



# Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Teoria maszyn i podstawy automatyki*  
semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

# Wykład 14

Współczesne problemy teorii sterowania.  
Opis układów dynamicznych  
w przestrzeni stanu.

# Współczesna teoria sterowania

<b>Klasyczna teoria sterowania</b>	<b>Współczesna teoria sterowania (od około 1950)</b>
układy o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO)	układy o wielu wejściach i wyjściach
układy liniowe	często układy nieliniowe
układy niezależne od czasu	układy zależne od czasu
opis za pomocą transmitancji	opis równaniami stanu
analiza w dziedzinie czasu i częstości	analiza w dziedzinie czasu
zainteresowanie odpowiedzią układu	zainteresowanie stanem układu

# Opis układów w przestrzeni stanu

Opis w przestrzeni stanów to sposób formułowania modelu matematycznego układu o wielu wejściach i wielu wyjściach z użyciem równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Zmienne stanu – jednoznacznie opisują wewnętrzny stan układu w dowolnej chwili.

Typowe zmienne stanu: położenie, prędkość, temperatura, ciśnienie, przepływ, prąd, napięcie.

Zmiennymi stanu mogą czas być również zmienne nie mające interpretacji fizycznej lub kombinacje różnych zmiennych.

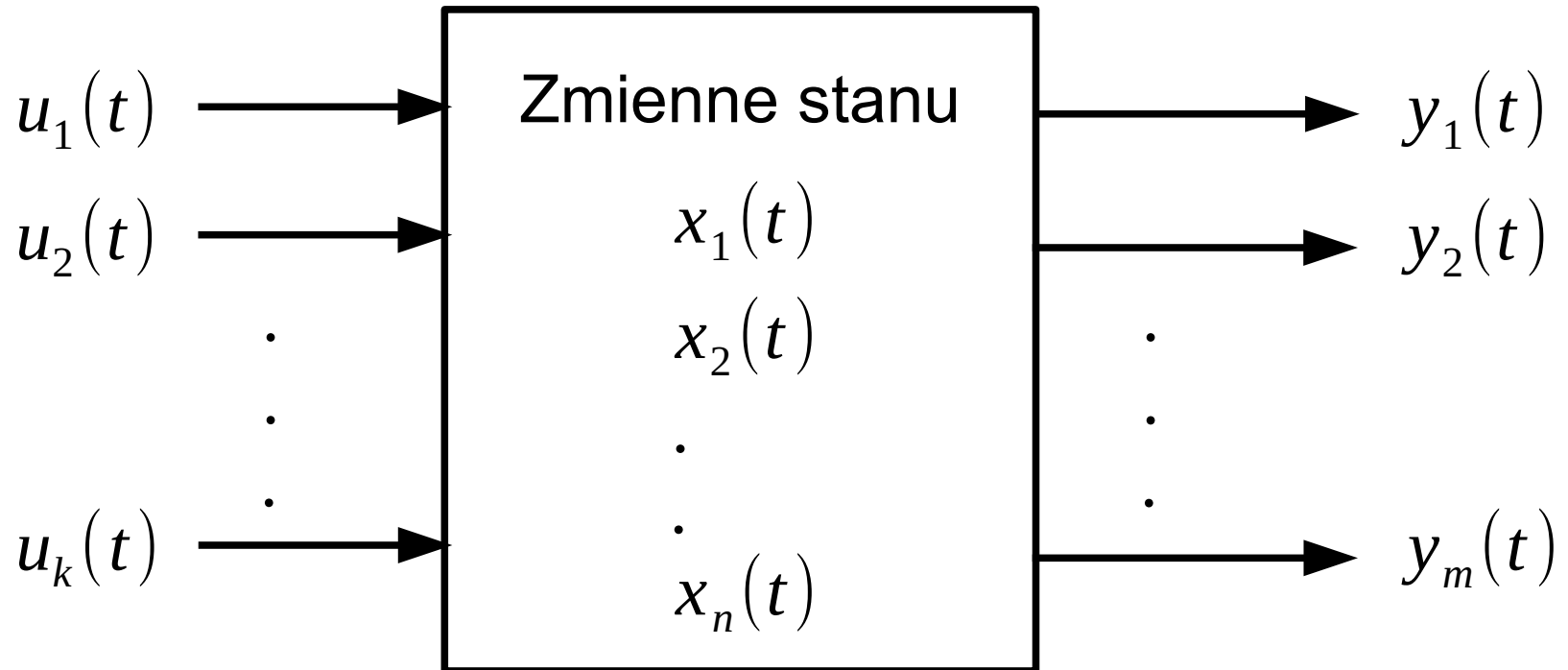
Układ może mieć wiele różnych reprezentacji za pomocą różnych zmiennych stanów, przy czym relacja wejście-wyjście nie zależy od ich wyboru.

# Opis układów w przestrzeni stanu

Wejścia

Obiekt/proces

Wyjścia



# Opis układów w przestrzeni stanu

Dla układu liniowego i niezależnego od czasu

Równanie stanu:  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$

$\mathbf{x}_{n \times 1}(t)$  - macierz zmiennych stanu

$\mathbf{A}_{n \times n}$  - macierz układu

$\mathbf{B}_{n \times k}$  - macierz wejść

$\mathbf{u}_{k \times 1}(t)$  - macierz zmiennych wejściowych (wymuszeń)

Równanie wyjścia:  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$

$\mathbf{y}_{m \times 1}(t)$  - macierz zmiennych wyjściowych

$\mathbf{C}_{m \times n}$  - macierz wyjść

$\mathbf{D}_{m \times k}$  - macierz transmisyjna

$\mathbf{u}_{k \times 1}(t)$  - macierz zmiennych wejściowych (wymuszeń)

# Opis układów w przestrzeni stanu

Przykład dla  $n=2$ ,  $k=4$ ,  $m=3$

Równanie stanu:  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}$$

Równanie wyjścia:  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}$$

# Opis układów w przestrzeni stanu

Przykład dla  $n=2$ ,  $k=4$ ,  $m=3$

Równanie stanu:  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}$$

Równanie wyjścia:  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$

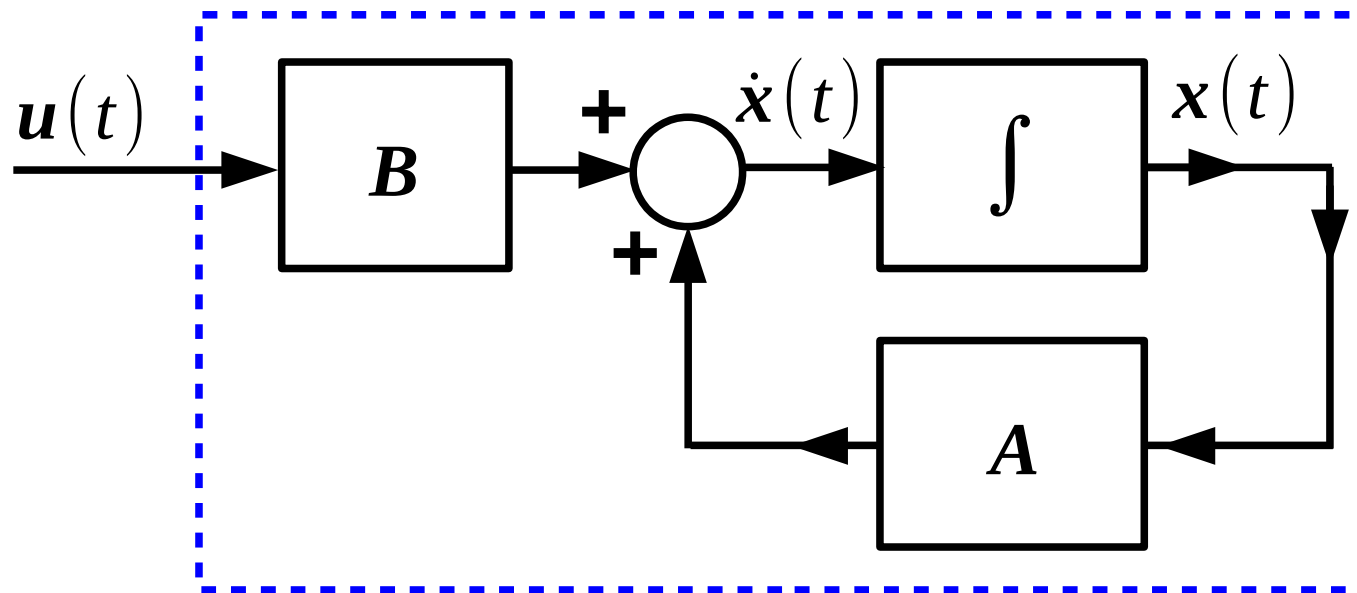
$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix}$$

**Mnożenie macierzy nie jest przemienne!**



# Opis układów w przestrzeni stanu

## Schemat blokowy

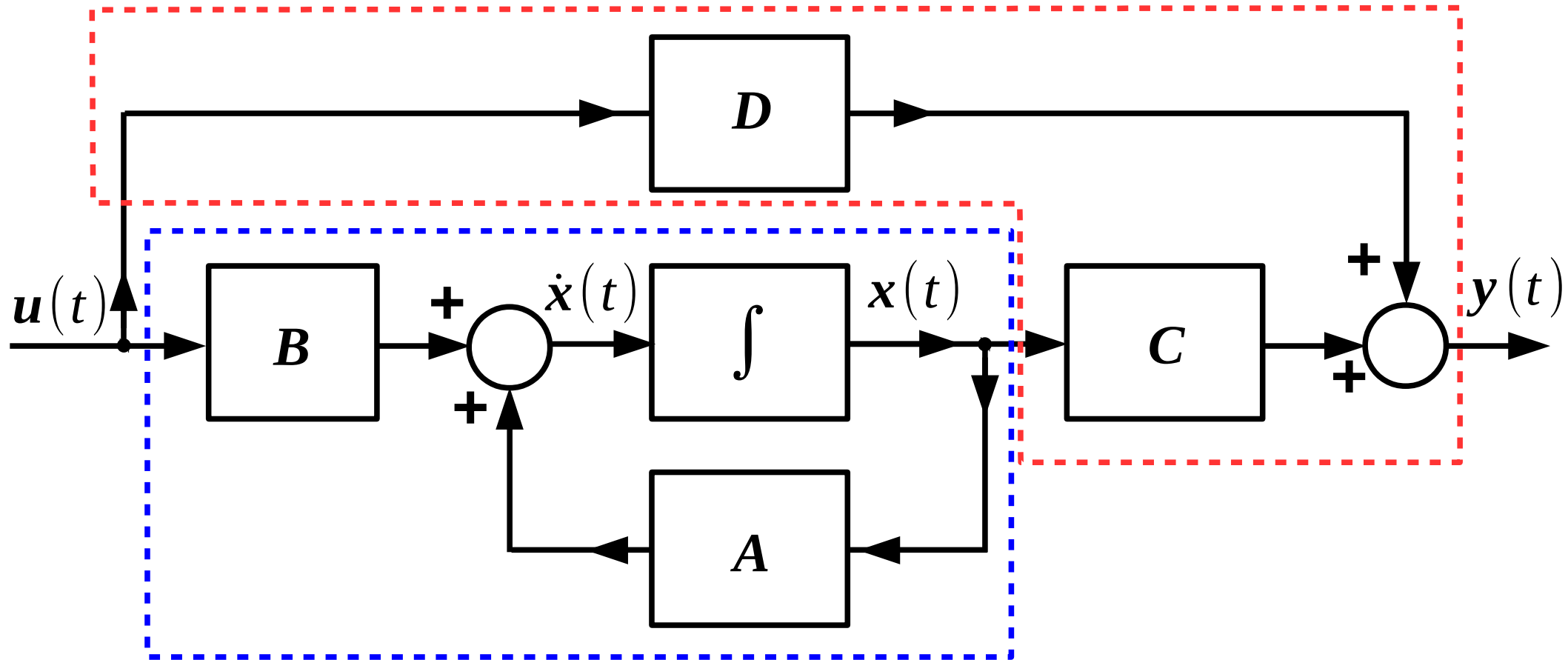


$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t)$$

# Opis układów w przestrzeni stanu

## Schemat blokowy

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$



$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

# Opis układów w przestrzeni stanu

## Rozwiązanie

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$ , warunki początkowe:  $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

Trudność - obliczenie  $e^{\mathbf{A}t}$

# Opis układów w przestrzeni stanu

## Liczenie $\exp(\mathbf{A}t)$

### Przekształcenie macierzy $\mathbf{A}$ do postaci normalnej Jordan'a

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S} \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \mathbf{S}^{-1}, \text{ gdzie:}$$

$\mathbf{S}$  - macierz postaci własnych macierzy  $\mathbf{A}$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$  - wartości własne macierzy  $\mathbf{A}$

### Rozkład na ułamki proste macierzy $(\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1}$

$$\text{jeżeli } (\mathbf{I}s - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^{n_i} T_{ij} \frac{1}{(s - \lambda_i)^j}$$

$$\text{to } e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^{n_i} T_{ij} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} e^{\lambda_i t}$$

# Opis układów w przestrzeni stanu

## Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

↓  $\mathcal{L}$  + zerowe w.p.

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

↓  $\mathcal{L}$  + zerowe w.p.

# Opis układów w przestrzeni stanu

## Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

↓  $\mathcal{L}$  + zerowe w.p.

$$s \mathbf{X}(s) = \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

↓

$$s \mathbf{X}(s) - \mathbf{A} \mathbf{X}(s) = \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

↓

$$(s \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{X}(s) = \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

↓ dla  $\det(s \mathbf{I} - \mathbf{A}) \neq 0$

$$\mathbf{X}(s) = (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$

↓  $\mathcal{L}$  + zerowe w.p.

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} \mathbf{U}(s)$$

↓

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}(s) + \mathbf{D} \mathbf{U}(s)$$

↓

$$\mathbf{Y}(s) = (\mathbf{C} (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \mathbf{U}(s)$$

↓

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C} (s \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$

# Opis układów w przestrzeni stanu

## Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1k}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2k}(s) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \dots & G_{mk}(s) \end{bmatrix}$$

# Opis układów w przestrzeni stanu

## Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia - przykład

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



# Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 1

Pojazd na płaskim podłożu, brak poślizgu.

$m$  – masa zredukowana,

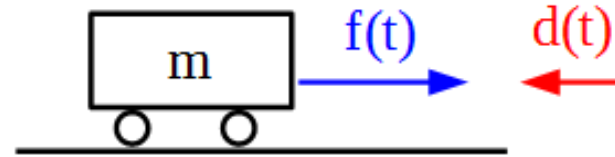
$f(t)$  – zredukowana siła napędowa,

$d(t)=c*v(t)$  – opór powietrza,

$x(t)$  – przemieszczenie

Wejście: siła napędowa.

Wyjścia: położenie i prędkość.



# Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 1

Pojazd na płaskim podłożu, brak poślizgu.

$m$  – masa zredukowana,

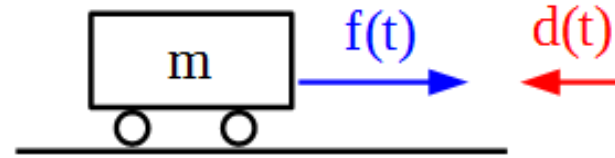
$f(t)$  – zredukowana siła napędowa,

$d(t)=c*v(t)$  – opór powietrza,

$x(t)$  – przemieszczenie

Wejście: siła napędowa.

Wyjścia: położenie i prędkość.



# Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 1

Pojazd na płaskim podłożu, brak poślizgu.

$m$  – masa zredukowana,

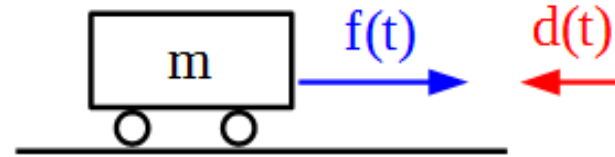
$f(t)$  – zredukowana siła napędowa,

$d(t)=c*v(t)$  – opór powietrza,

$x(t)$  – przemieszczenie

Wejście: siła napędowa.

Wyjścia: położenie i prędkość.



# Opis układów w przestrzeni stanu – oprogramowanie

## MATLAB & Simulink

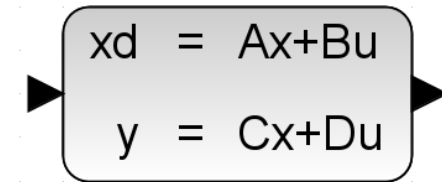
$$\begin{aligned}x' &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

State space

Zamiana równań stanu na transmitancję:

$$[\text{num}, \text{den}] = \text{ss2tf}(A, B, C, D, iu)$$

## Scilab & Xcos



A block diagram representing a state space model. It consists of a rounded rectangular box with a light gray background. Inside the box, the equations  $xd = Ax + Bu$  and  $y = Cx + Du$  are written. On the left side of the box, there is a black arrow pointing into the box, representing the input  $u$ . On the right side of the box, there is a black arrow pointing out of the box, representing the output  $y$ .

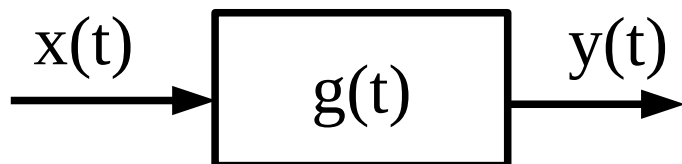
$$\begin{aligned}xd &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Zamiana równań stanu na transmitancję:

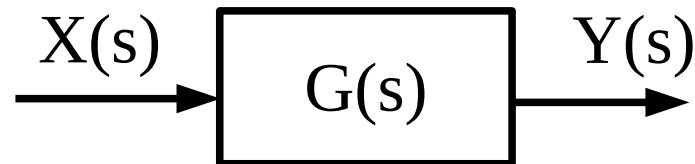
$$[h] = \text{ss2tf}(sl)$$

# Opis układów w przestrzeni stanu – schematy blokowe

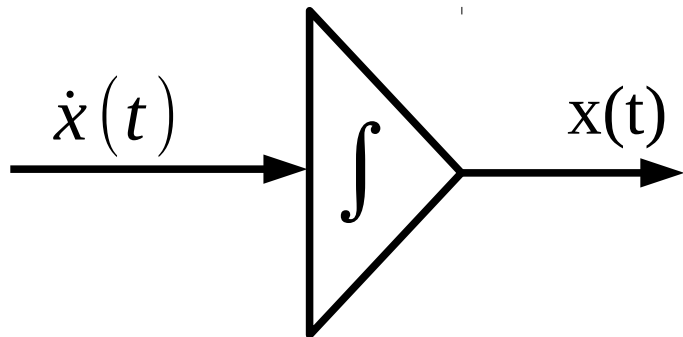
Odpowiedź impulsowa



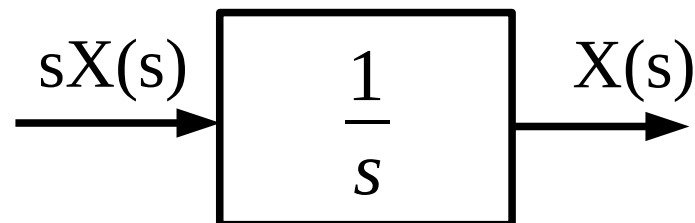
Transmitancja operatorowa



Całkowanie w dziedzinie czasu

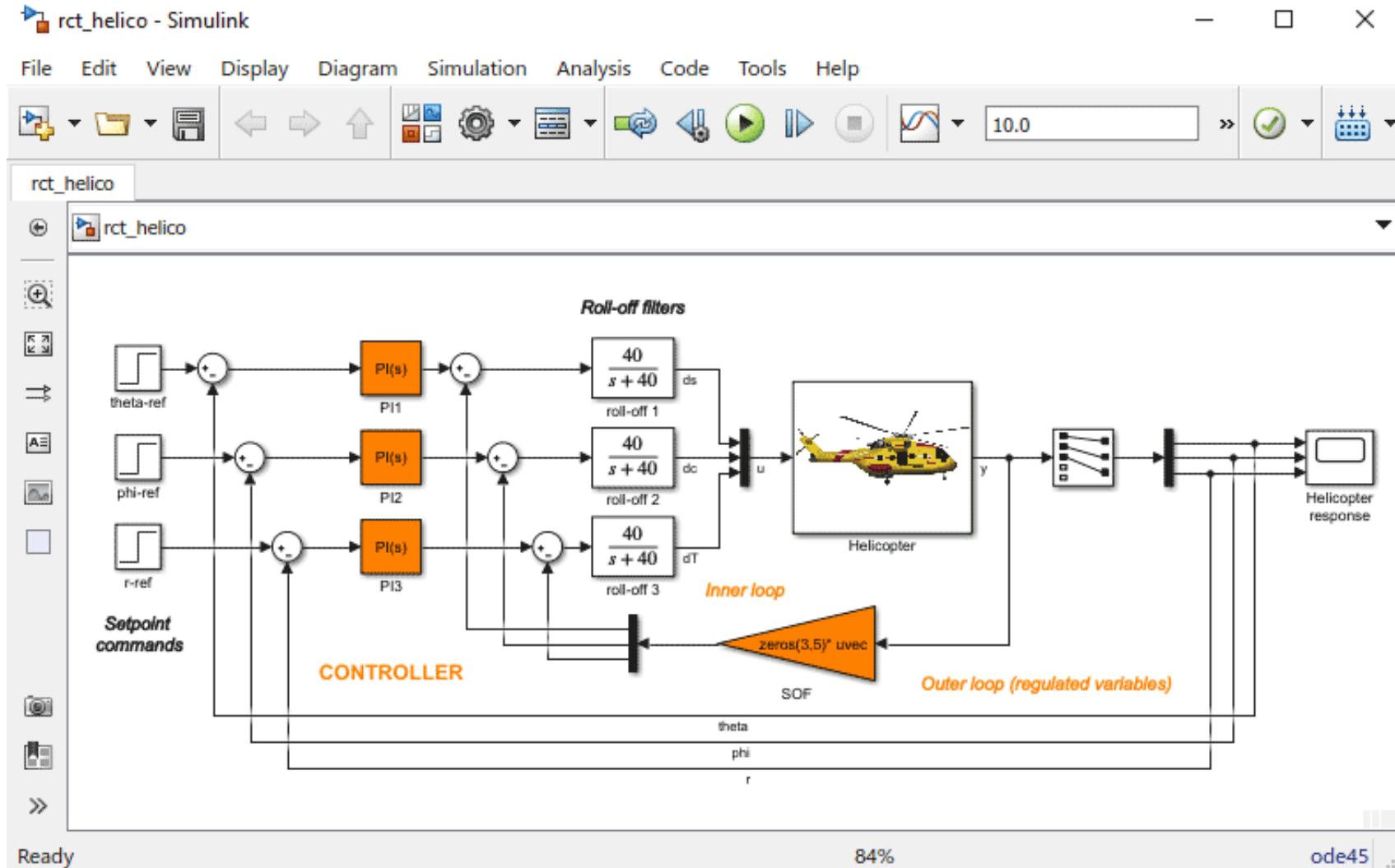


Całkowanie w dziedzinie Laplace'a



# Symulacje numeryczne – oprogramowanie

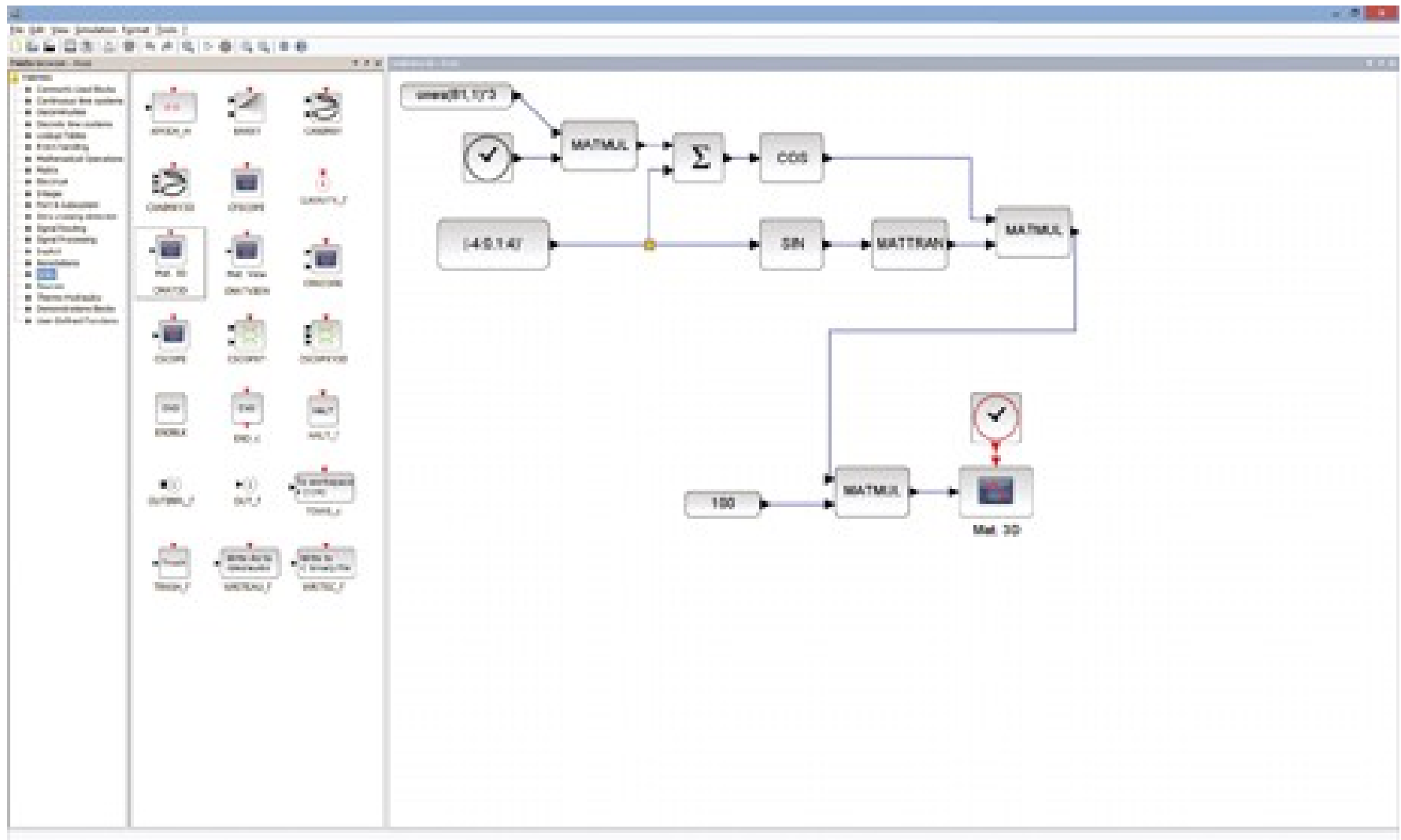
## Matlab® / Simulink®



source: <https://www.mathworks.com>

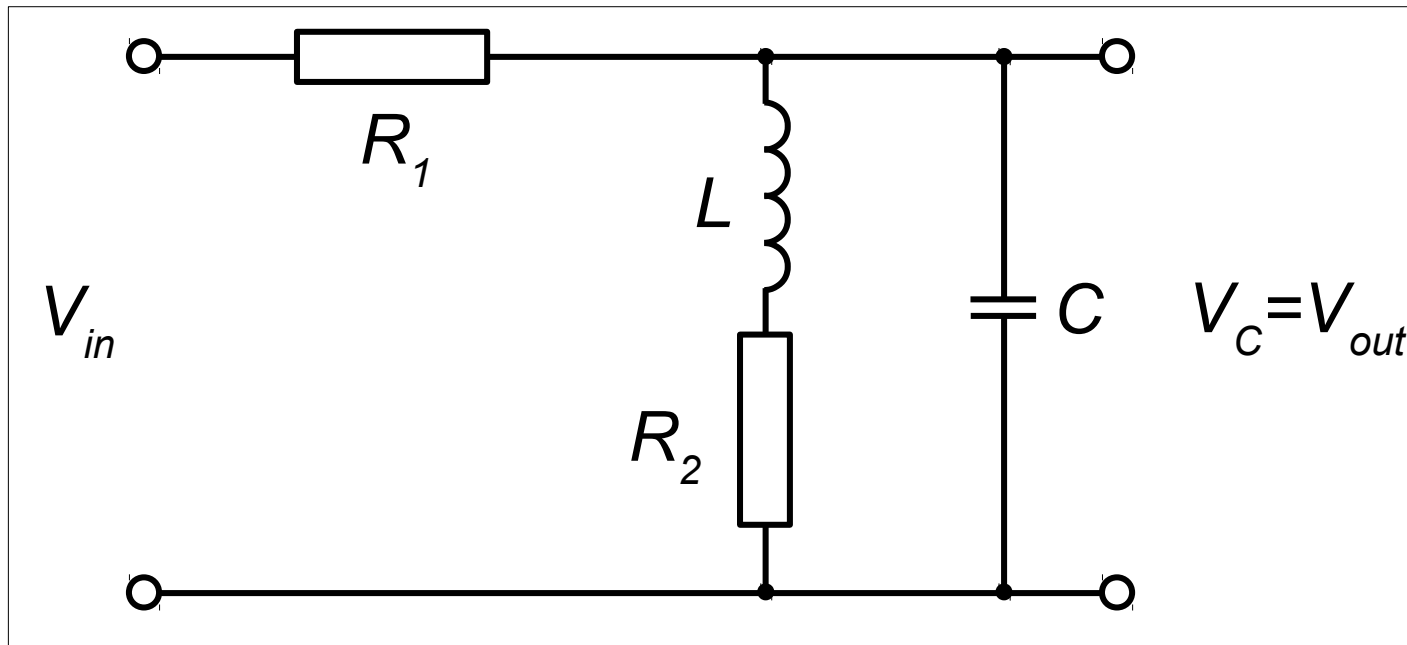
# Symulacje numeryczne – oprogramowanie

## Scilab / Xcos



source: <https://scilab.org/scilab/features/xcos>

# Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 2



$$V_{in}(t) = i_1(t)R_1 + L \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t)R_2$$

$$V_{in}(t) = i_1(t)R_1 + V_C(t)$$

$$C \frac{dV_C(t)}{dt} = i_3(t)$$

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t)$$



# Opis układów w przestrzeni stanu

## Tworzenie równań stanu i wyjścia z transmitancji operatorowej

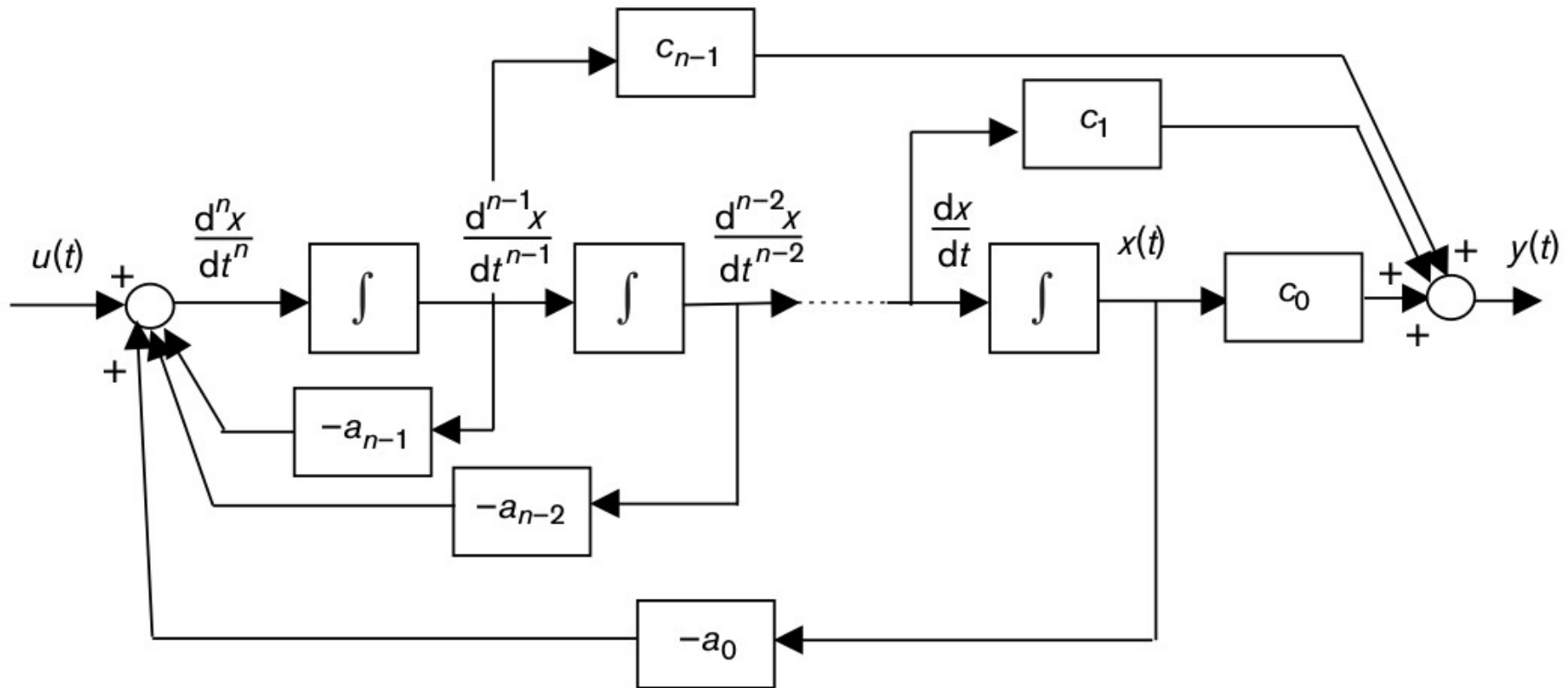
Metoda bezpośrednia (kanoniczna forma sterowania) – na podstawie współczynników wielomianów transmitancji tworzy się schemat blokowy według ustalonej reguły. Ze schematu blokowego bezpośrednio odczytuje się równania stanu i wyjścia.

Metoda równoległa (kanoniczna forma modalna) – transmitancję układu przedstawić należy w formie sumy ułamków prostych i stworzyć schemat blokowy według ustalonej reguły. Ze schematu blokowego odczytuje się równanie stanu i wyjścia. Macierz  $A$  będzie diagonalna.

Metoda iteracyjna – transmitancję przedstawiamy w postaci iloczynowej (widoczne bieguny i zera). Tworzymy schemat blokowy według ustalonej reguły operując na biegunach i zerach.

# Metoda bezpośrednia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$



picture source: Jacqueline Wilkie, Michael Johnson, Reza Katebi, Control engineering - An introductory course, 2002

# Metoda bezpośrednia

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad \text{for } n > m$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

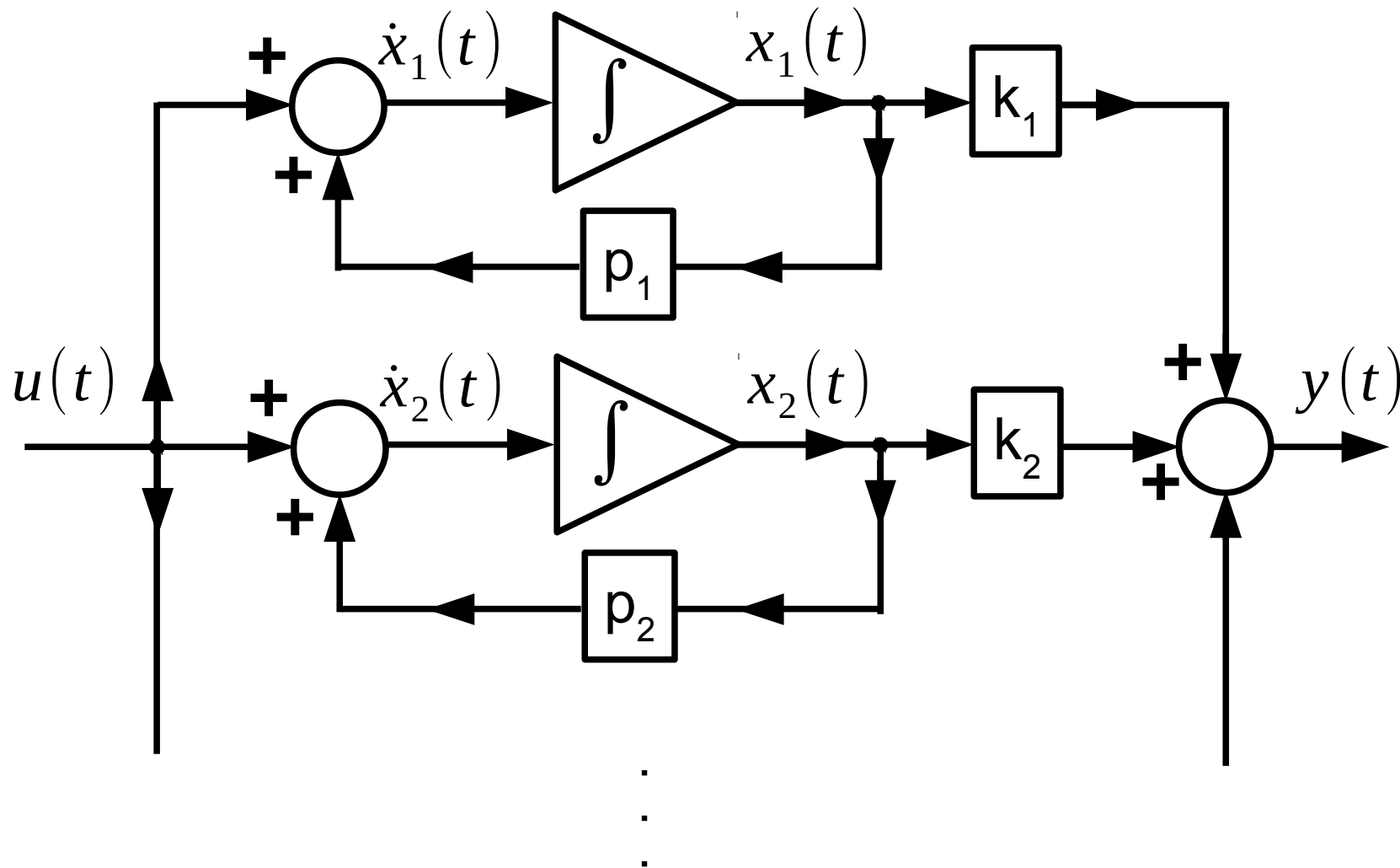
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times k}$$

$$\mathbf{C} = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_{m-1} \quad c_m \quad 0 \quad \dots \quad 0]_{m \times n}$$

$$\mathbf{D} = [0]_{m \times k}$$

# Metoda równoległa

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n} \quad \text{for } n > m$$



# Metoda równoległa

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_1}{s-p_1} + \frac{k_2}{s-p_2} + \dots + \frac{k_n}{s-p_n} \quad \text{for } n > m$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

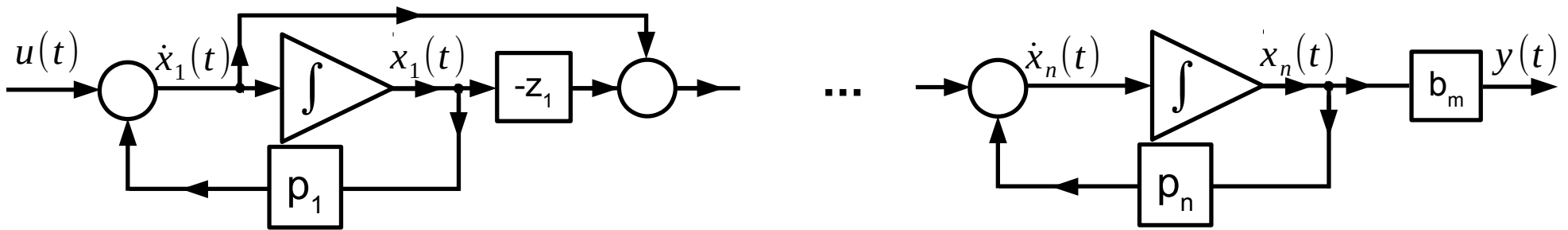
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$\mathbf{C} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad \dots \quad k_{n-1} \quad k_n]_{n \times 1}$$

$$\mathbf{D} = 0$$

# Iterative method for SISO system

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_m \frac{s - z_1}{s - p_1} \frac{s - z_2}{s - p_2} \frac{s - z_3}{s - p_3} \dots \frac{s - z_m}{s - p_m} \frac{1}{s - p_{m+1}} \dots \frac{1}{s - p_n}$$



## Iterative method for SISO system

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = b_m \frac{s-z_1}{s-p_1} \frac{s-z_2}{s-p_2} \frac{s-z_3}{s-p_3} \dots \frac{s-z_m}{s-p_m} \frac{1}{s-p_{m+1}} \dots \frac{1}{s-p_n}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 - z_1 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 - z_1 & p_2 - z_2 & p_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 - z_1 & p_2 - z_2 & p_3 - z_3 & \dots & 0 \\ p_1 - z_1 & p_2 - z_2 & p_3 - z_3 & \dots & p_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$\mathbf{C} = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b_m]_{n \times 1}$$

$$\mathbf{D} = 0, \text{ if } n > m$$

# WAŻNE POJĘCIA

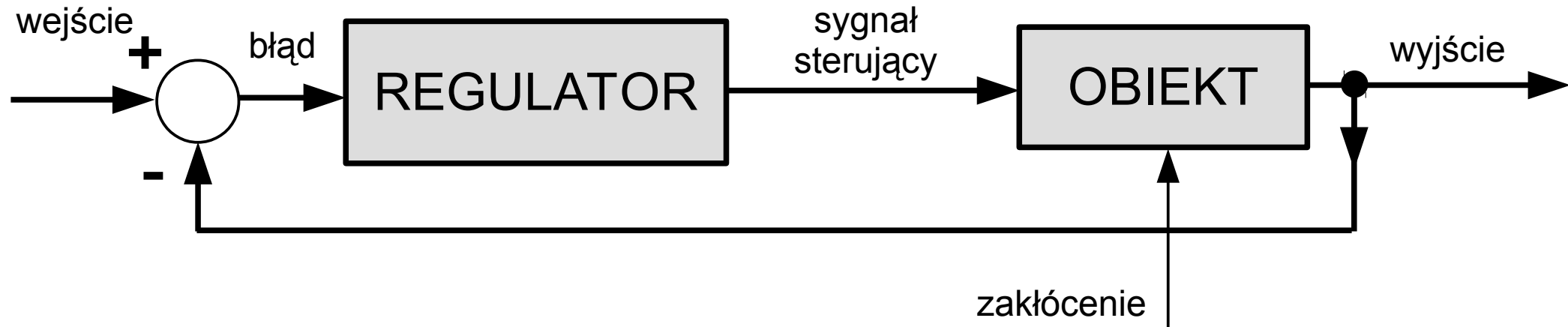
Sterowanie krzepkie (odporne, *robust*) – sposób sterowania, w którym zapewnione jest prawidłowe funkcjonowanie i stabilność przy możliwości zmieniania się parametrów układu w ustalonym zakresie.

Sterowanie adaptacyjne – metoda sterowania, w której nastawy regulatora są zmieniane w czasie w celu dostosowania do występujących zmian parametrów układu. Są to regulatory samonastawialne, z uczeniem iteracyjnym lub oparte o teorię sterowania dualnego.

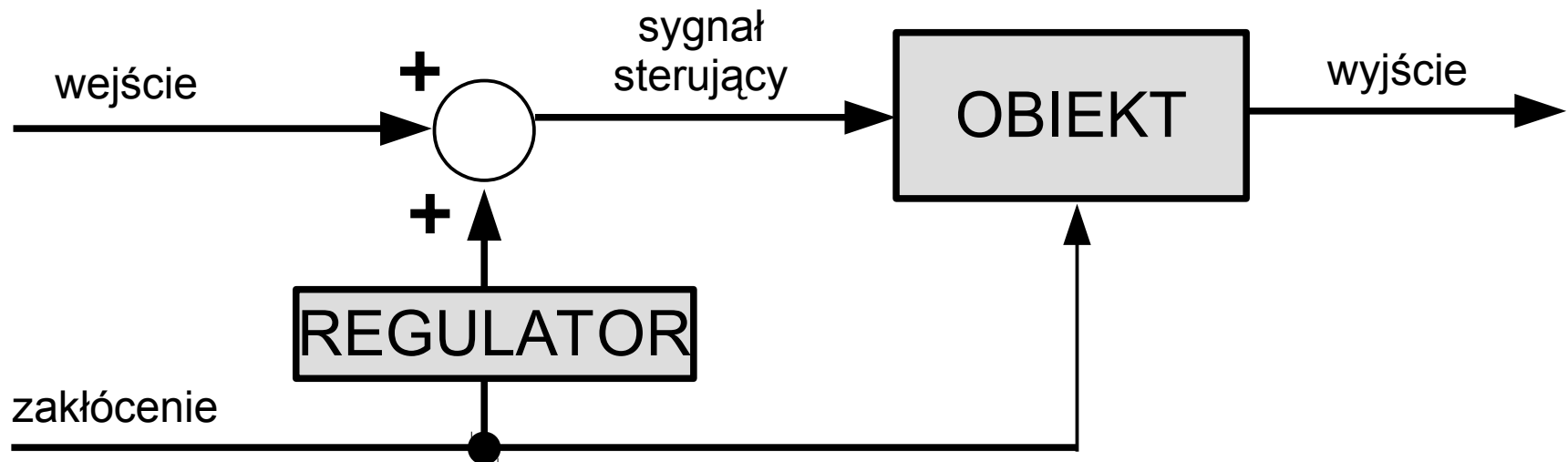
Sterowanie inteligentne – sterowanie wykorzystujące np. sztuczne sieci neuronowe, uczenie maszynowe, algorytmy genetyczne, logikę rozmytą.



# Sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym (feedback)



# Sterowanie ze sprzężeniem w przód (feedforward)



# TRZY ZADANIA STEROWANIA

Stabilizacja – sterowanie, w którym wartość zadana jest niezmienna w czasie (np. stała temperatura w piecu, stała prędkość silnika, zadane położenie ).

Śledzenie trajektorii – wartość zadana jest z góry ustaloną funkcją czasu, czyli ruch odbywa się po trajektorii z ustalonym rygorem czasu (np. sterowanie ramieniem robota)

Podążanie za ścieżką – pożądaný stan obiektu (np. Położenie) jest opisane funkcją parametryczną, tzn. Regulator ma zapewnić ruch po ścieżce ale bez rygoru czasowego (regulator może dobrać prędkość, np. ruch pojazdów autonomicznych).

# WAŻNE POJĘCIA

Sterowalność – własność układu, polegająca na możliwości zmiany stanu układu z początkowego na dowolny stan końcowy w skończonym czasie i z użyciem dopuszczalnych sygnałów sterujących. Sprawdzamy ją w układach liniowych z warunku na rząd macierzy Kalmana  $[B \ AB \ A^2B \ \dots]$ , a w układach nieliniowych z warunku na rząd macierzy tworzonej z zastosowaniem nawiasów Liego.

Obserwowalność – własność układu, polegająca na możliwości odtworzenia stanu układu na podstawie znajomości sygnałów sterujących i wyjściowych. Sprawdzamy ją w układach liniowych z warunku na rząd macierzy Kalmana  $[C \ CA \ CA^2 \ \dots]^T$ .

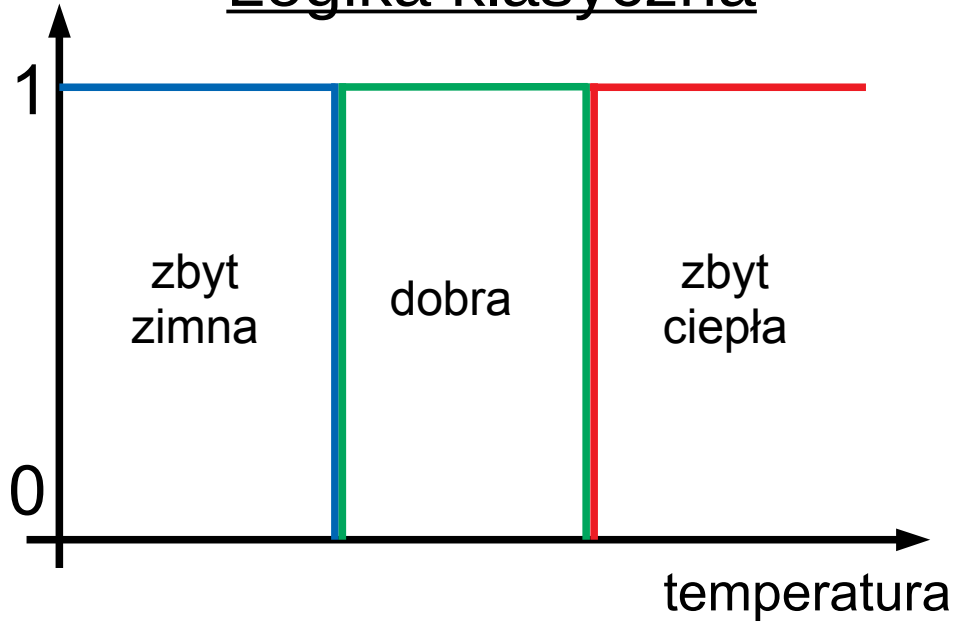
# Sterowanie rozmyte w przykładach

Zadanie: sterowanie temperaturą cieczy.

Algorytm sterowania zakłada różne działania w zależności od klasyfikacji temperatury do trzech grup: za zimna, dobra, za ciepła.

# Sterowanie rozmyte w przykładach

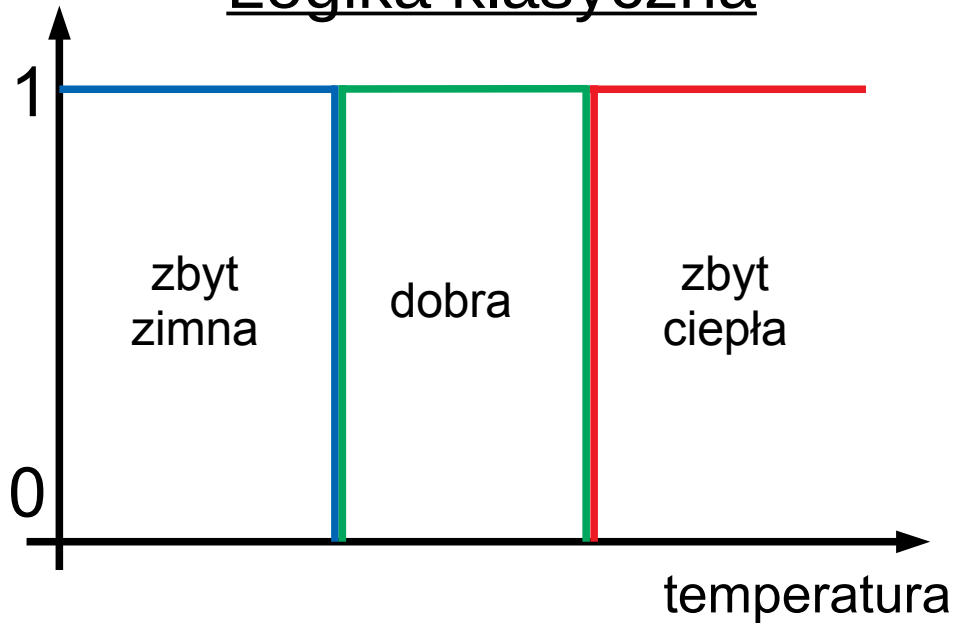
## Logika klasyczna



zbyt zimna:	
dobra:	
zbyt ciepła:	

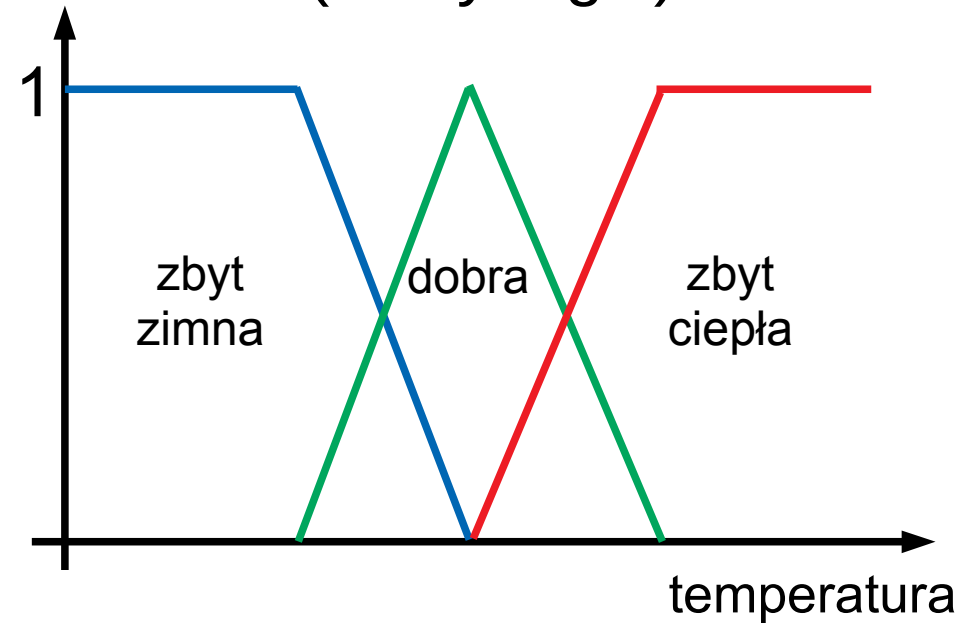
# Sterowanie rozmyte w przykładach

## Logika klasyczna



zbyt zimna:	
dobra:	
zbyt ciepła:	

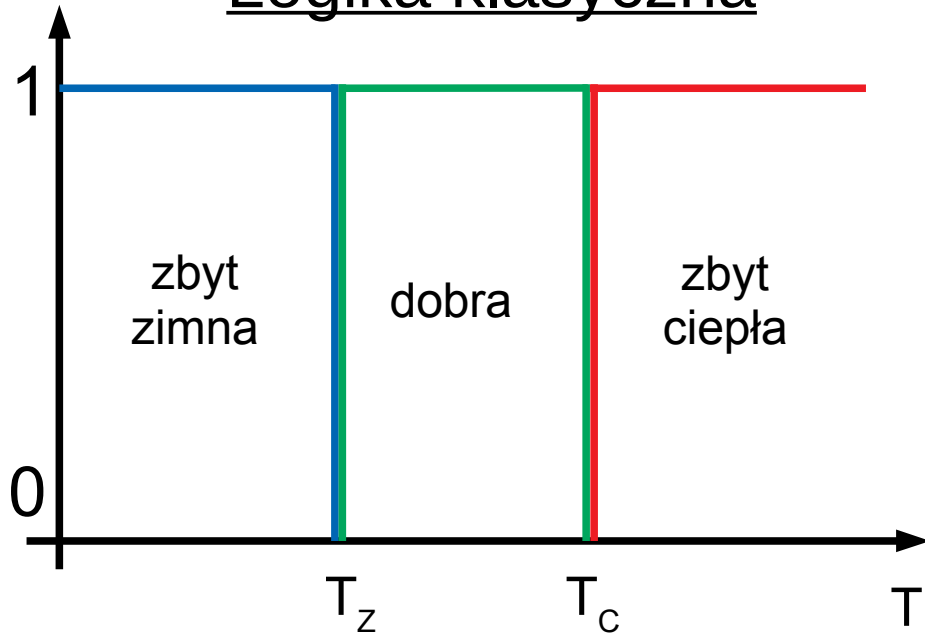
## Logika rozmyta (fuzzy logic)



zbyt zimna:	
dobra:	
zbyt ciepła:	

# Sterowanie rozmyte w przykładach

## Logika klasyczna



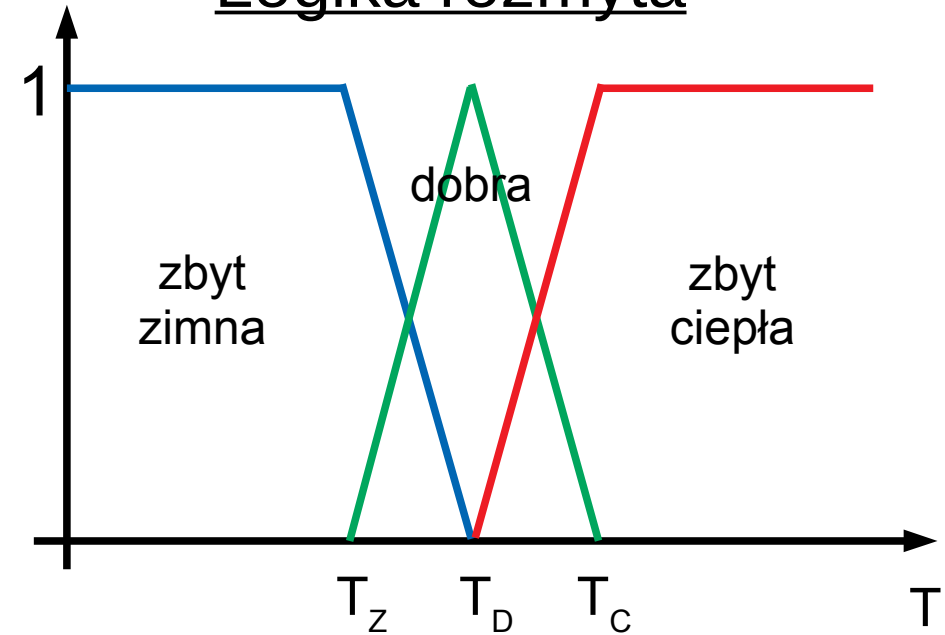
### Funkcje przynależności

$$\text{zimna: } \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } T < T_Z \\ 0, \text{ wpp} \end{cases}$$

$$\text{dobra: } \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } T_Z < T < T_C \\ 0, \text{ wpp} \end{cases}$$

$$\text{ciepła: } \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } T > T_C \\ 0, \text{ wpp} \end{cases}$$

## Logika rozmyta



### Funkcje przynależności

$$\text{zimna: } \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } T < T_Z \\ \frac{(T_D - T)}{(T_D - T_Z)}, \text{ jeżeli } T_Z < T < T_D \\ 0, \text{ wpp} \end{cases}$$

...

Funkcje przynależności mogą mieć różne kształty

# Sterowanie rozmyte w przykładach

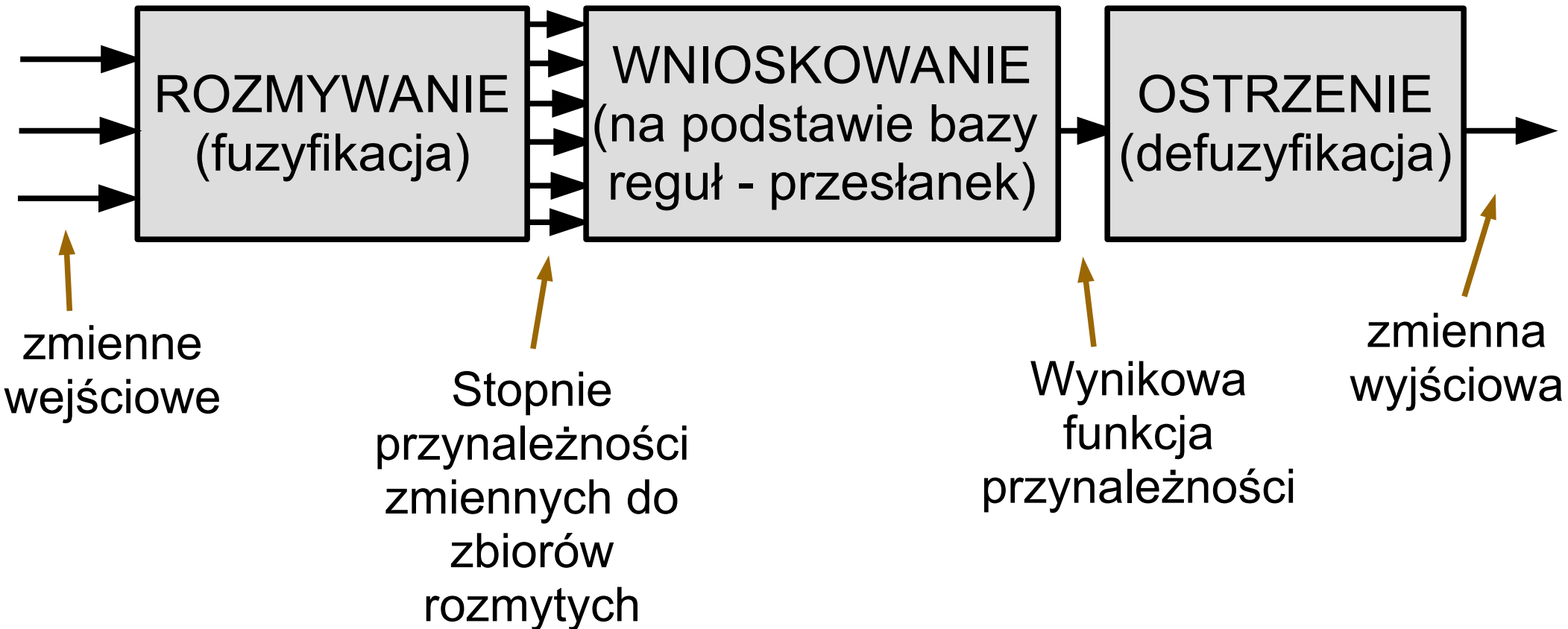
Na zbiorach rozmytych możemy przeprowadzać operacje:

- suma (alternatywa / "lub" / OR) ----->  $\text{MAX}(x,y)$
- iloczyn (koniunkcja / „i” / AND) ----->  $\text{MIN}(x,y)$
- negacja („nie” / NOT) ----->  $\text{NOT}(x)=1-x$



# Sterowanie rozmyte w przykładach

## Regulator rozmyty



# Sterowanie rozmyte w przykładach

## *Łukasiewicz-Tarski logic*

Jan Łukasiewicz (1878-1956)

Alfred Tarski (1901-1983)

# Układy ciągłe i dyskretne

Sygnał ciągły  $x(t)$  for  $t \geq 0$

Sygnał dyskretny  $x[n]$  for  $n \geq 0$

Transformata Laplace'a

Transformata Z

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

(zdefiniowana przez W. Hurewicz)

$$L[\delta(t)] = 1$$

$$Z[\delta(n)] = 1$$

$$L[1(t)] = \frac{1}{s}$$

$$Z[1(n)] = \frac{z}{z-1}$$

$$L[1 - e^{bt}] = \frac{s}{s-b}$$

$$Z[a^n 1(n)] = \frac{z}{z-a}$$

# INNE WAŻNE POJĘCIA

Metoda backstepping

Sterowanie ślizgowe

Sterowanie optymalne

Sterowanie w oparciu o płaszczyznę różniczkową

Model-based control

Metoda obliczanego momentu

Regulator liniowo-kwadratowy (LQR)

# Przykłady

<https://www.youtube.com/watch?v=URmxzxYlmtg>

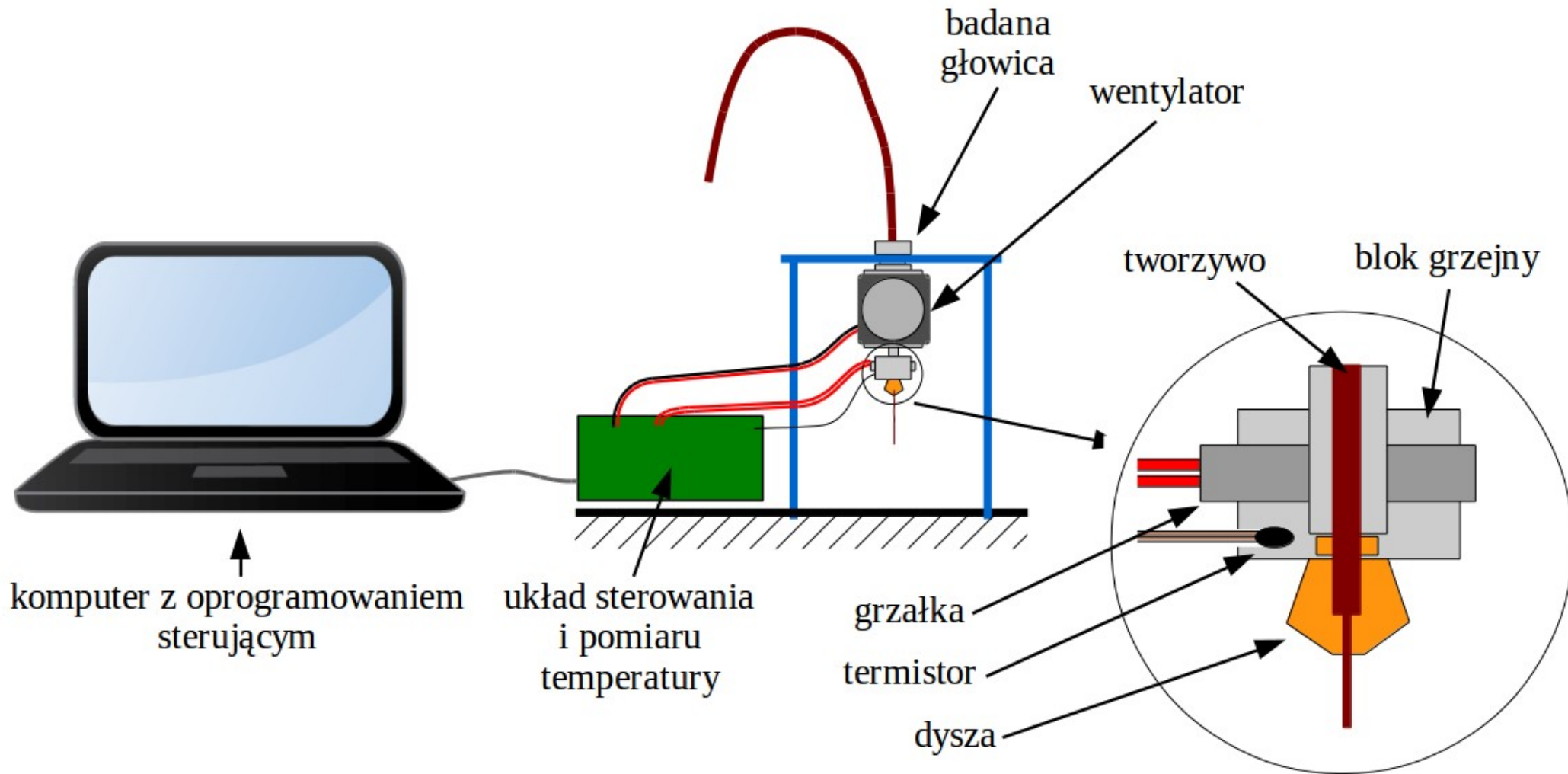
<https://vimeo.com/192179726>

[https://www.youtube.com/watch?v=geqip\\_0Vjec](https://www.youtube.com/watch?v=geqip_0Vjec)

<https://www.youtube.com/watch?v=w2itwFJCgFQ>

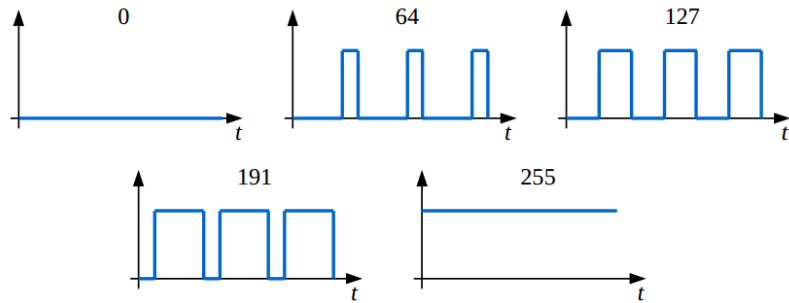
<https://www.youtube.com/watch?v=g11LN0UIlynY>

# Przykład – sterowanie temperaturą głowicy drukarki 3D

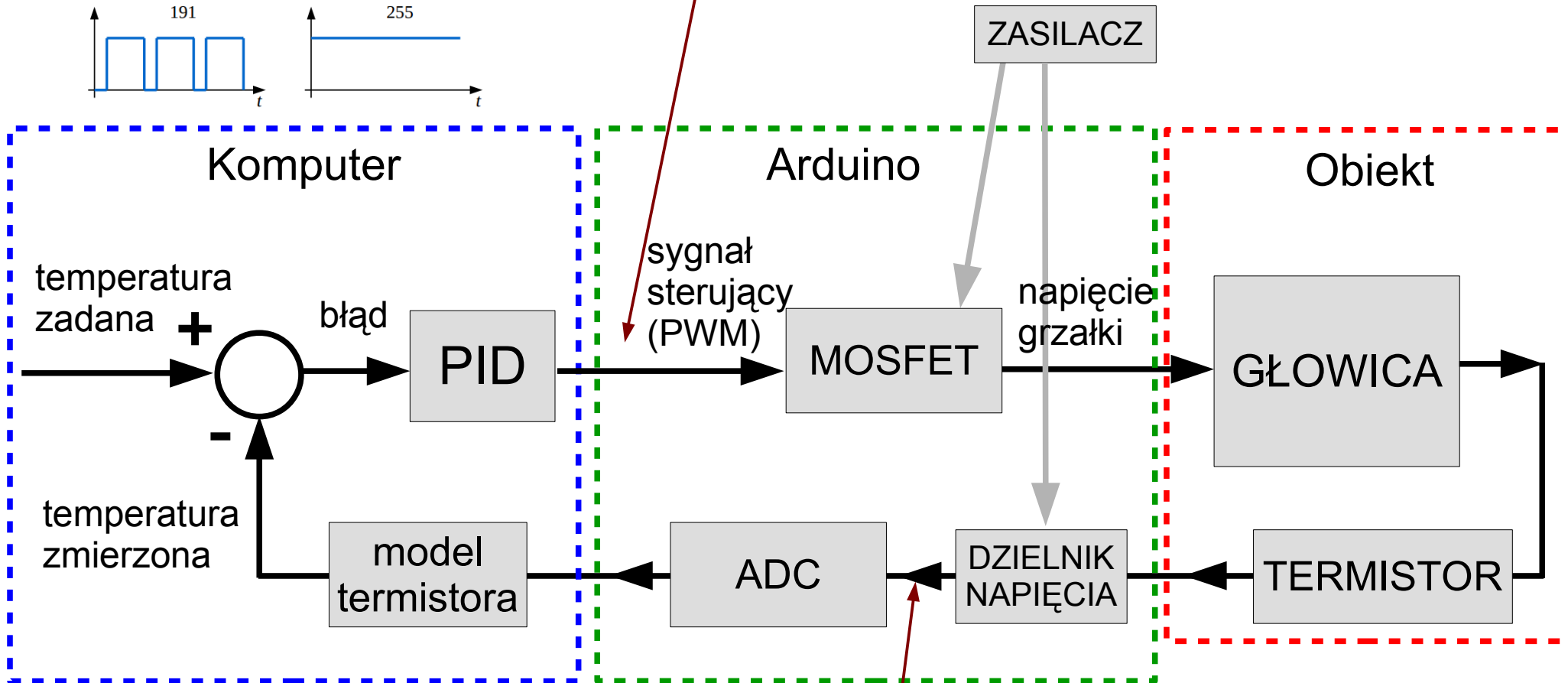


Rys. 1. Schemat stanowiska do badania głowicy drukarki 3D.

# Przykład – sterowanie temperaturą głowicy drukarki 3D



liczba całkowita 0-255  
lub wypełnienie 0%-100%



$$T(u_2) = \frac{1}{\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{R_0}{R_2} \left(\frac{u_1}{u_2} - 1\right)\right)}$$

spadek  
napięcia na  
termistorze

$$R(T) = R_0 \exp\left(\beta \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right)$$

**Materiał na egzamin – wykłady od 1 do 14**  
**(ponad 1100 slajdów...)**

**Wykład 15 – powtórzenie materiału,  
informacje o egzaminie,  
ankiety, konsultacje**