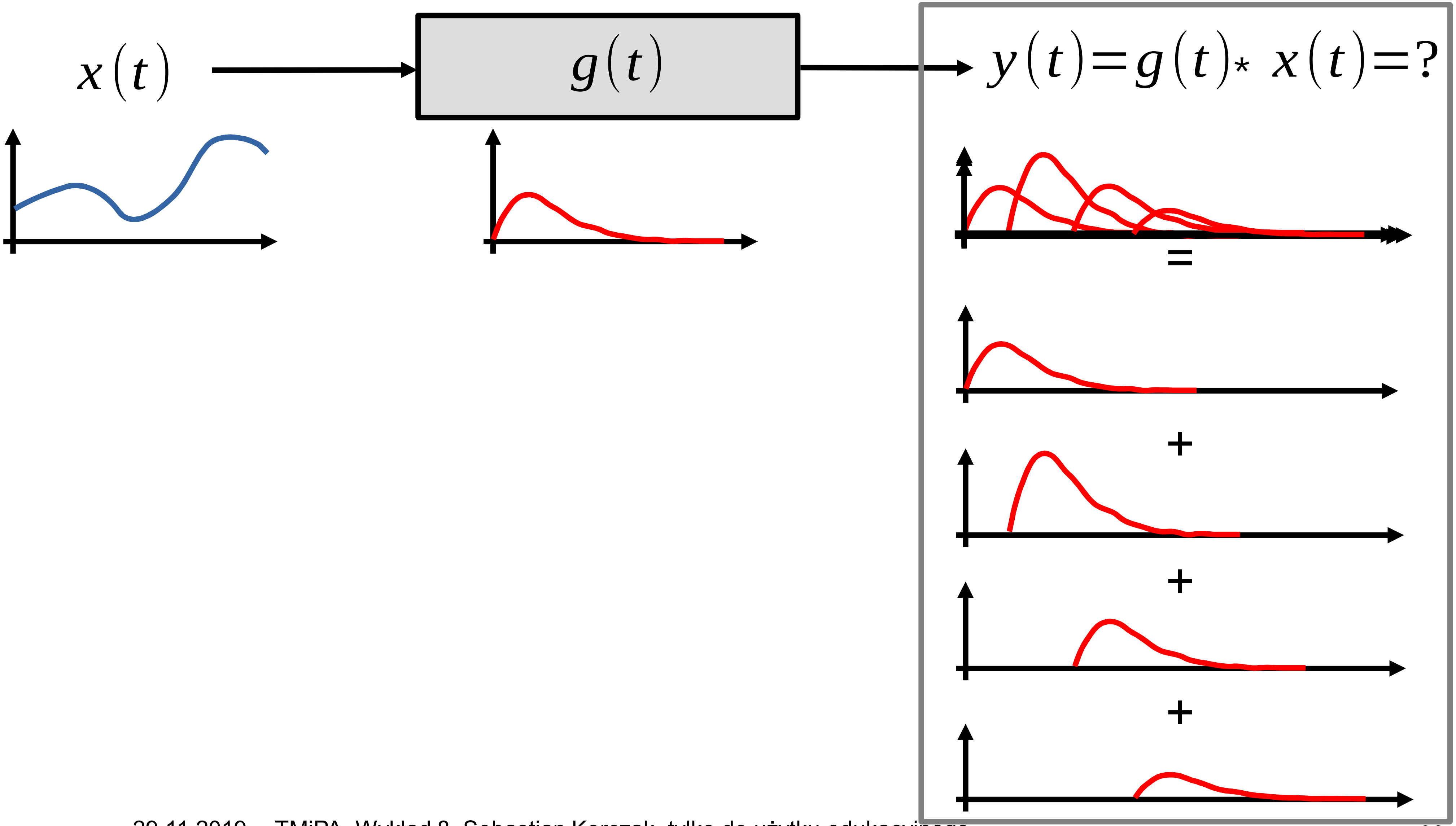
Splot

$$g(t) * x(t) = \int_0^\infty g(\tau) x(t-\tau) d\tau$$



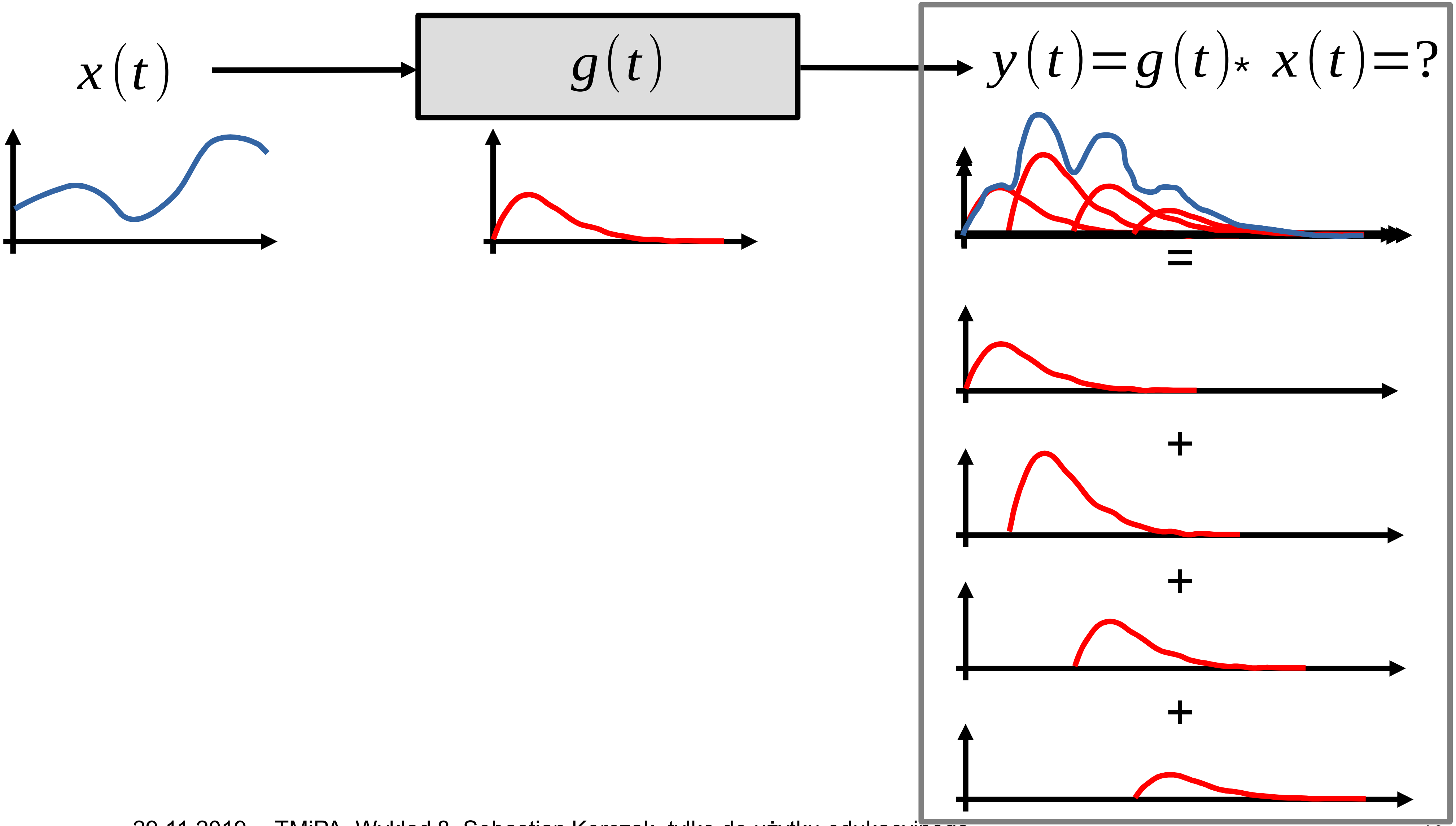
Splot

$$g(t) * x(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) x(t - \tau) d\tau$$



Splot

$$g(t)*x(t)=\int_{0}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)d\tau$$



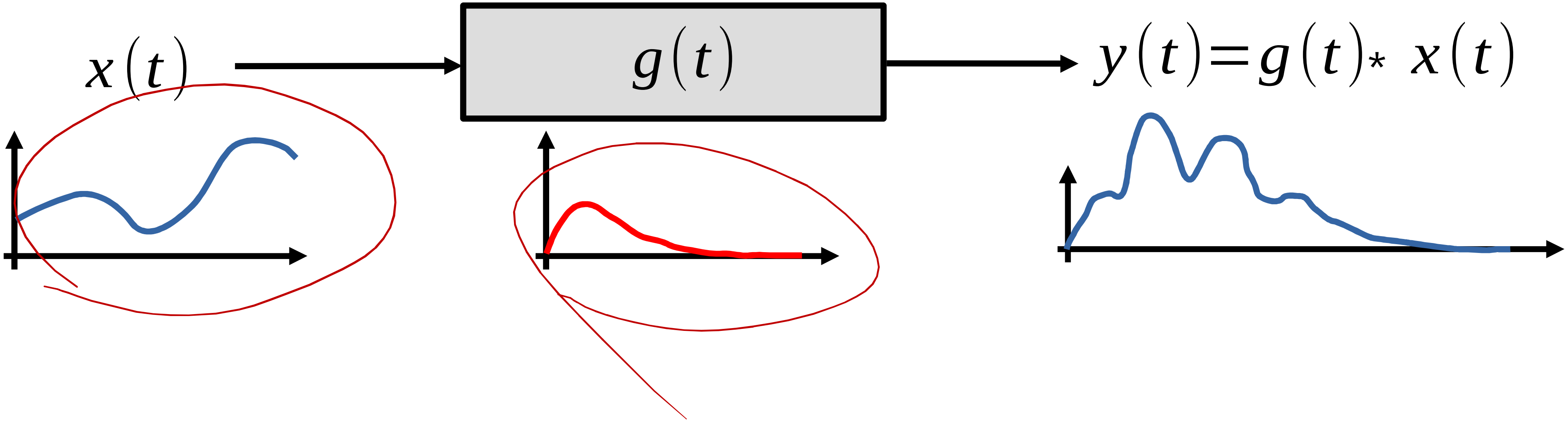
$x(t)$

$g(t)$

$y(t)=g(t)*x(t)=?$

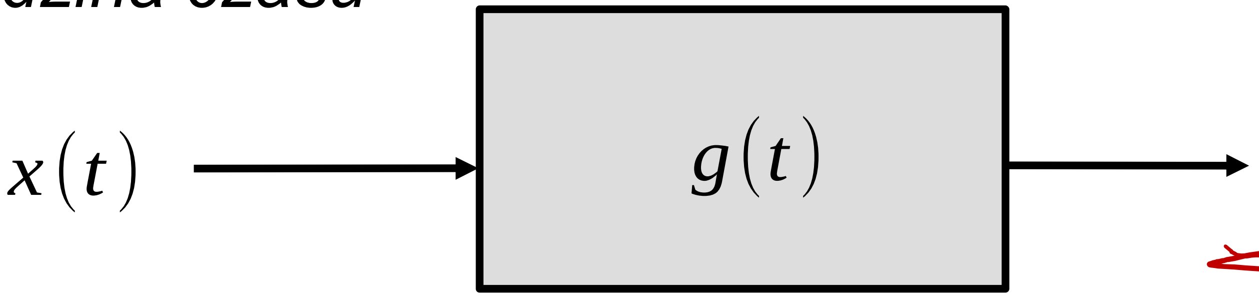
Splot

$$g(t)*x(t)=\int_{0}^{\infty} g(\tau)x(t-\tau)d\tau$$



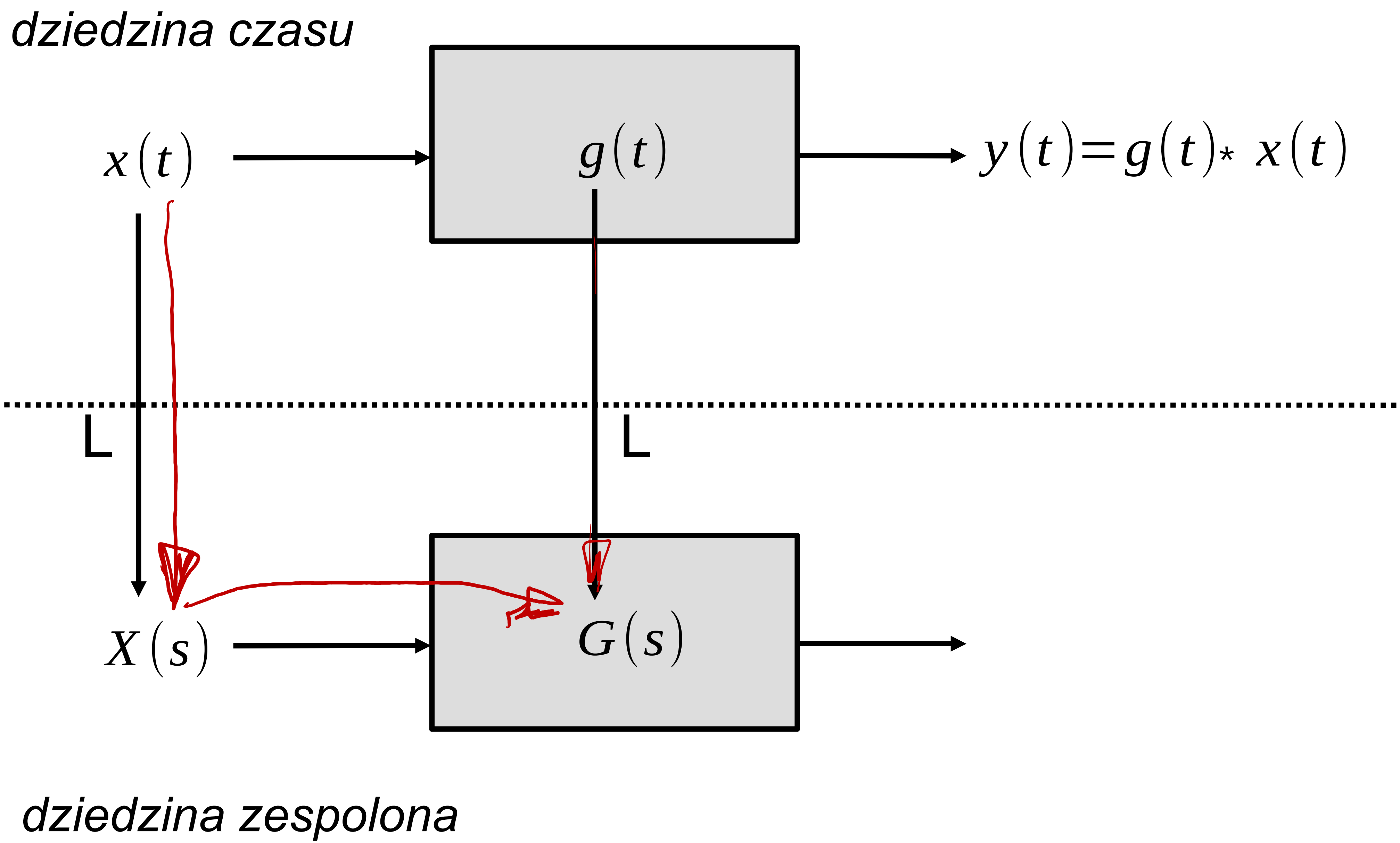
Wejście i wyjście

dziedzina czasu



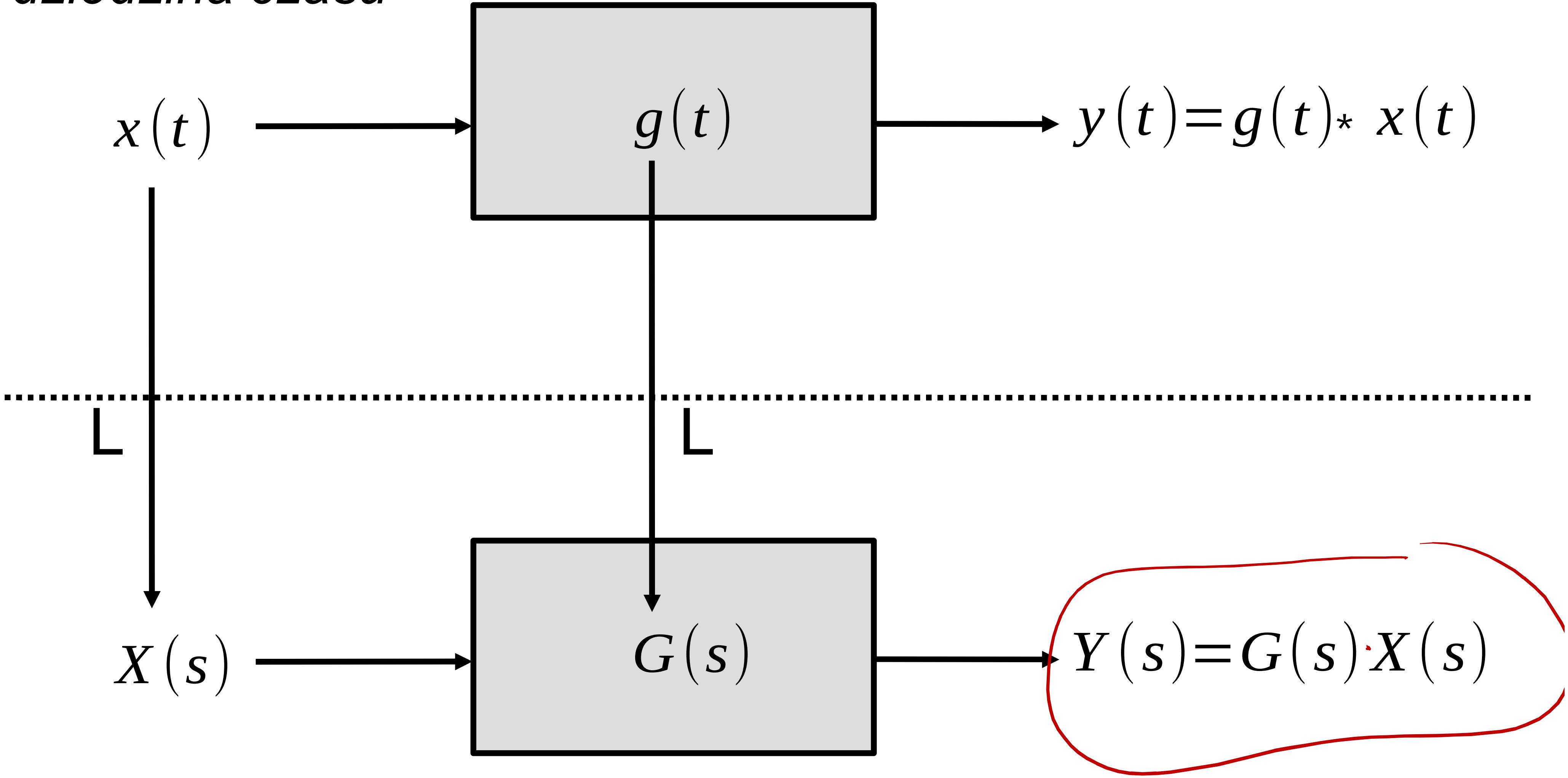
$$y(t)=g(t)* x(t)$$

Wejście i wyjście



Wejście i wyjście

dziedzina czasu



$x(t)$

$g(t)$

$y(t)=g(t)*x(t)$

L

L

$X(s)$

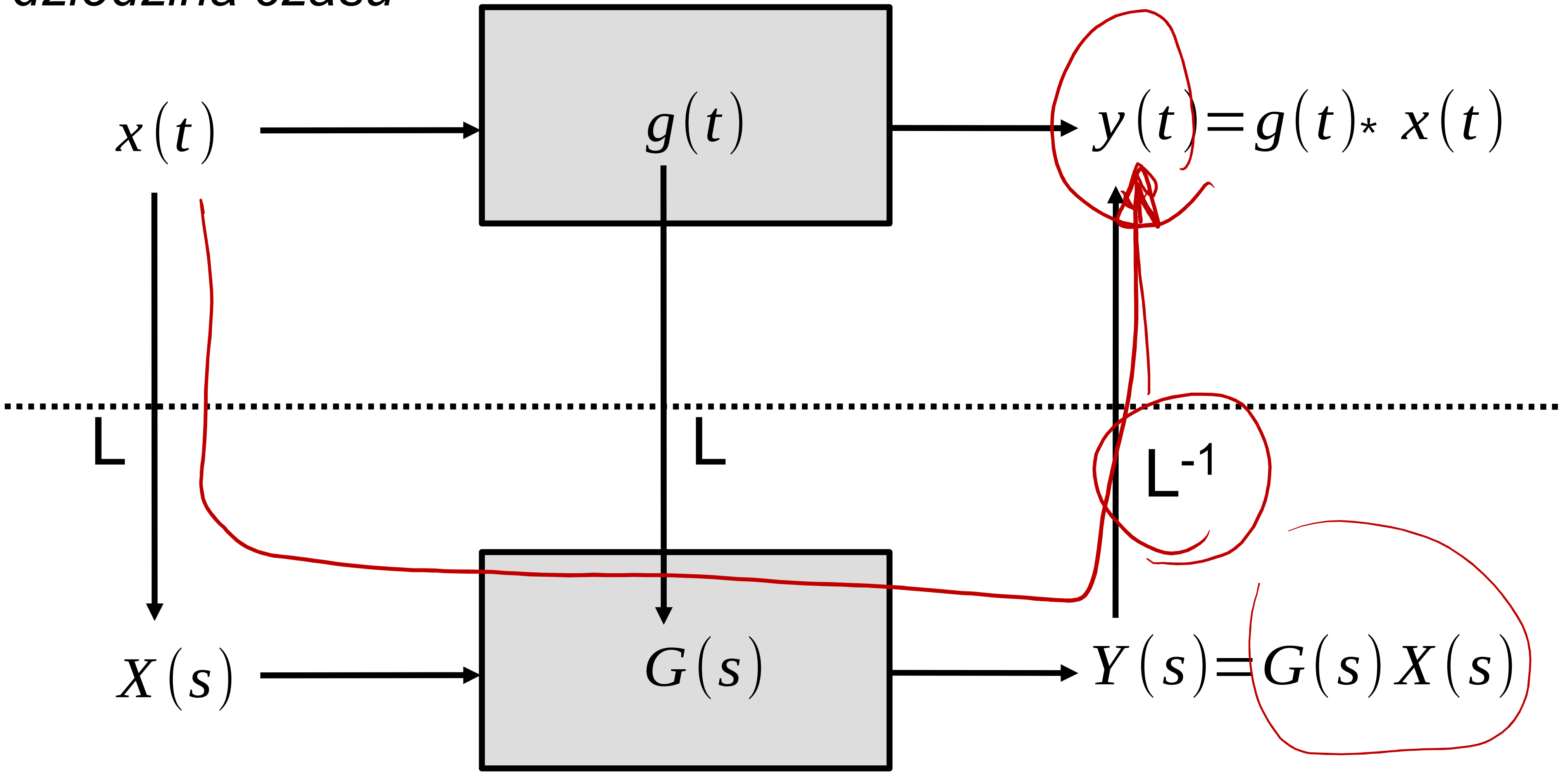
$G(s)$

$Y(s)=G(s)\cdot X(s)$

dziedzina zespolona

Wejście i wyjście

dziedzina czasu



$x(t)$

$g(t)$

$y(t)=g(t)* x(t)$

L

L

L^{-1}

$X(s)$

$G(s)$

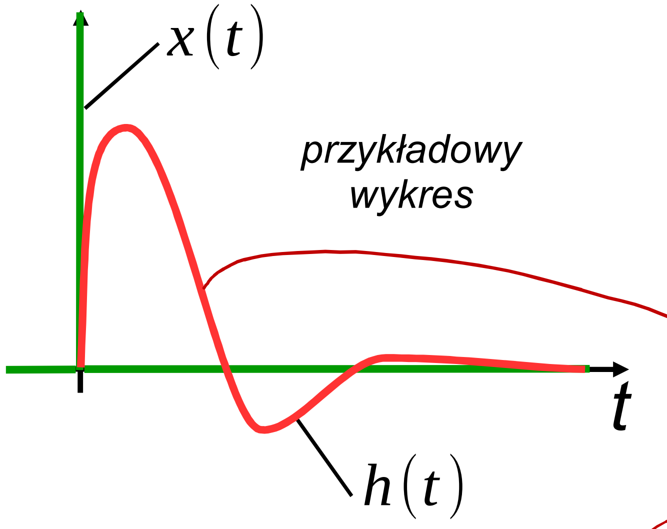
$Y(s)=G(s)X(s)$

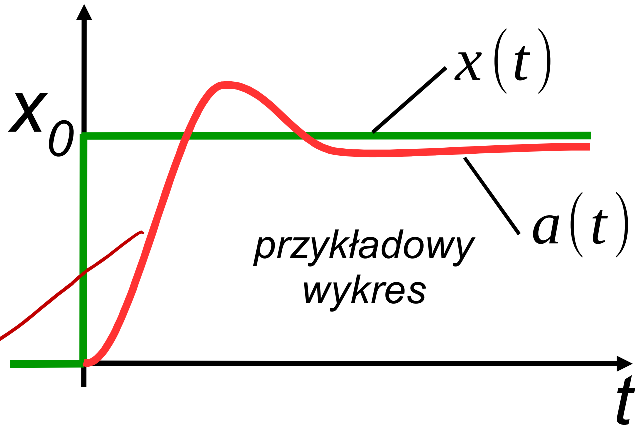
dziedzina zespolona

Wejście i wyjście

$g(t)$
odpowiedź impulsowa
$y(t)$ dla $x(t)=\delta(t)$

$a(t)$
odpowieź skokowa
$y(t)$ dla $x(t)=1(t)$





$$\frac{d\,a(t)}{dt}=g(t)$$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Jendostkowe wymuszenie skokowe (funkcja Heaviside'a): $1(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t \geqslant 0 \end{cases}$

$H(t)$ lub $1_+(t)$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Jendostkowe wymuszenie skokowe (funkcja Heaviside'a): $1(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geqslant 0 \end{cases}$

$H(t)$ lub $1_{+}(t)$

Funkcja liniowo narastająca: $x(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & t\geqslant 0 \end{cases}$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Jendostkowe wymuszenie skokowe (funkcja Heaviside'a): $1(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geqslant 0 \end{cases}$

$H(t)$ lub $1_+(t)$

Funkcja liniowo narastająca: $x(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ t, & t\geqslant 0 \end{cases}$

Funkcja harmoniczna: $\boxed{\underline{x(t)}=a\sin(\omega t)}$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe

wejście: $x(t)=a\cdot 1(t)$ Transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t)=?$

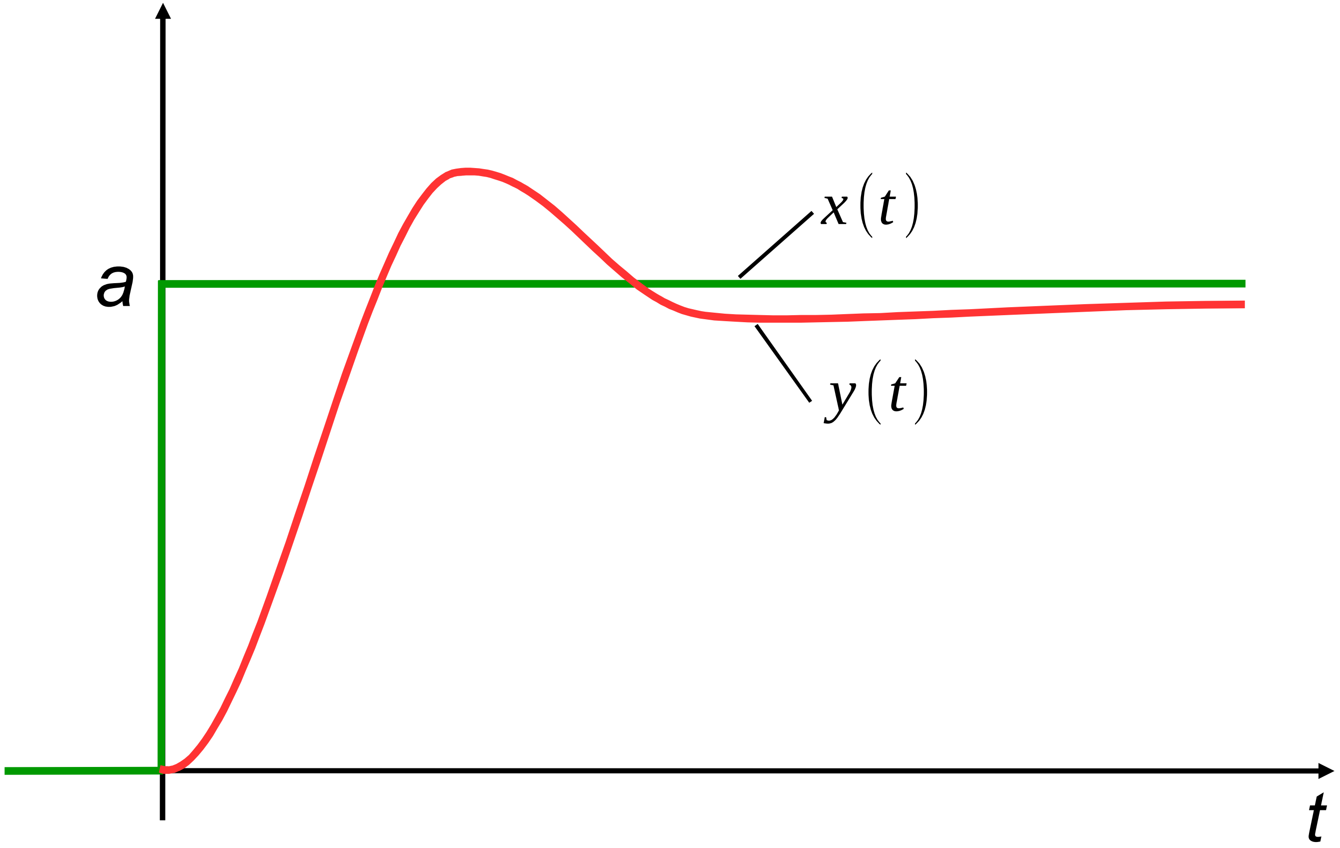
Odpowiedź na wymuszenie skokowe

wejście: $x(t)=a\cdot 1(t)$ Transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t)=?$

$$X(s)=L\{x(t)\}=a\cdot\frac{1}{s}$$

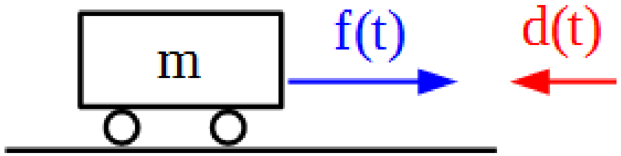
$$Y(s)=X(s)\cdot G(s)$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$$



Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-\overset{c\cdot v}{d(t)}$$

$\mathcal{L}$

$$m\,s\,V(s)=F(s)-c\,V(s)$$

$$\boxed{G(s)=\frac{V(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms+c}}$$

$$f(t)\overset{[N]}{=}f_0\cdot 1(t)$$

$$F(s)=f_0\frac{1}{s}$$

$$V(s)=G(s)\cdot F(s)$$

$$V(s)=\frac{1}{ms+c}\cdot f_0\frac{1}{s}$$

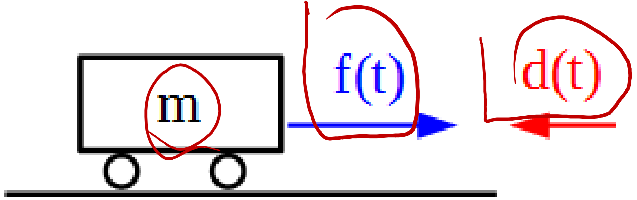
$$V(s)=\frac{f_0}{s(ms+c)}=\frac{f_0}{c}\frac{\frac{c}{m}}{s\left(s+\frac{c}{m}\right)}$$

$$v(t)=\frac{f_0}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

$$\boxed{1-e^{-bt}\;\Big|\;\frac{b}{s(s+b)}}$$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



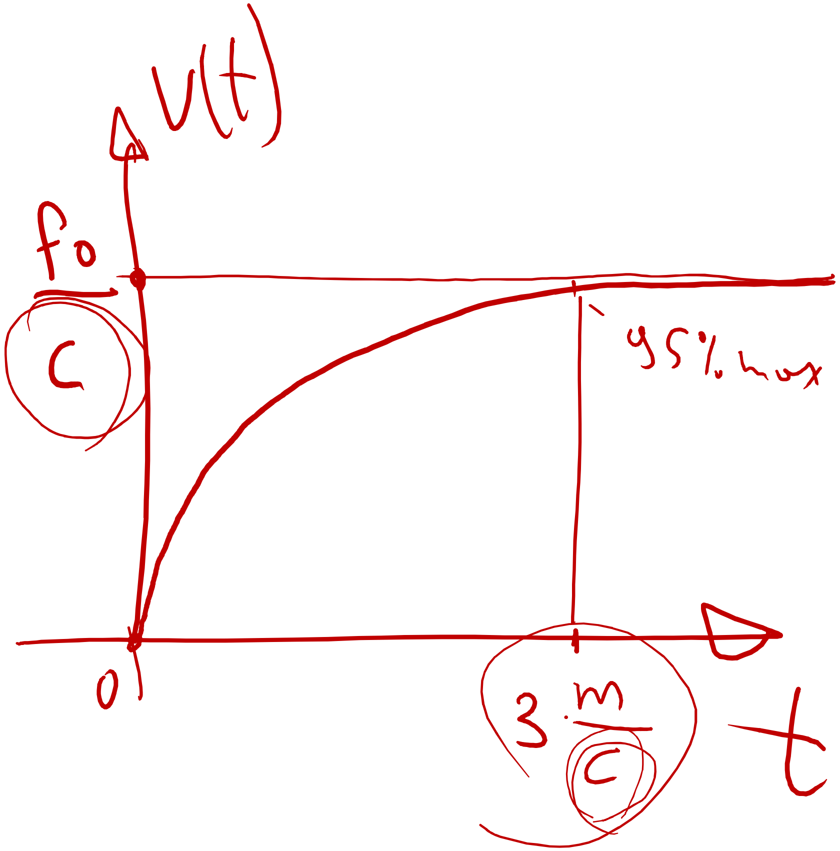
$$d(t) = c \cdot v(t)$$

$$\boxed{m\frac{dv(t)}{dt}} = \underline{f(t)} - \underline{d(t)}$$

$$v(t) = \frac{f_0}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

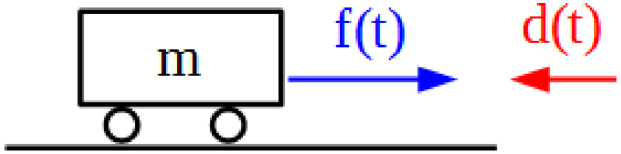
$$\frac{[N]}{[N\cdot\frac{s}{m}]}$$

$$\frac{N\frac{s}{m}}{kg} = \frac{kg\cdot\frac{m}{s^2}\cdot\frac{s}{m}}{kg} = \frac{1}{s}$$



Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

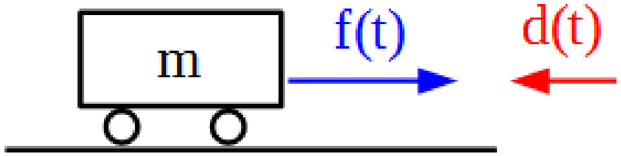
pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-d(t)$$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

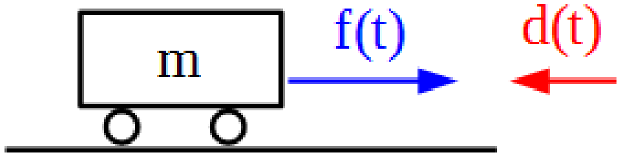
pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-d(t)$$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

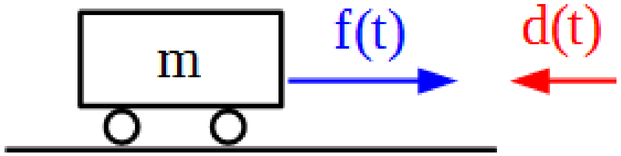
pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



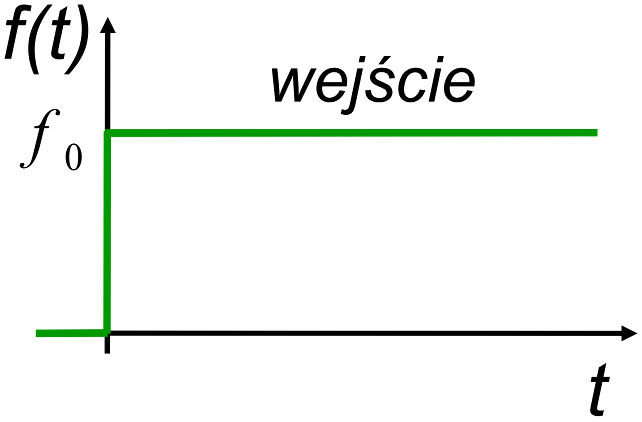
$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-d(t)$$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



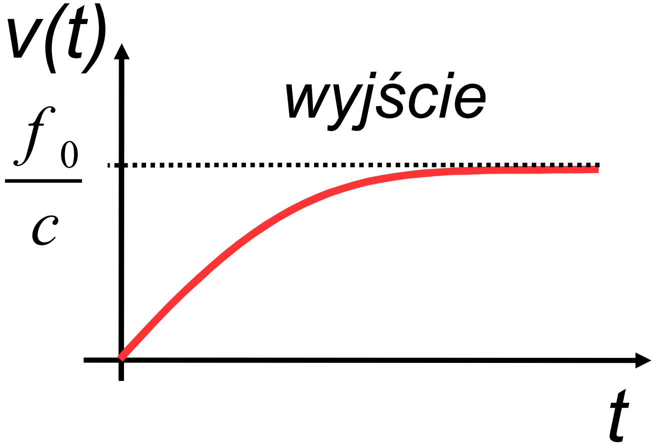
$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-d(t)$$



$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-cv(t)$$

$$msV(s)=F(s)-cV(s)$$

$$G(s)=\frac{V(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms+c}$$



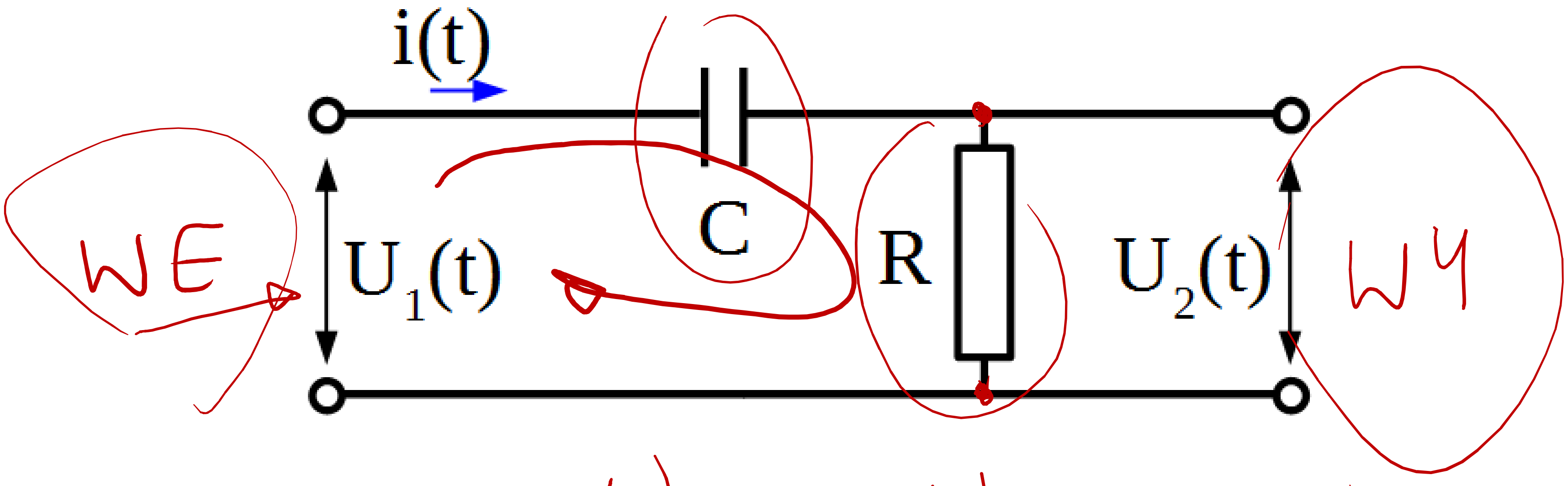
$$f(t)=f_0 1(t)$$

$$F(s)=f_0\frac{1}{s}$$

$$V(s)=H(s)F(s)=\frac{1}{ms+c}f_0\frac{1}{s}=\frac{f_0}{s(ms+c)}$$

$$v(t)=L^{-1}\left\{\frac{f_0}{s(ms+c)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{f_0}{c}\frac{c/m}{s(s+c/m)}\right\}=\frac{f_0}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$

Odpowiedź skokowa - przykład 2



$$u_1(t) = u_C(t) + u_R(t)$$

$$u_R = u_2$$

$$u_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{\int \frac{u_2(t)}{R}\, dt}{C}$$

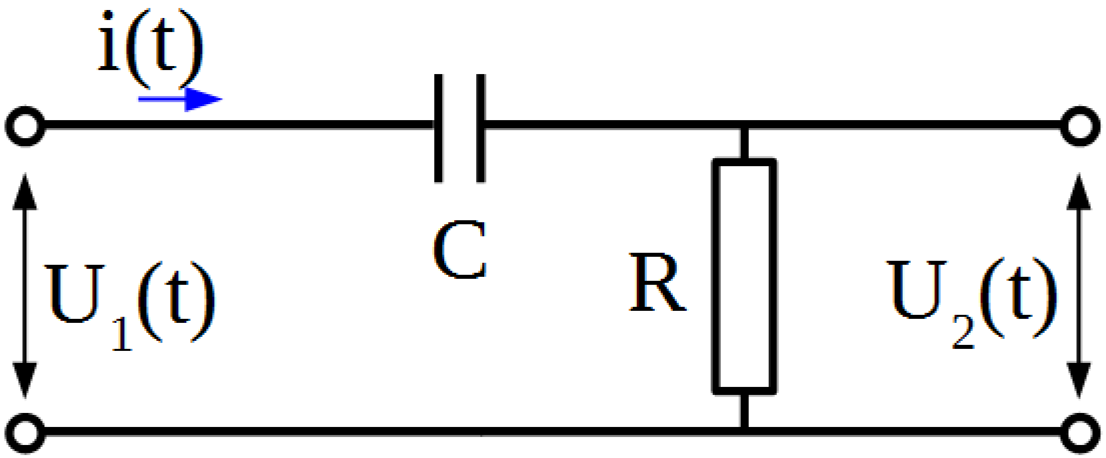
$$q(t) = \int i(t)\, dt$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$u_C = \frac{1}{RC} \int u_2(t)\, dt$$

$$q(t) = \int \frac{u_R(t)}{R}\, dt$$

Odpowiedź skokowa - przykład 2

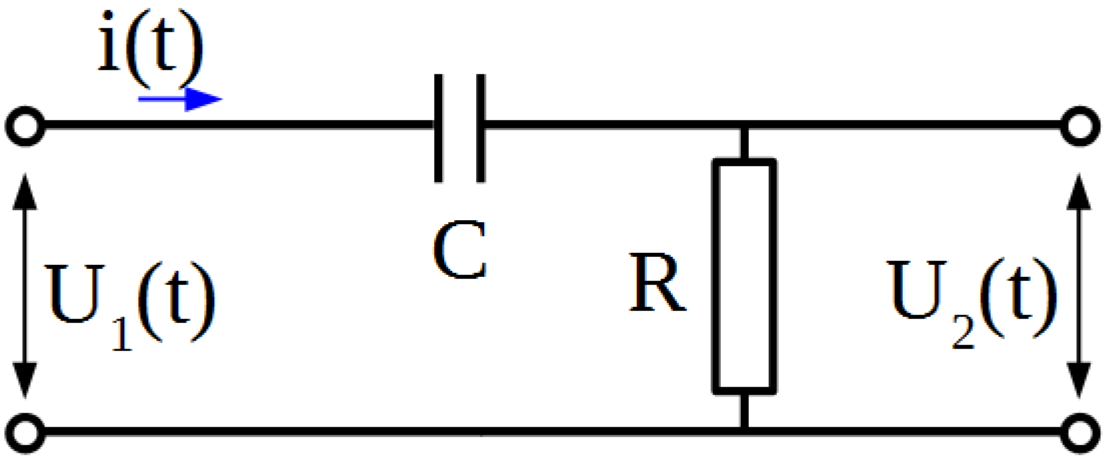


$$u_1(t) = \frac{1}{RC}\int_0^\infty u_2(t)dt + u_2(t) \quad \Big| \, \mathcal{L}$$

$$U_1(s) = \frac{1}{RC}\frac{U_2(s)}{s} + U_2(s) = U_2(s)\left(\frac{1}{RCs}+1\right)$$

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{\frac{1}{RCs}+1} = \frac{s}{\frac{1}{RC}+s} = \frac{s}{s+\frac{1}{T}} \qquad T=RC$$

Odpowiedź skokowa - przykład 2



$$G(s) = \frac{s}{s+\frac{1}{T}}$$

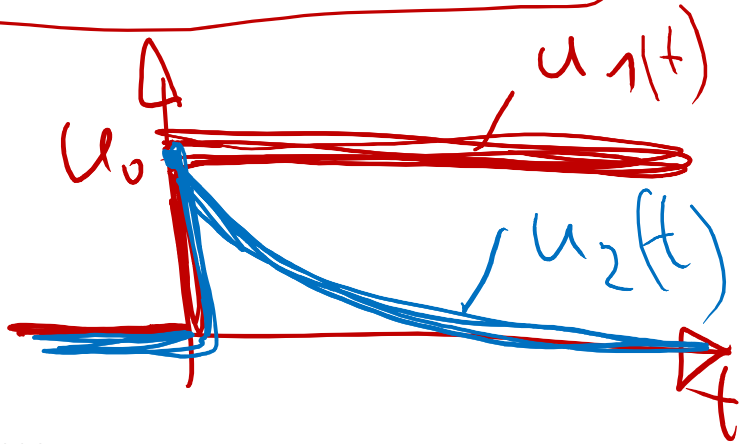
$$U_2(s) = \frac{u_0}{s+\frac{1}{T}}$$

$$\boxed{u_2(t) = \underbrace{u_0}\, e^{-\frac{1}{T}t}}$$

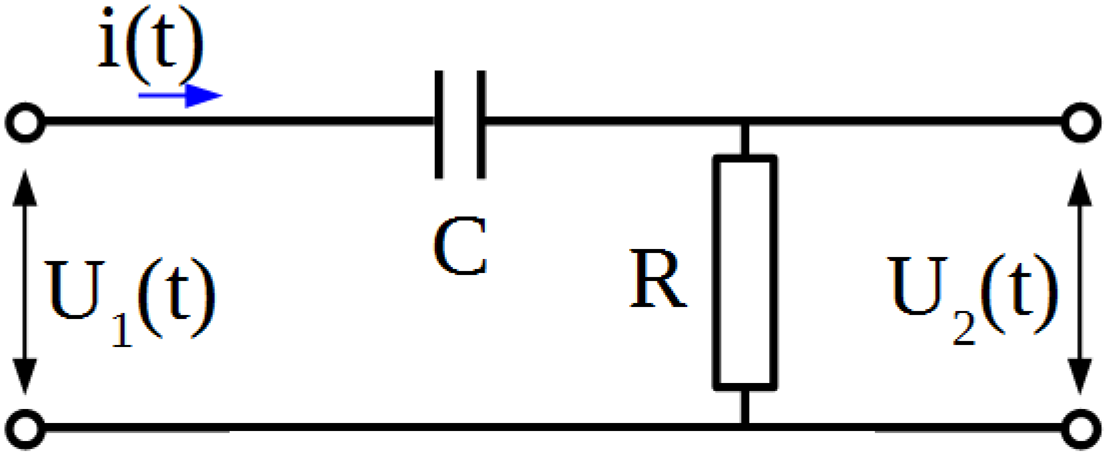
$$u_1(t) = U_0\, 1(t)$$

$$U_1(s) = U_0 \frac{1}{s}$$

$$U_2(s) = G(s) \cdot U_1(s) = \frac{s}{s+\frac{1}{T}} \cdot \frac{u_0}{s}$$



Odpowiedź skokowa - przykład 2



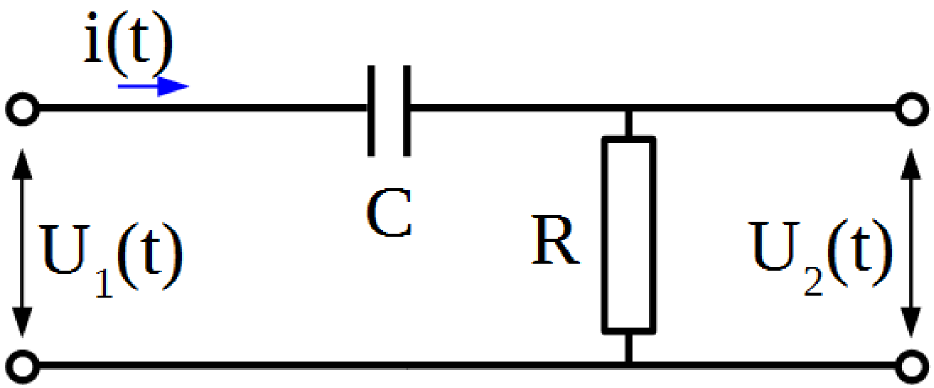
$$u_1(t)=u_C(t)+u_R(t)$$

$$u_C(t)=\frac{q(t)}{C}\ ,\ u_R(t)=i(t)R\ ,\ i=\frac{dq}{dt} \qquad u_2(t)=u_R(t)$$

$$u_C(t)=\frac{q(t)}{C}=\frac{1}{C}\int i\,dt=\frac{1}{C}\int\frac{u_R}{R}dt=\frac{1}{CR}\int u_2\,dt$$

$$\frac{1}{CR}\int u_2(t)\,dt+u_2(t)=u_1(t)$$

Odpowiedź skokowa - przykład 2



$$G(s)=\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$u_1(t)=a\cdot 1(t),$$

$$U_2(s)=U_1(s)\cdot G(s)=a\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

$$u_2(t)=L^{-1}\left[U_s(s)\right]=ae^{\frac{-t}{T}}$$