Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Teoria maszyn i podstawy automatyki

semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 14

Współczesne problemy teorii sterowania. Opis układów dynamicznych w przestrzeni stanu.

Współczesna teoria sterowania

Klasyczna teoria sterowania	Współczesna teoria sterowania (od około 1950)
układy o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO)	układy o wielu wejściach i wyjściach
układy liniowe	często układy nieliniowe
układy niezależne od czasu	układy zależne od czasu
opis za pomocą transmitancji	opis równaniami stanu
analiza w dziedzinie czasu i częstości	analiza w dziedzinie czasu
zainteresowanie odpowiedzią układu	zainteresowanie stanem układu

Opis układów w przestrzeni stanu

Opis w przestrzeni stanów to sposób formułowania modelu matematycznego układu o wielu wejściach i wielu wyjściach z użyciem równań różniczkowych pierwszego rzędu.

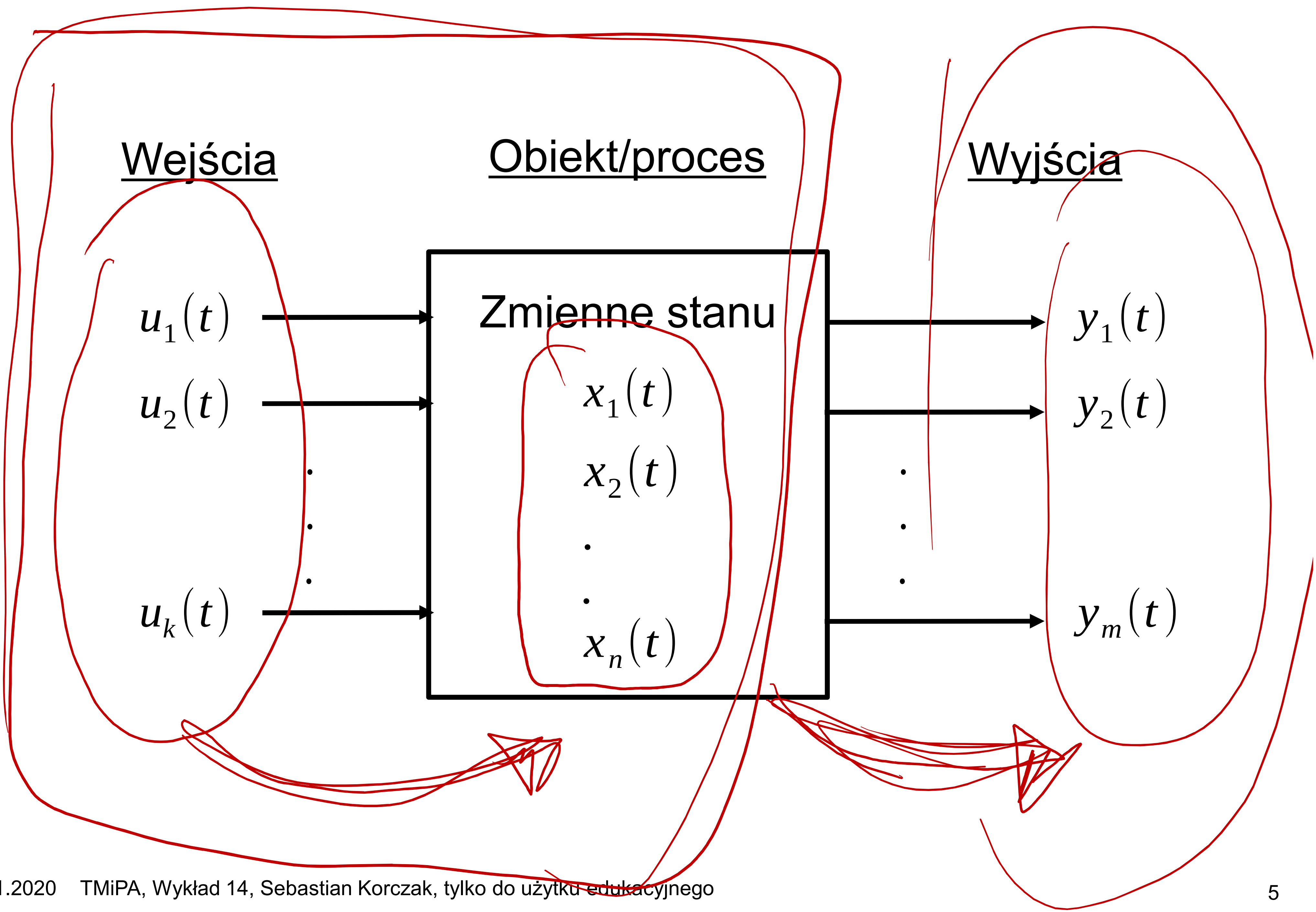
Zmienne stanu – jednoznacznie opisują wewnętrzny stan układu w dowolnej chwili.

Typowe zmienne stanu: położenie, prędkość, temperatura, ciśnienie, przepływ, prąd, napięcie.

Zmiennymi stanu mogą czas być również zmienne nie mające interpretacji fizycznej lub kombinacje różnych zmiennych.

Układ może mieć wiele różnych reprezentacji za pomocą różnych zmiennych stanów, przy czym relacja wejście-wyjście nie zależy od ich wyboru.

Opis układów w przestrzeni stanu



Opis układów w przestrzeni stanu

Dla układu liniowego i niezależnego od czasu

Równanie stanu: $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

$\boldsymbol{x}_{n\,x\,1}(t)$ - macierz zmiennych stanu

$\boldsymbol{A}_{n\,x\,n}$ - macierz układu

$\boldsymbol{B}_{n\,x\,k}$ - macierz wejść

$\boldsymbol{u}_{k\,x\,1}(t)$ - macierz zmiennych wejściowych (wymuszeń)

Równanie wyjścia: $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$

$\boldsymbol{y}_{m\,x\,1}(t)$ - macierz zmiennych wyjściowych

$\boldsymbol{C}_{m\,x\,n}$ - macierz wyjść

$\boldsymbol{D}_{m\,x\,k}$ - macierz transmisyjna

$\boldsymbol{u}_{k\,x\,1}(t)$ - macierz zmiennych wejściowych (wymuszeń)

Opis układów w przestrzeni stanu

Przykład dla n=2, k=4, m=3

Równanie stanu: $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}$$

Równanie wyjścia: $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Przykład dla n=2, k=4, m=3

Równanie stanu: $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}$$

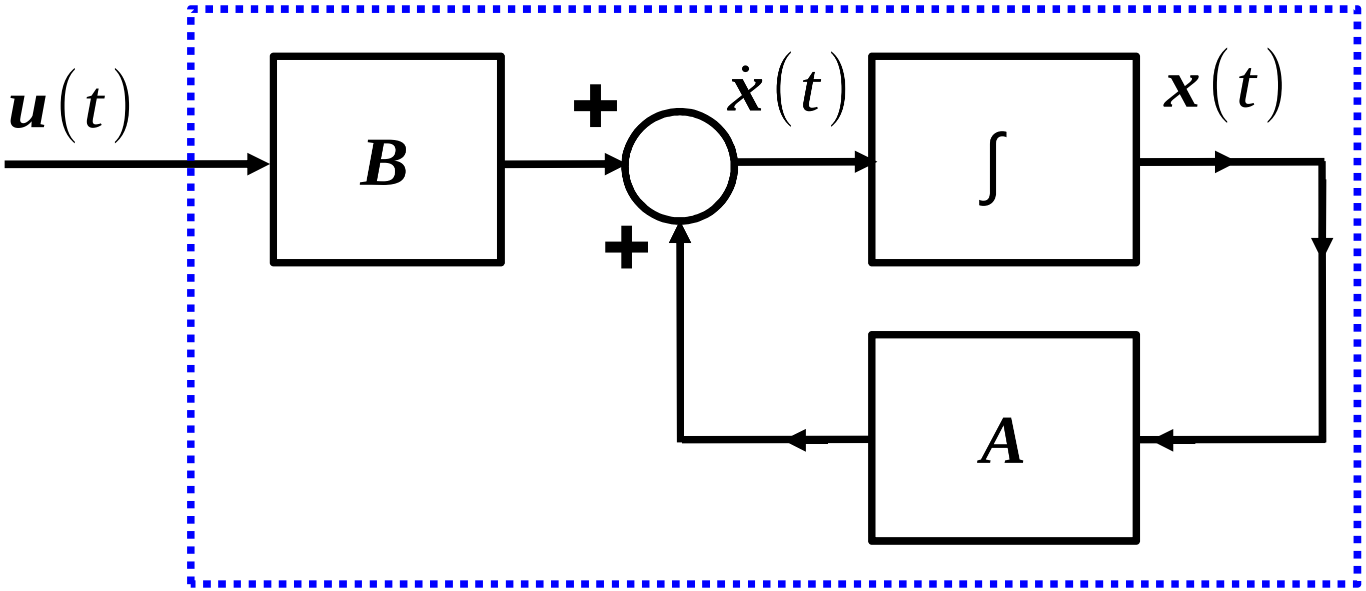
Równanie wyjścia: $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne!

Opis układów w przestrzeni stanu

Schemat blokowy

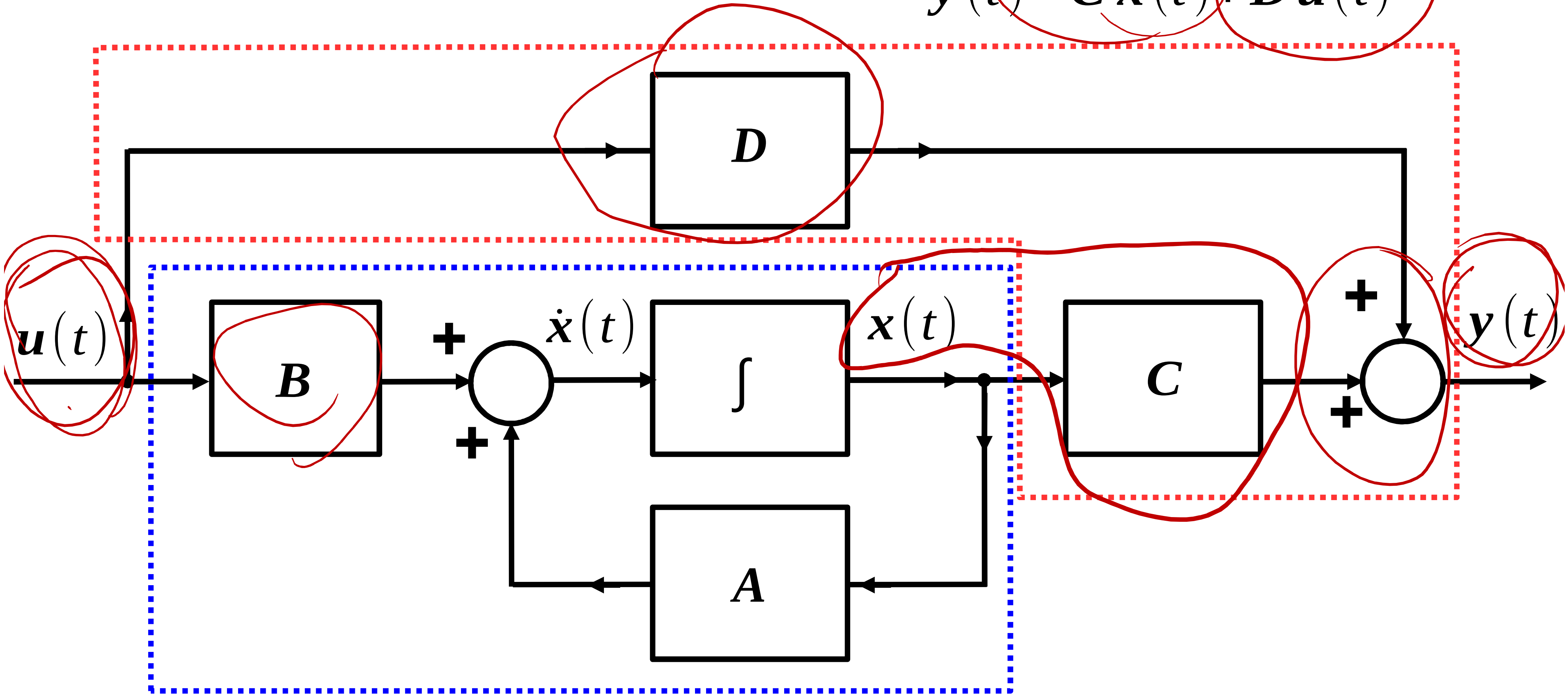


$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Schemat blokowy

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)$$



$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Rozwiązanie

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \text{ warunki początkowe: } \boxed{\boldsymbol{x}_0} \\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y}(t)}=\boxed{\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0}+\boxed{\boldsymbol{C}\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau}+\boxed{\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)}$$

Trudność - obliczenie $e^{\boldsymbol{A}t}$

e^{At}

Opis układów w przestrzeni stanu

Liczenie exp(At)

Przekształcenie macierzy **A** do postaci normalnej Jordan'a

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{S}\,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right)\boldsymbol{S}^{-1}, \text{ gdzie:}$$

$\boldsymbol{S}$ - macierz postaci własnych macierzy $\boldsymbol{A}$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ - wartości własne macierzy $\boldsymbol{A}$

Rozkład na ułamki proste macierzy ***(Is - A)***$^{-1}$

$$\text{jeżeli } \left(\boldsymbol{I}s - \boldsymbol{A}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{n_i} T_{ij} \frac{1}{\left(s - \lambda_i\right)^j}$$

I

$$\text{to } e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i}^{n_i} T_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda t}$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \qquad \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\,\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$$

$\mathcal{L}$ + zerowe w.p.

$$sX(s)=AX(s)+BU(s)$$

$$sX(s)-AX(s)=BU(s)$$

$$(sI-A)X(s)=BU(s)$$

$$\cancel{(sI-A)^{-1}(sI-A)}X=(sI-A)^{-1}BU$$

$$X=(sI-A)^{-1}BU$$

$$\det(sI-A)\neq 0$$

$\mathcal{L}$ + zerowe w.p.

$$Y(s)=CX(s)+DU(s)$$

$$Y(s)=C(sI-A)^{-1}BU+DU$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=$$

$$=C(sI-A)^{-1}B+D$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \qquad \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)}$$

$\downarrow$ $\mathcal{L}$ + zerowe w.p. $\qquad$ $\downarrow$ $\mathcal{L}$ + zerowe w.p.

$$s\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \qquad \boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$$

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$\downarrow$ dla $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\neq 0$

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{Y}(s)=\left(\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boxed{\boldsymbol{G}(s)=\frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{U}(s)}=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}}$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia

$$\boldsymbol{G}(s)=\frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{U}(s)}=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}$$

$$\boldsymbol{G}(s)=\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1k}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2k}(s) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \dots & G_{mk}(s) \end{bmatrix}$$

$$G_{32}(s)=\frac{y_3(s)}{u_2(s)} \quad i \quad u_1, u_3, \dots = 0$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia - przykład

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia - przykład

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

State-space representation to transfer function conversion

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)$$

Rosenbrock's system matrix

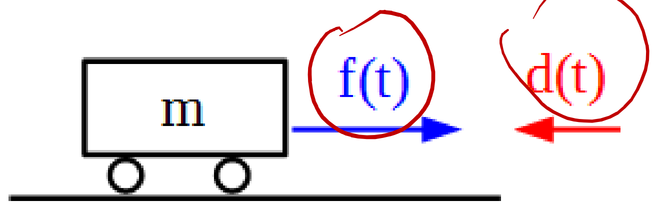
$$\boldsymbol{P}(s)=\begin{bmatrix} s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$$

Transfer function elements for i-th input and j-th output:

$$g_{ij}=\frac{\begin{vmatrix} s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -b_i \\ c_j & d_{ij} \end{vmatrix}}{\left|s\,\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|}$$

Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 1

Pojazd na płaskim podłożu, brak poślizgu.
m – masa zredukowana,
f(t) – zredukowana siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
x(t) – przemieszczenie
Wejście: siła napędowa.
Wyjścia: położenie i prędkość.



$$m\ddot{x}(t) = f(t) - c\cdot\dot{x}(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\left[f(t)\right]$$

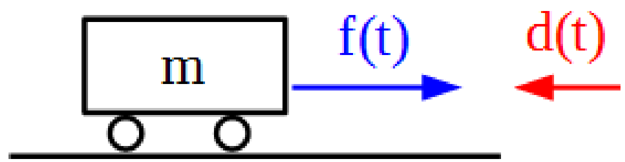
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ m\dot{v}(t) = f(t) - c\cdot v(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \frac{1}{m} f(t) - \frac{c}{m} v(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}\left[f(t)\right]$$

Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 1

Pojazd na płaskim podłożu, brak poślizgu.
m – masa zredukowana,
f(t) – zredukowana siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
x(t) – przemieszczenie
Wejście: siła napędowa.
Wyjścia: położenie i prędkość.



$$\dot{X} = AX + BU \qquad Y = CX + DU$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

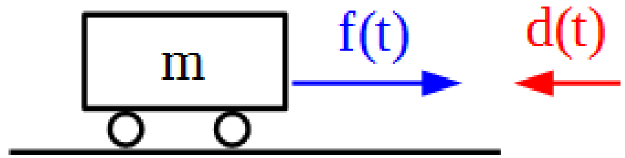
$$\det(sI-A) = s\left(s+\frac{c}{m}\right)$$

$$sI-A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+\frac{c}{m} \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{dop} = \begin{bmatrix} s+\frac{c}{m} & 0 \\ +1 & s \end{bmatrix} \qquad (sI-A)^{-1} = \frac{\left((sI-A)^{dop}\right)^T}{\det(sI-A)}$$

Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 1

Pojazd na płaskim podłożu, brak poślizgu.
m – masa zredukowana,
f(t) – zredukowana siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
x(t) – przemieszczenie
Wejście: siła napędowa.
Wyjścia: położenie i prędkość.



$$(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \cancel{\dfrac{s+\frac{c}{m}}{s(s+\frac{c}{m})}} & \dfrac{1}{s(s+\frac{c}{m})} \\ 0 & \dfrac{\cancel{s}}{\cancel{s}(s+\frac{c}{m})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s(s+\frac{c}{m})} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+\frac{c}{m})} \end{bmatrix}$$

$$C(sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+\frac{c}{m})} \\ 0 & \frac{1}{(s+\frac{c}{m})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+c/m)} \\ 0 & \frac{1}{(s+\frac{c}{m})} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+\frac{c}{m})} \\ 0 & \frac{1}{(s+c/m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{ms(s+\frac{c}{m})} \\ \dfrac{1}{m(s+c/m)} \end{bmatrix}$$

$$G_{11} = \frac{y_1}{u_1} = \frac{X(s)}{F(s)}$$

$$G_{21} = \frac{y_2}{u_1} = \frac{V(s)}{F(s)}$$

Opis układów w przestrzeni stanu – oprogramowanie

MATLAB & Simulink

$$x' = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

State space

Zamiana równań stanu na transmitancję:

[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)

Scilab & Xcos

xd = Ax+Bu

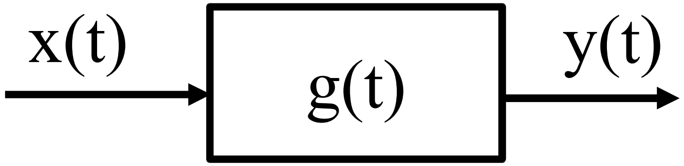
y = Cx+Du

Zamiana równań stanu na transmitancję:

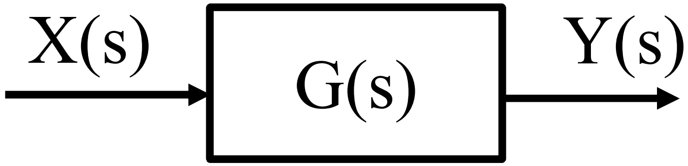
[h] = ss2tf(sl)

Opis układów w przestrzeni stanu – schematy blokowe

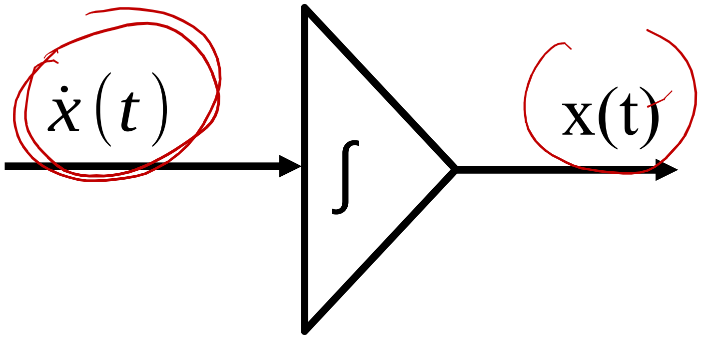
Odpowiedź impulsowa



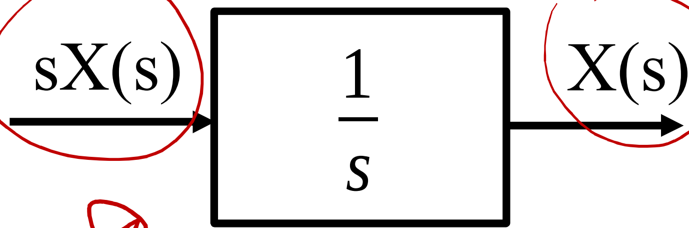
Transmitancja operatorowa



Całkowanie w dziedzinie czasu

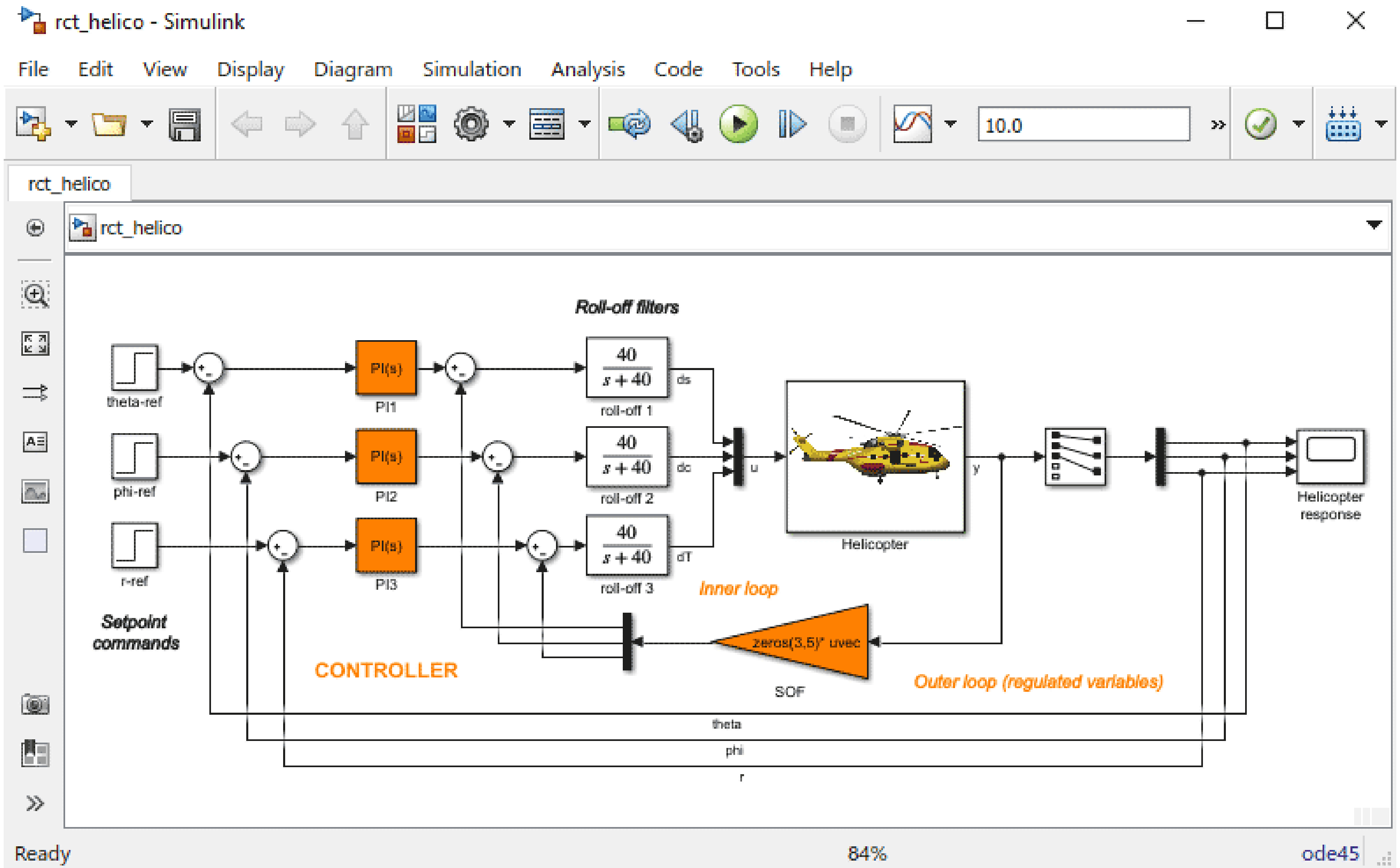


Całkowanie w dziedzinie Laplace'a



Symulacje numeryczne – oprogramowanie

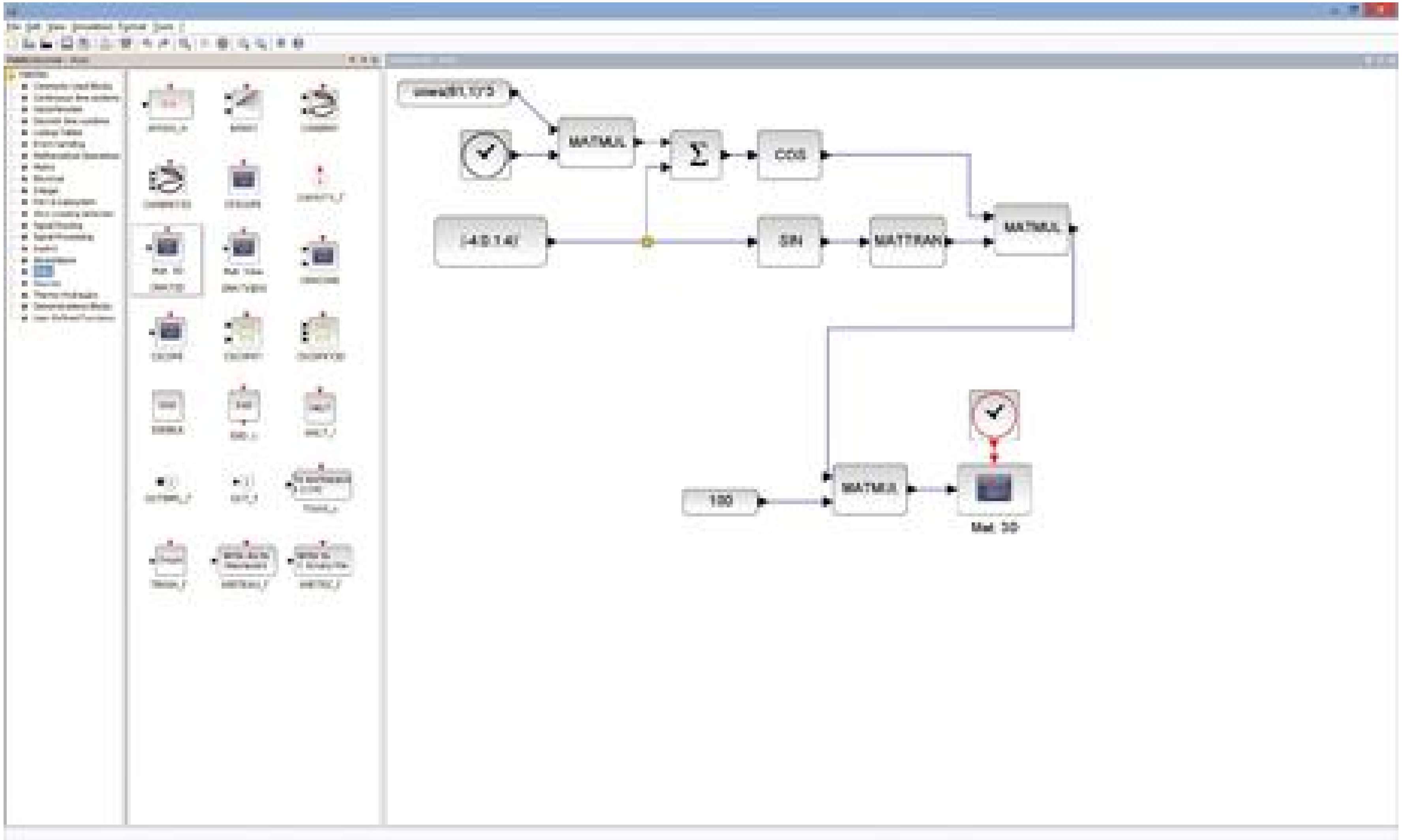
Matlab® / Simulink®



source: https://www.mathworks.com

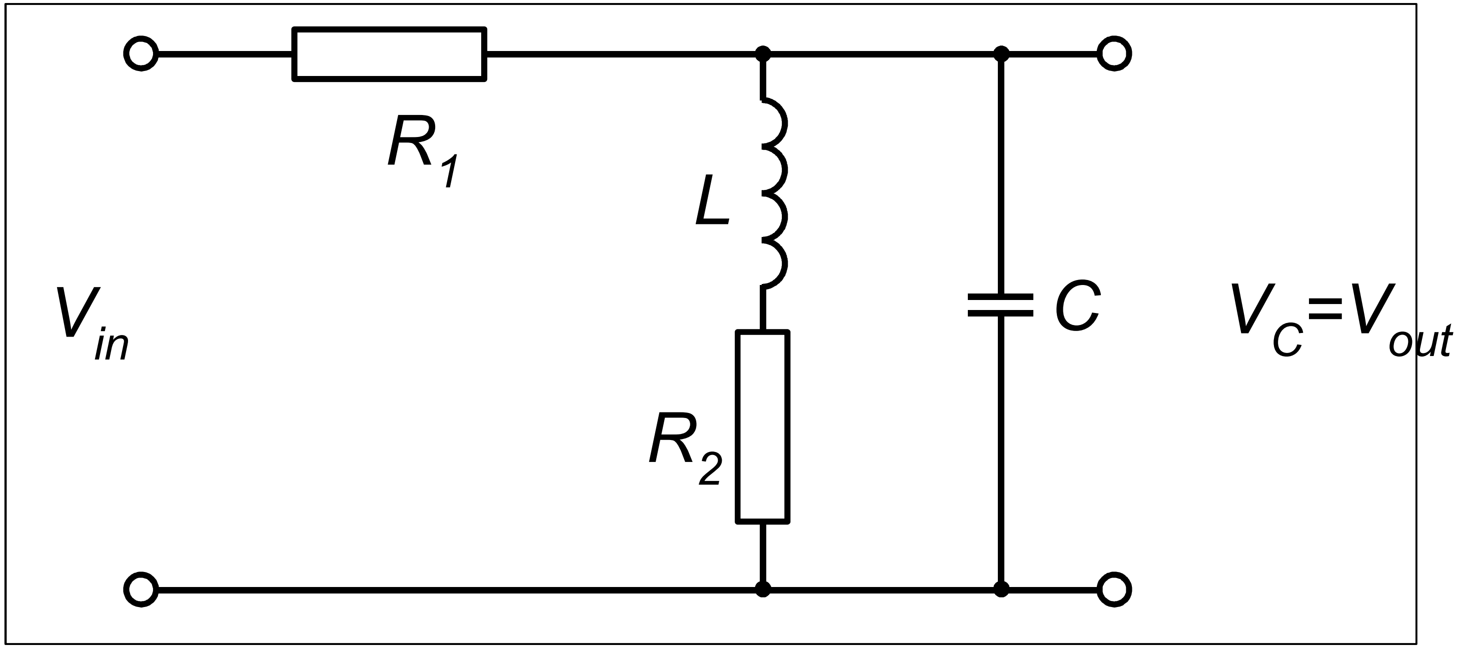
Symulacje numeryczne – oprogramowanie

Scilab / Xcos



source: https://scilab.org/scilab/features/xcos

Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 2



$$V_{\mathrm{in}}(t)=i_1(t)R_1+L\frac{d\,i_2(t)}{dt}+i_2(t)R_2$$

$$V_{\mathrm{in}}(t)=i_1(t)R_1+V_C(t)$$

$$C\frac{dV_C(t)}{dt}=i_3(t)$$

$$i_1(t)=i_2(t)+i_3(t)$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Tworzenie równań stanu i wyjścia z transmitancji operatorowej

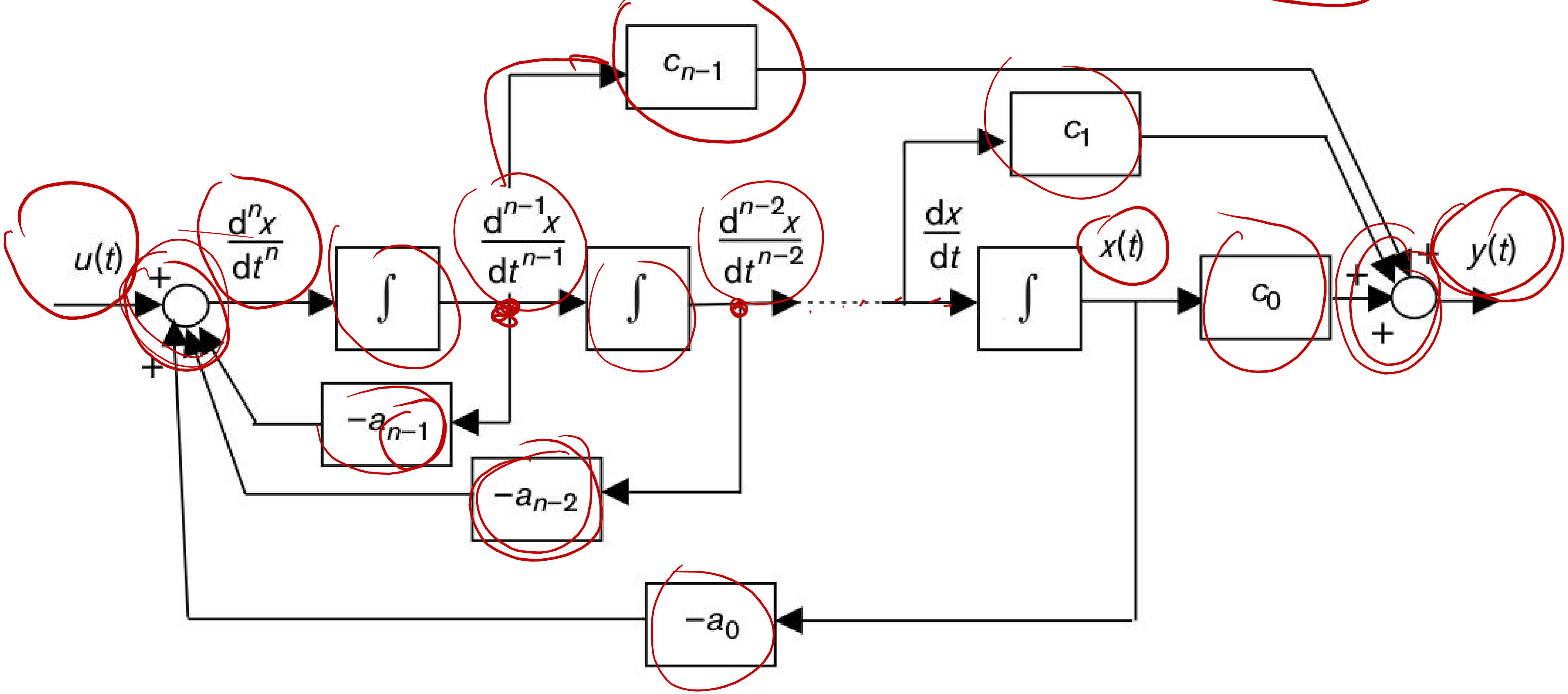
Metoda bezpośrednia (kanoniczna forma sterowania) – na podstawie współczynników wielomianów transmitancji tworzy się schemat blokowy według ustalonej reguły. Ze schematu blokowego bezpośrednio odczytuje się równania stanu i wyjścia.

Metoda równoległa (kanoniczna forma modalna) – transmitancję układu przedstawić należy w formie sumy ułamków prostych i stworzyć schemat blokowy według ustalonej reguły. Ze schematu blokowego odczytuje się równanie stanu i wyjścia. Macierz A będzie diagonalna.

Metoda iteracyjna – transmitancję przedstawiamy w postaci iloczynowej (widoczne bieguny i zera). Tworzymy schemat blokowy według ustalonej reguły operując na biegunach i zerach.

Metoda bezpośrednia

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \ldots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$



picture source: Jacqueline Wilkie, Michael Johnson, Reza Katebi, Control engineering - An introductory course, 2002

Metoda bezpośrednia

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_m s^m+c_{m-1}s^{m-1}+\ldots+c_1 s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s+a_0}\quad \text{for } \boxed{n>m}$$

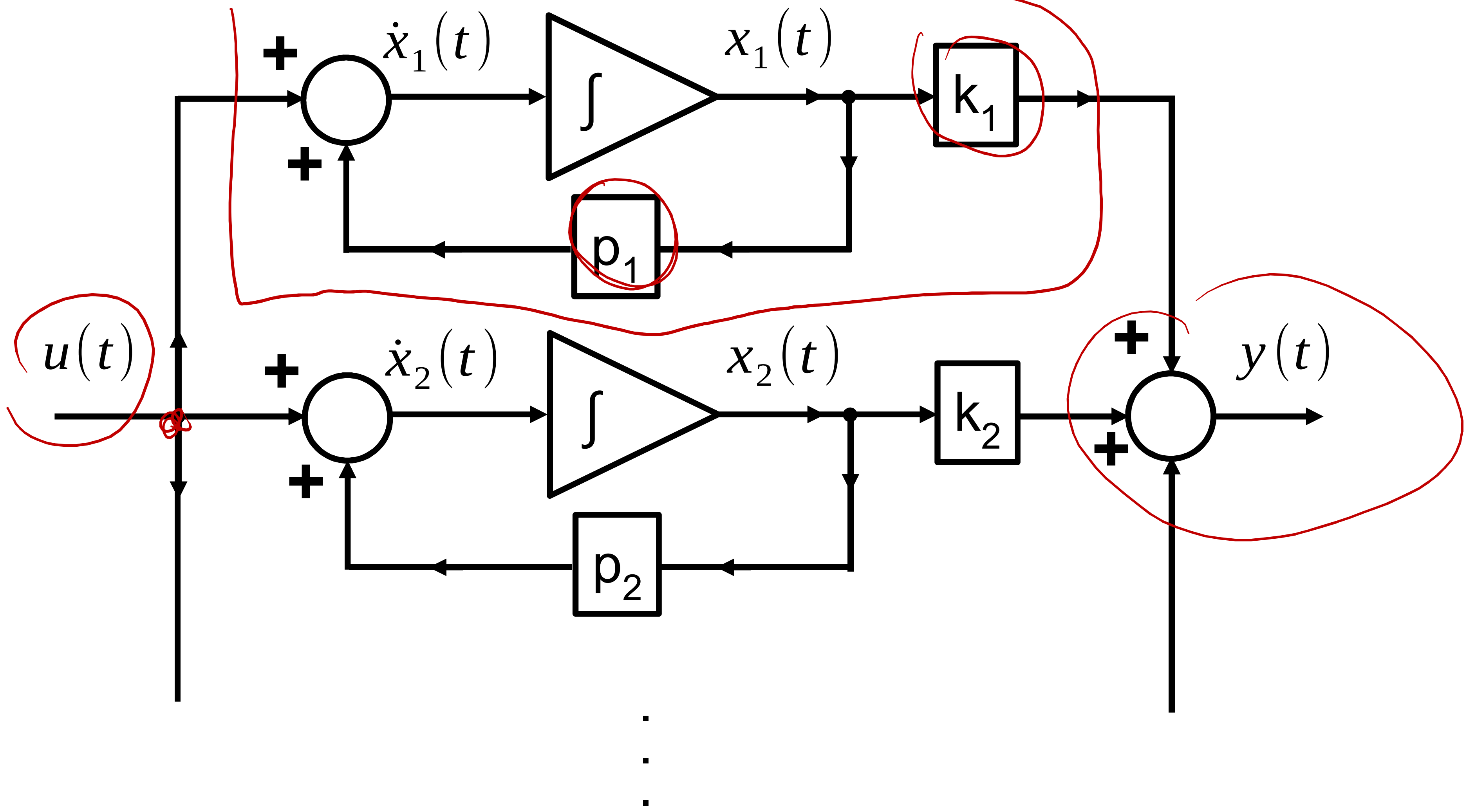
$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{\mathrm{nxn}} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{nxk}}$$

$$C=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\mathrm{mxn}}$$

$$D=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{\mathrm{mxk}}$$

Metoda równoległa

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{k_n}{s-p_n}\quad \text{for } n>m$$



Metoda równoległa

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{k_n}{s-p_n}\quad \text{for } n>m$$

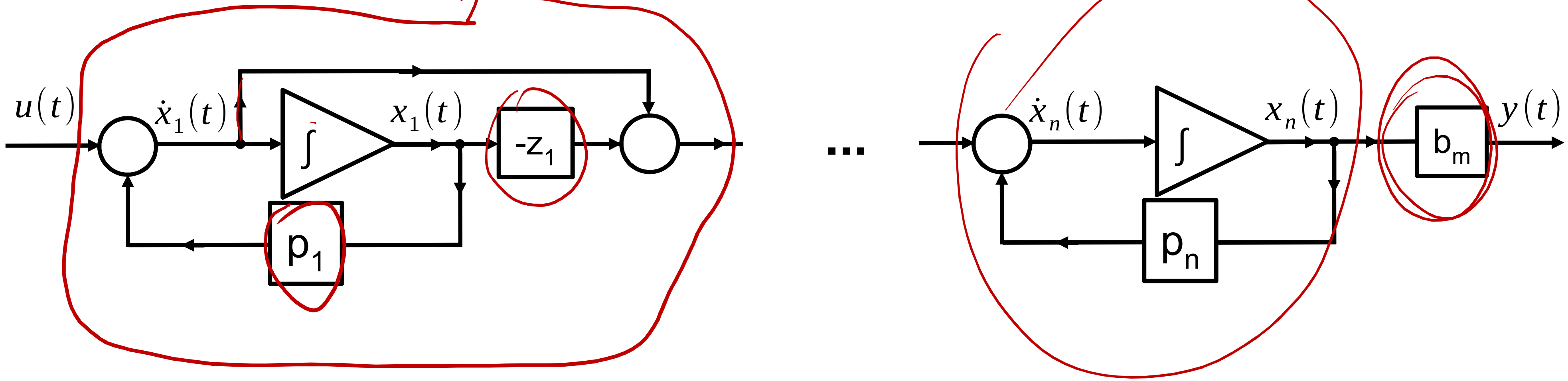
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{nx1}}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}_{\mathrm{nx1}}$$

$$\boldsymbol{D}=0$$

Metoda iteracyjna

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=b_m\frac{s-z_1}{s-p_1}\frac{s-z_2}{s-p_2}\frac{s-z_3}{s-p_3}\cdots\frac{s-z_m}{s-p_m}\frac{1}{s-p_{m+1}}\cdots\frac{1}{s-p_n}$$



Metoda iteracyjna

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=b_m\frac{s-z_1}{s-p_1}\frac{s-z_2}{s-p_2}\frac{s-z_3}{s-p_3}\cdots\frac{s-z_m}{s-p_m}\frac{1}{s-p_{m+1}}\cdots\frac{1}{s-p_n}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1-z_1 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1-z_1 & p_2-z_2 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1-z_1 & p_2-z_2 & p_3-z_3 & \cdots & 0 \\ p_1-z_1 & p_2-z_2 & p_3-z_3 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{nx1}}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{bmatrix}_{\mathrm{nx1}}$$

$$\boldsymbol{D}=0 \ \text{, if } n>m$$

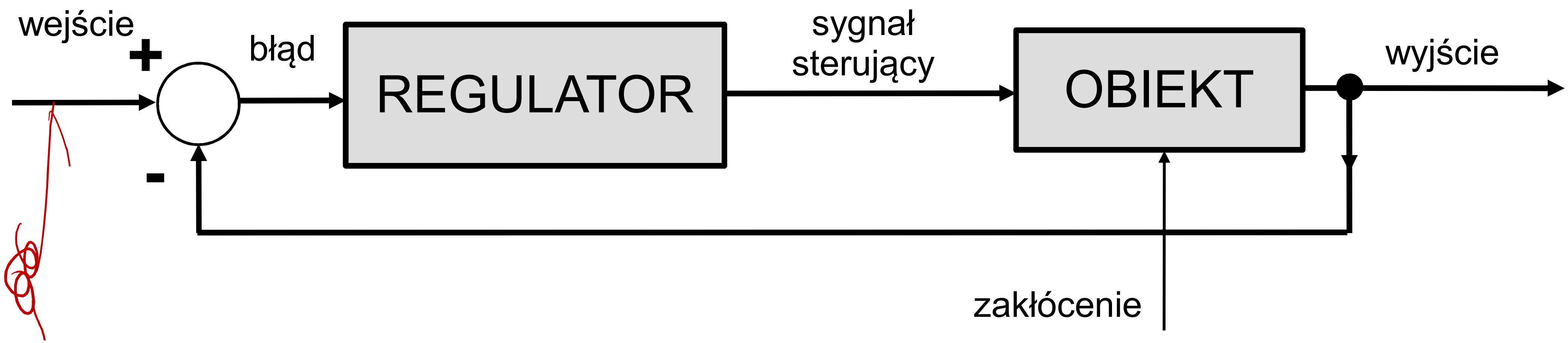
WAŻNE POJĘCIA

- Sterowanie krzepkie (odporne, *robust*) – sposób sterowania, w którym zapewnione jest prawidłowe funkcjonowanie i stabilność przy możliwości zmieniania się parametrów układu w ustalonym zakresie.

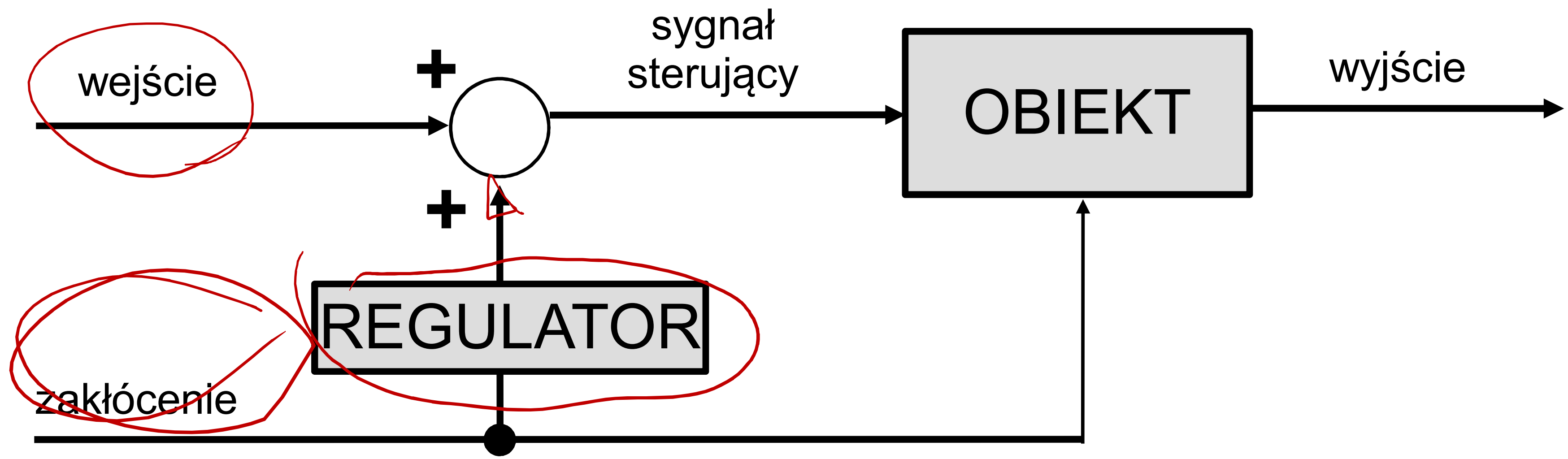
- Sterowanie adaptacyjne – metoda sterowania, w której nastawy regulatora są zmieniane w czasie w celu dostosowania do występujących zmian parametrów układu. Są to regulatory samonastrajalne, z uczeniem iteracyjnym lub oparte o teorię sterowania dualnego.

- Sterowanie inteligentne – sterowanie wykorzystujące np. sztuczne sieci neuronowe, uczenie maszynowe, algorytmy genetyczne, logikę rozmytą.

Sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym (feedback)



Sterowanie ze sprzężeniem w przód (feedforward)



TRZY ZADANIA STEROWANIA

<u>Stabilizacja</u> – sterowanie, w którym wartość zadana jest niezmienna w czasie (np. stała temperatura w piecu, stała prędkość silnika, zadane położenie).

<u>Śledzenie trajektorii</u> – wartość zadana jest z góry ustaloną funkcją czasu, czyli ruch odbywa się po trajektorii z ustalonym rygorem czasu (np. sterowanie ramieniem robota)

<u>Podążanie za ścieżką</u> – pożądany stan obiektu (np. Położenie) jest opisane funkcją parametryczną, tzn. Regulator ma zapewnić ruch po ścieżce ale bez rygoru czasowego (regulator może dobrać prędkość, np. ruch pojazdów autonomicznych).

WAŻNE POJĘCIA

Sterowalność – własność układu, polegająca na możliwości zmiany stanu układu z początkowego na dowolny stan końcowy w skończonym czasie i z użyciem dopuszczalnych sygnałów sterujących. Sprawdzamy ją w układach liniowych z warunku na rząd macierzy Kalmana $[B \; AB \; A^2B \; \ldots]$, a w układach nieliniowych z warunku na rząd macierzy tworzonej z zastosowaniem nawiasów Liego.

Obserwowalność – własność układu, polegająca na możliwości odtworzenia stanu układu na podstawie znajomości sygnałów sterujących i wyjściowych. Sprawdzamy ją w układach liniowych z warunku na rząd macierzy Kalmana $[C \; CA \; CA^2 \; \ldots]^T$.

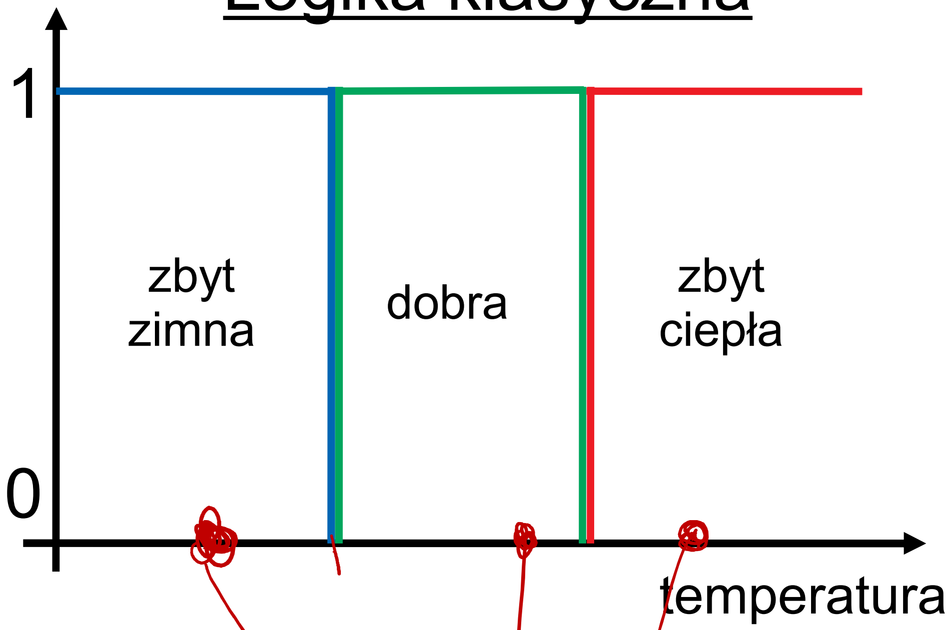
Sterowanie rozmyte w przykładach

Zadanie: sterowanie temperaturą cieczy.

Algorytm sterowania zakłada różne działania w zależności od klasyfikacji temperatury do trzech grup: za zimna, dobra, za ciepła.

Sterowanie rozmyte w przykładach

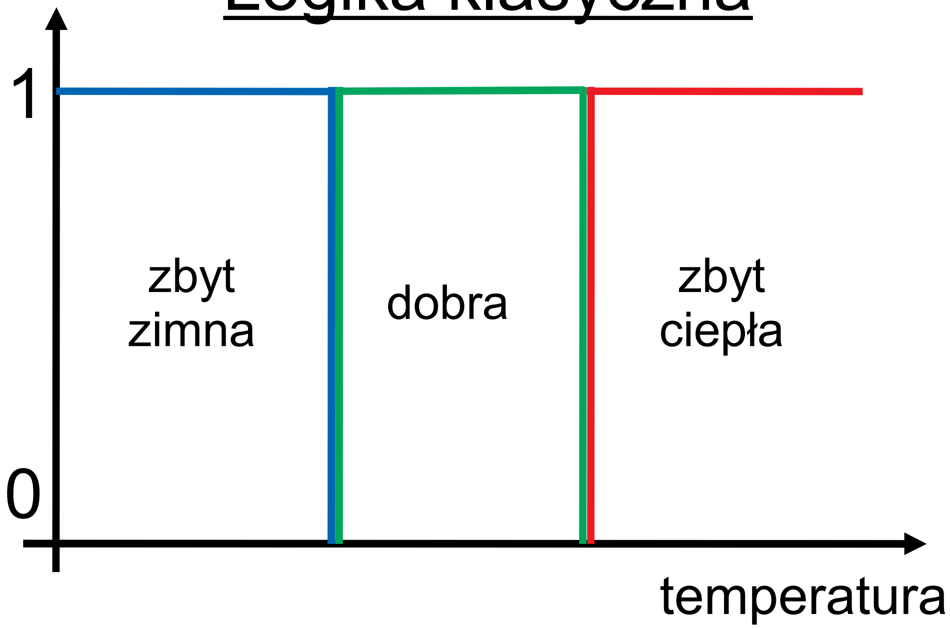
Logika klasyczna



zbyt zimna:	1	0	0
dobra:	0	1	0
zbyt ciepła:	0	0	1

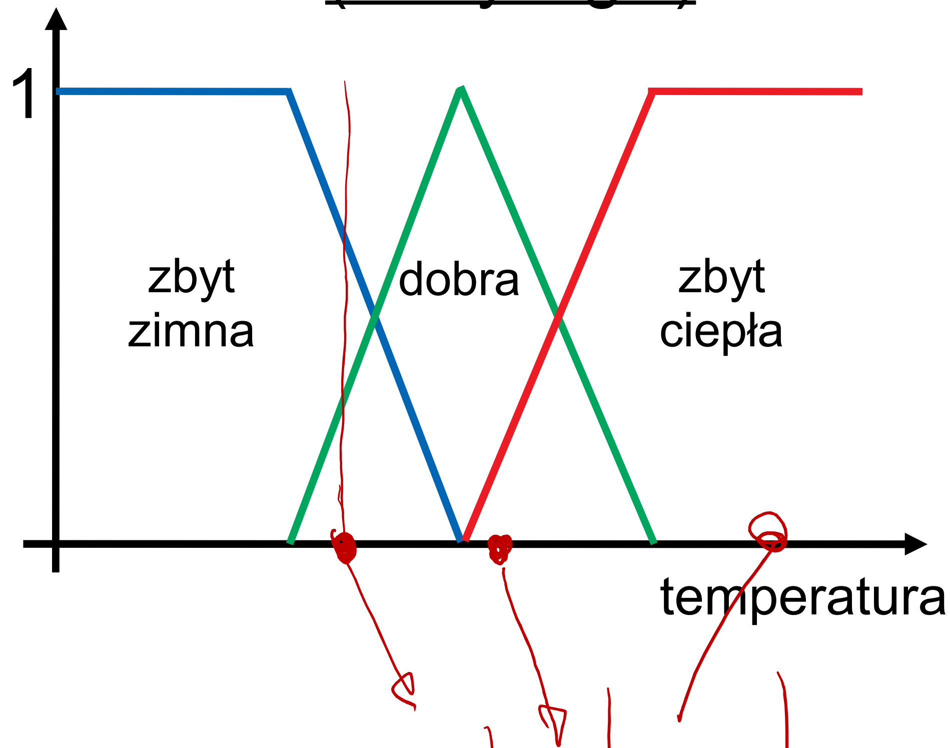
Sterowanie rozmyte w przykładach

Logika klasyczna



zbyt zimna:	
dobra:	
zbyt ciepła:	

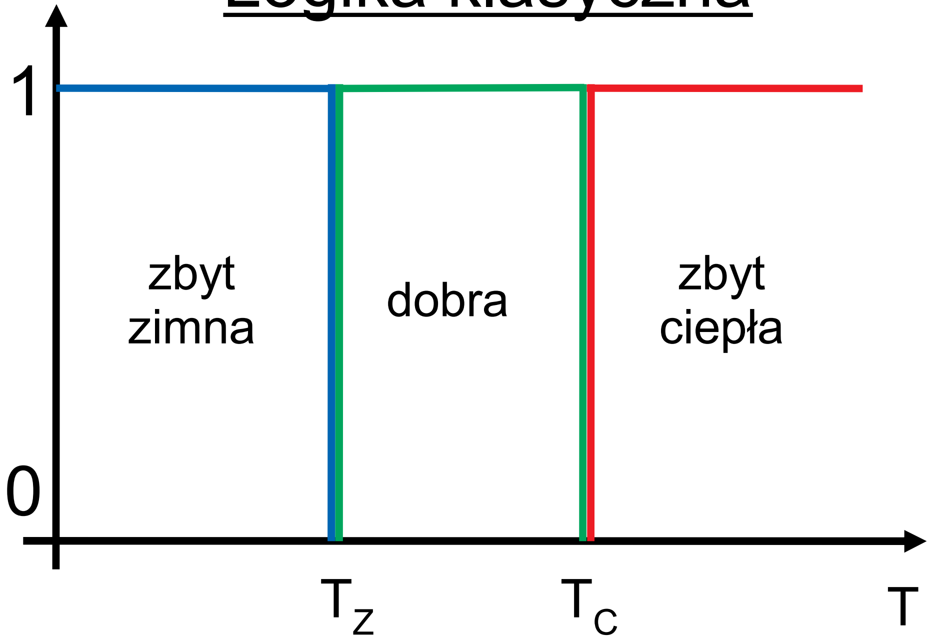
Logika rozmyta (fuzzy logic)



zbyt zimna:	0,7	0	0
dobra:	0,3	0,4	0
zbyt ciepła:	0	0,1	1

Sterowanie rozmyte w przykładach

Logika klasyczna



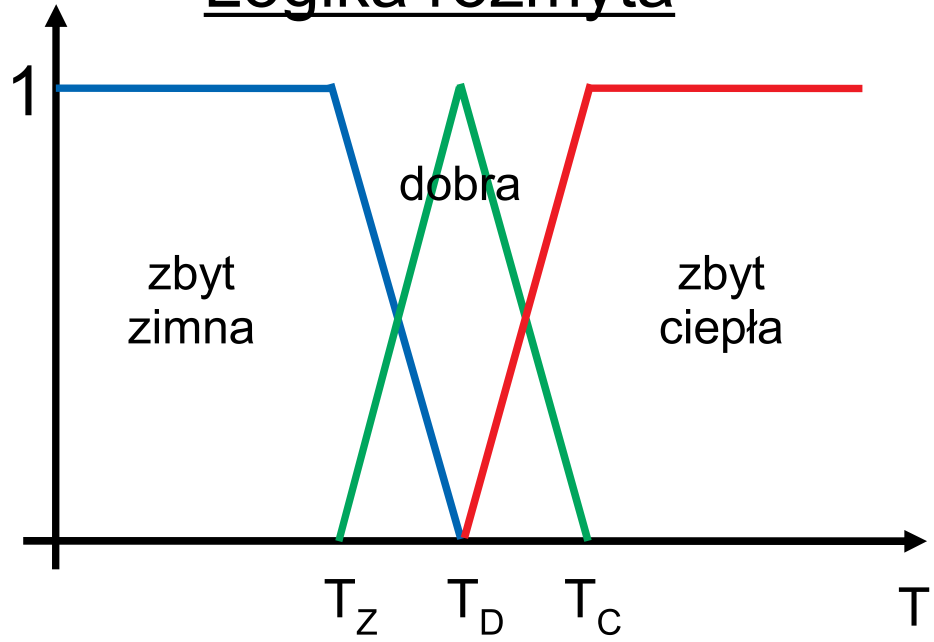
Funkcje przynależności

zimna: $\begin{cases} 1, \text{jeżeli } T < T_Z \\ 0, \text{wpp} \end{cases}$

dobra: $\begin{cases} 1, \text{jeżeli } T_Z < T < T_C \\ 0, \text{wpp} \end{cases}$

ciepła: $\begin{cases} 1, \text{jeżeli } T > T_C \\ 0, \text{wpp} \end{cases}$

Logika rozmyta



Funkcje przynależności

zimna: $\begin{cases} 1, \text{jeżeli } T < T_Z \\ \dfrac{(T_D - T)}{(T_D - T_Z)}, \text{jeżeli } T_Z < T < T_D \\ 0, \text{wpp} \end{cases}$

...

Funkcje przynależności mogą mieć różne kształty

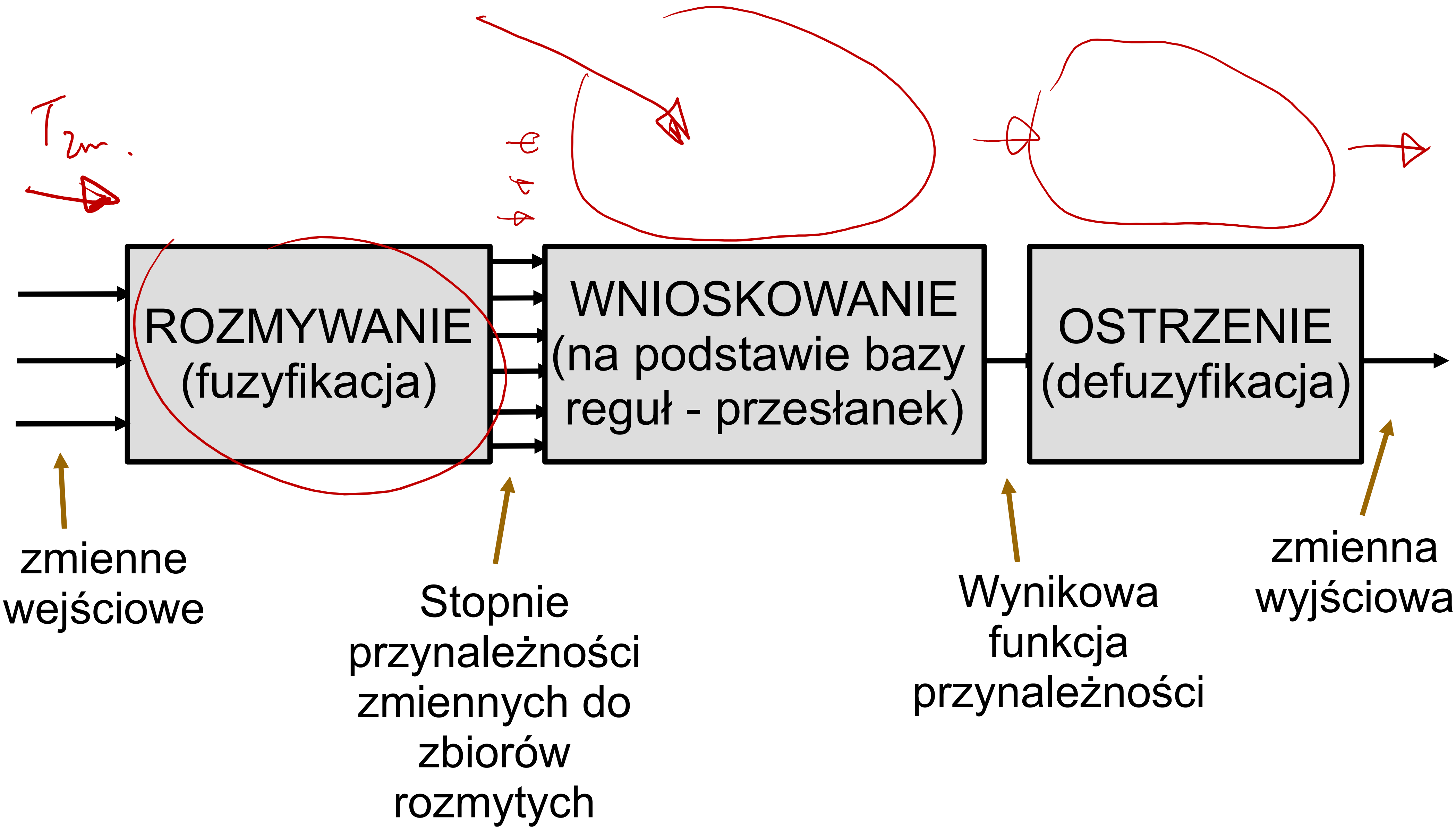
Sterowanie rozmyte w przykładach

Na zbiorach rozmytych możemy przeprowadzać operacje:

- suma (alternatywa / ”lub” / OR) -----> MAX(x,y)
- iloczyn (koniunkcja / „i” / AND) -----> MIN(x,y)
- negacja („nie” / NOT) -----> NOT(x)=1-x

Sterowanie rozmyte w przykładach

Regulator rozmyty



Sterowanie rozmyte w przykładach

Łukasiewicz-Tarski logic

Jan Łukasiewicz (1878-1956)

Alfred Tarski (1901-1983)

Układy ciągłe i dyskretne

Sygnał ciągły x(t) for t ≥ 0

Transformata Laplace'a

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$L[\delta(t)] = 1$$

$$L[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$L[1 - e^{bt}] = \frac{s}{s-b}$$

Sygnał dyskretny x[n] for n ≥ 0

Transformata Z

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

(zdefiniowana przez W. Hurewicz)

$$Z[\delta(n)] = 1$$

$$Z[1(n)] = \frac{z}{z-1}$$

$$Z[a^n 1(n)] = \frac{z}{z-a}$$

INNE WAŻNE POJĘCIA

Metoda backstepping

Sterowanie ślizgowe

Sterowanie optymalne

Sterowanie w oparciu o płaskość różniczkową

Model-based control

Metoda obliczanego momentu

Regulator liniowo-kwadratowy (LQR)

Przykłady

https://www.youtube.com/watch?v=URmxzxYlmtg

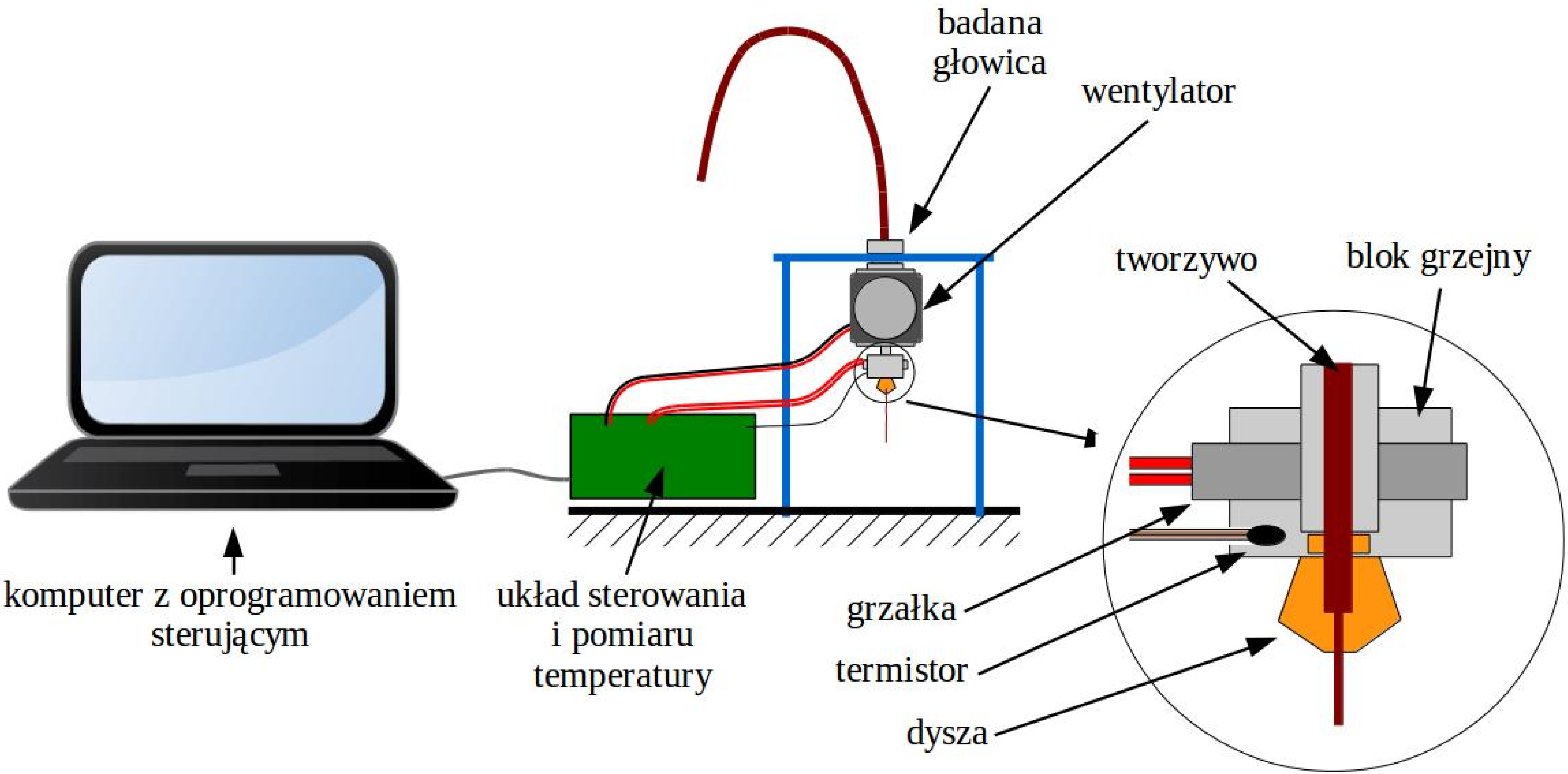
https://vimeo.com/192179726

https://www.youtube.com/watch?v=geqip_0Vjec

https://www.youtube.com/watch?v=w2itwFJCgFQ

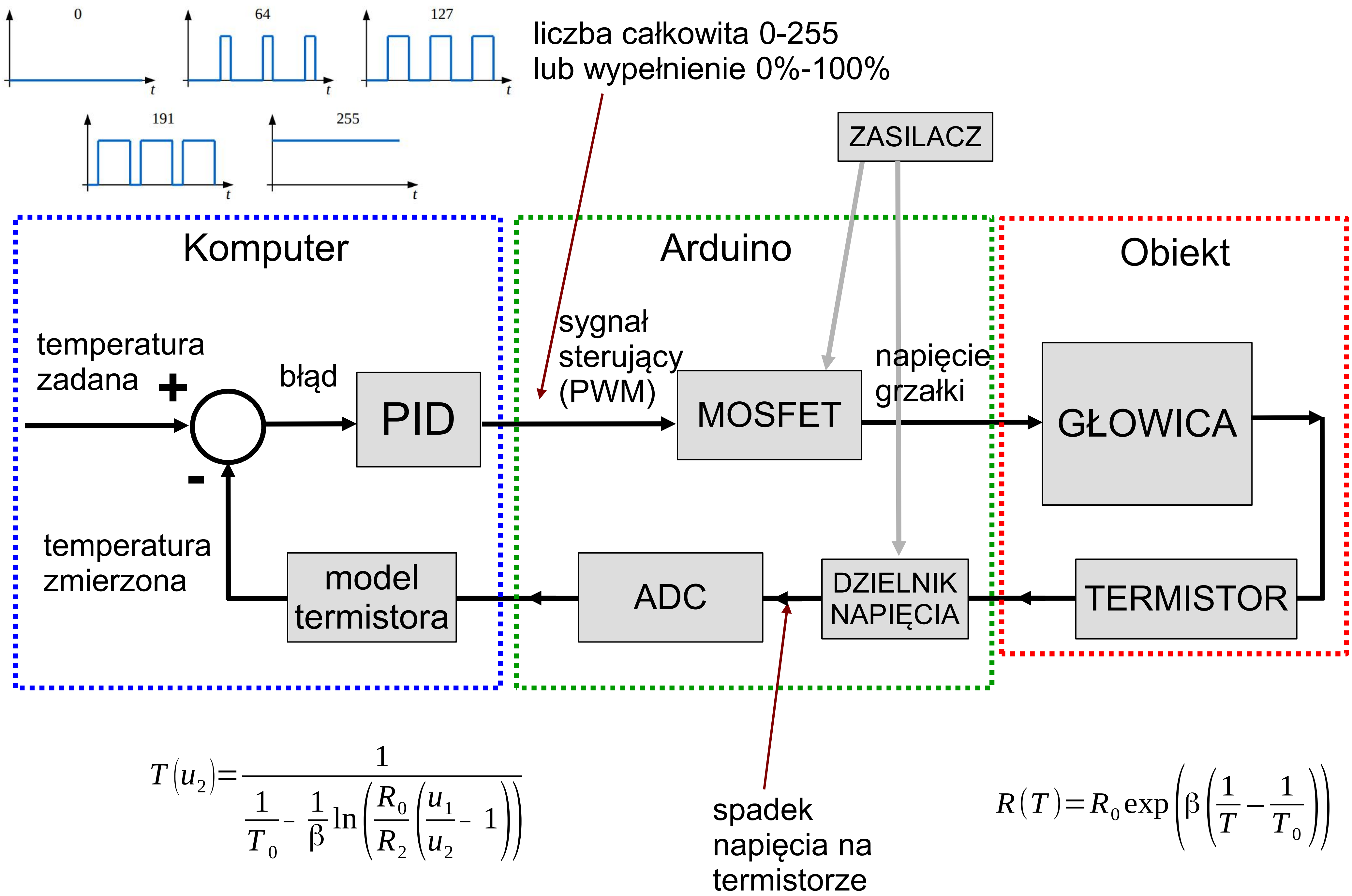
https://www.youtube.com/watch?v=g11LN0UIynY

Przykład – sterowanie temperaturą głowicy drukarki 3D



Rys. 1. Schemat stanowiska do badania głowicy drukarki 3D.

Przykład – sterowanie temperaturą głowicy drukarki 3D



$$T(u_2)=\frac{1}{\frac{1}{T_0}-\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{R_0}{R_2}\left(\frac{u_1}{u_2}-1\right)\right)}$$

$$R(T)=R_0\exp\left(\beta\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)\right)$$

Materiał na egzamin – wykłady od 1 do 14
(ponad 1100 slajdów...)

Wykład 15 – powtórzenie materiału,
informacje o egzaminie,
ankiety, konsultacje