



Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Teoria maszyn i podstawy automatyki
semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 6

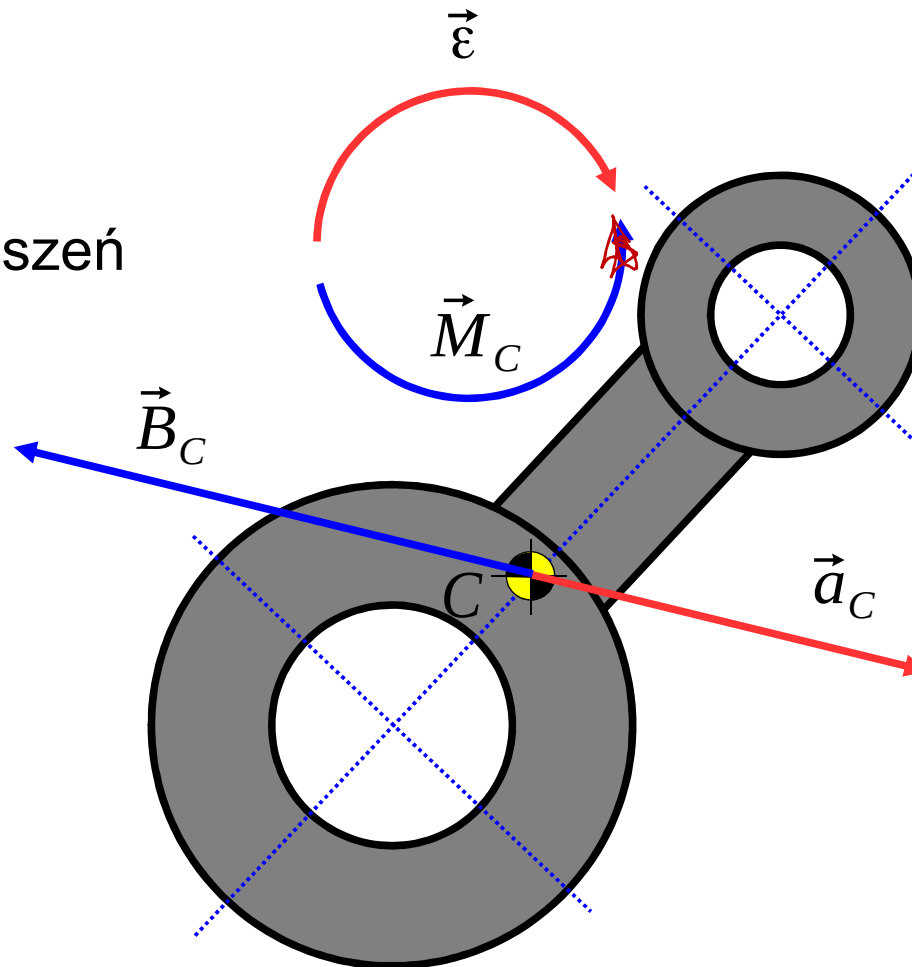
Dynamika mechanizmów płaskich.
Dynamika maszyn.
Redukcja mas i sił.
Równanie ruchu maszyny.

Dynamika mechanizmów

Siły i momenty sił bezwładności

Dane:

z planu przyspieszeń



siła bezwładności

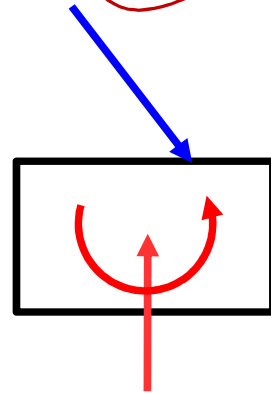
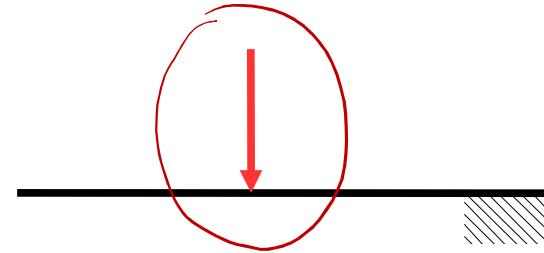
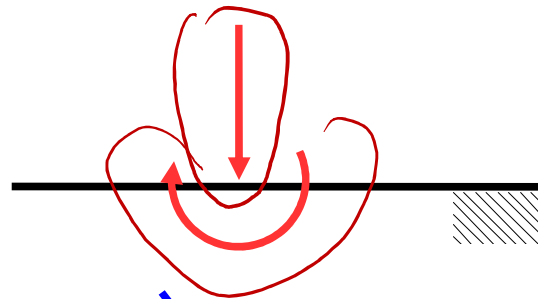
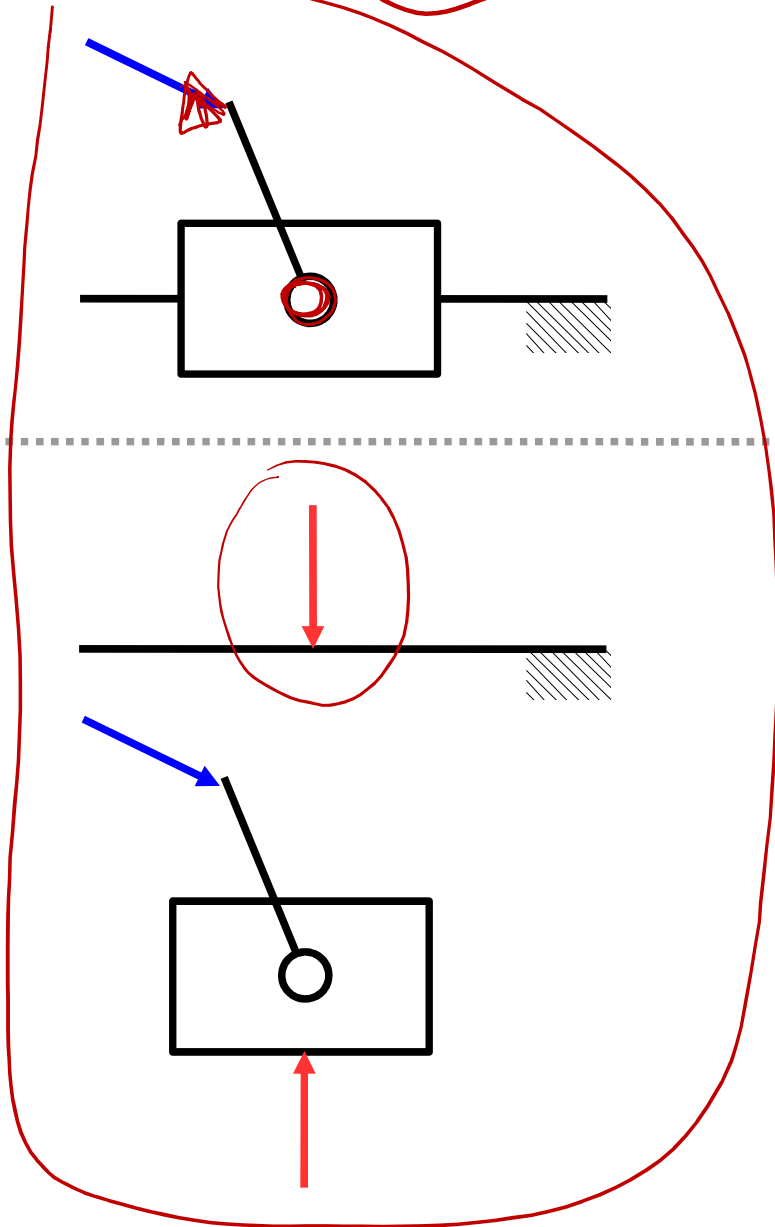
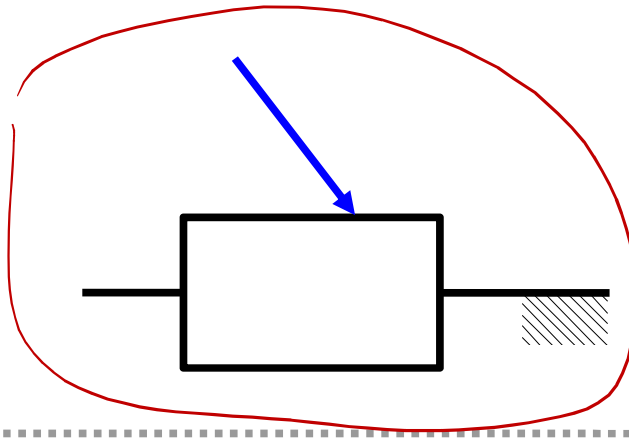
$$\vec{B}_C = - m \vec{a}_C$$

Moment od sił bezwładności

$$\vec{M}_C = - I_C \vec{\varepsilon}$$

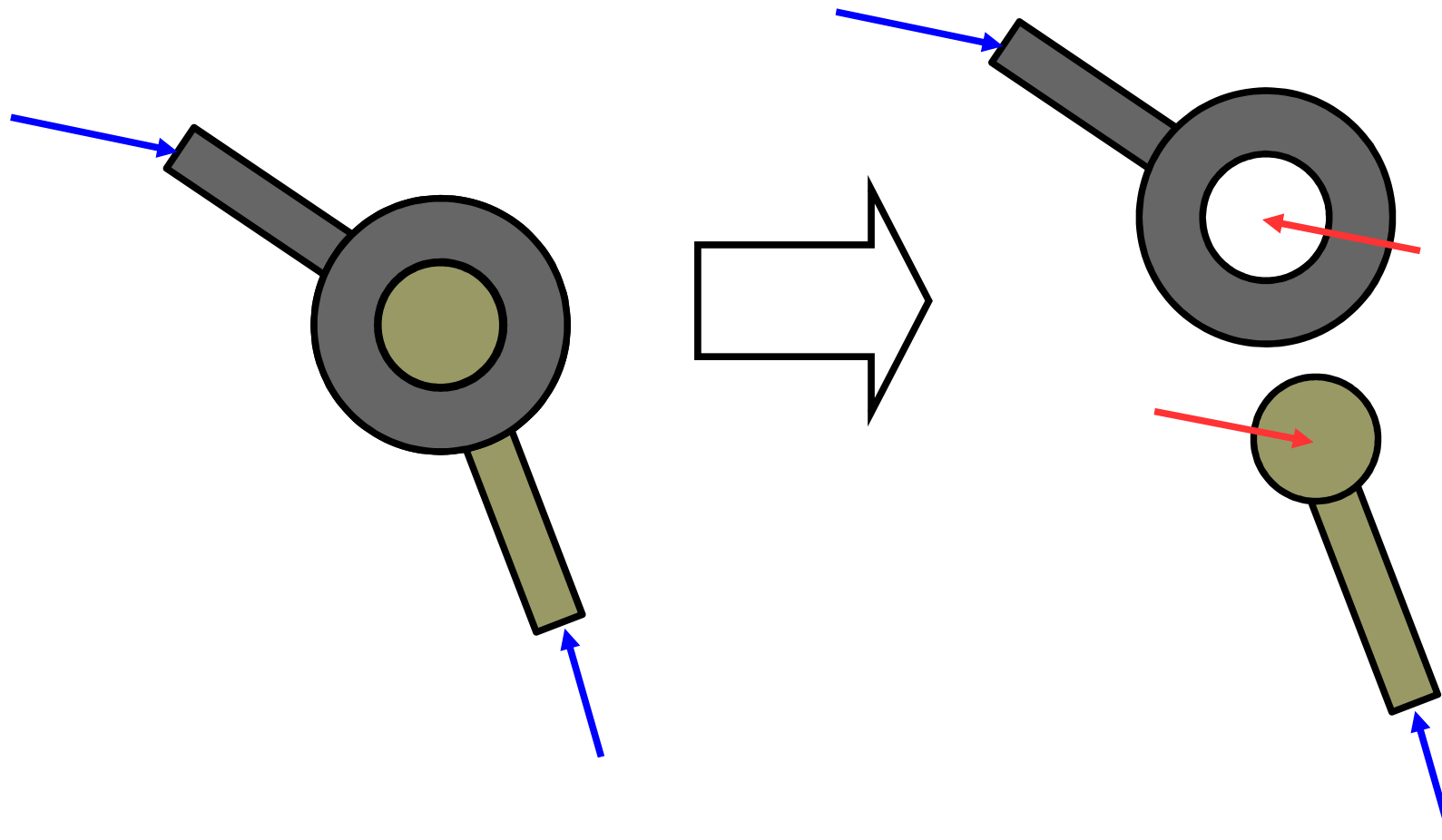
Dynamika mechanizmów

Reakcje w parach kinematycznych (bez tarcia)



Dynamika mechanizmów

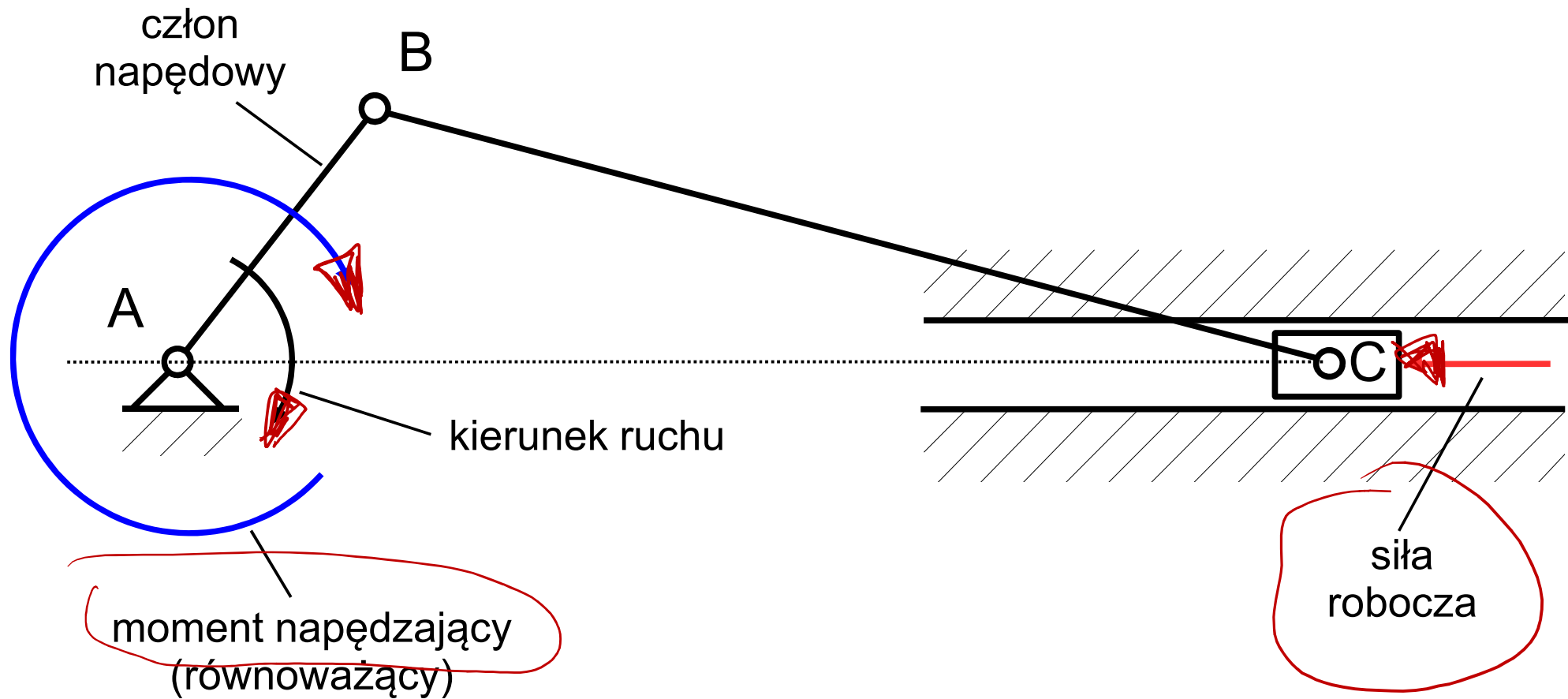
Reakcje w parach kinematycznych (bez tarcia)



Dynamika mechanizmów

Siły napędzające i robocze

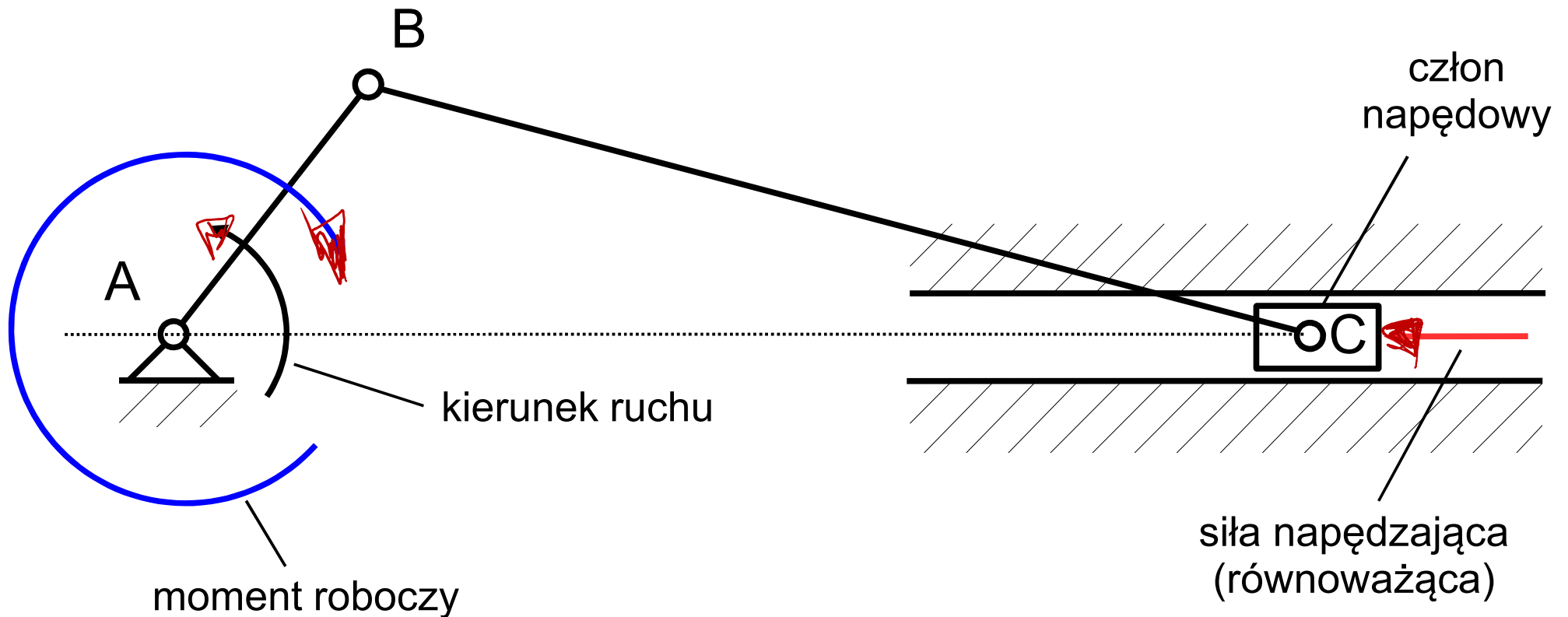
Przykład – sprężarka



Dynamika mechanizmów

Siły napędzające i robocze

Przykład – silnik



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – wyznaczenie sił i momentów sił działających na mechanizm wywołujących zadany ruch mechanizmu.

Drugie zadanie dynamiki – wyznaczenie ruchu mechanizmu pod wpływem sił i momentów zewnętrznych.

Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki

Wyznaczenie sił i momentów sił działających na mechanizm wywołujących zadany ruch mechanizmu – KINETOSTATYKA MECHANIZMÓW.

0. Zaprojektowanie mechanizmu do wykonywania konkretnego zadania. Ustalenie napędu i sprawdzenie zgodności z założeniami przebiegu przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń.
1. W oparciu o wyznaczone przyspieszenia wyznaczyć siły bezwładności działające na człony ruchome mechanizmu w wybranym położeniu mechanizmu.
2. Dokonać rozkładu mechanizmu na podukłady ujawniając reakcje w połączeniach.
3. Zapisać równania d'Alemberta dla podukładów mechanizmu (dla ruchu postępowego i obrotowego).
4. Rozwiązać powstałe równania metodą graficzną, analityczną lub mieszaną.

Dynamika mechanizmów

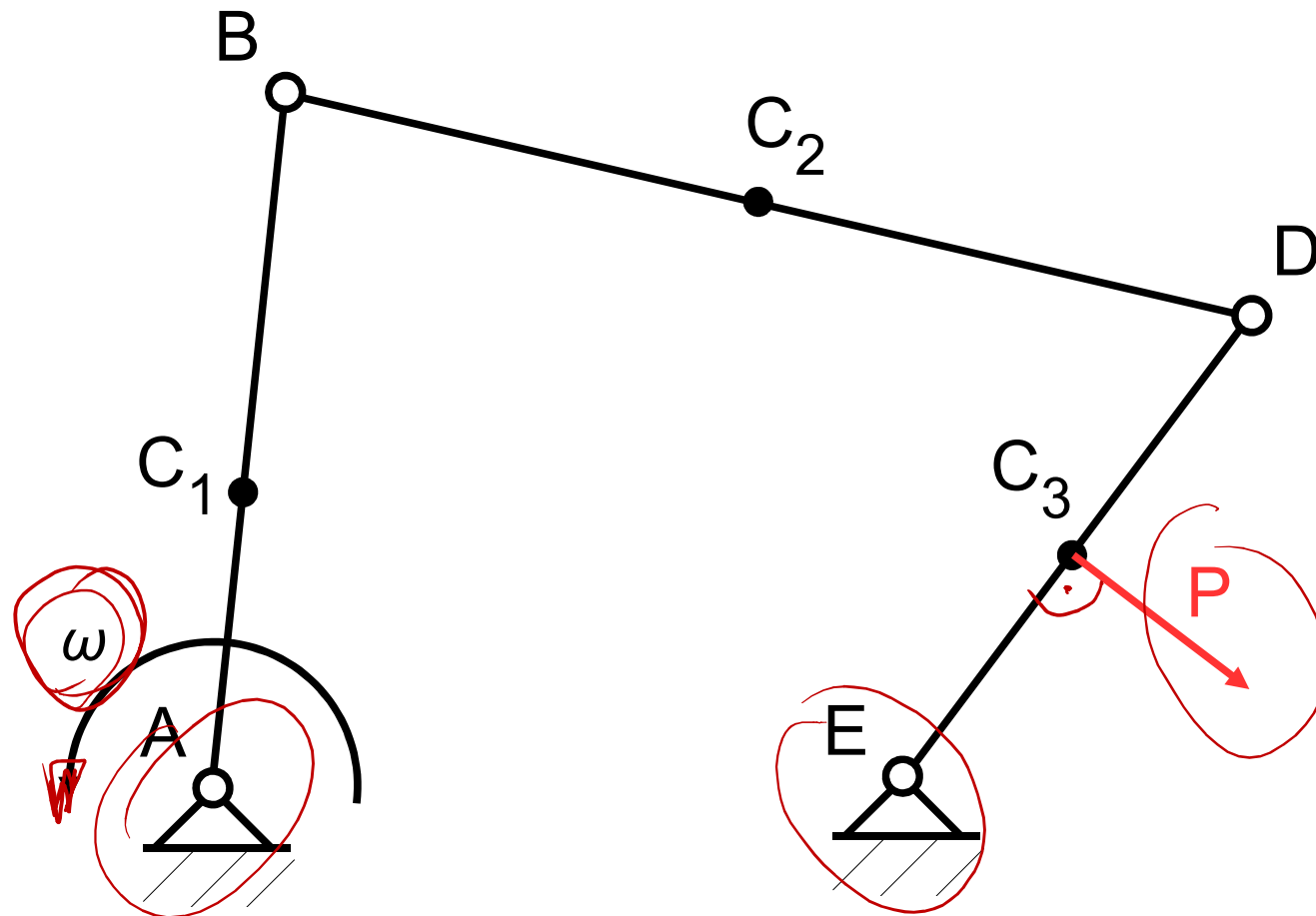
Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

Dane:

Geometria, masy,
położenia środków mas i
momenty bezwładności
członów mechanizmu.
Zadana stała prędkość
kątowna członu
napędowego ω oraz
wektor siły roboczej P w
danym położeniu
mechanizmu.

Szukane:

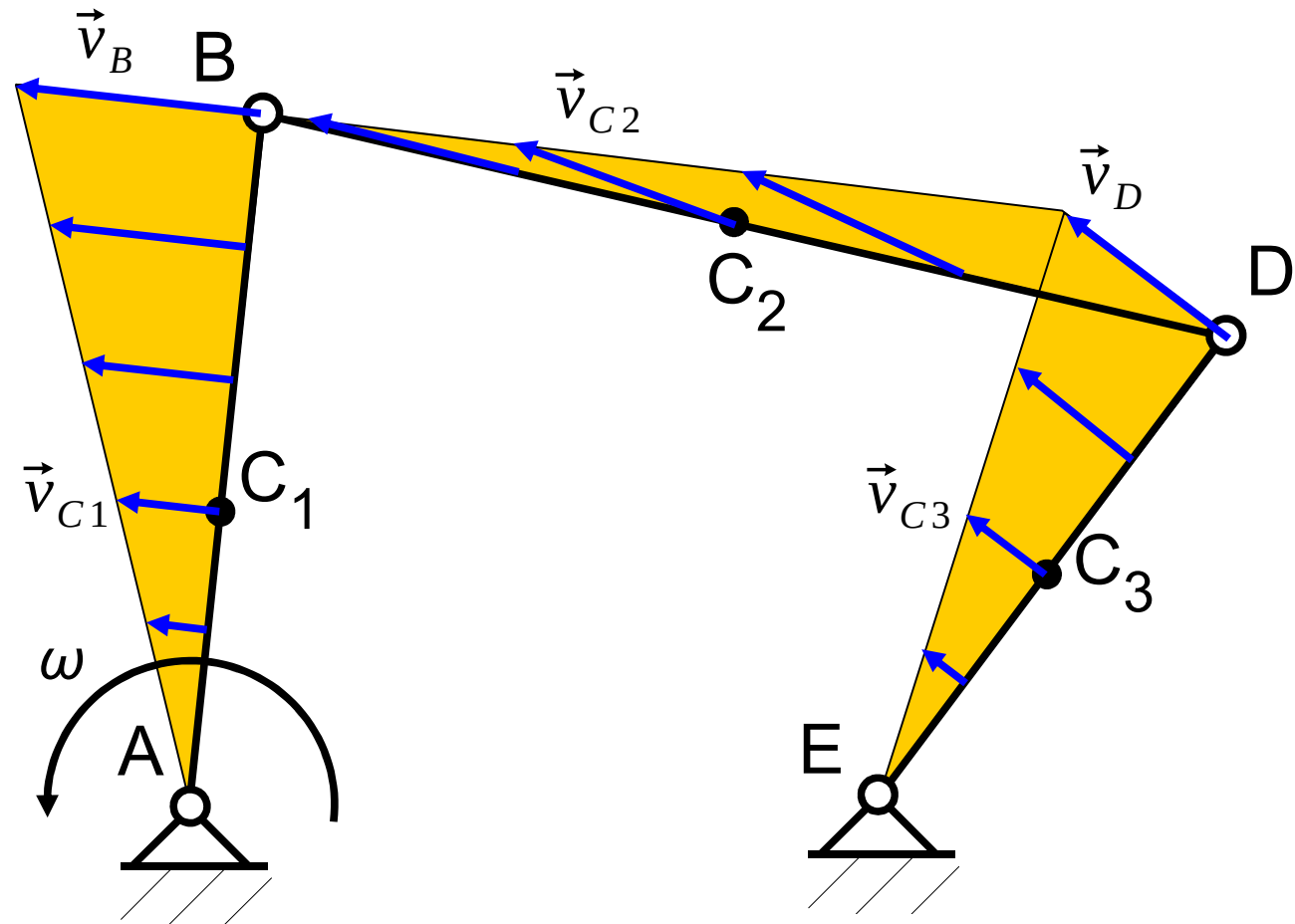
Moment napędowy i siły
reakcji w połączeniach.



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

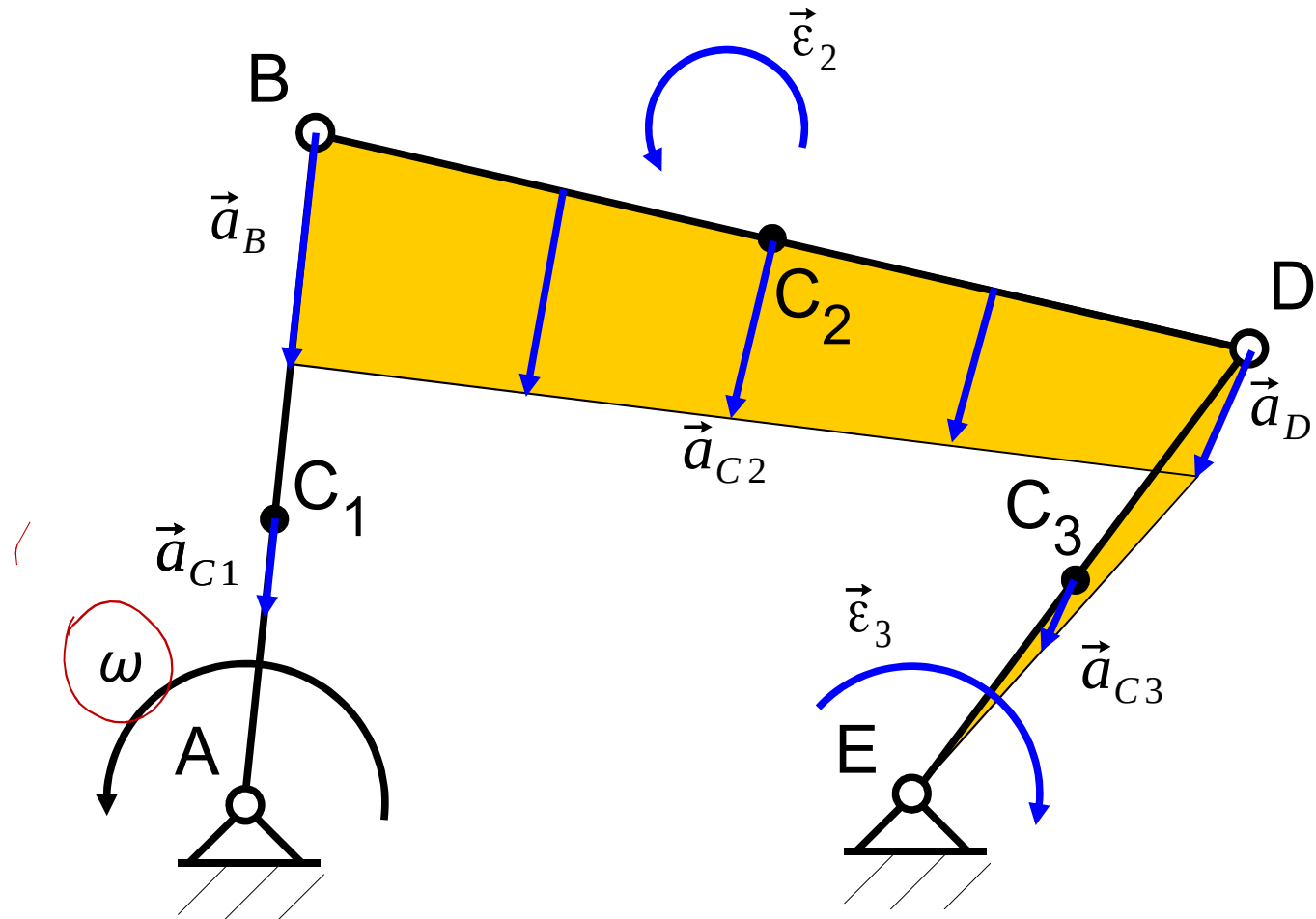
rozkład prędkości



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

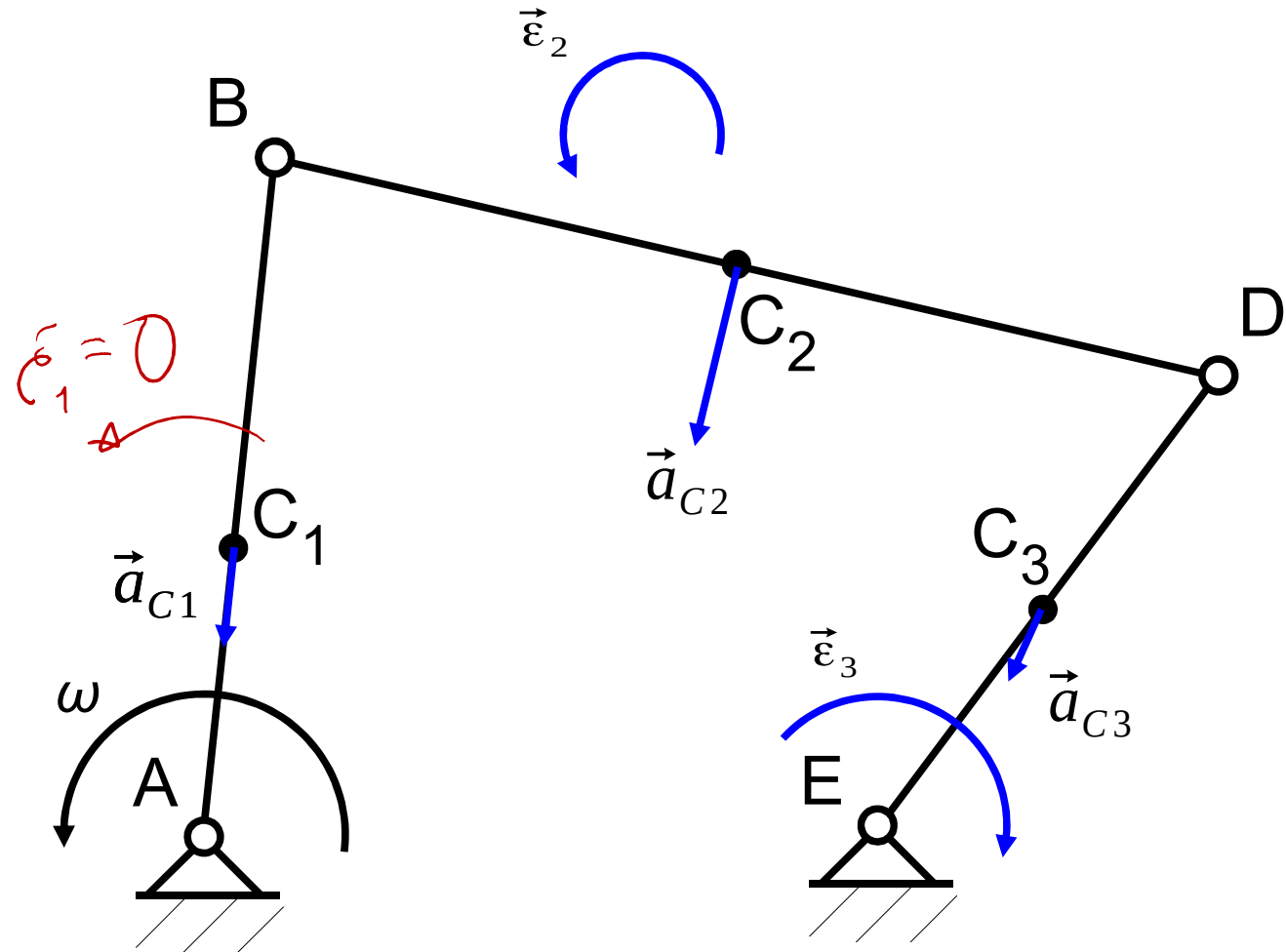
rozkład przyspieszeń



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

rozkład przyspieszeń



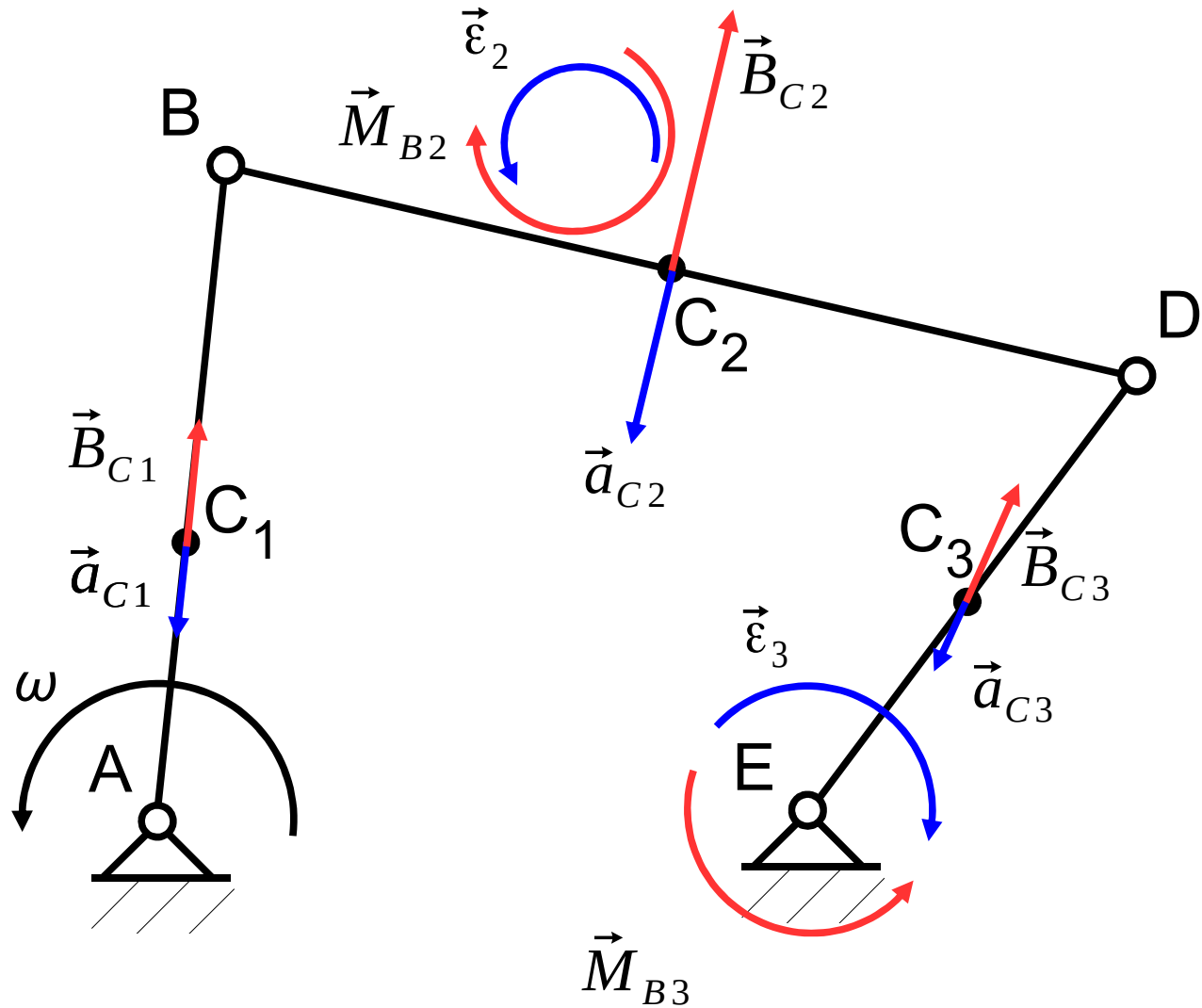
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

siły bezwładności

$$\vec{B}_{C1} = -m_1 \vec{a}_{C1}$$

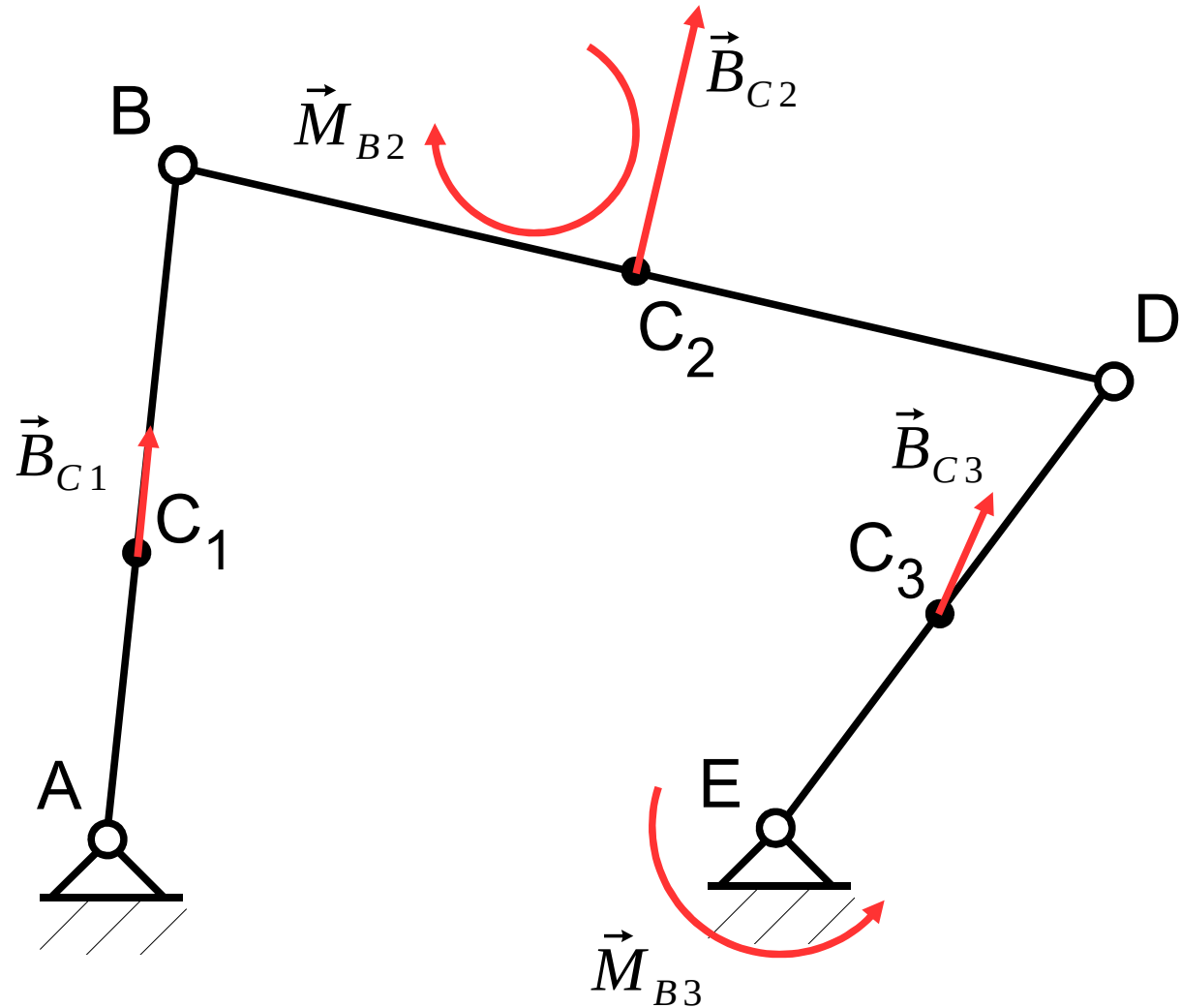
$$M_{B2} = -I_{C2} \vec{\epsilon}_2$$



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

siły bezwładności



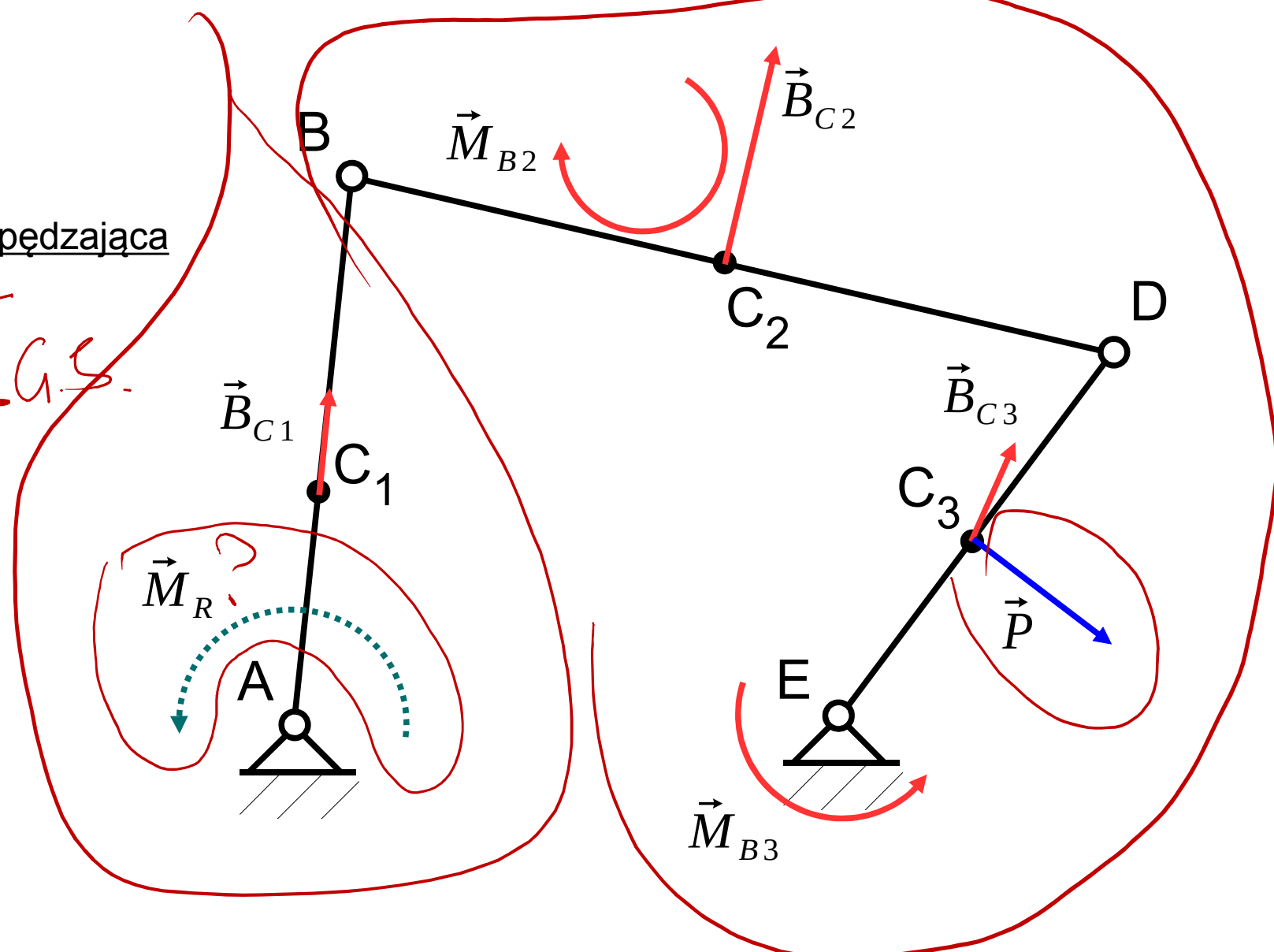
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

II G.S.

Siły bezwładności
Siła robocza
Poszukiwana siła napędzająca

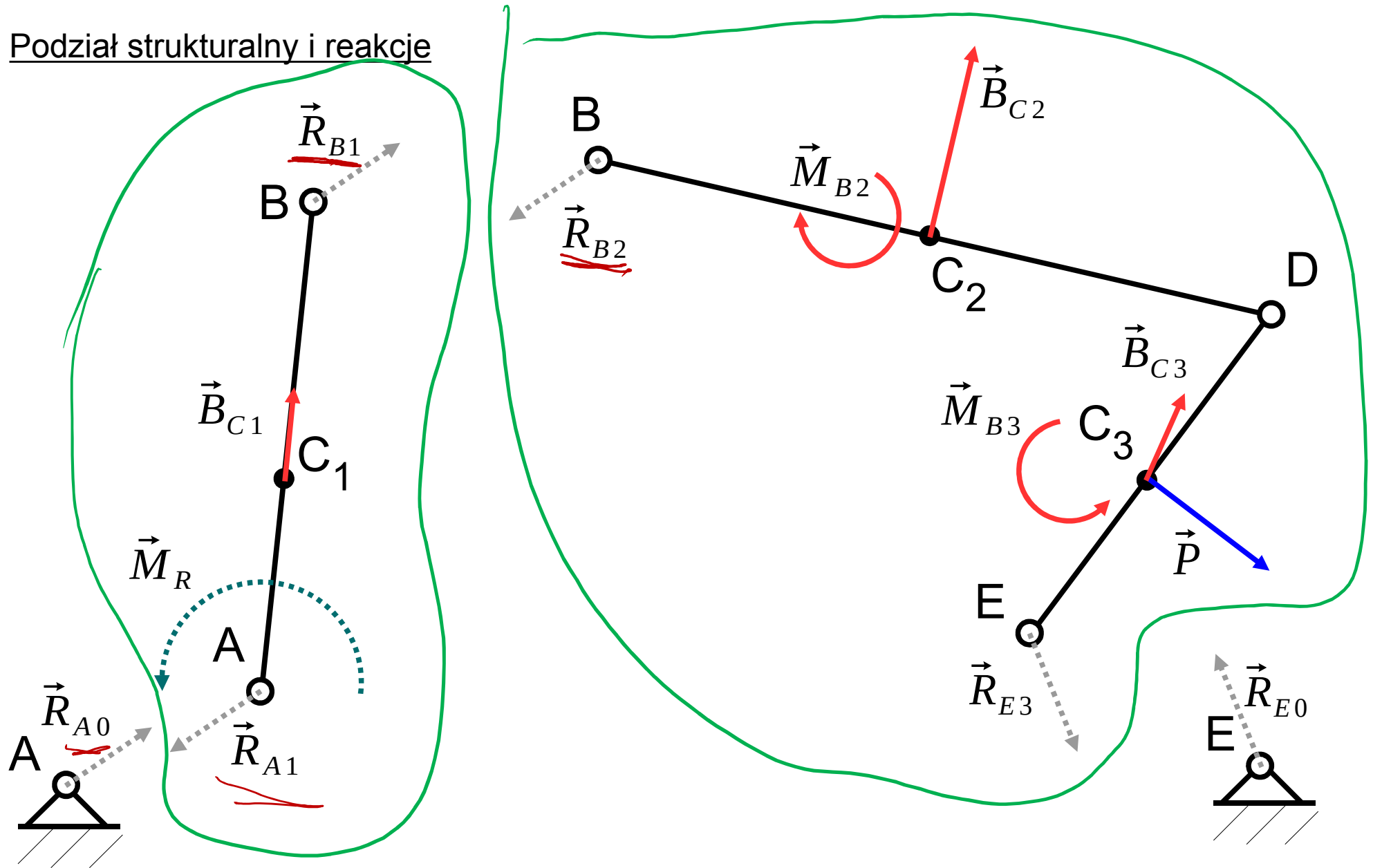
I G.S.



Dynamika mechanizmów

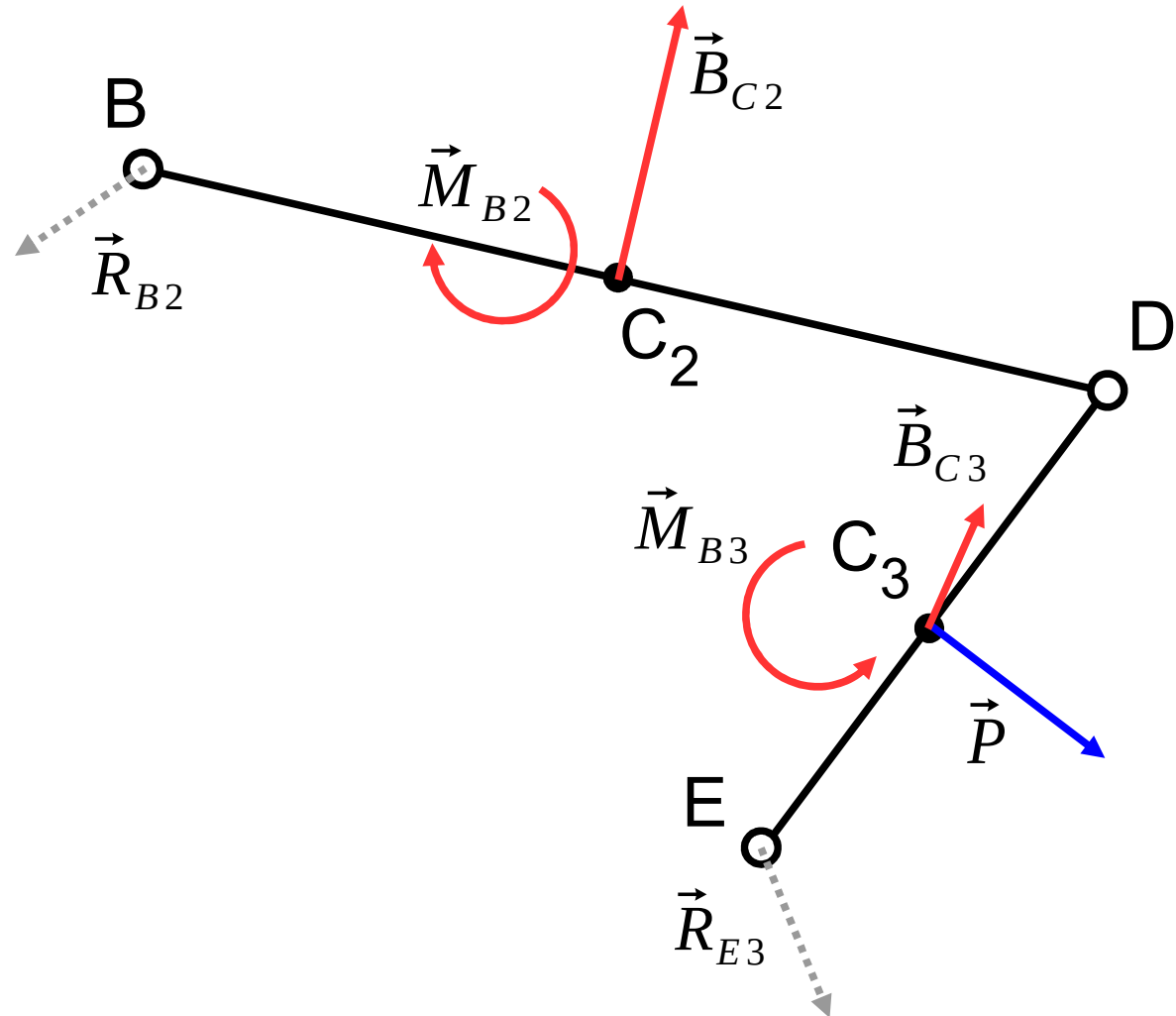
Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

Podział strukturalny i reakcje



Dynamika mechanizmów

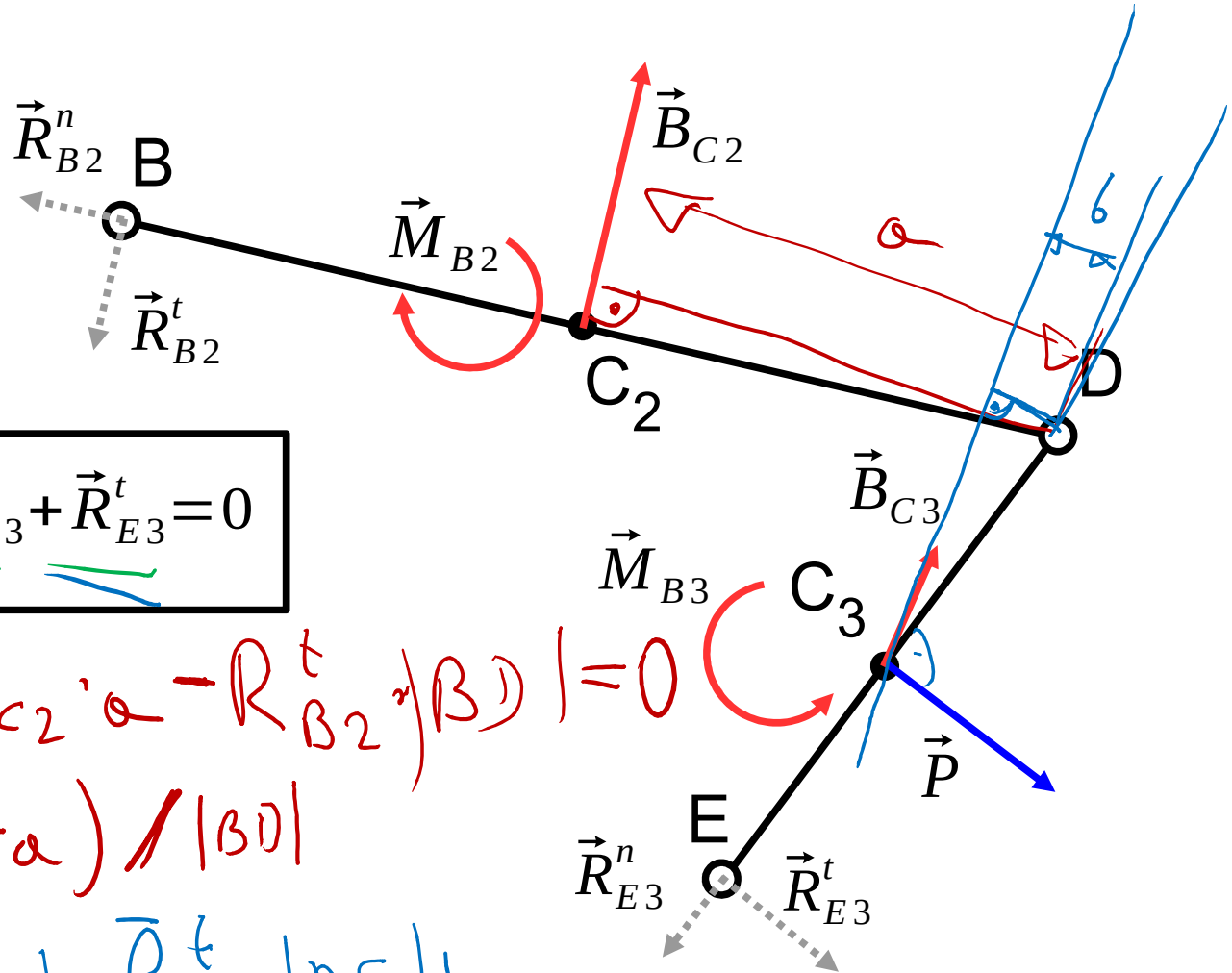
Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



$$\vec{R}_{B2} + \vec{B}_{C2} + \vec{B}_{C3} + \vec{P} + \vec{R}_{E3} = 0$$

Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



$$\vec{R}_{B2}^n + \vec{R}_{B2}^t + \vec{B}_{C2} + \vec{B}_{C3} + \vec{P} + \vec{R}_{E3}^n + \vec{R}_{E3}^t = 0$$

$$\boxed{BD} \sum_i M_{iD} = M_{B2} + B_{C2} \cdot a - R_{B2}^t \cdot |BD| = 0$$

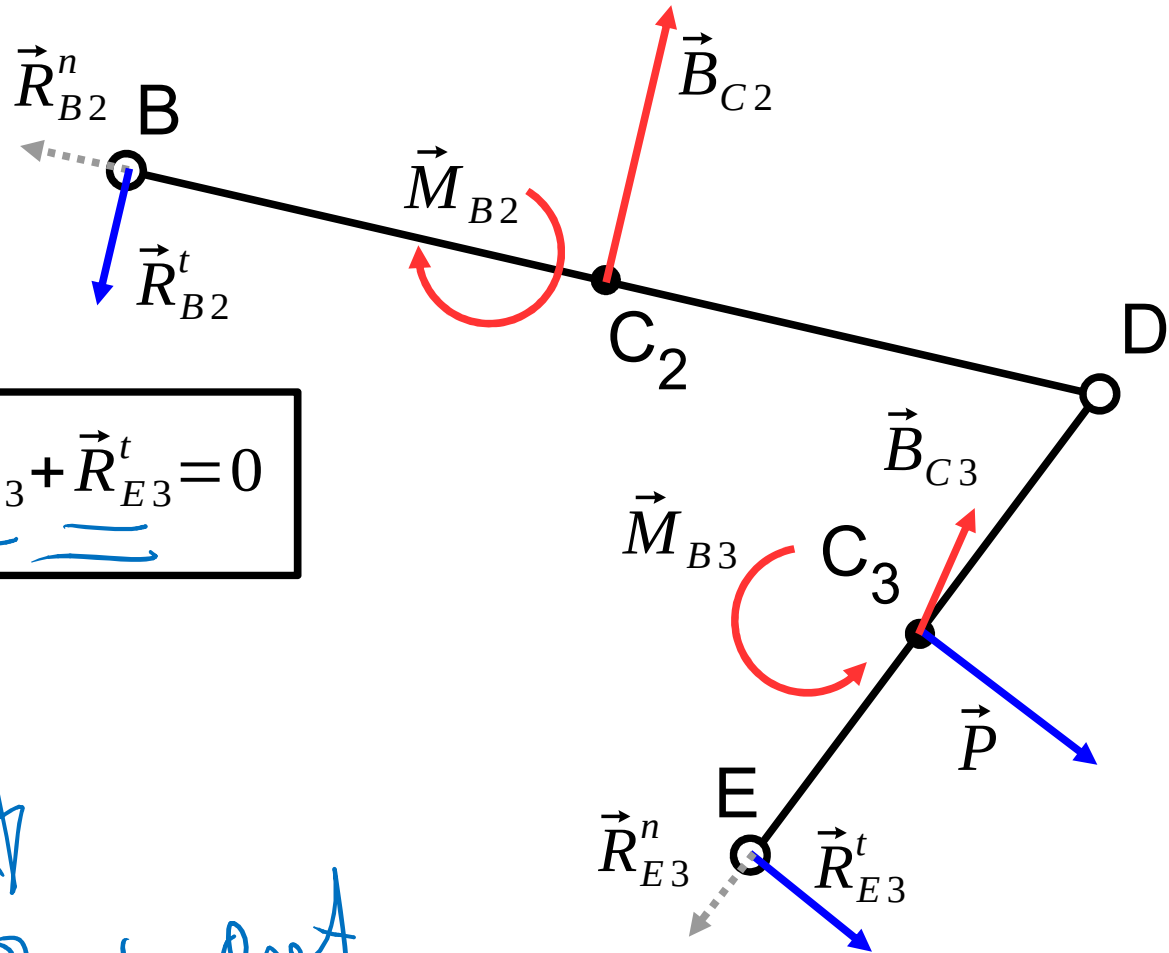
$$\hookrightarrow |R_{B2}^t| = (M_{B2} + B_{C2} \cdot a) / |BD|$$

$$\boxed{DE} \sum_i M_{iD} = M_{B3} + P \cdot |DC_3| + R_{E3}^t \cdot |DE| +$$

$$- B_{C3} \cdot b = 0 \quad \hookrightarrow |R_{E3}^t| = \dots$$

Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



$$\vec{R}_{B2}^n + \vec{R}_{B2}^t + \vec{B}_{C2} + \vec{B}_{C3} + \vec{P} + \vec{R}_{E3}^n + \vec{R}_{E3}^t = 0$$

człon BD: $\sum_i M_{iD} = 0$

$\vec{R}_{B2}^t = \dots$

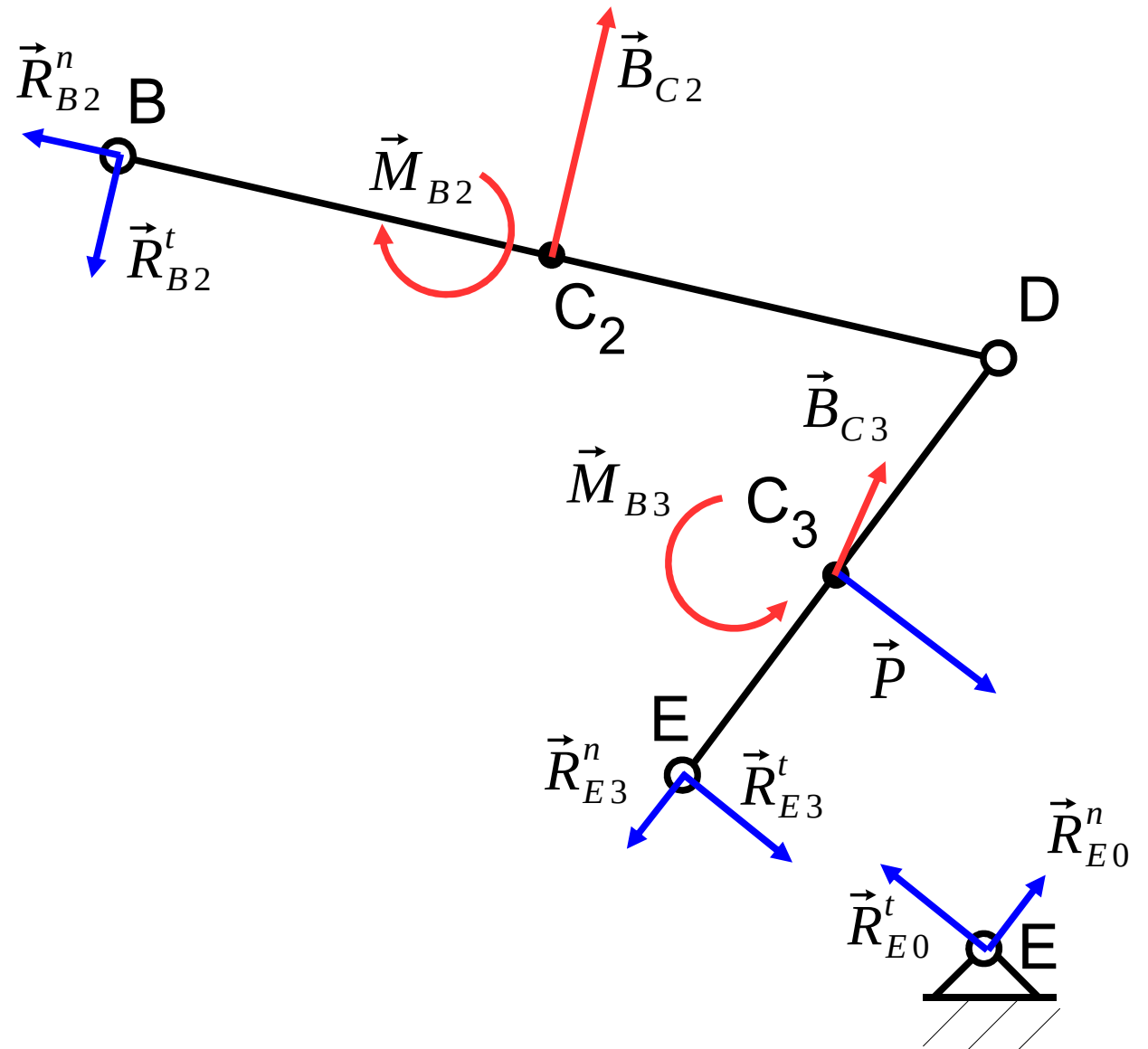
człon ED: $\sum_i M_{iD} = 0$

$\vec{R}_{E3}^t = \dots$

www. prof.

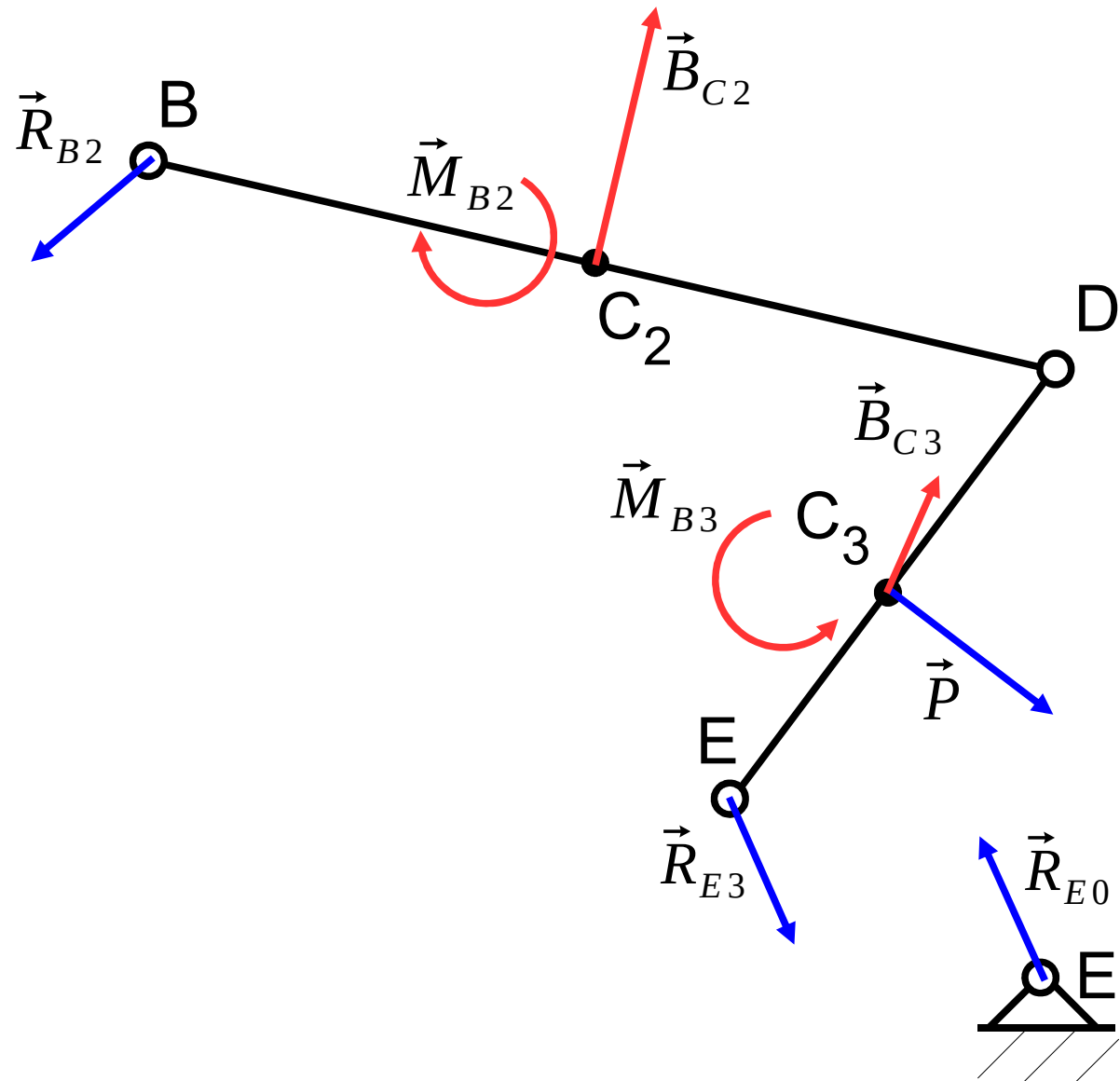
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



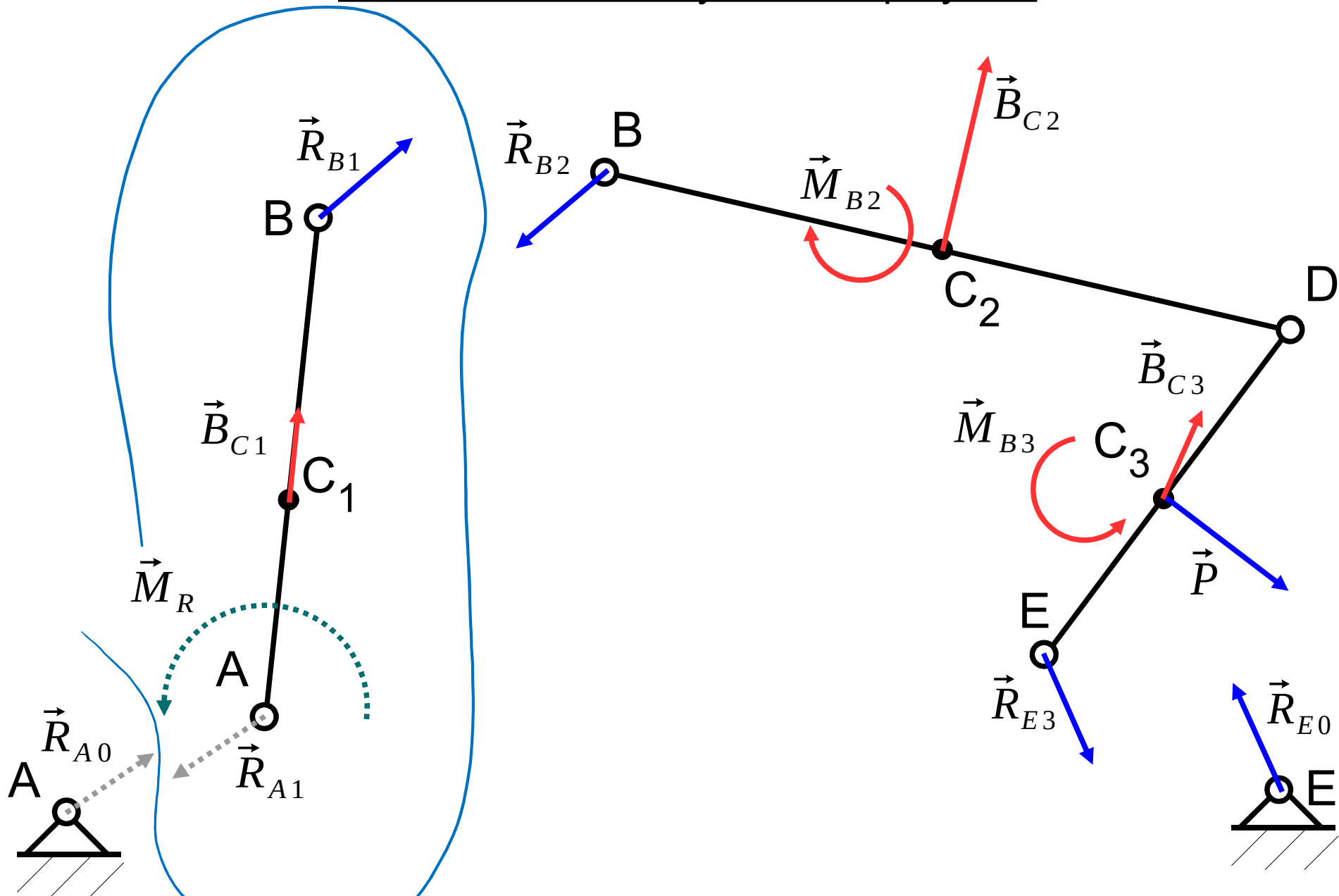
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



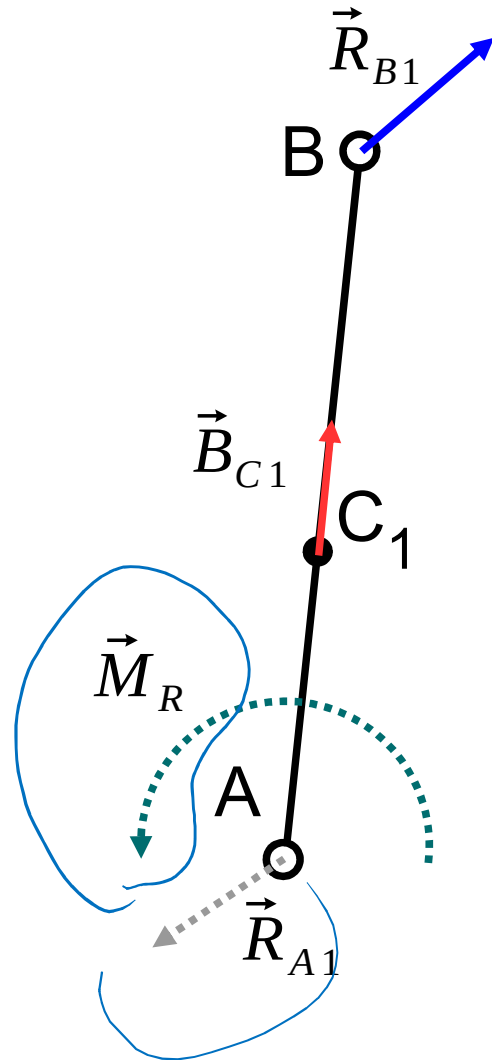
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



Dynamika mechanizmów

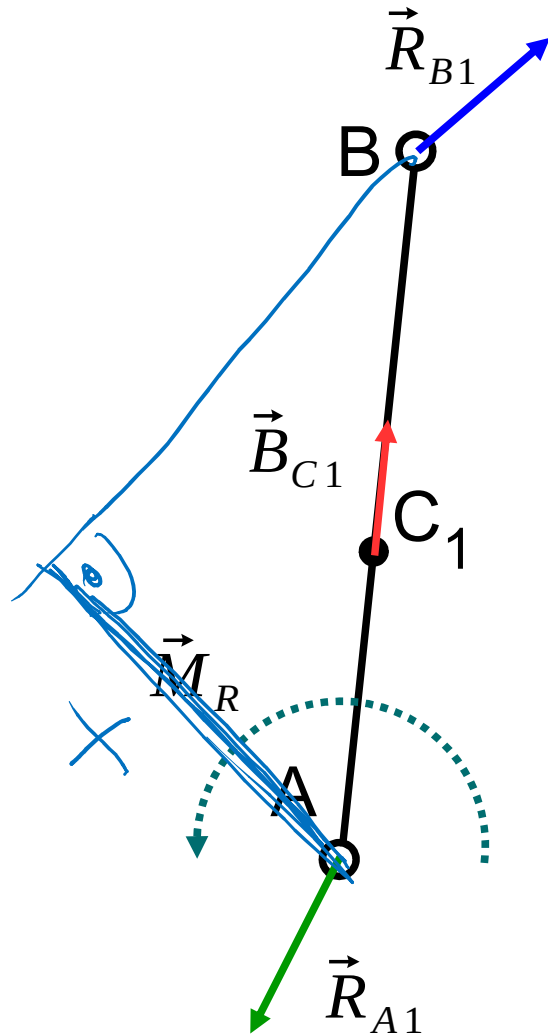
Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



$$\vec{R}_{A1} + \vec{B}_{C1} + \vec{R}_{B1} = 0$$

Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



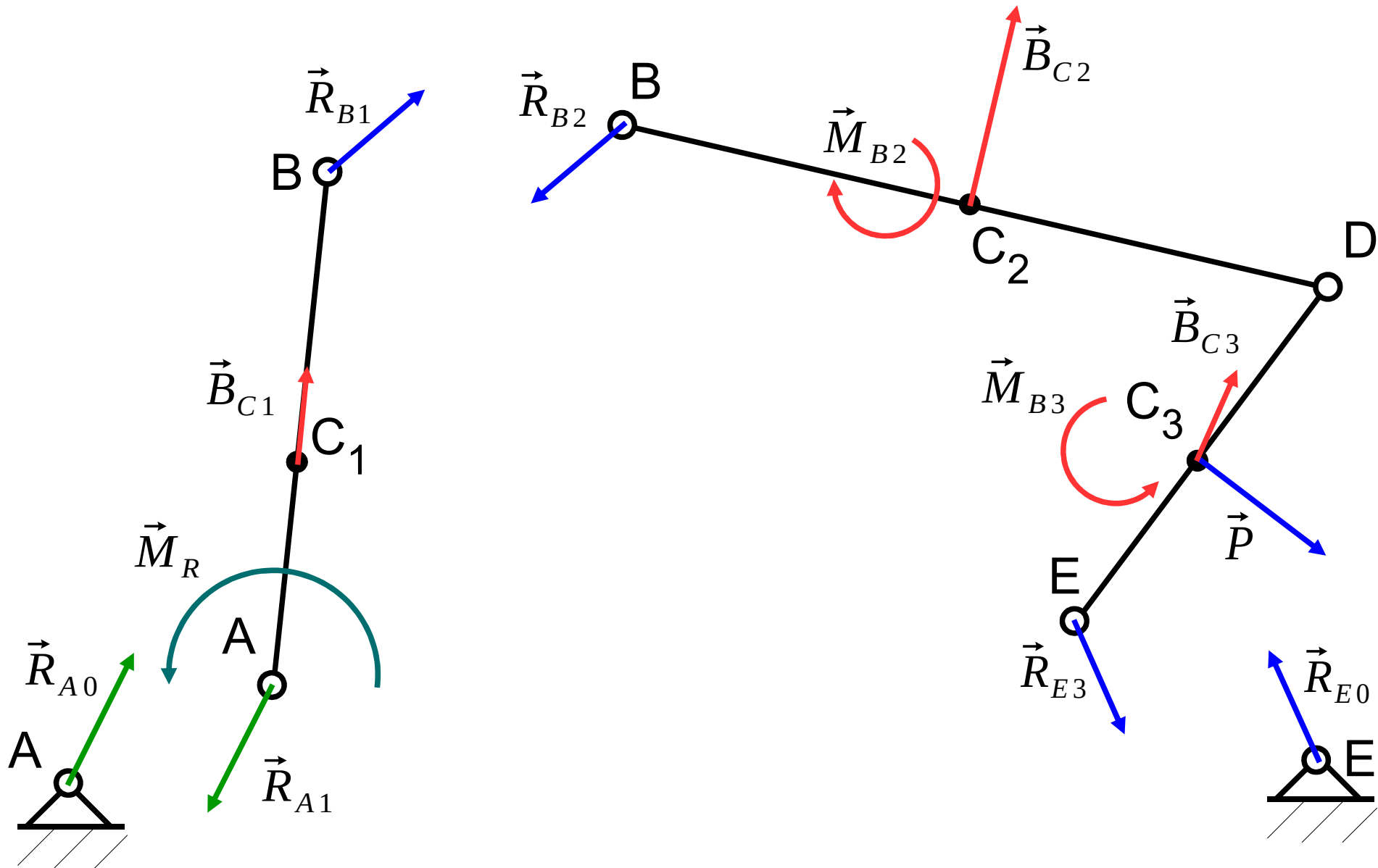
$$M_R - R_{B1} \cdot x = 0$$

człon AB: $\sum_i M_{iA} = 0$

$$M_R = \dots |R_{B1}| \cdot x$$

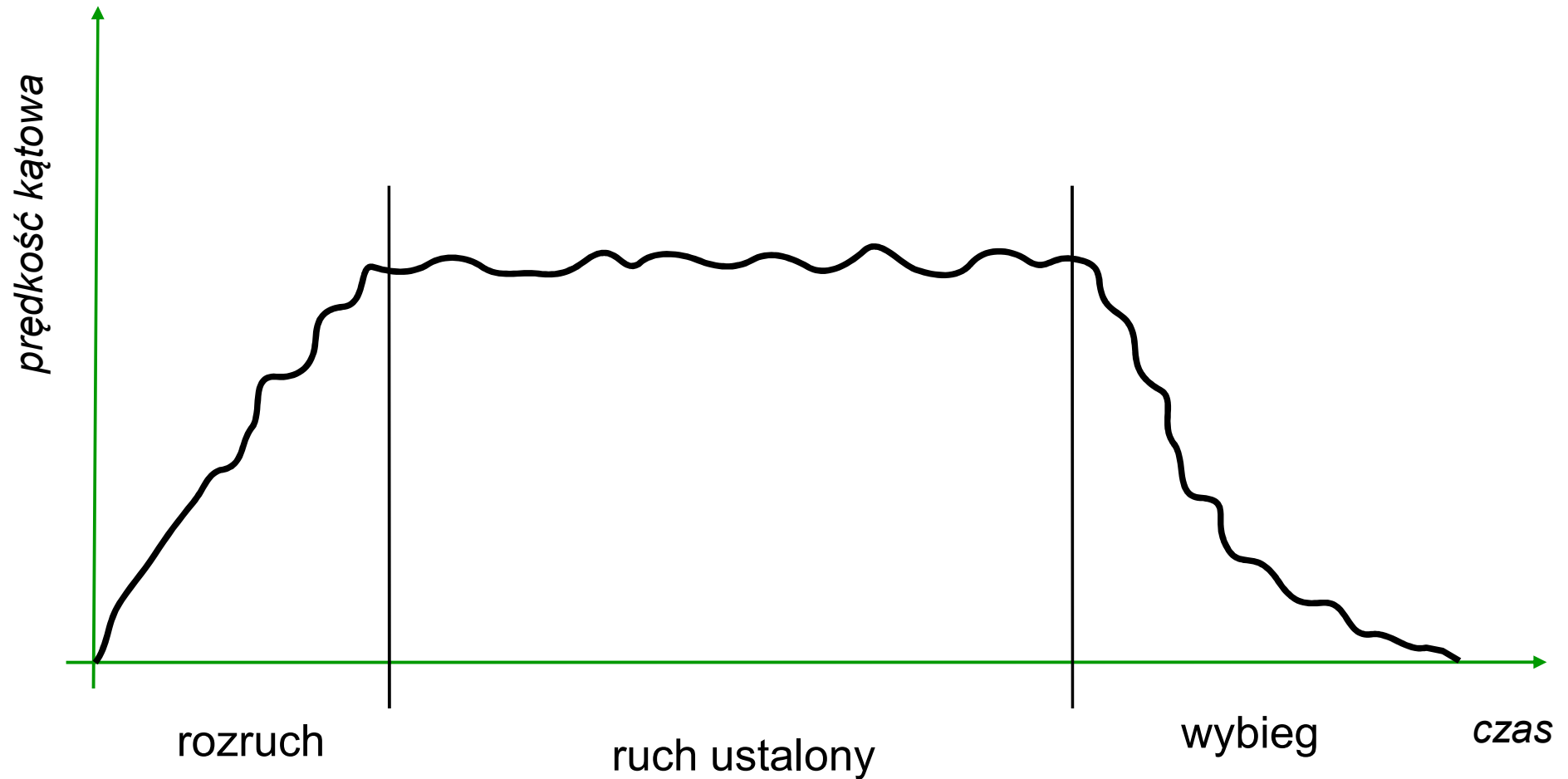
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



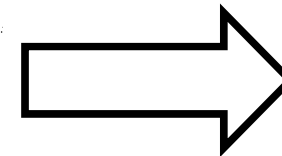
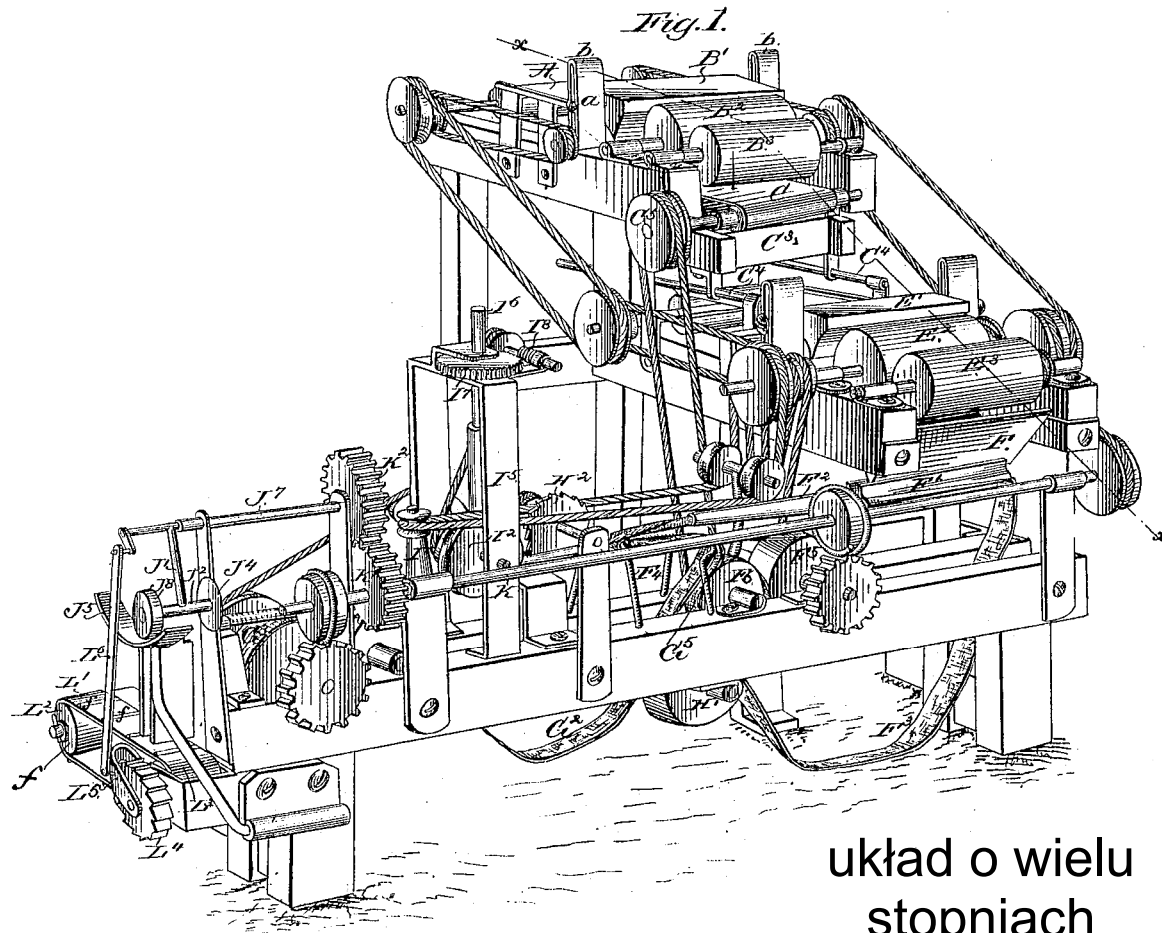
Dynamika maszyn

Etapy pracy maszyny



Redukcja mas i sił

Idea redukcji



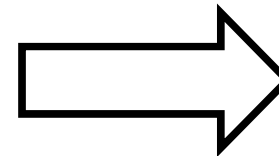
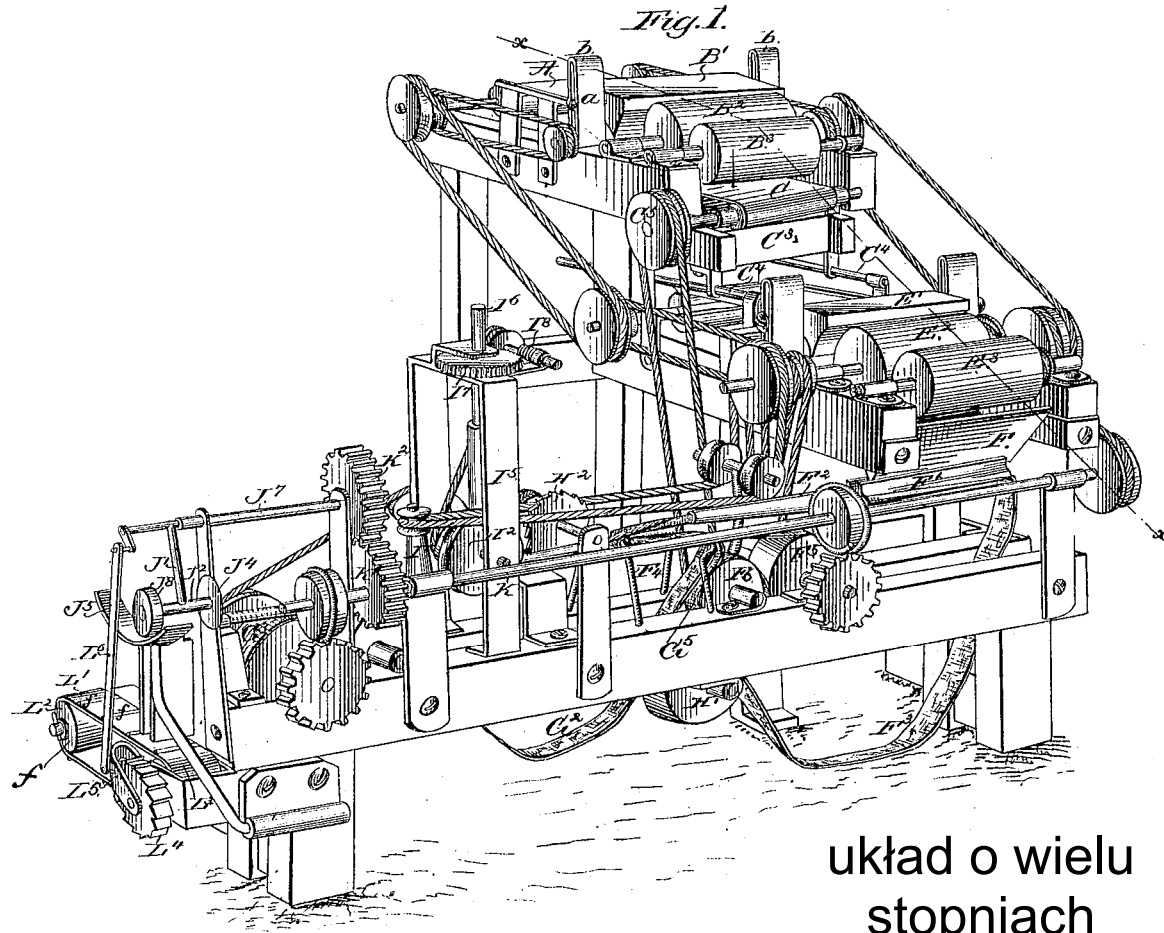
$$\begin{aligned}\ddot{x}_1(t) &= F_1(x_1, x_2, \dots, t) \\ \ddot{x}_2(t) &= F_2(x_1, x_2, \dots, t) \\ &\dots \\ \ddot{x}_n(t) &= F_n(x_1, x_2, \dots, t) \\ &+ \text{wiązania} \\ &+ \text{ograniczenia}\end{aligned}$$

układ o wielu
stopniach
swobody

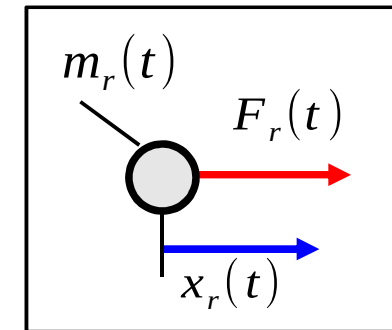
Source: James Albert Bonsack (1859 – 1924) - U.S. patent 238,640
cigarette rolling machine, invented in 1880 and patented in 1881

Redukcja mas i sił

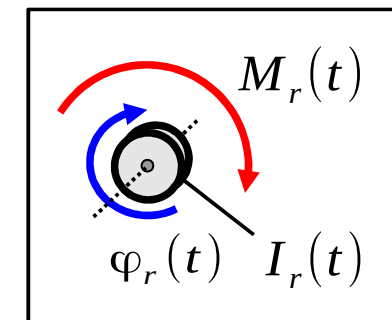
Idea redukcji



układ o jednym stopniu swobody

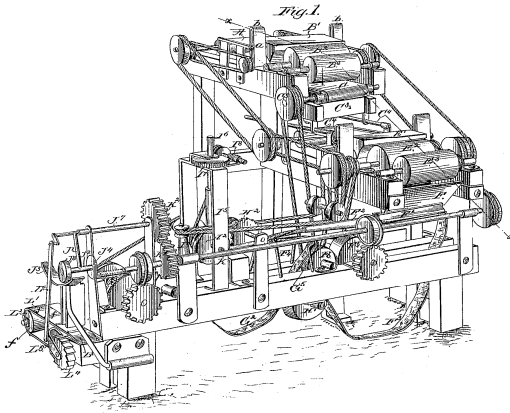


lub



Redukcja mas

Energia kinetyczna

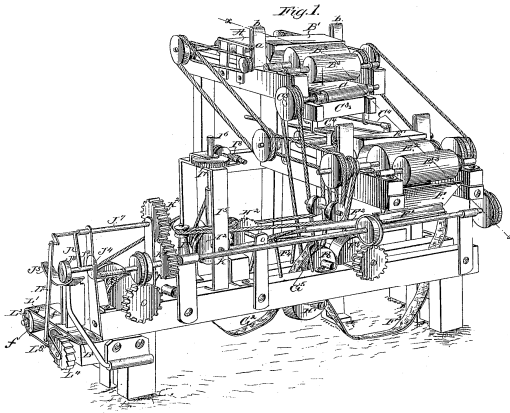


Całkowita energia kinetyczna układu

$$E_k(m_i, I_i, v_i, \omega_i)$$

Redukcja mas

Energia kinetyczna

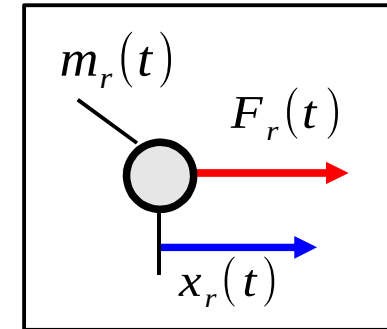


Całkowita energia kinetyczna układu

$$E_k(m_i, I_i, v_i, \omega_i)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_r v_r^2$$

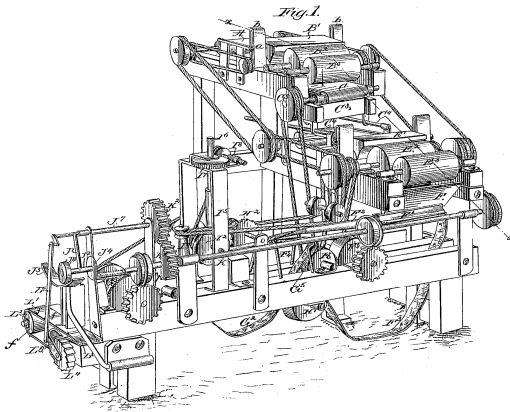
masa zredukowana



$$v_r = \frac{dx_r(t)}{dt}$$

Redukcja mas

Energia kinetyczna



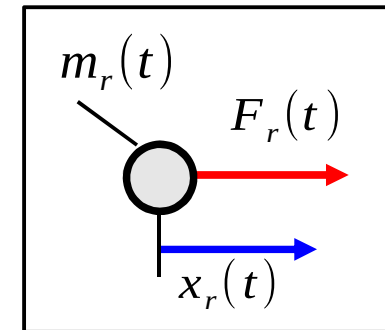
Całkowita energia kinetyczna układu

$$E_k(m_i, I_i, v_i, \omega_i)$$

lub

$$E_k = \frac{1}{2} m_r v_r^2$$

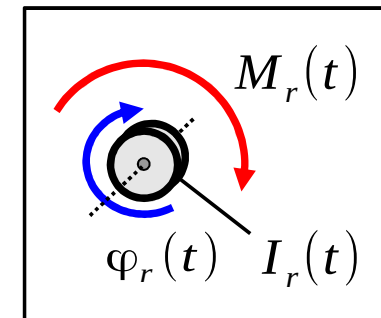
masa zredukowana



$$v_r = \frac{dx_r(t)}{dt}$$

$$E_k = \frac{1}{2} I_r \omega_r^2$$

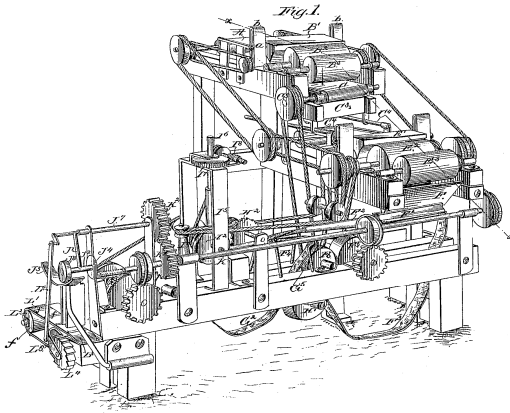
zredukowany moment bezwładności



$$\omega_r = \frac{d\varphi_r(t)}{dt}$$

Redukcja sił

Moc układu

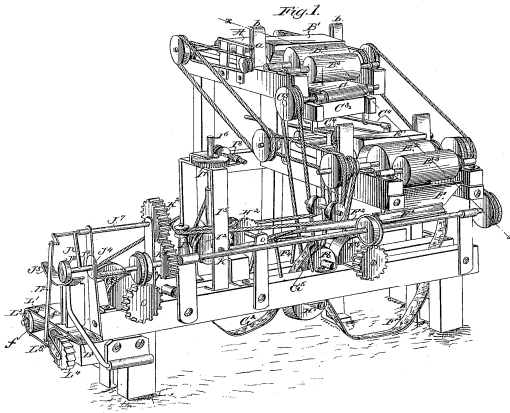


Całkowita moc układu

$$P(F_i, M_i, \omega_i, v_i, \dots)$$

Redukcja sił

Moc układu

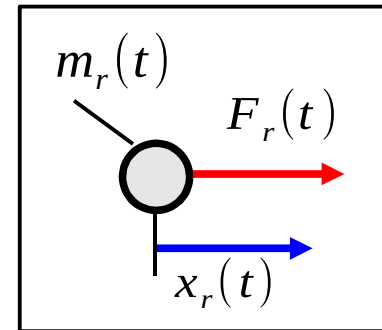


Całkowita moc układu

$$P(F_i, M_i, \omega_i, v_i, \dots)$$

$$P = F_r v_r$$

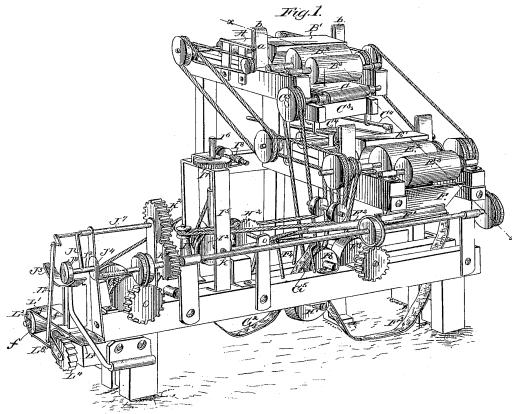
siła zredukowana



$$v_r = \frac{dx_r(t)}{dt}$$

Redukcja sił

Moc układu



Całkowita moc układu

$$P(F_i, M_i, \omega_i, v_i, \dots)$$

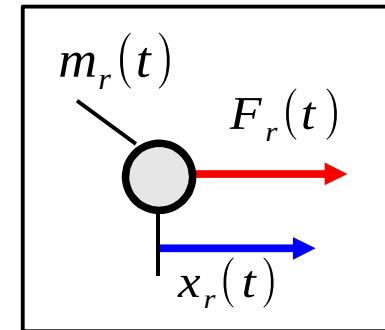
lub

$$P = F_r v_r$$

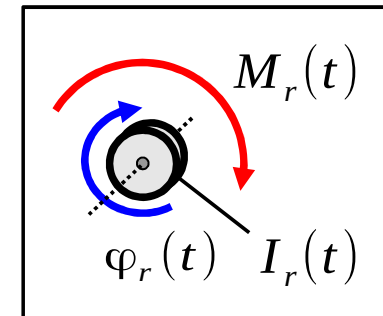
siła zredukowana

$$P = M_r \omega_r$$

moment zredukowany



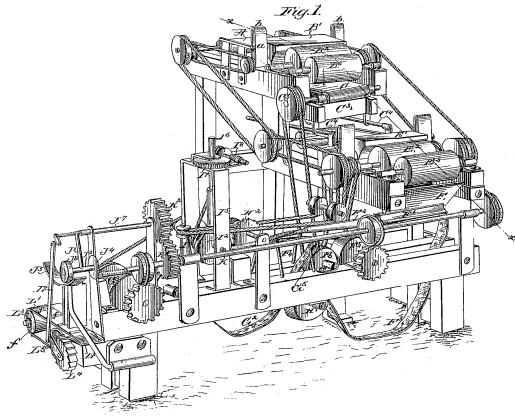
$$v_r = \frac{dx_r(t)}{dt}$$



$$\omega_r = \frac{d\varphi_r(t)}{dt}$$

Redukcja mas

Energia kinetyczna



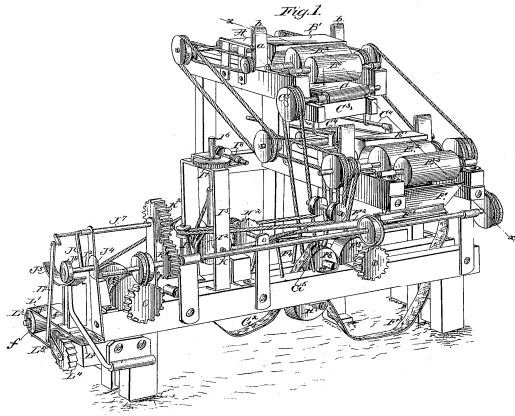
$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

n-elementów w
ruchu postępowym
k-elementów w
ruchu obrotowym

$$\frac{1}{2} m_r v_r^2 = v$$

Redukcja mas

Energia kinetyczna



$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

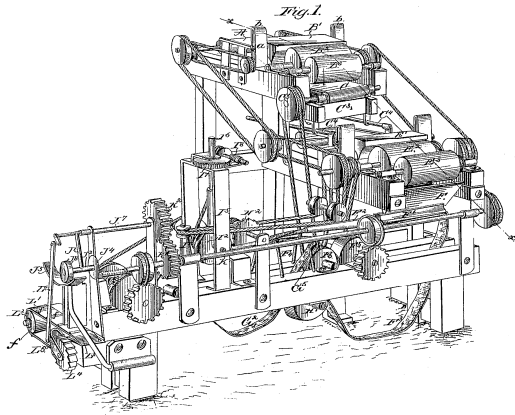
n-elementów w
ruchu postępowym
k-elementów w
ruchu obrotowym

$$\frac{1}{2} m_r v_r^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

Handwritten blue notes: $| \cdot 2 ; ; v_i^2$

Redukcja mas

Energia kinetyczna



$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

n-elementów w
ruchu postępowym
k-elementów w
ruchu obrotowym

$$\frac{1}{2} m_r v_r^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

$$\frac{1}{2} I_r \omega_r^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^k \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

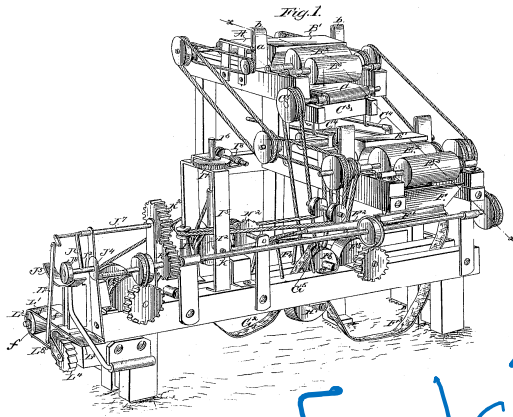
$$m_r = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{v_r^2} + \sum_{j=1}^k I_j \frac{\omega_j^2}{v_r^2}$$

$$I_r = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{\omega_r^2} + \sum_{j=1}^k I_j \frac{\omega_j^2}{\omega_r^2}$$

v_r, ω_r – dowolnie wybrane

Redukcja sił

Praca sił i momentów



$$dW = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$

$F_r \cdot ds_v$

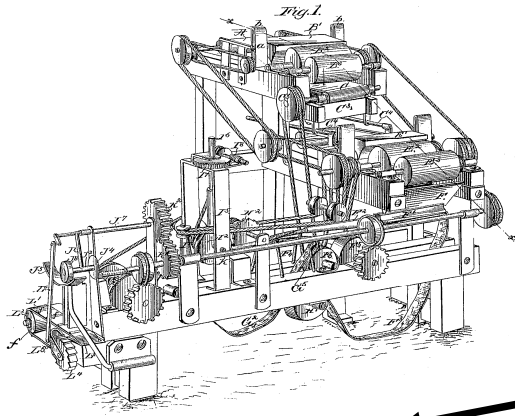
$\alpha_i - \angle (P_i, ds_i)$

n-elementów w
ruchu postępowym
k-elementów w
ruchu obrotowym

Redukcja sił

Praca sił i momentów

n-elementów w
ruchu postępowym
k-elementów w
ruchu obrotowym



$$dW = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$



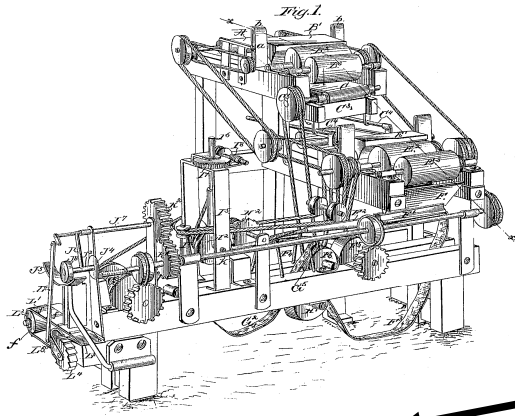
$$P_r ds_r = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$

$P_r ds_r$

Redukcja sił

Praca sił i momentów

n-elementów w
ruchu postępowym
k-elementów w
ruchu obrotowym



$$dW = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$



$$P_r ds_r = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{ds_i}{ds_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{d\varphi_j}{ds_r}$$

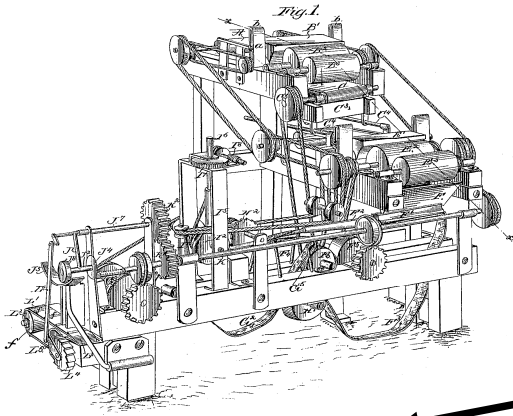
podst.

$$ds_i = V_i \cdot dt$$
$$ds_r = V_r \cdot dt$$
$$d\varphi_j = \omega_j \cdot dt$$

Redukcja sił

Praca sił i momentów

n-elementów w
ruchu postępowym
k-elementów w
ruchu obrotowym



$$dW = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$

$$P_r ds_r = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$

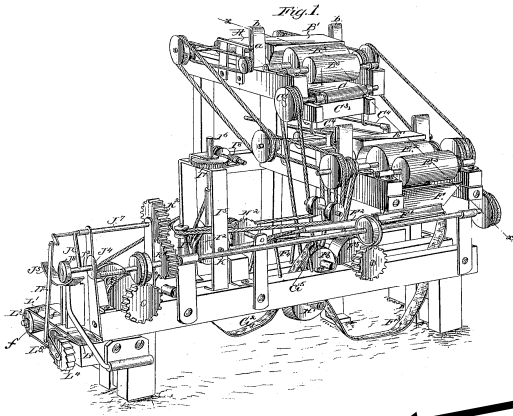
$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{ds_i}{ds_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{d\varphi_j}{ds_r}$$

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{v_i dt}{v_r dt} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{\omega_j dt}{v_r dt}$$

Redukcja sił

Praca sił i momentów

n-elementów w
ruchu postępowym
k-elementów w
ruchu obrotowym



$$dW = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$



$$P_r ds_r = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{ds_i}{ds_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{d\varphi_j}{ds_r}$$

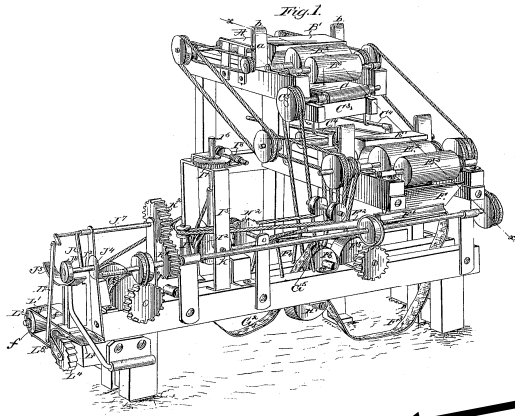
$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{v_i dt}{v_r dt} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{\omega_j dt}{v_r dt}$$

SIŁA WREDUKOWANA

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{v_i}{v_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{\omega_j}{v_r}$$

Redukcja sił

Praca sił i momentów



$$dW = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$

n-elementów w
ruchu postępowym
k-elementów w
ruchu obrotowym

$$P_r ds_r = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$

$$M_r d\varphi_r = \sum_{i=1}^n P_i ds_i \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j d\varphi_j$$

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{ds_i}{ds_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{d\varphi_j}{ds_r}$$

$$M_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{ds_i}{d\varphi_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{d\varphi_j}{d\varphi_r}$$

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{v_i dt}{v_r dt} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{\omega_j dt}{v_r dt}$$

$$M_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{v_i dt}{\omega_r dt} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{\omega_j dt}{\omega_r dt}$$

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{v_i}{v_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{\omega_j}{v_r}$$

$$M_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{v_i}{\omega_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{\omega_j}{\omega_r}$$

Redukcja mas i momentów bezwładności

$$m_r = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{v_r^2} + \sum_{j=1}^k I_j \frac{\omega_j^2}{v_r^2}$$

$$I_r = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{\omega_r^2} + \sum_{j=1}^k I_j \frac{\omega_j^2}{\omega_r^2}$$

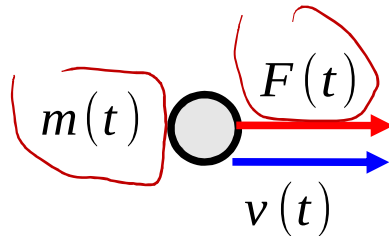
Redukcja sił i momentów sił

$$P_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{v_i}{v_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{\omega_j}{v_r}$$

$$M_r = \sum_{i=1}^n P_i \frac{v_i}{\omega_r} \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^k M_j \frac{\omega_j}{\omega_r}$$

Równanie ruchu maszyny

dla ruchu postępowego



$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$dE_k = dW$$

$$d\left(\frac{1}{2} m(t) v(t)^2\right) = F(t) \cdot dx$$

$$\frac{1}{2} dm(t) \cdot v(t)^2 + \frac{1}{2} m(t) \cdot 2v(t) dv(t) = F(t) dx$$

$$\frac{1}{2} dm(t) v(t) \frac{dx(t)}{dt} + m(t) \frac{dx(t)}{dt} dv(t) = F(t) dx$$

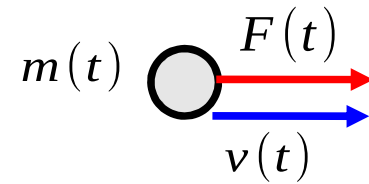
$$\left\| \frac{dm(t)}{dt} \frac{v(t)}{2} + m(t) \frac{dv(t)}{dt} = F(t) \right\|$$

dla $m = \text{const.}$

$$m \frac{dv(t)}{dt} = F(t)$$

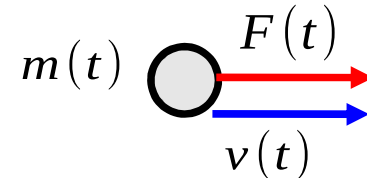
Równanie ruchu maszyny

dla ruchu postępowego



Równanie ruchu maszyny

dla ruchu postępowego



$$dE_k = dW$$

$$d\left(\frac{1}{2}m(t)v(t)^2\right) = F(t)dx$$

$$\frac{1}{2}dm(t)v(t)^2 + m(t)v(t)dv(t) = F(t)dx$$

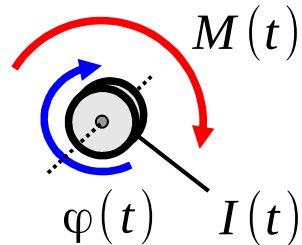
$$\frac{1}{2}dm(t)v(t)\frac{dx(t)}{dt} + m(t)\frac{dx(t)}{dt}dv(t) = F(t)dx$$

$$\frac{dm(t)}{dt}\frac{v(t)}{2} + m\frac{dv(t)}{dt} = F(t)$$

jeżeli $m = \text{const.} \Rightarrow m\frac{dv(t)}{dt} = P(t)$ lub $m\ddot{x}(t) = F(t)$

Równanie ruchu maszyny

dla ruchu obrotowego



$$dE_k = dW$$

$$d\left(I \frac{\omega(t)^2}{2}\right) = M(t) d\varphi$$

...

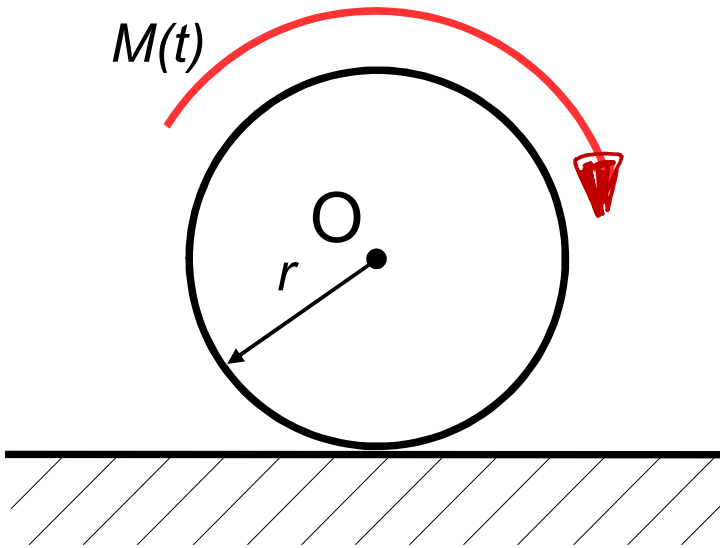
...

$$\frac{dI(t)}{dt} \frac{\omega(t)}{2} + I(t) \frac{d\omega(t)}{dt} = M(t)$$

jeżeli $I = \text{const.} \Rightarrow I \frac{d\omega(t)}{dt} = M(t)$ lub $I \ddot{\varphi}(t) = M(t)$

Redukcja mas i sił

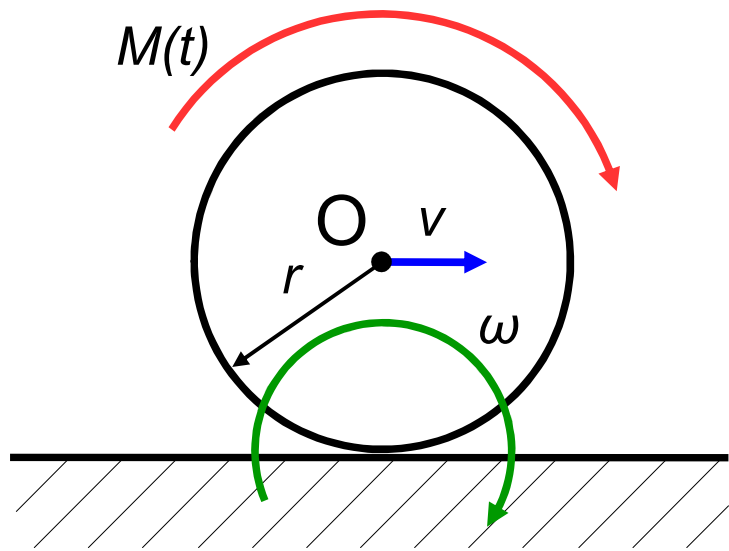
Koło toczące się bez poślizgu



Dane: m – masa koła,
 I_O – moment bezwładności względem punktu O,
 r – promień koła,
 $M(t)$ – moment napędzający.

Redukcja mas i sił

Koło toczące się bez poślizgu



Dane: m – masa koła,
 I_O – moment bezwładności względem punktu O,
 r – promień koła,
 $M(t)$ – moment napędzający.

$v(t)$ – prędkość liniowa środka koła,
 $\omega(t)$ – prędkość kąтова koła.

$$v(t) = \omega(t) \cdot r$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2 = E_k(v, \omega)$$

$$E_k(v) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_O \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_O}{r^2} \right) v^2$$

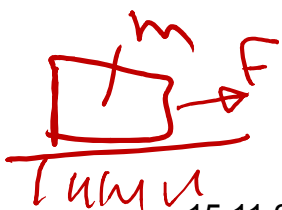
$$m_r = m + \frac{I_O}{r^2} = \text{const.}$$

Moc: $P = M(t) \cdot \omega(t) = M(t) \frac{v(t)}{r}$

$$F_r = \frac{M(t)}{r}$$

$$m_r \frac{dv}{dt} = F_r$$

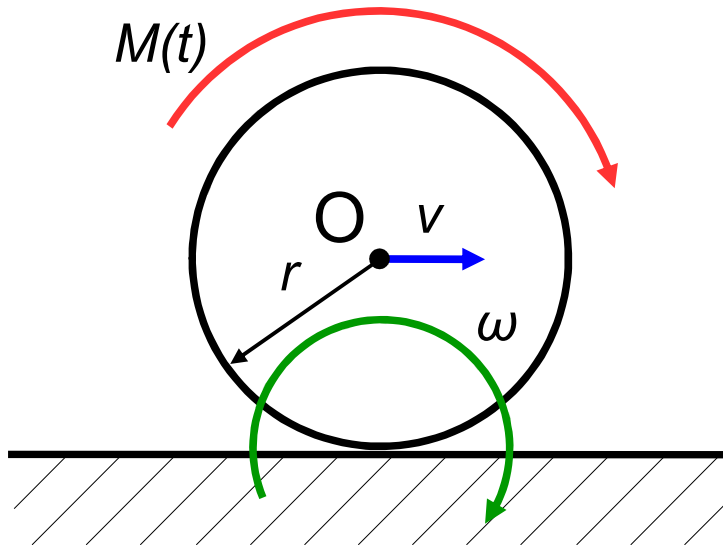
$$\left(m + \frac{I_O}{r^2} \right) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{M(t)}{r}$$



$$m \frac{dv}{dt} = F$$

Redukcja mas i sił

Koło toczące się bez poślizgu

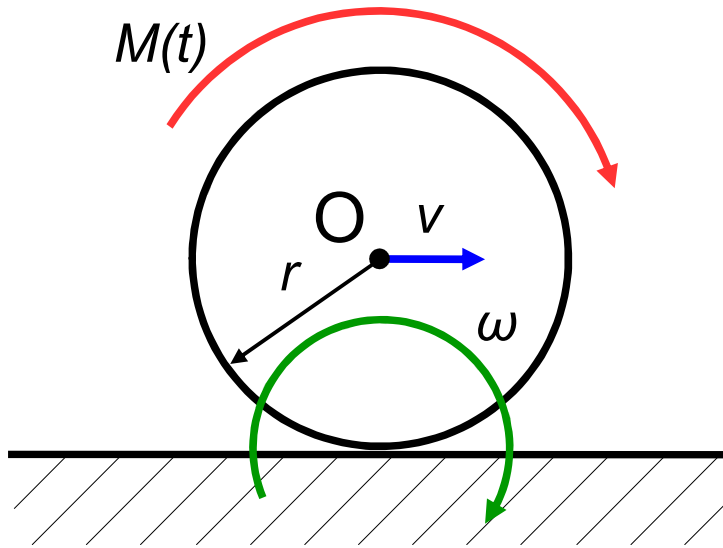


Dane: m – masa koła,
 I_O – moment bezwładności względem punktu O,
 r – promień koła,
 $M(t)$ – moment napędzający.

$v(t)$ – prędkość liniowa środka koła,
 $\omega(t)$ – prędkość kątowa koła.

Redukcja mas i sił

Koło toczące się bez poślizgu



Dane: m – masa koła,
 I_O – moment bezwładności względem punktu O,
 r – promień koła,
 $M(t)$ – moment napędzający.

$v(t)$ – prędkość liniowa środka koła,
 $\omega(t)$ – prędkość kątowa koła.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2 \quad \text{ale } v = \omega r$$

$$P = M \omega$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_O \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2} \left(m + \frac{I_O}{r^2} \right) v^2 = \frac{1}{2} m_r v^2$$

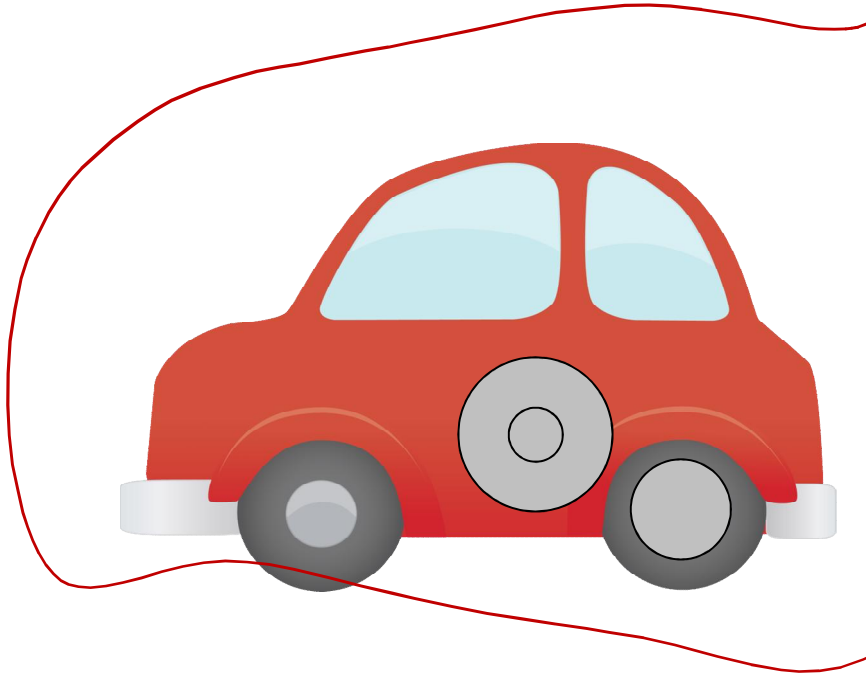
$$P = M \frac{v}{r} = \frac{M}{r} v = F_r v$$

$$m_r = m + \frac{I_O}{r^2} = \text{const.}$$

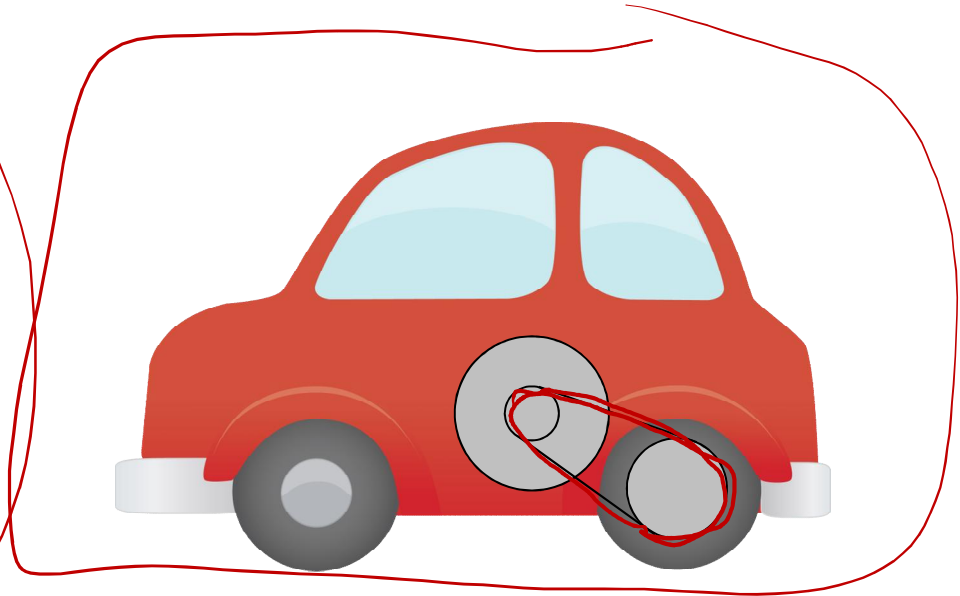
$$F_r = \frac{M}{r}$$

$$m_r \frac{dv}{dt} = F_r \Rightarrow \left(m + \frac{I_O}{r^2} \right) \frac{dv(t)}{dt} = \frac{M(t)}{r}$$

Redukcja mas i sił



m_1 – masa całkowita
 m_{r1} – masa zredukowana



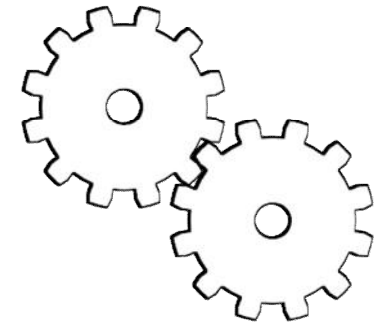
m_2 – masa całkowita
 m_{r2} – masa zredukowana



$$m_1 = m_2$$

$$m_{r1} < m_{r2}$$

Przełożenie kinematyczne przekładni



Definicja	Wartości dla reduktora	Wartości dla multiplikatora
$i = \frac{Z_{we}}{Z_{wy}} = \frac{\omega_{wy}}{\omega_{we}}$	< 1	> 1
$i = \frac{Z_{wy}}{Z_{we}} = \frac{\omega_{we}}{\omega_{wy}}$	> 1	< 1

$Z_{we/wy}$ - liczba zębów koła wejściowego/wyjściowego

Redukcja mas i sił

Przykład 1

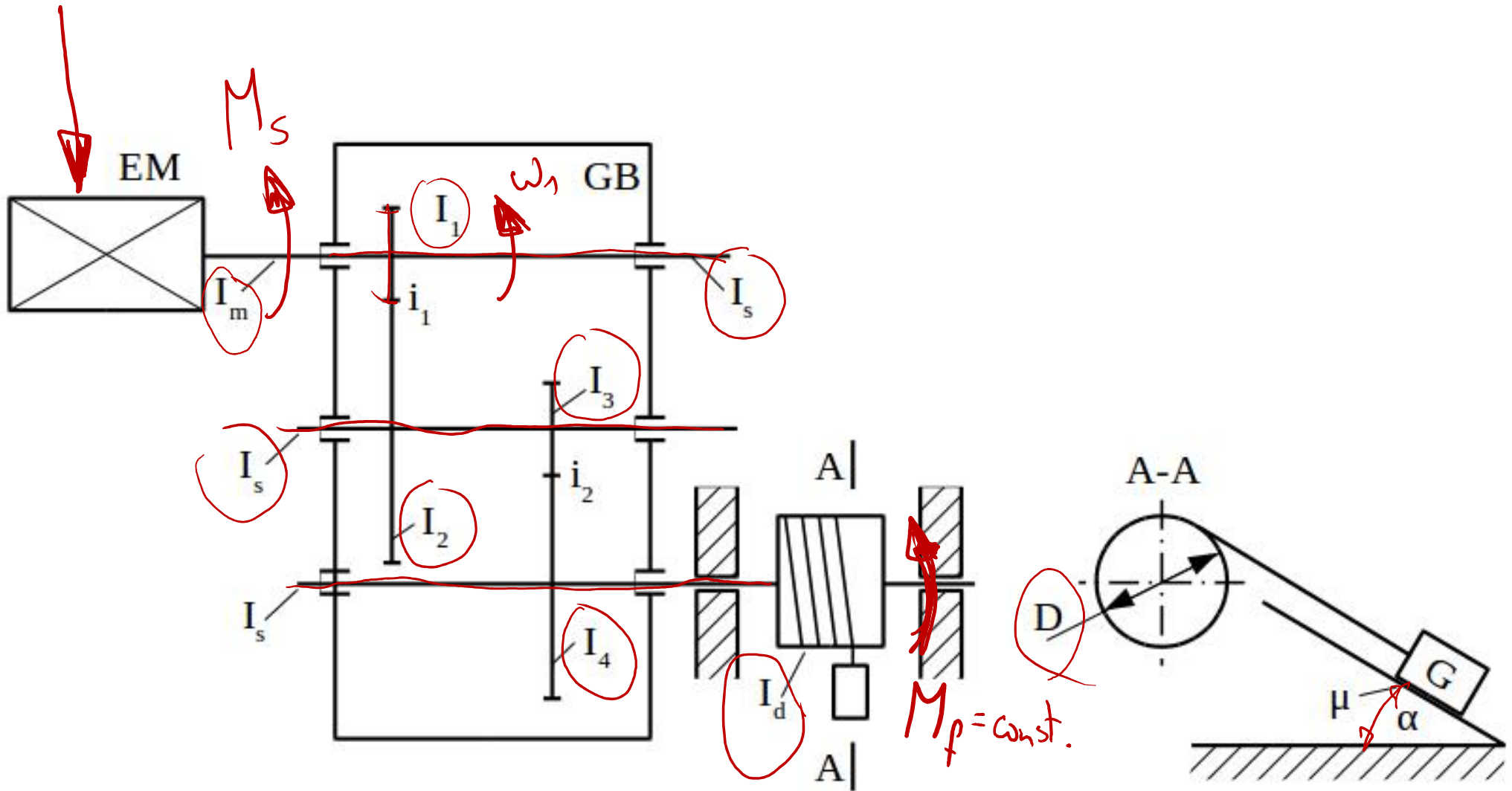
Zbadajmy proces rozruchu wciągarki bębnowej składającej się z:

- silnika elektrycznego (EM) generującego moment będący funkcją prędkości kątowej wału silnika ω według zależności: $M=A-B\omega$, gdzie A i B są danymi stałymi parametrami; moment bezwładności wału wyjściowego silnika wynosi I_m ;
- przekładni dwustopniowej (reduktora) o zadanych momentach bezwładności kół I_1, I_2, I_3, I_4 i momentach bezwładności wałów wynoszących I_s ; przełożenia przekładni zadane są jako $i_1=\omega_2/\omega_1$ oraz $i_2=\omega_3/\omega_2$;
- bębna o średnicy D i momencie bezwładności I_d ; łożyskowanie bębna generuje stały moment oporów toczenia M_f ;
- równi pochyłej o kącie α względem poziomu;
- obiektu wciąganego o ciężarze G ; tarcie między obiektem a równią opisane jest modelem tarcia suchego ze współczynnikiem μ .

$$M_s = A - B \cdot \omega_1$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



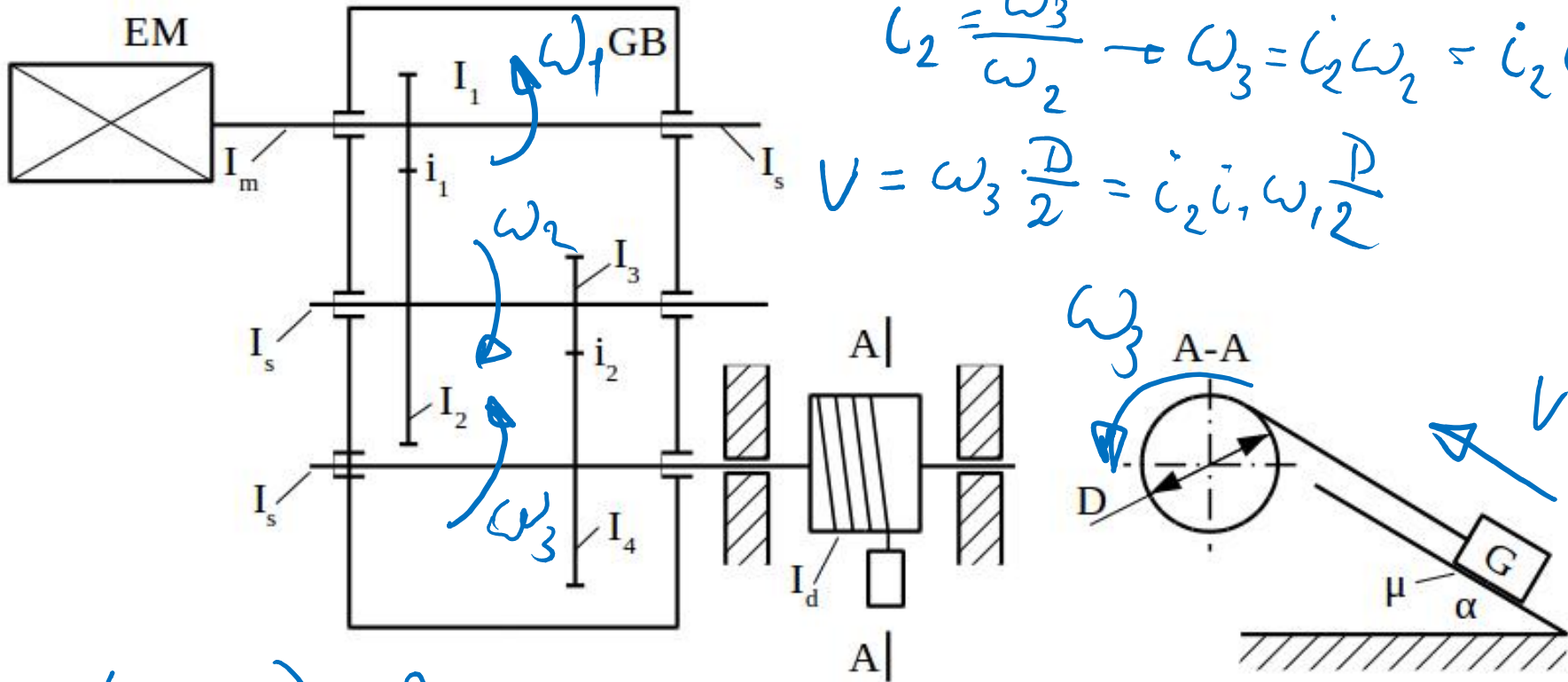
Redukcja mas i sił

Przykład 1

$$i_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \rightarrow \omega_2 = i_1 \omega_1$$

$$i_2 = \frac{\omega_3}{\omega_2} \rightarrow \omega_3 = i_2 \omega_2 = i_2 i_1 \omega_1$$

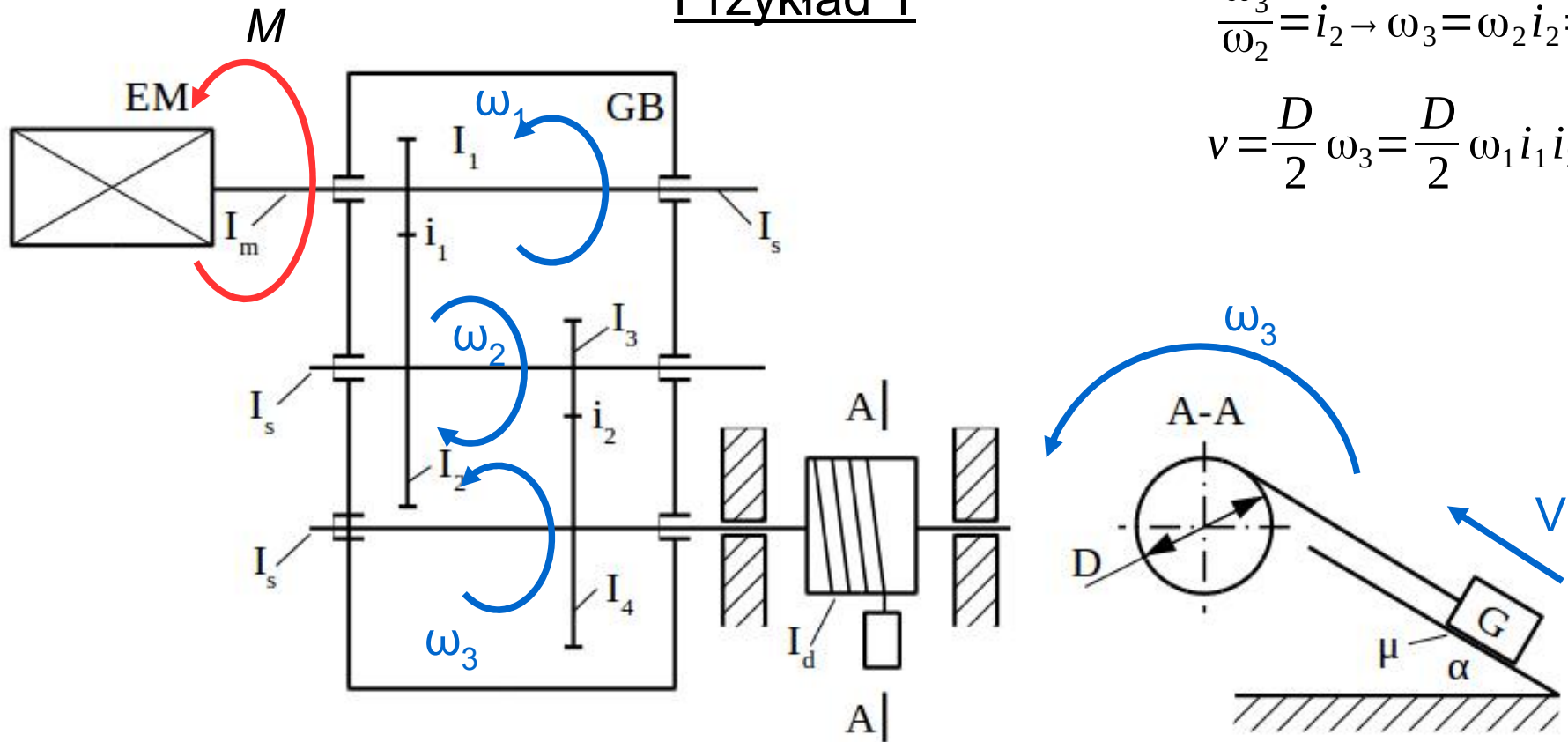
$$V = \omega_3 \cdot \frac{D}{2} = i_2 i_1 \omega_1 \frac{D}{2}$$



$$E_k = \frac{1}{2} (I_m + I_1 + I_s) \omega_1^2 + \frac{1}{2} (I_s + I_2 + I_3) \omega_2^2 + \frac{1}{2} (I_s + I_4 + I_d) \omega_3^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} V^2 \rightarrow E_k(\omega_1)$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



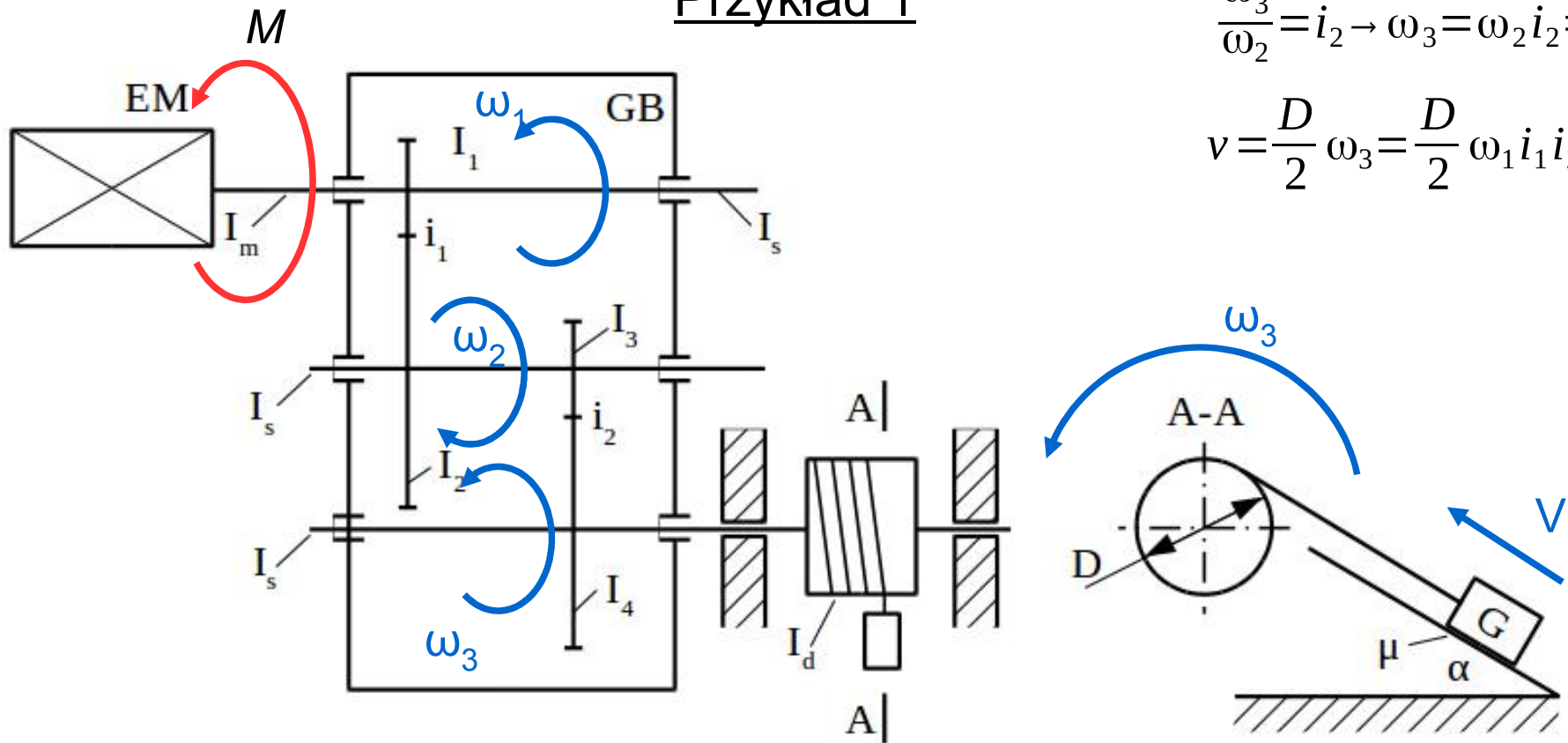
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = i_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_2 i_2 = \omega_1 i_1 i_2$$

$$v = \frac{D}{2} \omega_3 = \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 i_1$$

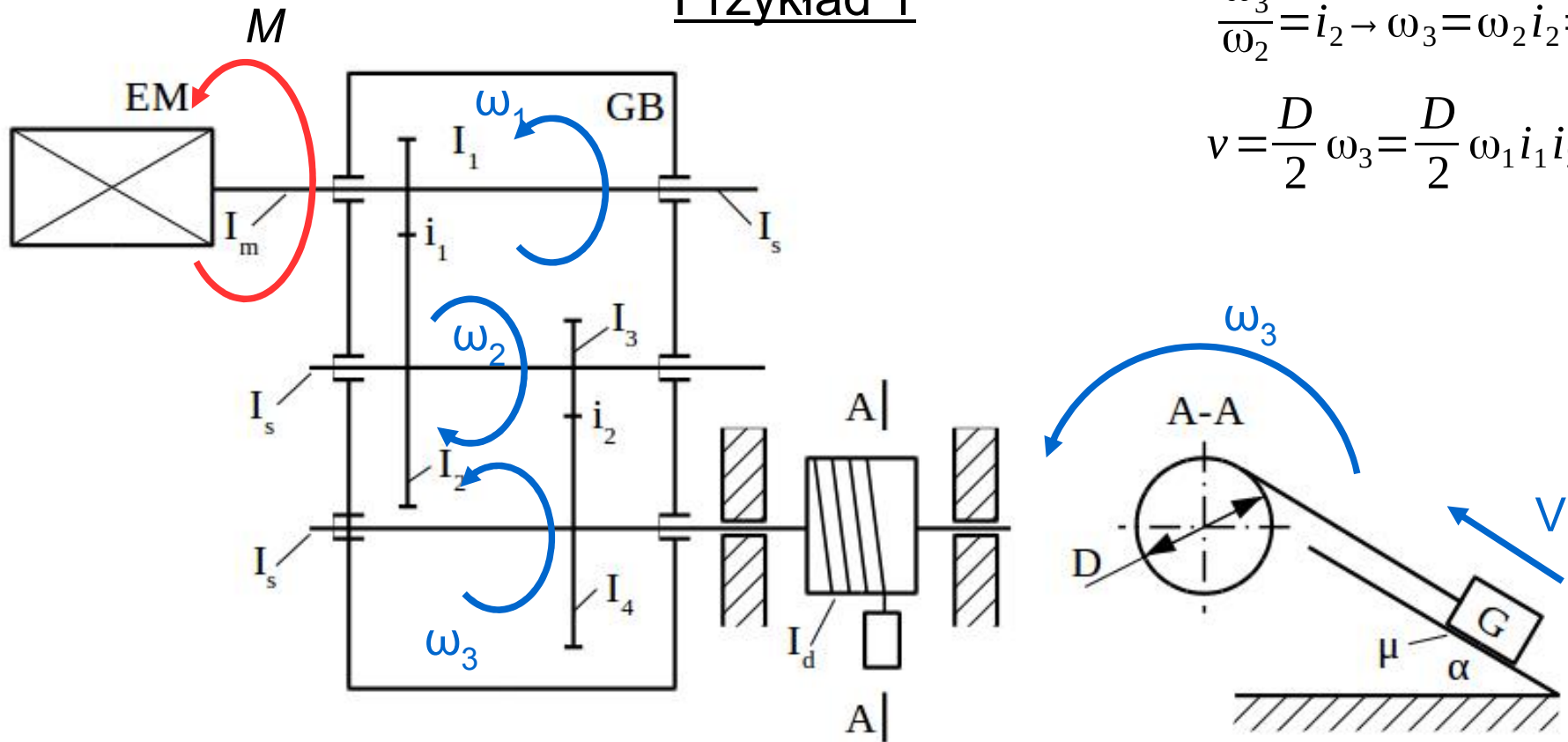
$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = i_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_2 i_2 = \omega_1 i_1 i_2$$

$$v = \frac{D}{2} \omega_3 = \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

$$E_K = \frac{1}{2} (I_m + I_1 + I_s) \omega_1^2 + \frac{1}{2} (I_2 + I_3 + I_s) \omega_2^2 + \frac{1}{2} (I_4 + I_s + I_d) \omega_3^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = i_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_2 i_2 = \omega_1 i_1 i_2$$

$$v = \frac{D}{2} \omega_3 = \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

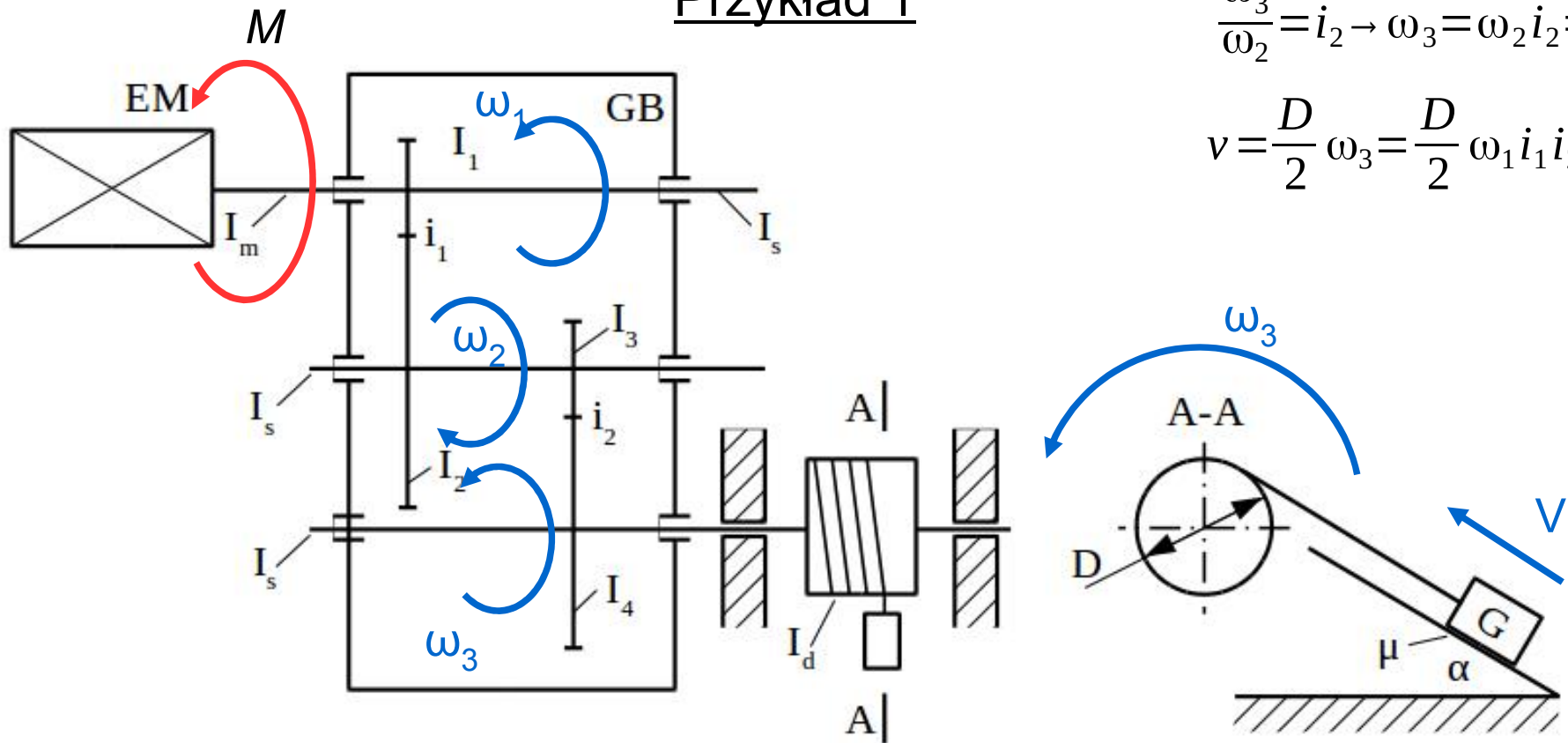
$$T = \frac{1}{2} (I_m + I_1 + I_s) \omega_1^2 + \frac{1}{2} (I_2 + I_3 + I_s) \omega_2^2 + \frac{1}{2} (I_4 + I_s + I_d) \omega_3^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} v^2$$

$$T = \frac{1}{2} (I_m + I_1 + I_s) \omega_1^2 + \frac{1}{2} (I_2 + I_3 + I_s) \omega_1^2 i_1^2 + \frac{1}{2} (I_4 + I_d + I_s) \omega_1^2 i_1^2 i_2^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} \frac{D^2}{4} \omega_1^2 i_1^2 i_2^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left[(I_m + I_1 + I_s) + (I_2 + I_3 + I_s) i_1^2 + (I_4 + I_d + I_s) i_1^2 i_2^2 + \frac{G}{g} \frac{D^2}{4} i_1^2 i_2^2 \right] \omega_1^2$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = i_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_2 i_2 = \omega_1 i_1 i_2$$

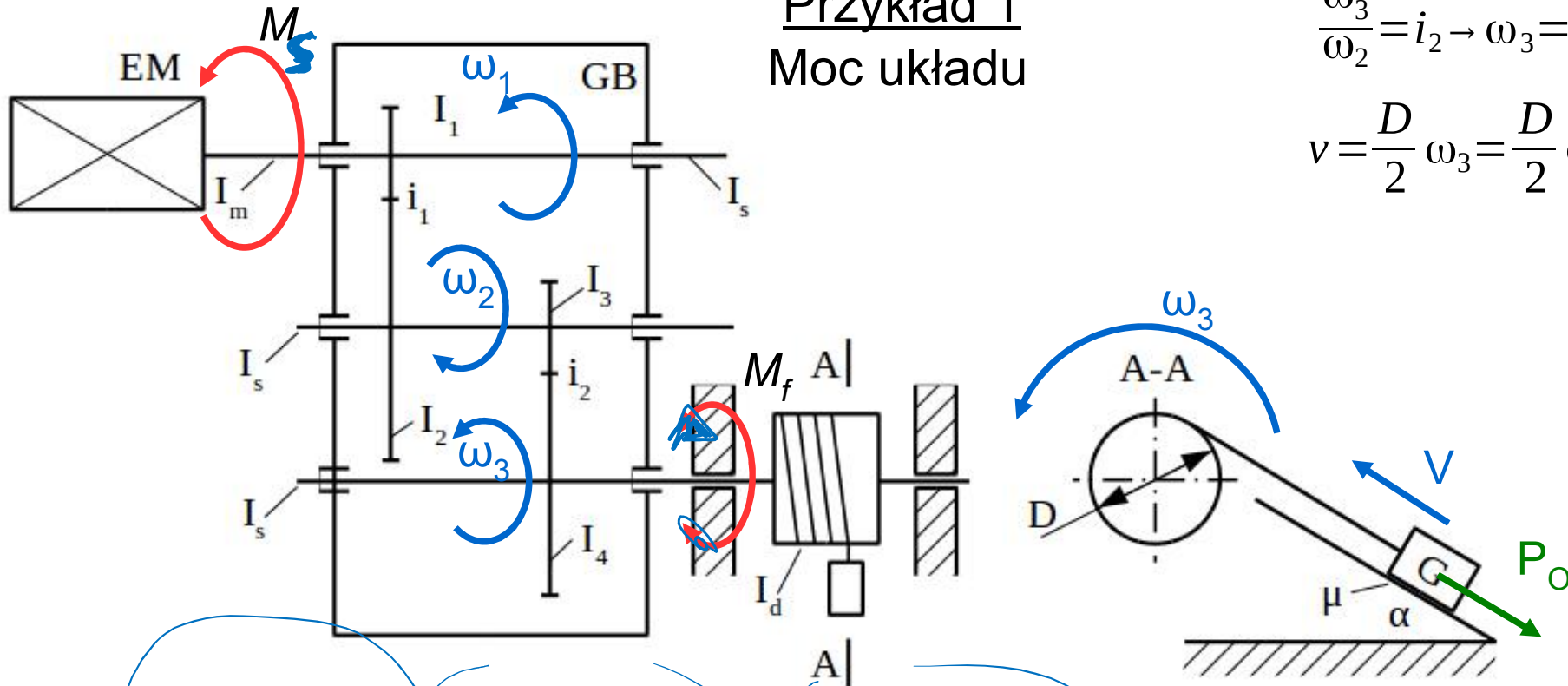
$$v = \frac{D}{2} \omega_3 = \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

Zredukowany moment bezwładności

$$I_R = I_m + I_1 + I_s + (I_2 + I_3 + I_s) i_1^2 + (I_4 + I_d + I_s) i_1^2 i_2^2 + \frac{G}{g} \frac{D^2}{4} i_1^2 i_2^2$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1
Moc układu



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 i_1$$

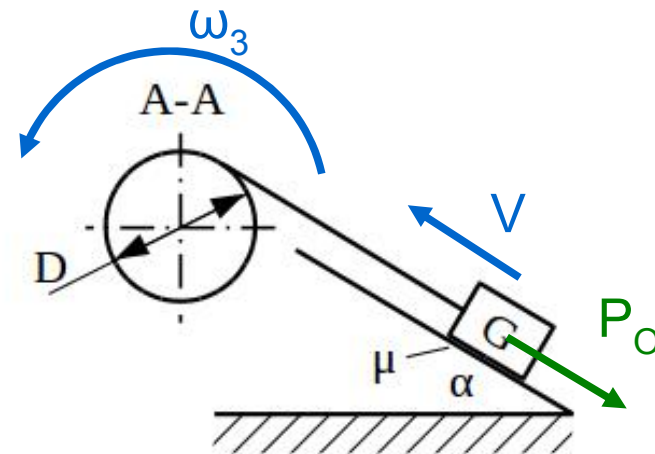
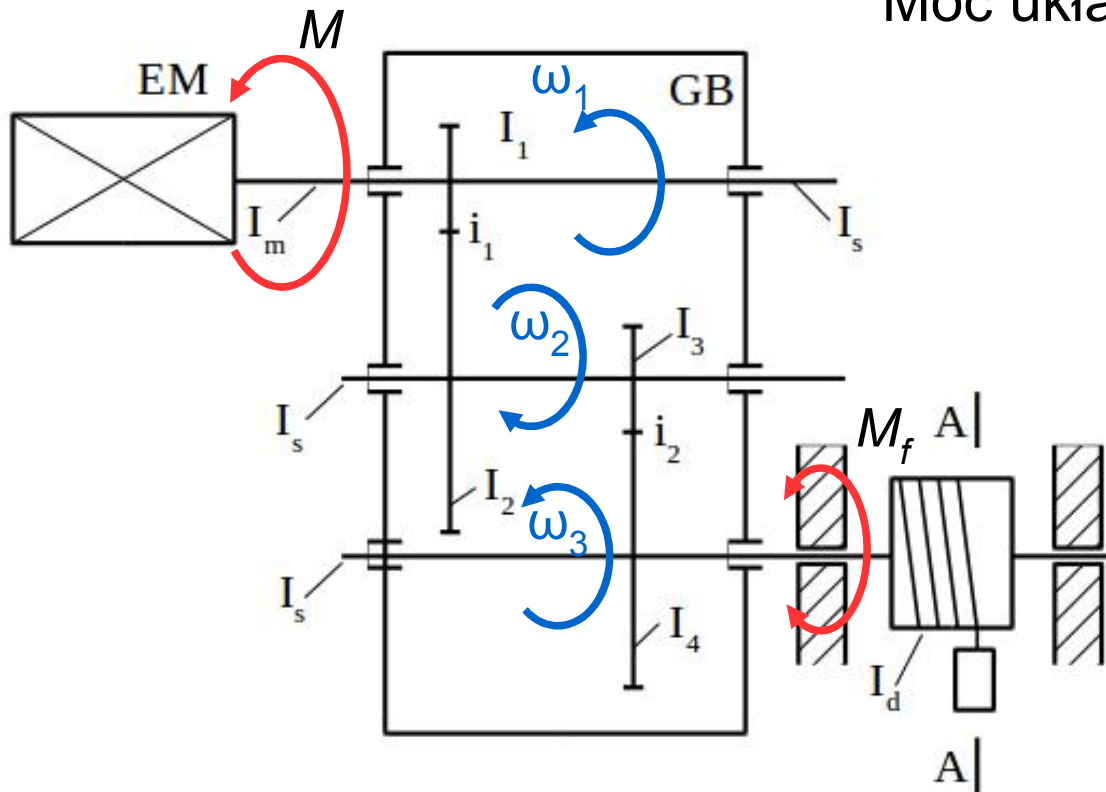
$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = i_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_2 i_2 = \omega_1 i_1 i_2$$

$$v = \frac{D}{2} \omega_3 = \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

$$P = M_s \cdot \omega_1 - M_f \cdot \omega_3 - P_0 \cdot v$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1 Moc układu



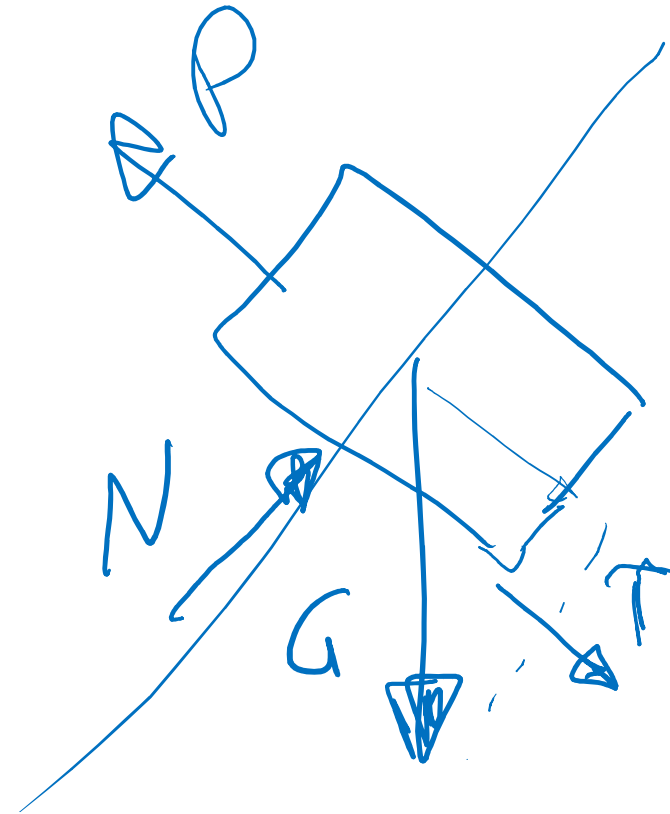
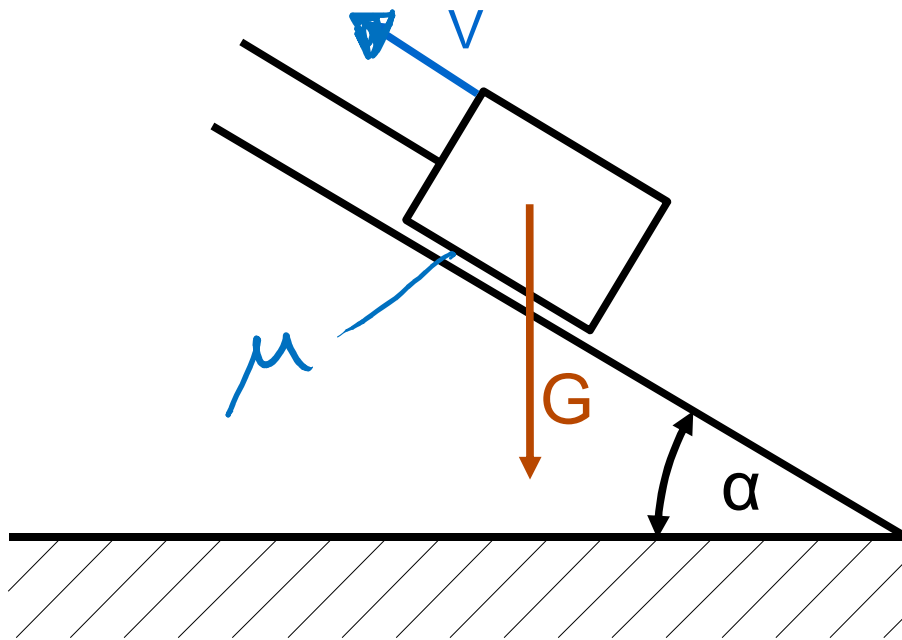
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = i_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_2 i_2 = \omega_1 i_1 i_2$$

$$v = \frac{D}{2} \omega_3 = \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



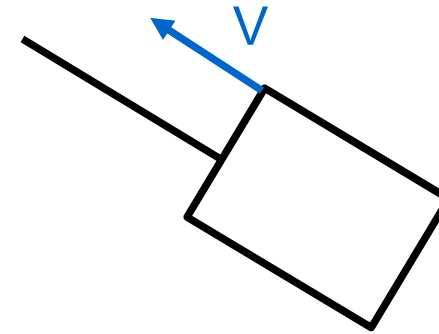
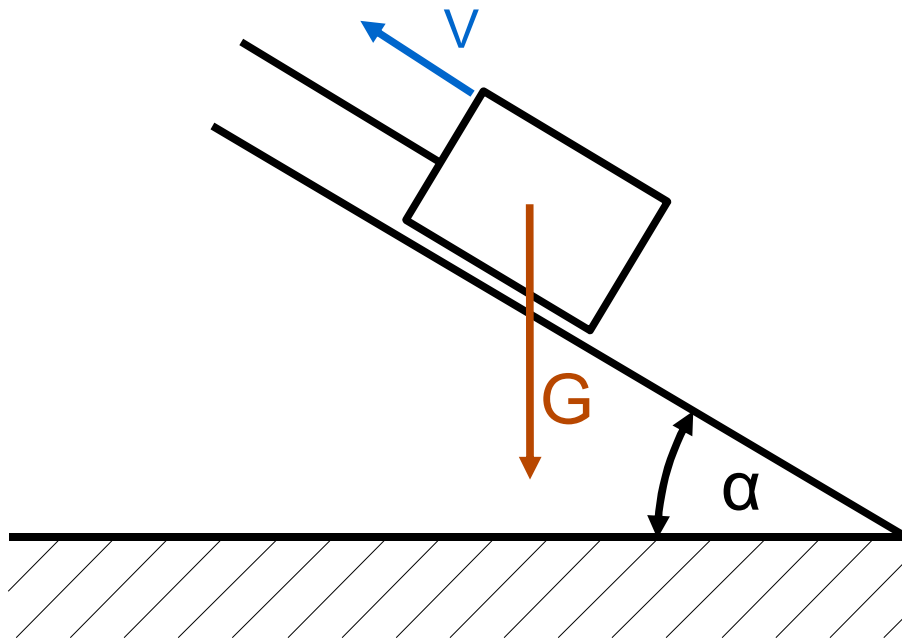
$$P = G \sin \alpha + T = G \sin \alpha + \mu N$$

$$P = G \sin \alpha + \mu G \cos \alpha$$

$$N = G \cos \alpha$$

Redukcja mas i sił

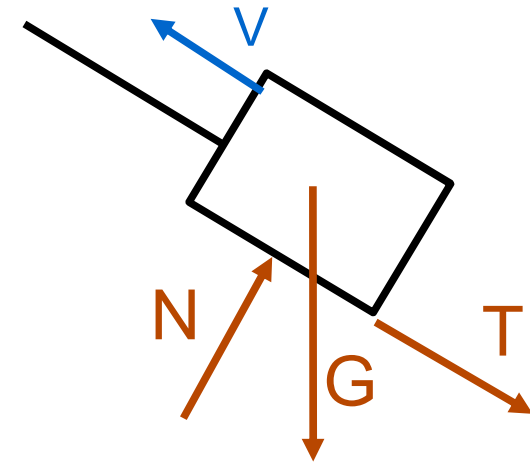
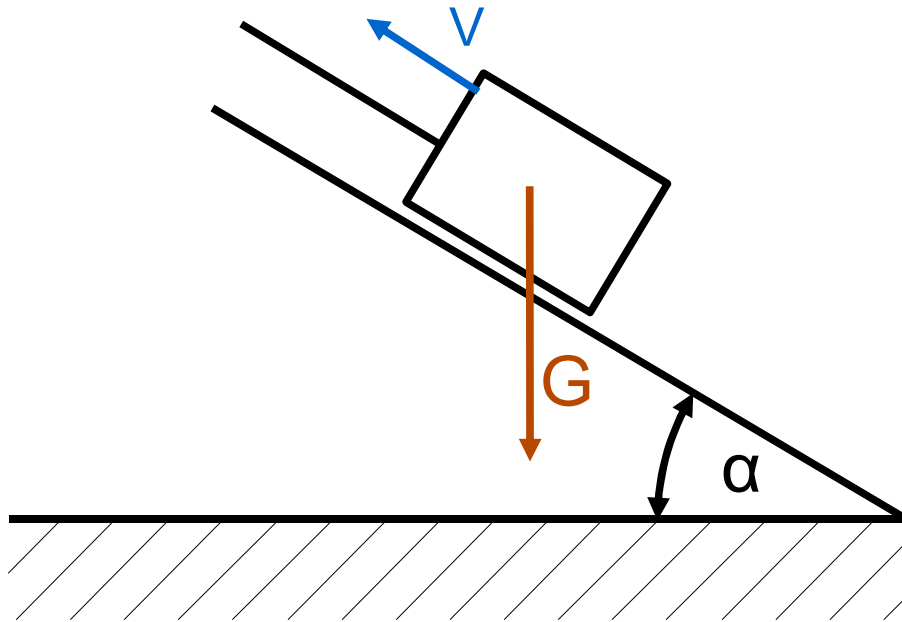
Przykład 1



$$P_o =$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



$$P_O = T + G \sin \alpha = \mu N + G \sin \alpha = \mu G \cos \alpha + G \sin \alpha$$

2. jaka p_{max}?

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Moc

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_3 - (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) v$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_3 - (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) v$$

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_1 i_1 i_2 - (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$


Redukcja mas i sił

Przykład 1

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_3 - (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) v$$

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_1 i_1 i_2 - (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

$$N = \left[M_s - M_f i_1 i_2 - (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) \frac{D}{2} i_1 i_2 \right] \omega_1$$



Redukcja mas i sił

Przykład 1

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_3 - (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) v$$

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_1 i_1 i_2 - (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

$$N = \left[M_s - M_f i_1 i_2 - (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) \frac{D}{2} i_1 i_2 \right] \omega_1$$

$$M_R = \underbrace{M_s}_{\text{zredukowany moment napędowy (czynny)}} - \underbrace{\left(M_f i_1 i_2 + (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) \frac{D}{2} i_1 i_2 \right)}_{\text{zredukowany moment oporów (bierny)}}$$

zredukowany moment
napędowy (czynny)

zredukowany moment
oporów (bierny)

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Moment zredukowany

$$M_R = M_C - M_B$$

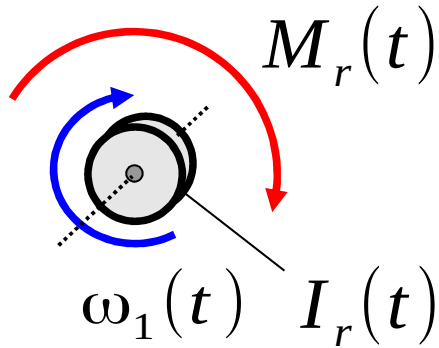
zredukowany moment
napędowy (czynny)

zredukowany moment
oporów (bierny)

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Rozruch maszyny



$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = M_R$$

$$M_R = A - B\omega_1 - M_B$$

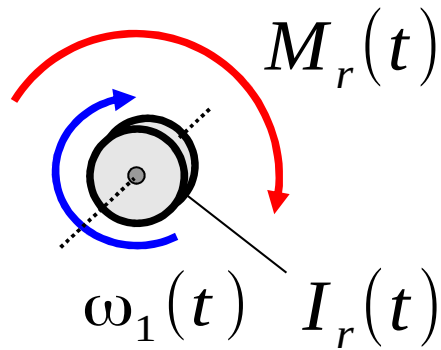
$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = A - B\omega_1 - M_B$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{B}{I_R} \omega_1 = \frac{A - M_B}{I_R}$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Rozruch maszyny



$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = M_R$$

$$M_R = A - B\omega_1 - M_B$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{B}{I_R} \omega_1 = \frac{A - M_B}{I_R}$$

stałe: A, M_B, B, I_R