



Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Teoria maszyn i podstawy automatyki
semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 13

Ogólny warunek stabilności.
Kryterium Hurwitza.
Kryterium Nyquista.
Zapas modułu i zapas fazy.
Korekcja układów automatyki.

Ogólny warunek stabilności

$$G(s) = \frac{1}{s-p_1} \quad p_1 - \text{biegun} \in \mathbb{C}$$

wyście: $x(t) = \delta(t)$; $X(s) = 1$

wyście: $Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{1}{s-p_1} \cdot 1$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-p_1} \right\} = e^{p_1 t} = e^{(a_1 + jb_1)t}$$

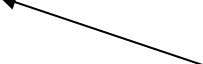
$$= e^{a_1 t} \cdot e^{jb_1 t} = e^{a_1 t} (\cos b_1 t + j \sin b_1 t)$$

$$\text{Re}(y(t)) = e^{a_1 t} \cos b_1 t$$

Ogólny warunek stabilności

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s - p_1}$$

biegun
transmitancji



Wymuszenie impulsowe: $x(t) = \delta(t)$, $X(s) = 1$

Odpowiedź impulsowa: $y(t) = L^{-1}\{x(s)G(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s - p_1}\right\} = e^{p_1 t}$

$$y(t) = e^{(a_1 + j b_1)t} = e^{a_1 t} e^{j b_1 t} = e^{a_1 t} (\cos b_1 t + j \sin b_1 t)$$

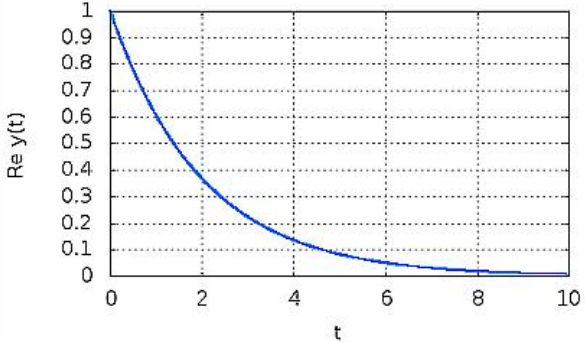
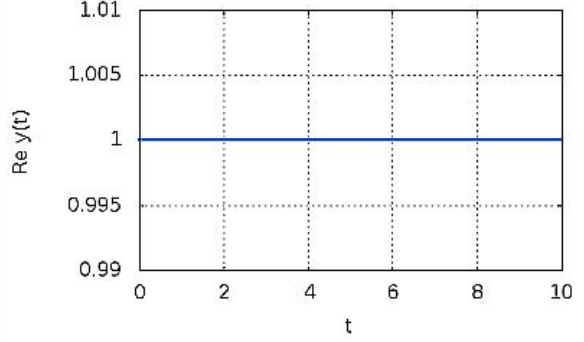
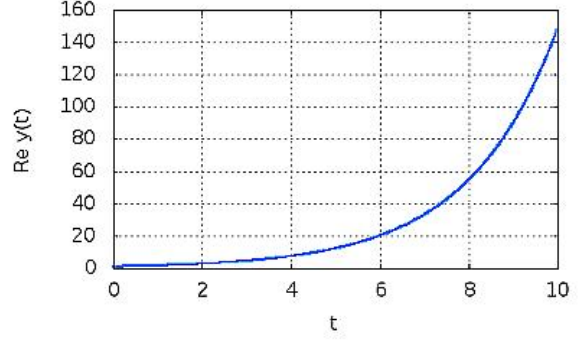
$$\text{Re } y(t) = e^{a_1 t} \cos b_1 t$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s - p_1}$$

$$y(t) = e^{a_1 t} \cos b_1 t$$

$$\operatorname{Re}(p_1) = a_1$$

$$\operatorname{Im}(p_1) = b_1$$

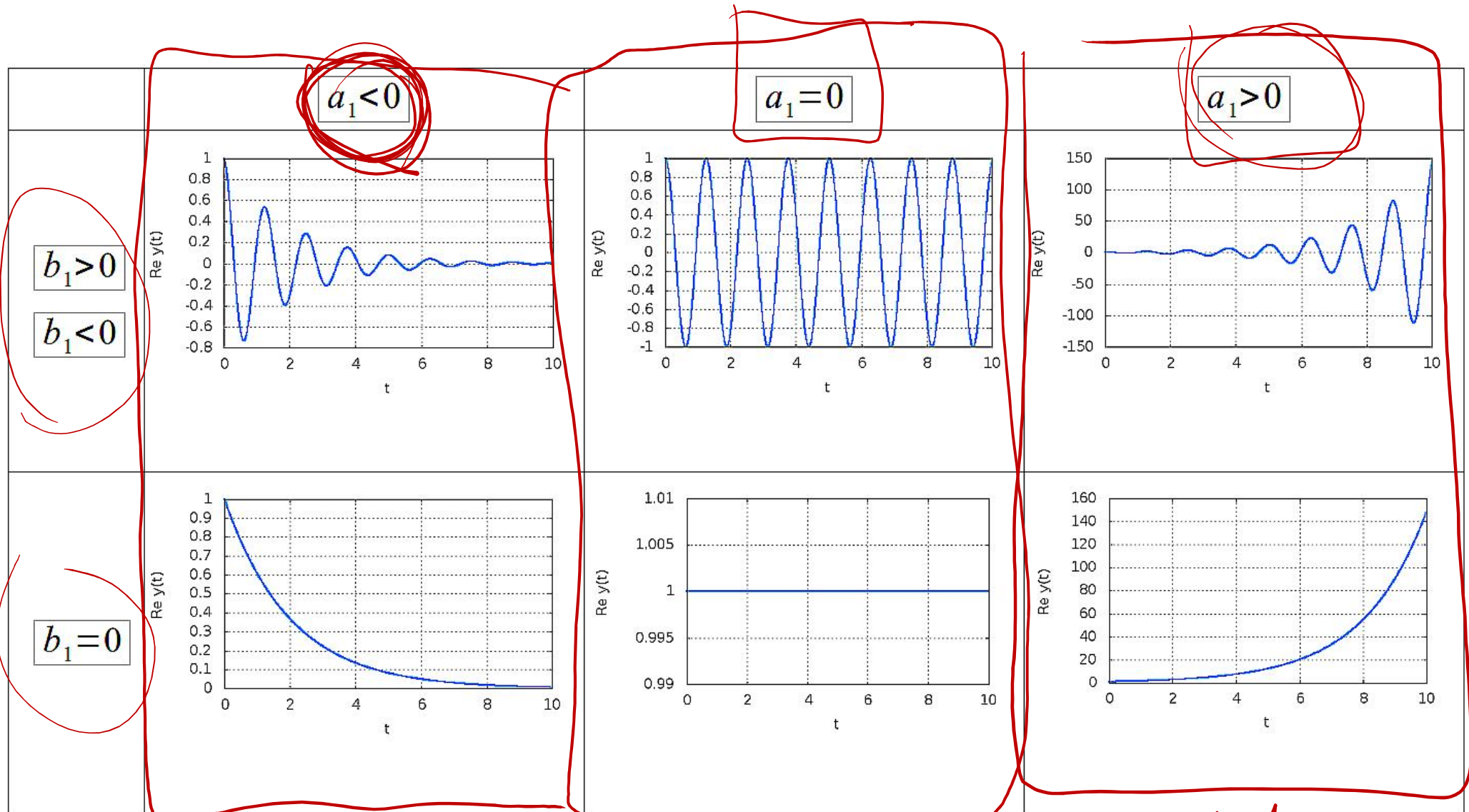
	$a_1 < 0$	$a_1 = 0$	$a_1 > 0$
$b_1 > 0$ $b_1 < 0$			
$b_1 = 0$			

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s - p_1}$$

$$y(t) = e^{a_1 t} \cos b_1 t$$

$$\operatorname{Re}(p_1) = a_1$$

$$\operatorname{Im}(p_1) = b_1$$



stab. asympt.

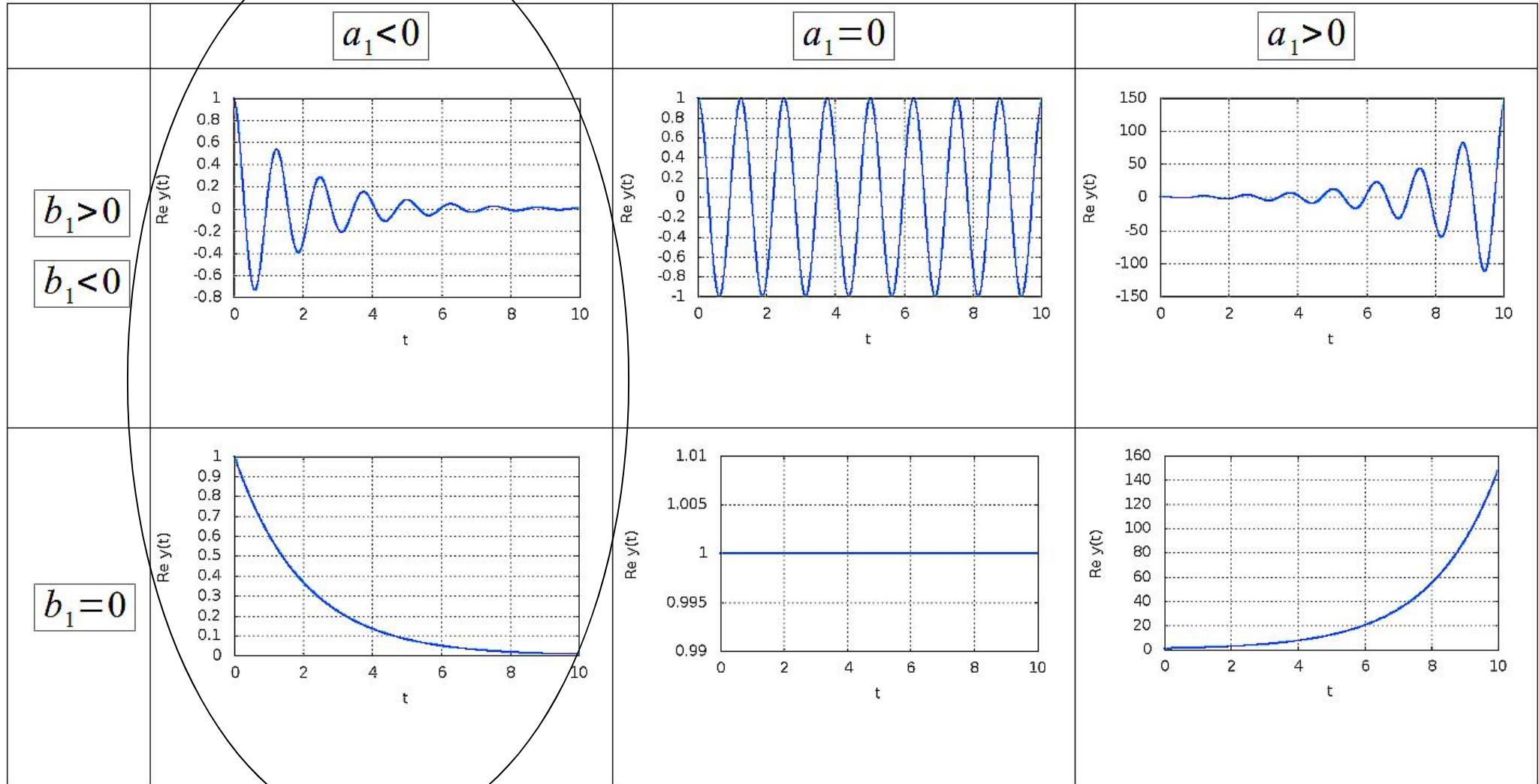
stab.

niestab.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s - p_1}$$

$$y(t) = e^{a_1 t} \cos b_1 t$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(p_1) &= a_1 \\ \operatorname{Im}(p_1) &= b_1 \end{aligned}$$




stabilne asymptotycznie $\operatorname{Re}(p_1) < 0$

Ogólny warunek stabilności – definicja

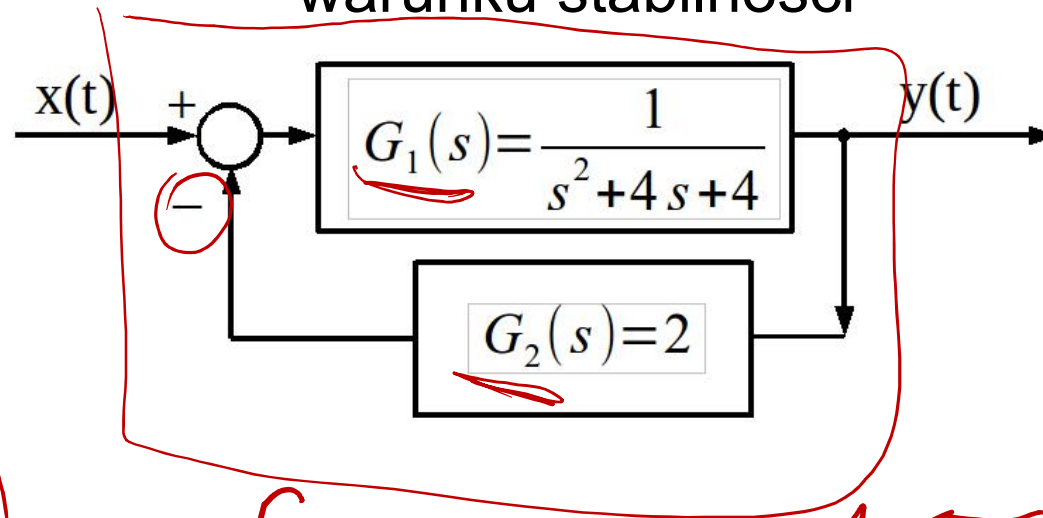
Układ liniowy o jednym wejściu i jednym wyjściu jest stabilny, jeśli części rzeczywiste wszystkich biegunów jego transmitancji są mniejsze od zera.

$$G(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

$$\text{Re } p_1 < 0 \wedge \text{Re } p_2 < 0 \wedge \dots \wedge \text{Re } p_n < 0$$


Przykład 1

Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności



$$G_{\text{RESO}}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 \cdot G_2} = \frac{\frac{1}{s^2 + 4s + 4}}{1 + \frac{2}{s^2 + 4s + 4}} = \frac{1}{s^2 + 4s + 6}$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 6 = -8 = 8j^2$$

$$\sqrt{\Delta} = j2\sqrt{2}$$

$$p_1 = \frac{-4 - j2\sqrt{2}}{2} = -2 - j\sqrt{2}$$

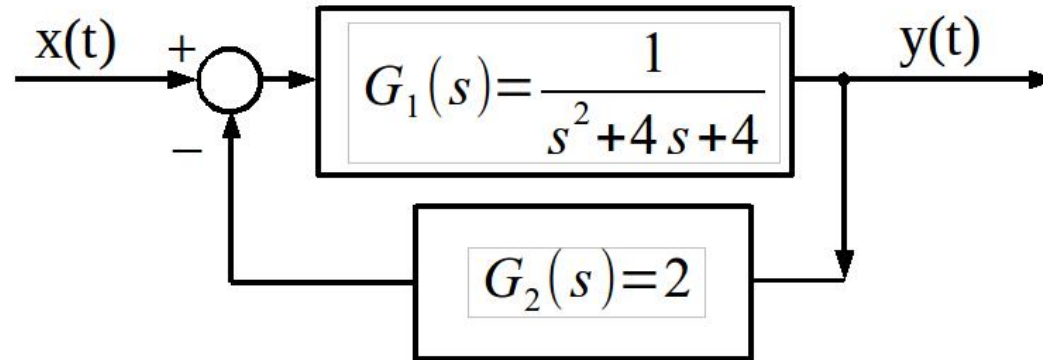
$$p_2 = \frac{-4 + j2\sqrt{2}}{2} = -2 + j\sqrt{2}$$

$$\text{Re}(p_1) = -2 < 0 \quad \text{Re}(p_2) = -2 < 0$$

UKŁAD STABILNY

Przykład 1

Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności



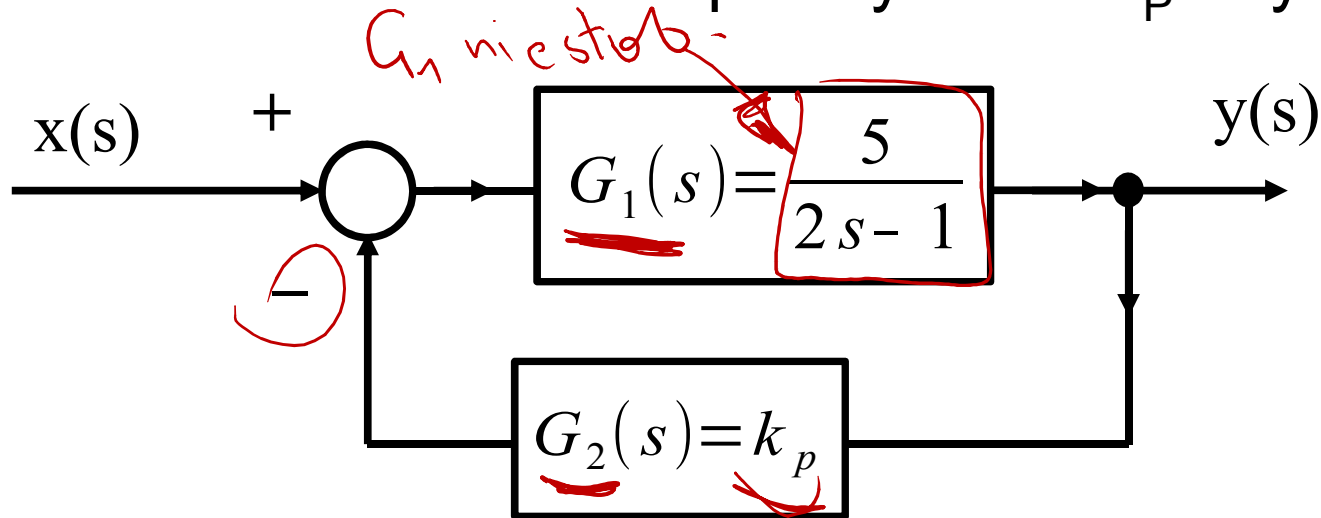
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{1}{s^2 + 4s + 6} = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

$$p_1 = -2 - \cancel{2} \sqrt{2} j, \quad p_2 = -2 + \sqrt{2} j$$

$\Re(p_1) < 0 \wedge \Re(p_2) < 0 \Rightarrow$ układ jest stabilny z ogólnego warunku stabilności

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_p aby układ był stabilny.



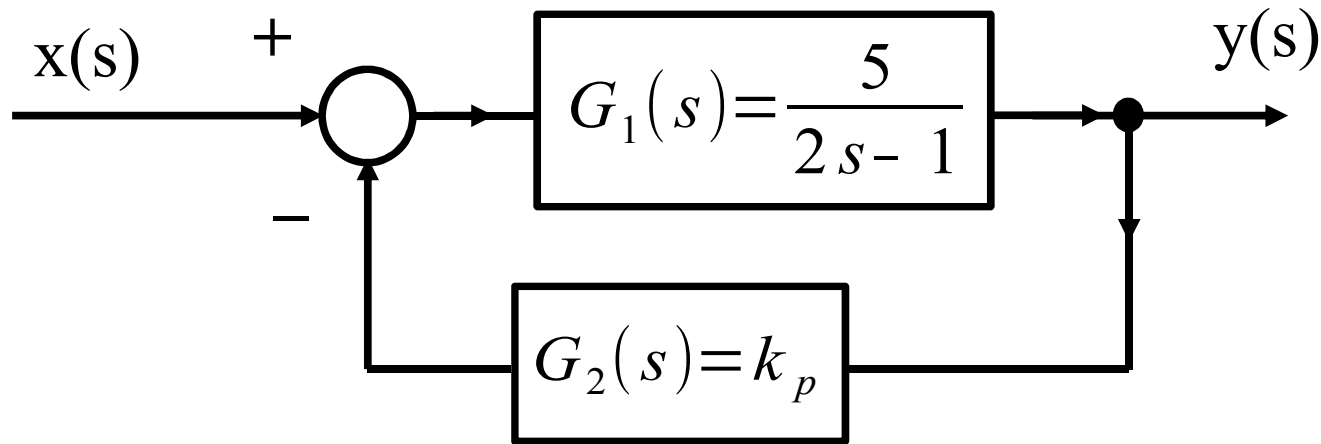
$$G_R = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{\frac{5}{2s-1}}{1 + \frac{5}{2s-1} k_p} = \frac{5}{2s-1 + 5k_p} = \frac{5}{2} \frac{1}{s - \left(\frac{1-5k_p}{2}\right)}$$

STAB. $\rightarrow \frac{1-5k_p}{2} < 0$

$k_p > \frac{1}{5}$

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_p aby układ był stabilny.



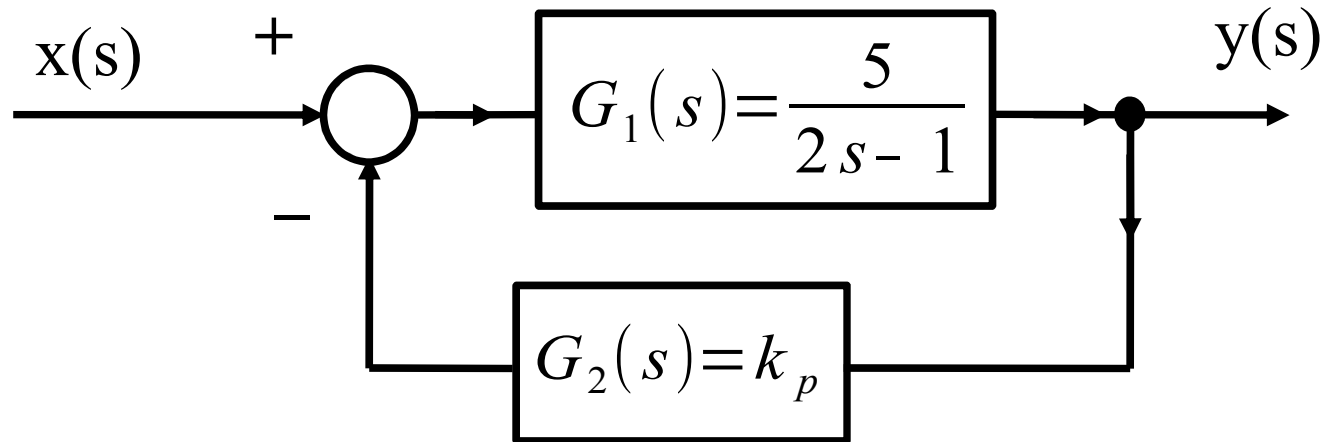
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{5}{2} \frac{1}{s - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} k_p \right)}$$

$$p_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} k_p \right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1) < 0 \Rightarrow k_p > \frac{1}{5}$

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_p aby układ był stabilny.



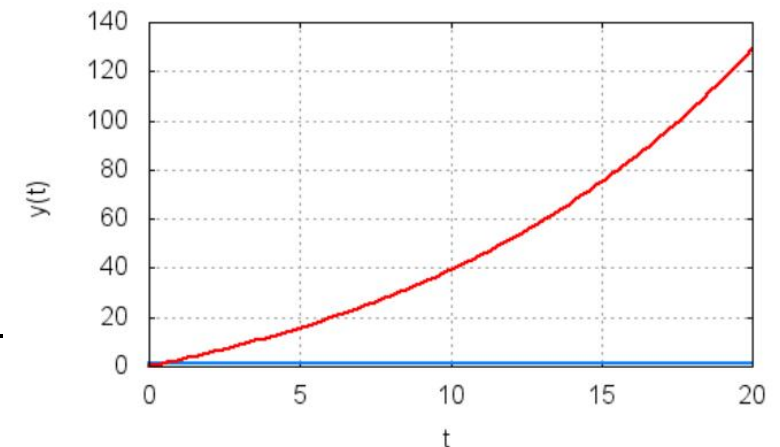
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{5}{2} \frac{1}{s - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} k_p \right)}$$

$$p_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} k_p \right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1) < 0 \Rightarrow k_p > \frac{1}{5}$

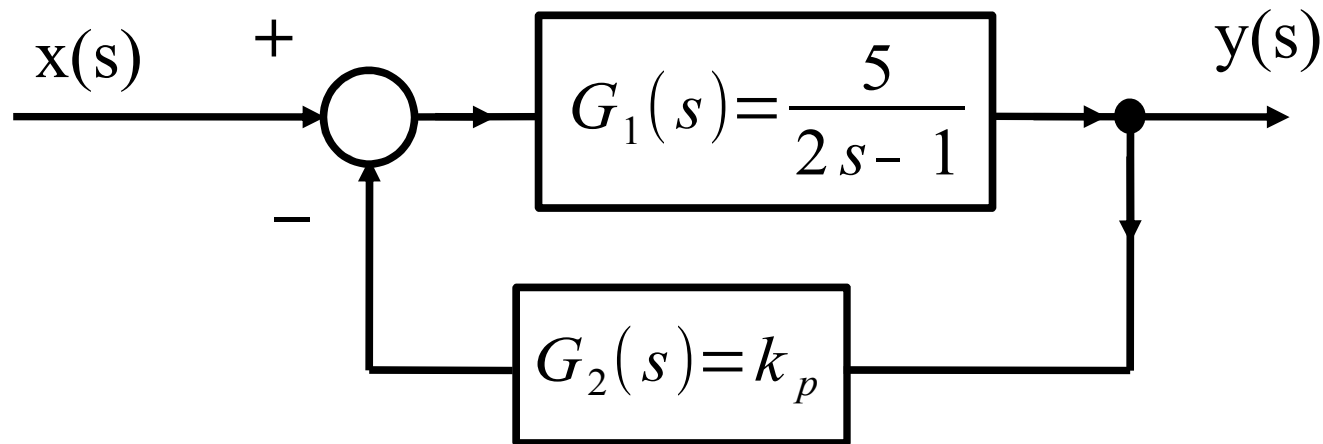
Odp. na wymuszenie skokowe:

$$k_p = \frac{1}{6} \quad (\text{układ niestabilny})$$



Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_p aby układ był stabilny.



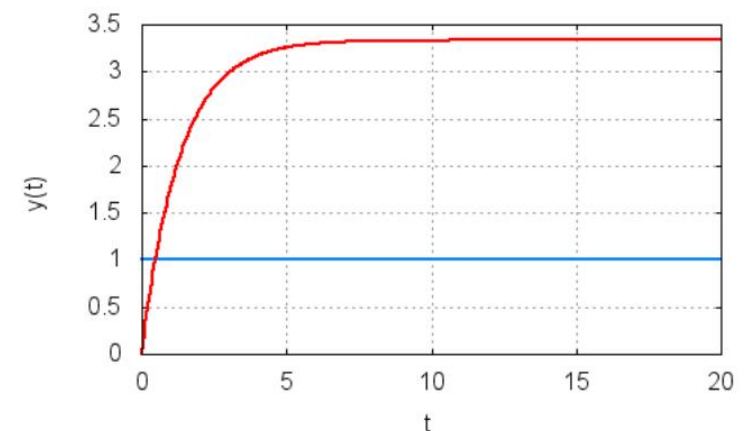
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{5}{2} \frac{1}{s - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} k_p \right)}$$

$$p_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} k_p \right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1) < 0 \Rightarrow k_p > \frac{1}{5}$

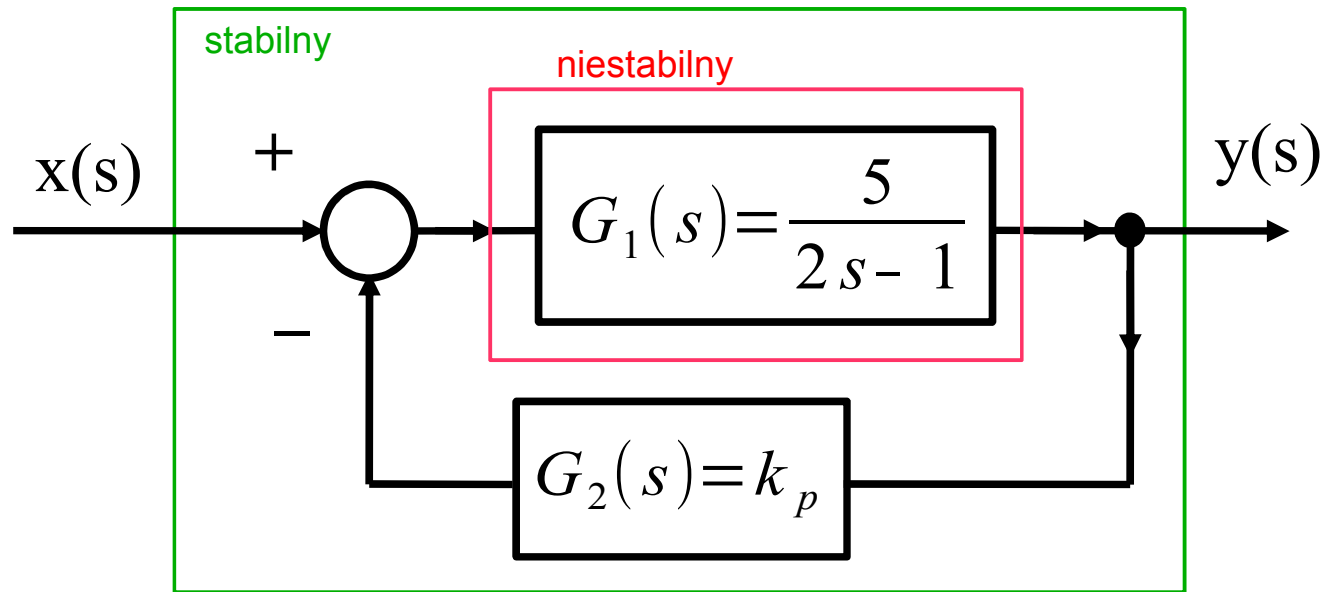
Odp. na wymuszenie skokowe:

$$k_p = \frac{1}{2} \quad (\text{układ stabilny})$$



Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_p aby układ był stabilny.



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} = \frac{5}{2} \frac{1}{s - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} k_p \right)}$$

$$p_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} k_p \right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1) < 0 \Rightarrow k_p > \frac{1}{5}$

Kryterium Hurwitza

W matematyce

Warunek konieczny i wystarczający na położenie wszystkich pierwiastków wielomianu w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej

W teorii sterowania

Warunek konieczny i wystarczający na ujemną część rzeczywistą wszystkich biegunów transmitancji operatorowej obiektu

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

$$\textcircled{1} \quad a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \dots, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$$

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

① $a_n > 0, a_{n-1} > 0, \dots, a_1 > 0, a_0 > 0$

②

Macierz Hurwitza $M_{n \times n} =$

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdot & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

① $a_n > 0, a_{n-1} > 0, \dots, a_1 > 0, a_0 > 0$

②

$$M_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdot & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Δ_2 (blue box), Δ_3 (green box), Δ_{n-1} (red box)

Δ_i - wiodące minory główne
i-tego rzędu macierzy Hurwitza

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

① $a_n > 0, a_{n-1} > 0, \dots, a_1 > 0, a_0 > 0$

② $\det \Delta_2 > 0$

$\det \Delta_3 > 0$

...

$\det \Delta_{n-1} > 0$

Δ_i - wiodące minory główne
i-tego rzędu macierzy Hurwitza

$$M_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdot & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Δ_2 Δ_3 Δ_{n-1}

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

sprawdzamy od $n > 2$

nie sprawdzamy $\det \Delta_n$ bo: $\det \Delta_n = a_0 \det \Delta_{n-1}$

① $a_n > 0, a_{n-1} > 0, \dots, a_1 > 0, a_0 > 0$

② $\det \Delta_2 > 0$

$\det \Delta_3 > 0$

...

$\det \Delta_{n-1} > 0$

Δ_i - wiodące minory główne
i-tego rzędu macierzy Hurwitza

$$M_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the Hurwitz matrix $M_{n \times n}$ and its leading principal minors $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-1}$. The matrix is shown with rows and columns of coefficients. The leading principal minors are highlighted with colored boxes: Δ_2 (blue), Δ_3 (green), and Δ_{n-1} (red). The last row and column are circled in blue.

Kryterium Hurwitza – definicja

Macierz Hurwitza

$$M_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdot & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitza

n	$G(s)$	Warunki stabilności
1	$\frac{L(s)}{a_1 s + a_0}$	$a_1 > 0, a_0 > 0$
2	$\frac{L(s)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$
3	$\frac{L(s)}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$ $\det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} > 0$
4	$\frac{L(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$a_4 > 0, a_3 > 0, a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$ $\det \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} > 0$ $\det \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{bmatrix} > 0$

Kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza \neq Kryterium Routh'a
(1895) (1876)

Kryterium Liénard'a–Chipart'a – modyfikacja kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza

Przykład 1

$$n = 2$$

$$G(s) = \frac{5s+3}{10s^2+3s+1}$$

$\underbrace{10}_{a_2} s^2 + \underbrace{3}_{a_1} s + \underbrace{1}_{a_0}$

$$a_2 > 0; a_1 > 0; a_0 > 0 \rightarrow \text{STAB.}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 2

$$G(s) = \frac{2s}{2s^3 + s + 20}$$

$$n = 3$$

$$a_3 = 2;$$

$$a_2 = 0; a_1 = 1; a_0 = 20$$

Ukt. ME JEST STAB. z KR. HURWITZA

Kryterium Hurwitza

Przykład 3

$$n = 3$$

$$G(s) = \frac{3s - 5}{s^3 + 4s^2 + 3s + 10}$$

$$a_3 = 1 > 0; \quad a_2 = 4 > 0; \quad a_1 = 3 > 0, \quad a_0 = 10 > 0$$

$$M_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 10 > 0$$

UKŁ. STABILNY

Kryterium Hurwitza

Przykład 4

$$G(s) = \frac{1}{\underbrace{3s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 5}}$$

$$a_4 \dots a_0 > 0$$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 4 > 0$$

$$\det \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = \\ = 4 \cdot 4 (6 - 3 - 5) < 0$$

UKŁAD NIE JEST STABILNY Z KRYT. HURWITZA.

Kryterium Hurwitza

Przykład 5

Dobrać parametr k aby spełnić kryterium Hurwitza

$$\frac{k s}{4 s^3 + 3 s^2 + k s + 1}$$

$$a_3 > 0 ; a_2 > 0 \quad \underline{\underline{a_1 = k > 0}} ; a_0 = 1 > 0$$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = 3k - 4 > 0$$

$$\underline{\underline{k > \frac{4}{3}}}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 6

Dobrać parametr k aby spełnić kryterium Hurwitza

2

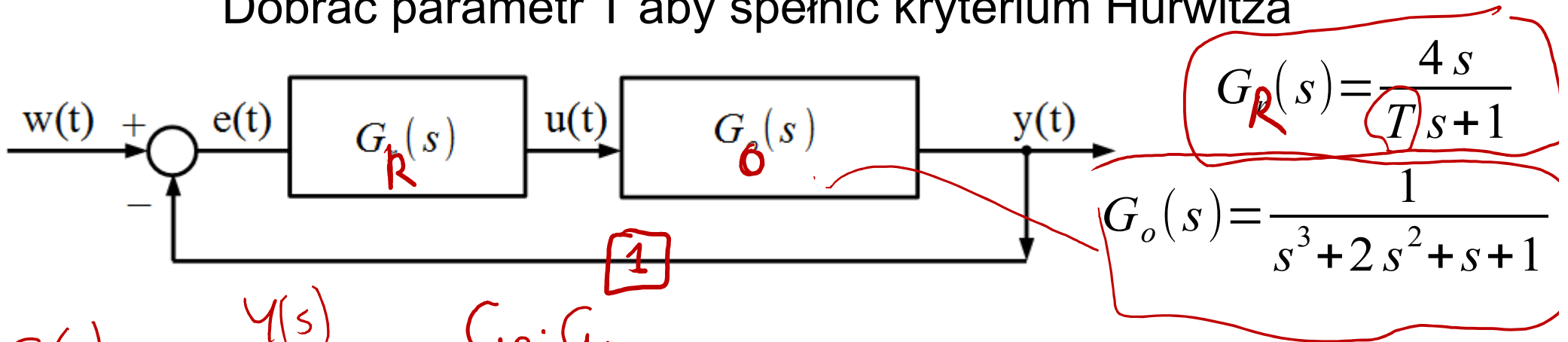
$$\frac{2s^3 + ks^2 + (1+k)s + 3}{2}$$

Do samodzielnego rozwiązania

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_R \cdot G_O}{1 + G_R \cdot G_O \cdot 1} =$$

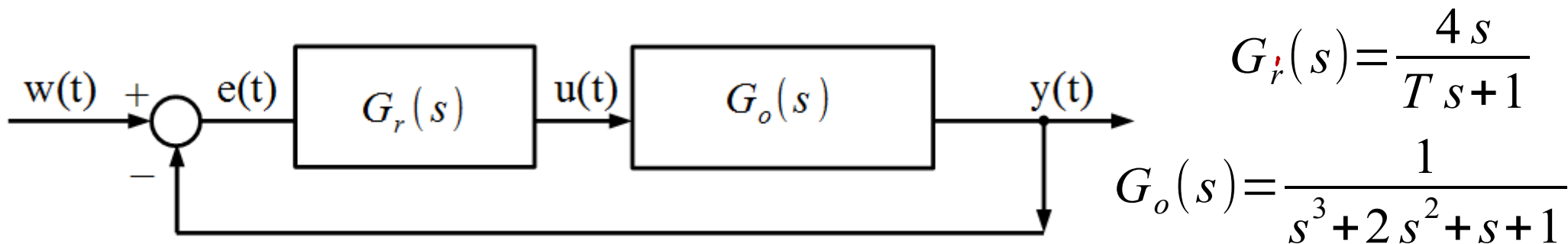
$$= \frac{4s}{(Ts+1)(s^3+2s^2+s+1)} = \frac{4s}{(Ts+1)(s^3+2s^2+s+1) + 4s} =$$
$$1 + \frac{4s}{(Ts+1)(s^3+2s^2+s+1)}$$

$$= \frac{4s}{Ts^4 + (2T+1)s^3 + (T+2)s^2 + (T+5)s + 1}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_z(s) = \frac{G_r G_o}{1 + G_r G_o} = \frac{4s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$a_4 = T, \quad a_3 = 2T + 1, \\ a_2 = T + 2, \quad a_1 = T + 5, \quad a_0 = 1$$

$$a_4 > 0 \rightarrow T > 0$$

$$a_3 > 0 \rightarrow T > -\frac{1}{2}$$

$$a_2 > 0 \rightarrow T > -2$$

$$a_1 > 0 \rightarrow T > -5$$

$$a_0 > 0 \rightarrow T \in \mathbb{R}$$

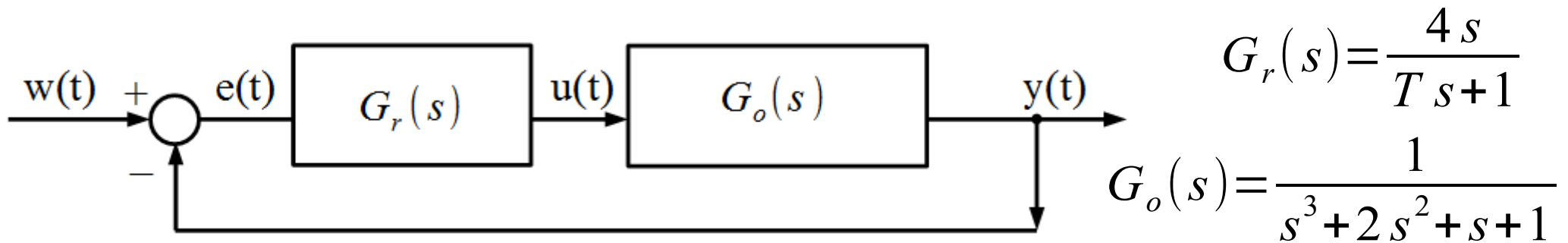
$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = (2T+1)(T+2) - T(T+5) = T^2 + 2 > 0 \rightarrow T \in \mathbb{R}$$

$$\det \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_4 a_1^2 + a_0 a_3^2$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_z(s) = \frac{G_r G_o}{1 + G_r G_o} = \frac{4s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

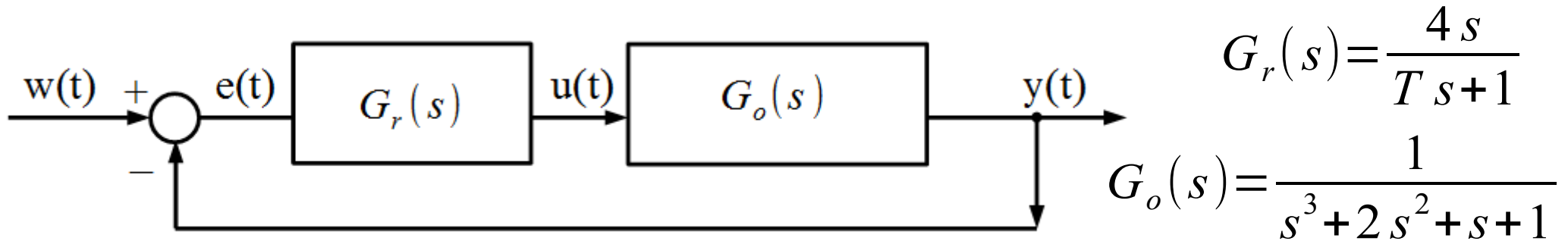
$$a_4 = T, \quad a_3 = 2T + 1,$$
$$a_2 = T + 2, \quad a_1 = T + 5, \quad a_0 = 1$$

$$a_4 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0 \rightarrow T > 0$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_z(s) = \frac{G_r G_o}{1 + G_r G_o} = \frac{4s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

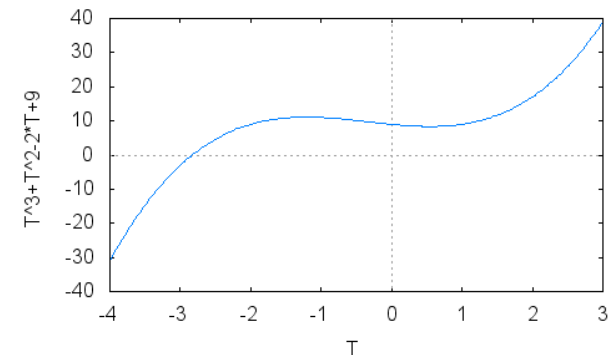
$$a_4 = T, \quad a_3 = 2T + 1, \\ a_2 = T + 2, \quad a_1 = T + 5, \quad a_0 = 1$$

$$a_4 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0 \rightarrow T > 0$$

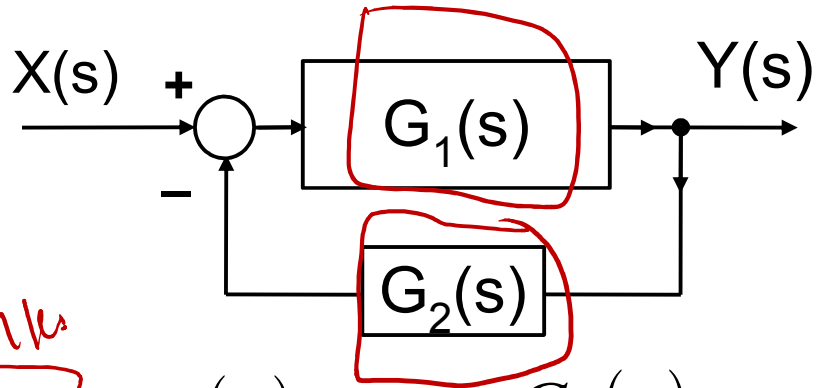
$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} = T^2 + 2 > 0 \quad T \in \mathbb{R}$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{bmatrix} = T^3 + T^2 - 2T + 9 > 0 \rightarrow T > -2.83$$

STABILNY DLA $T > 0$



Kryterium Nyquista – idea



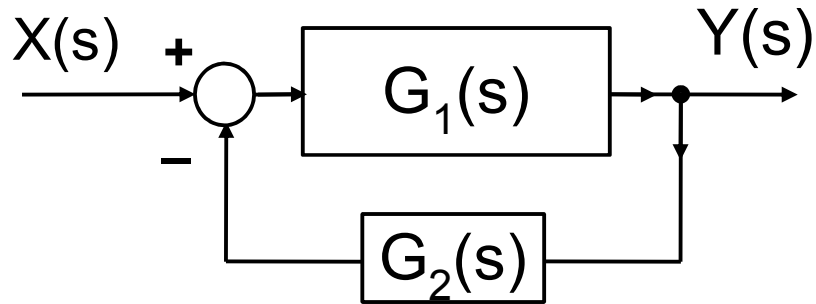
zamkn

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

$$G_1(s) \cdot G_2(s) = -1$$

niestab.

Kryterium Nyquista – idea



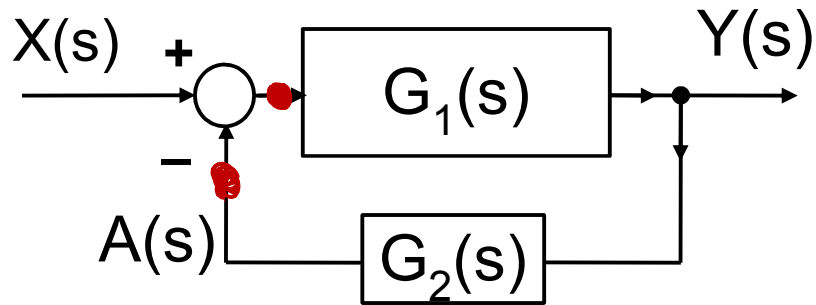
$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Niestabilny,
gdy:

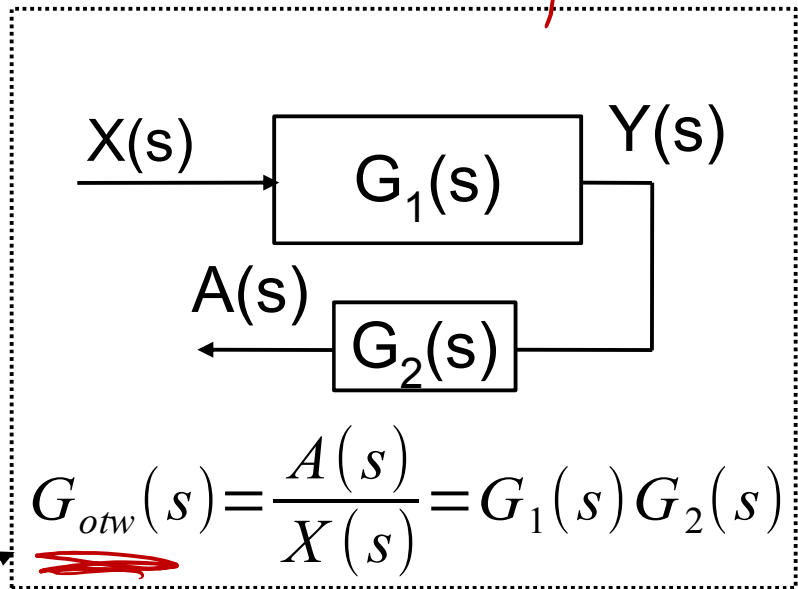
$$G_1 G_2 = -1$$

Kryterium Nyquista – idea

UKŁAD ZWARTY



$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

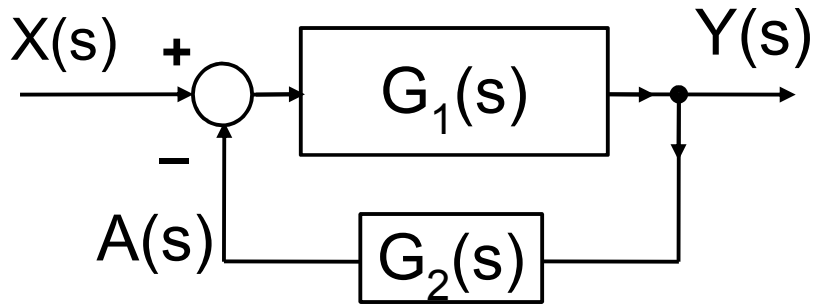


$$G_{otw}(s) = \frac{A(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

Niestabilny,
gdy:

$$G_1 G_2 = -1$$

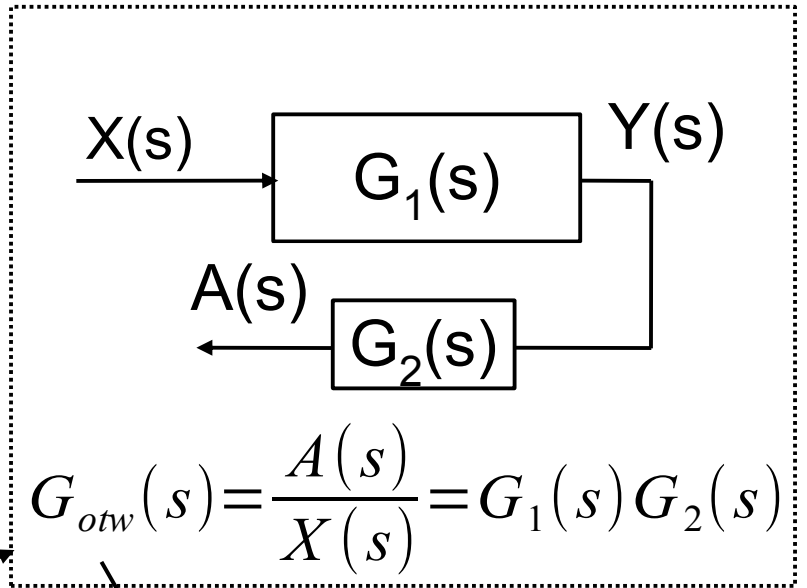
Kryterium Nyquista – idea



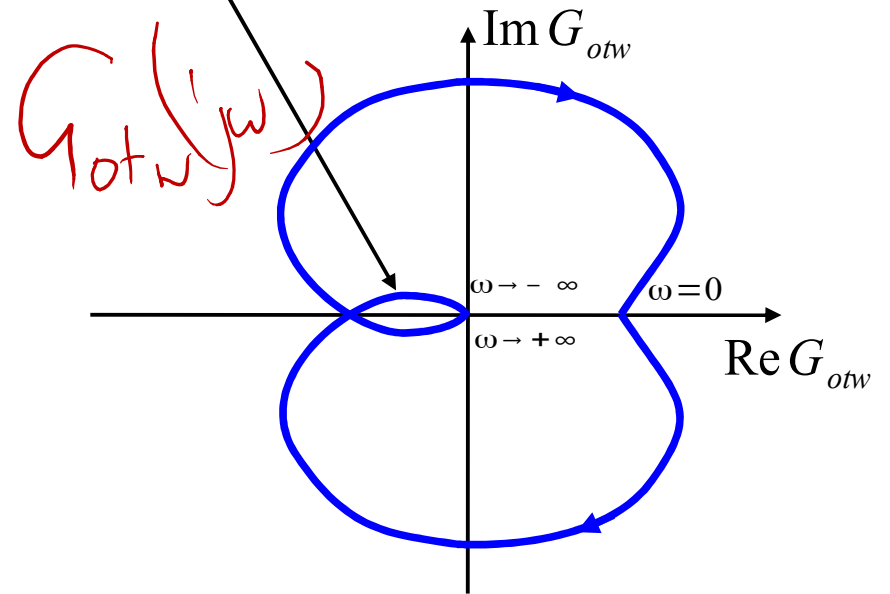
$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Niestabilny,
gdy:

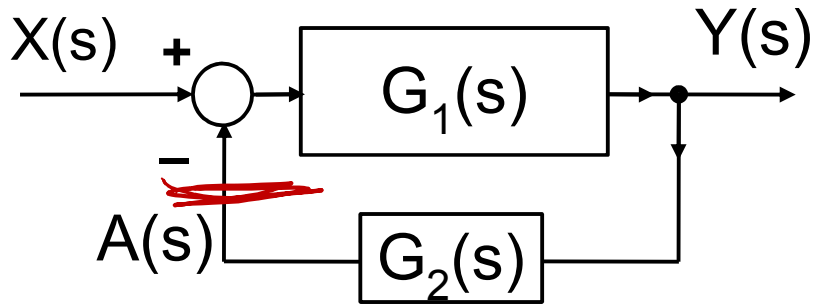
$$G_1 G_2 = -1$$



$$G_{otw}(s) = \frac{A(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s)$$



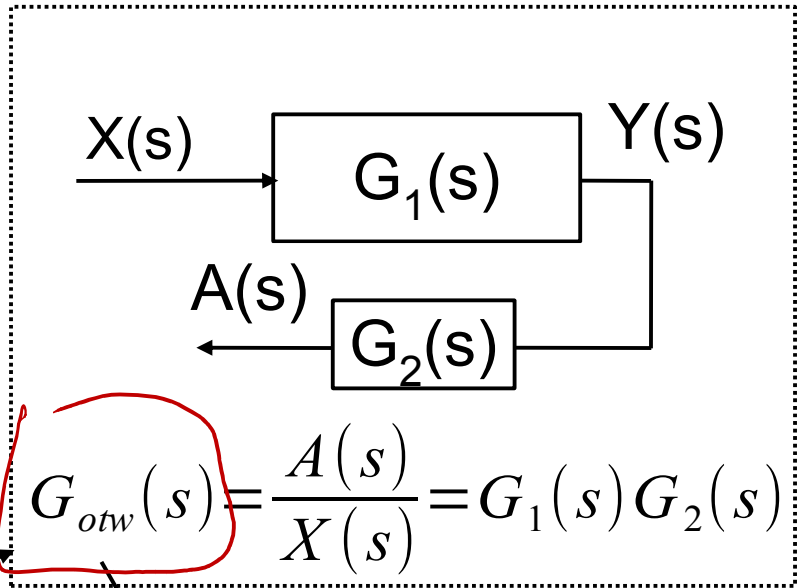
Kryterium Nyquista – idea



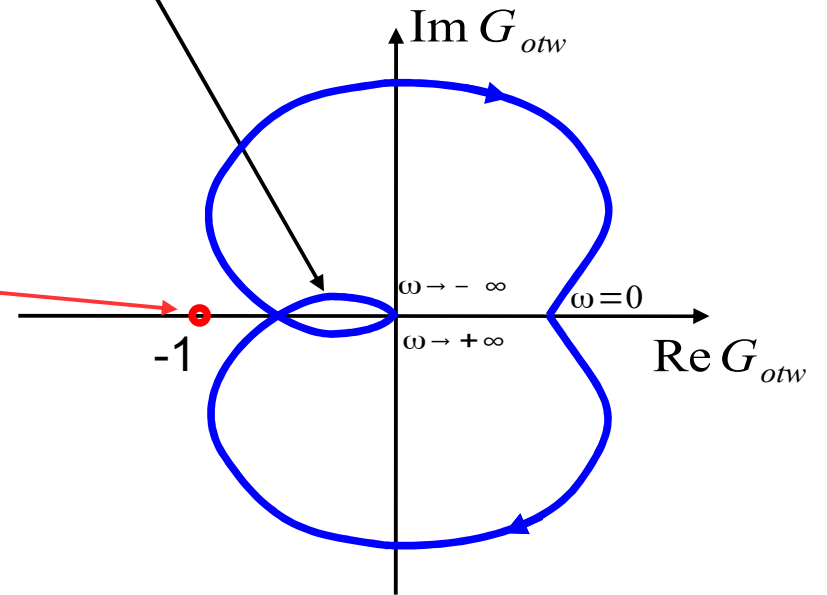
$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

Niestabilny,
gdy:

$$G_1 G_2 = -1$$



$$G_{otw}(s) = \frac{A(s)}{X(s)} = G_1(s)G_2(s)$$



Kryterium Nyquista (szczególne) – definicja

Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:

1) układ otwarty jest stabilny i

2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

// punkt $(-1, j0)$ jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //

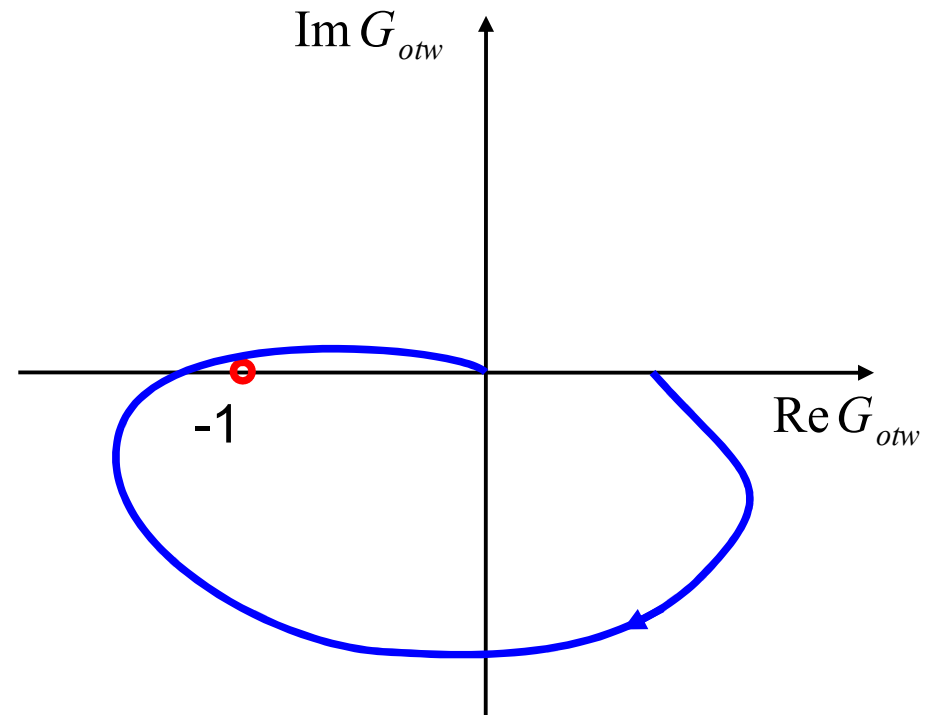
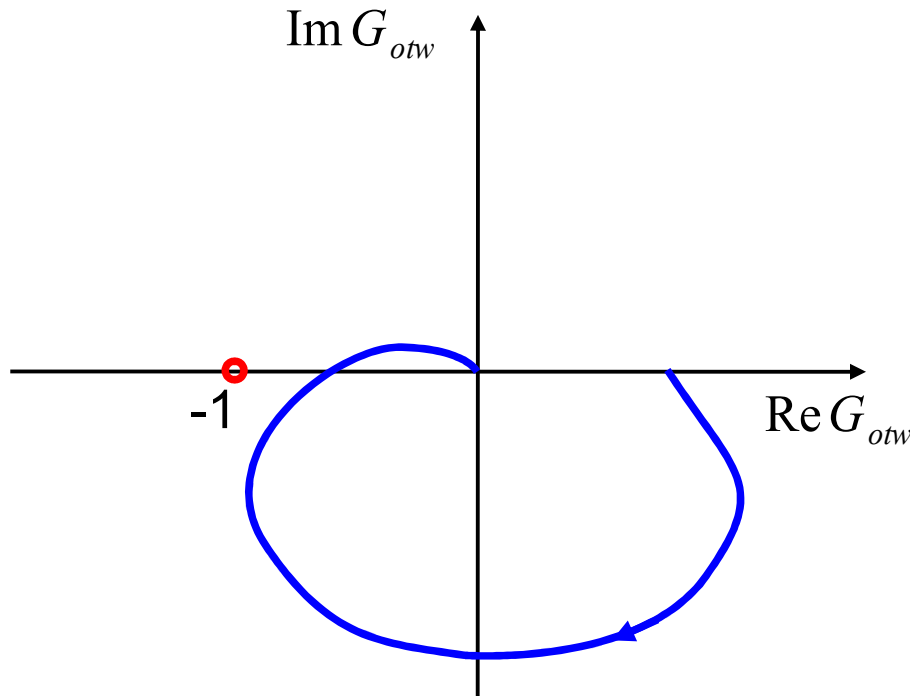
Kryterium Nyquista (szczególne) – definicja

Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:

1) układ otwarty jest stabilny i

2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.

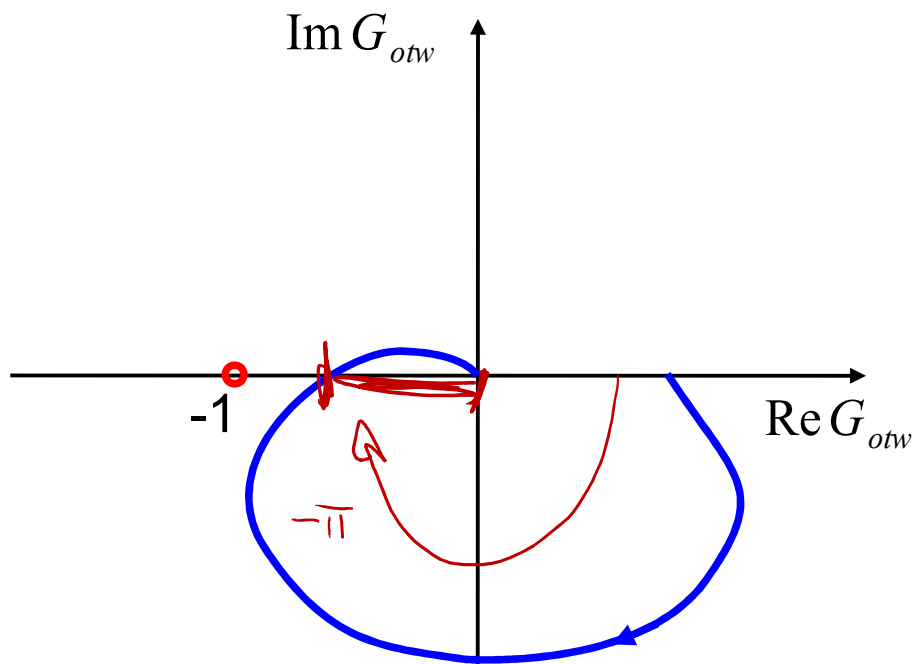
// punkt $(-1, j0)$ jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //



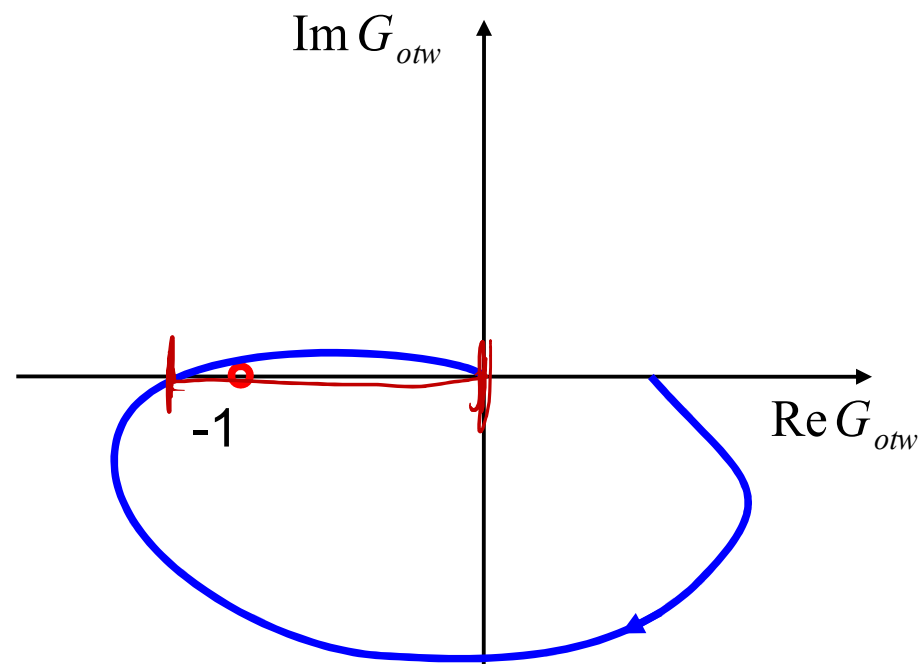
Kryterium Nyquista (szczególne) – definicja

Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:

- 1) układ otwarty jest stabilny i
- 2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu $(-1, j0)$.
// punkt $(-1, j0)$ jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //



układ
zamknięty
stabilny

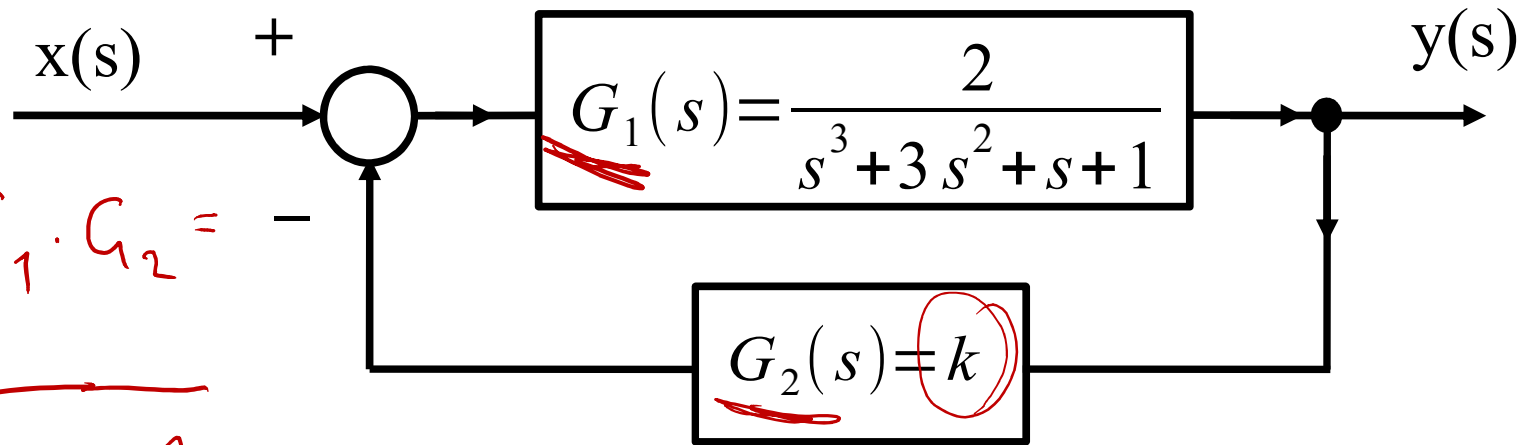


układ
zamknięty
niestabilny

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista



$$G_{otw}(s) = G_1 \cdot G_2 = \frac{2k}{s^3 + 3s^2 + s + 1}$$

(1) G_{otw} stab.? $a_3, \dots, a_0 > 0$

$$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = 3 - 1 > 0$$

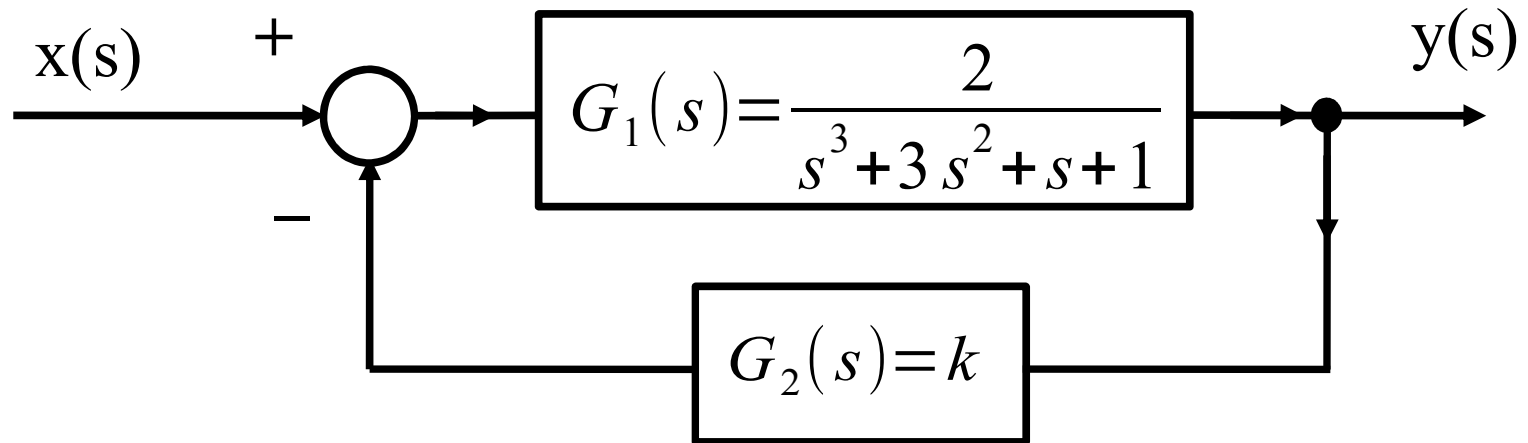
$G_{otw}(s)$ jest stabilne z kryt. H.

(2) kryt. Nyquista $G_{otw}(j\omega) = \frac{2k}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + j\omega + 1}$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista

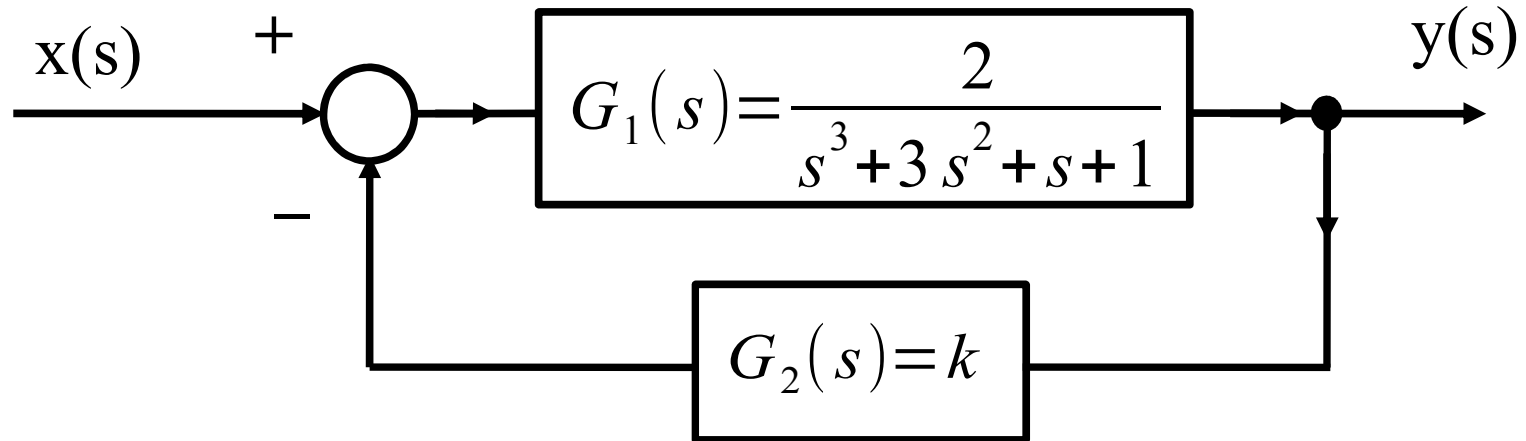


$$G_{otw}(s) = G_1 G_2 = \frac{2k}{s^3 + 3s^2 + s + 1}$$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista



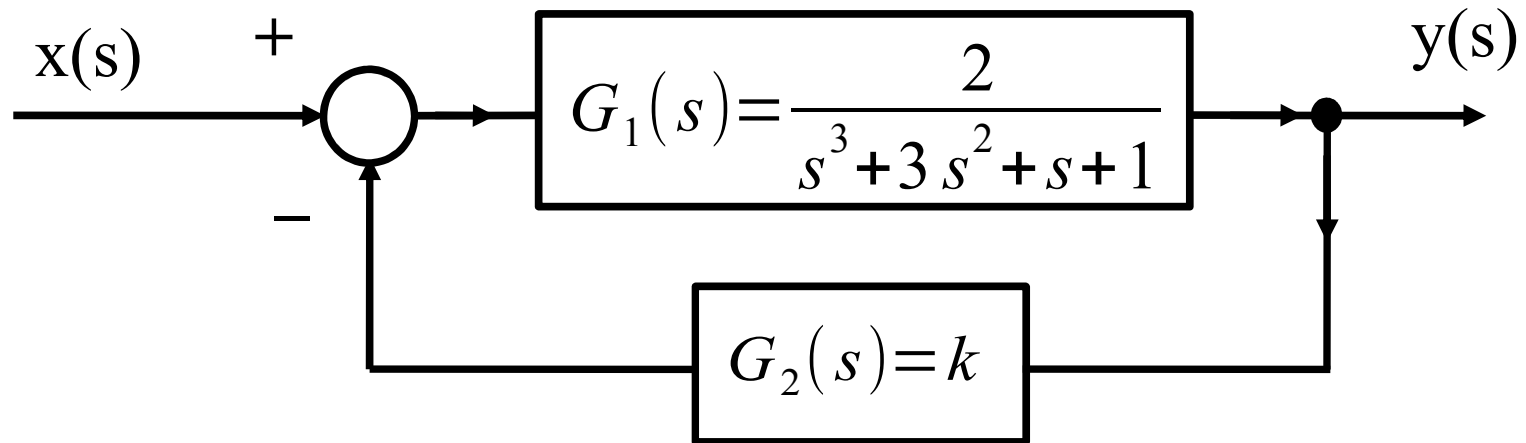
$$G_{otw}(s) = G_1 G_2 = \frac{2k}{s^3 + 3s^2 + s + 1}$$

- stabilny z kryterium Hurwitza

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista



$$G_{otw}(s) = G_1 G_2 = \frac{2k}{s^3 + 3s^2 + s + 1} \quad - \text{ stabilny z kryterium Hurwitza}$$

$$P(\omega) = \frac{2k - 6k\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{2k\omega^3 - 2k\omega}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$

Kryterium Nyquista

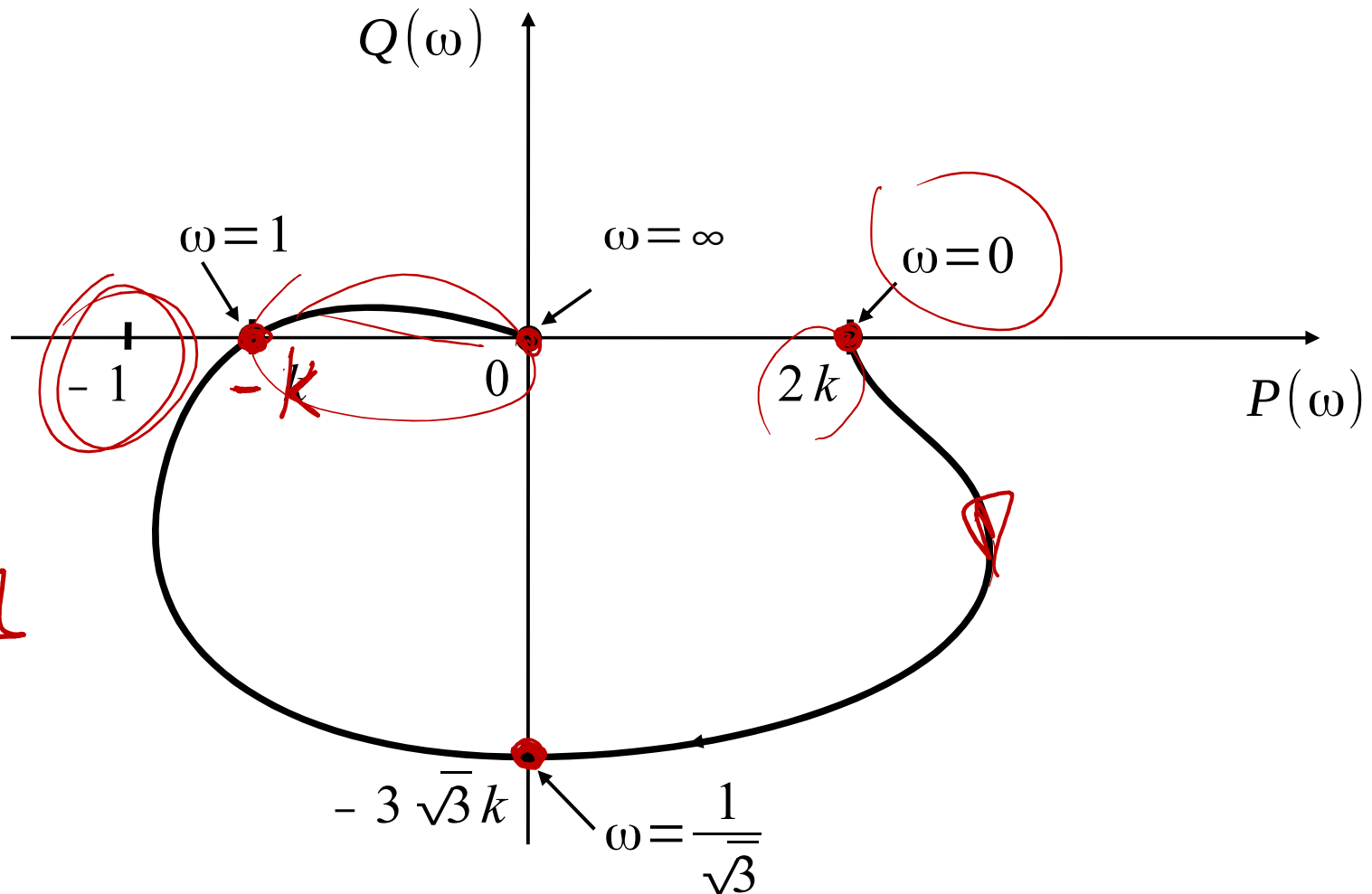
Przykład 8

$$P(\omega) = \frac{2k - 6k\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{2k\omega^3 - 2k\omega}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

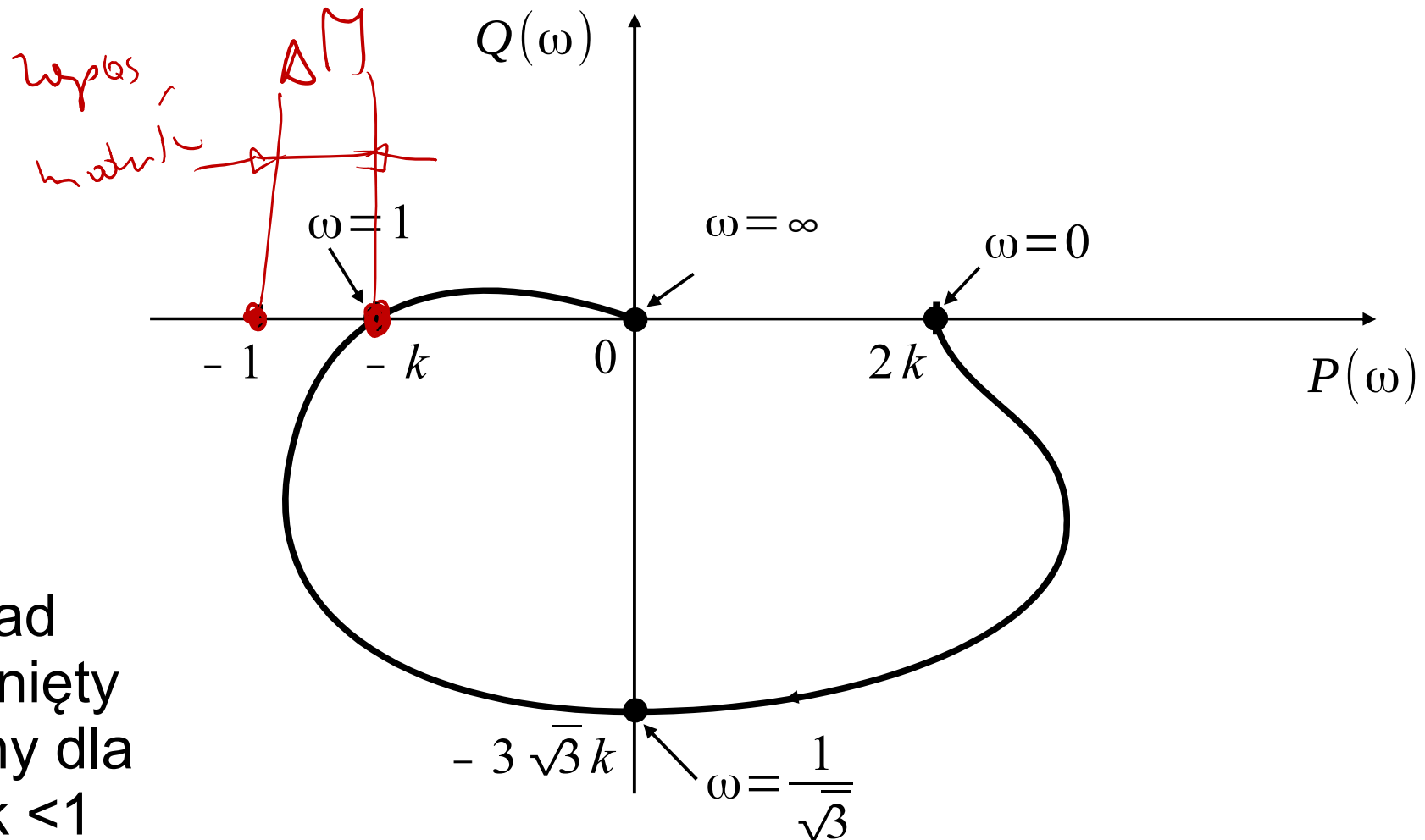
$$P(\omega) = \frac{2k - 6k\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{2k\omega^3 - 2k\omega}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$



Kryterium Nyquista

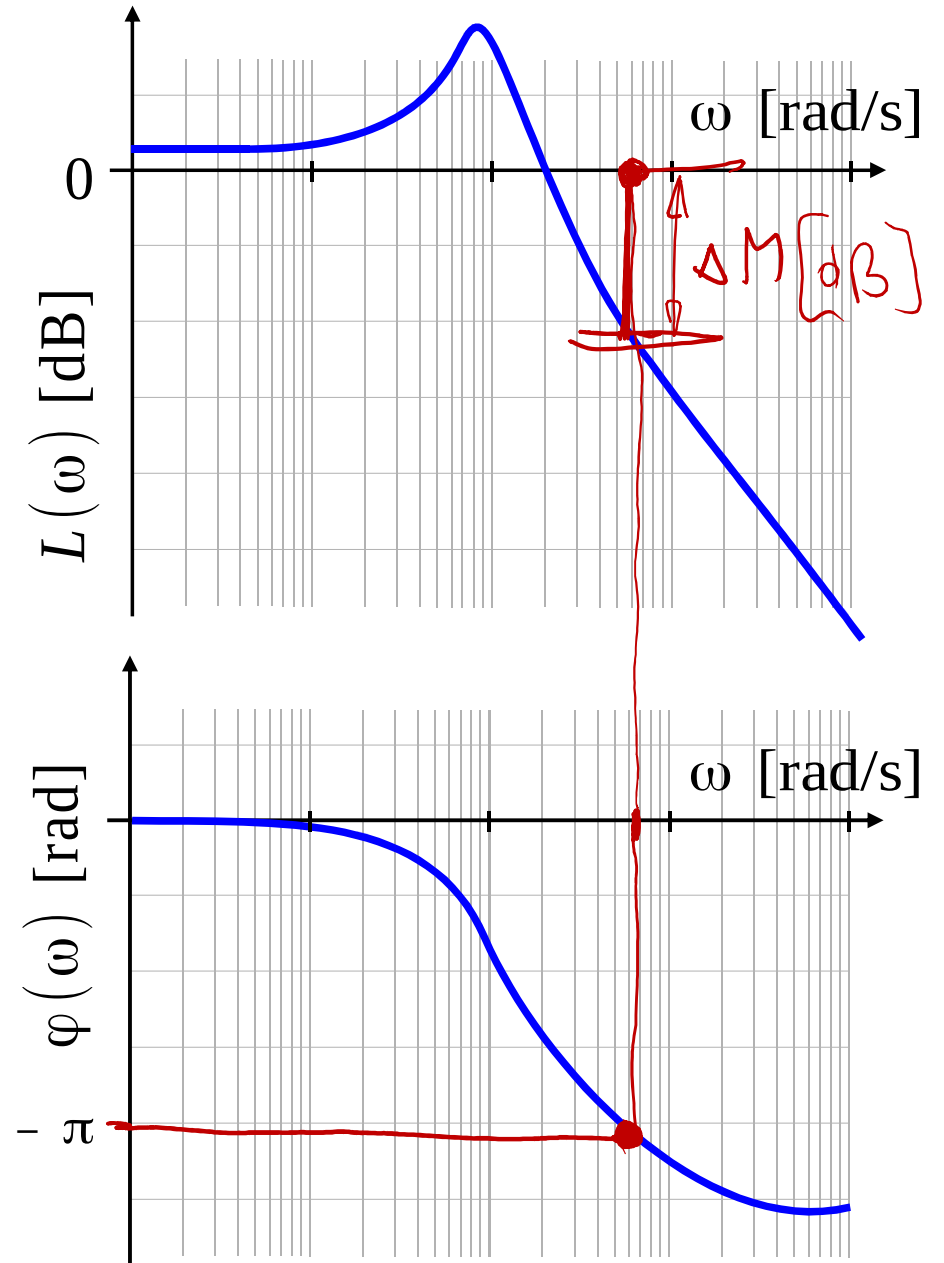
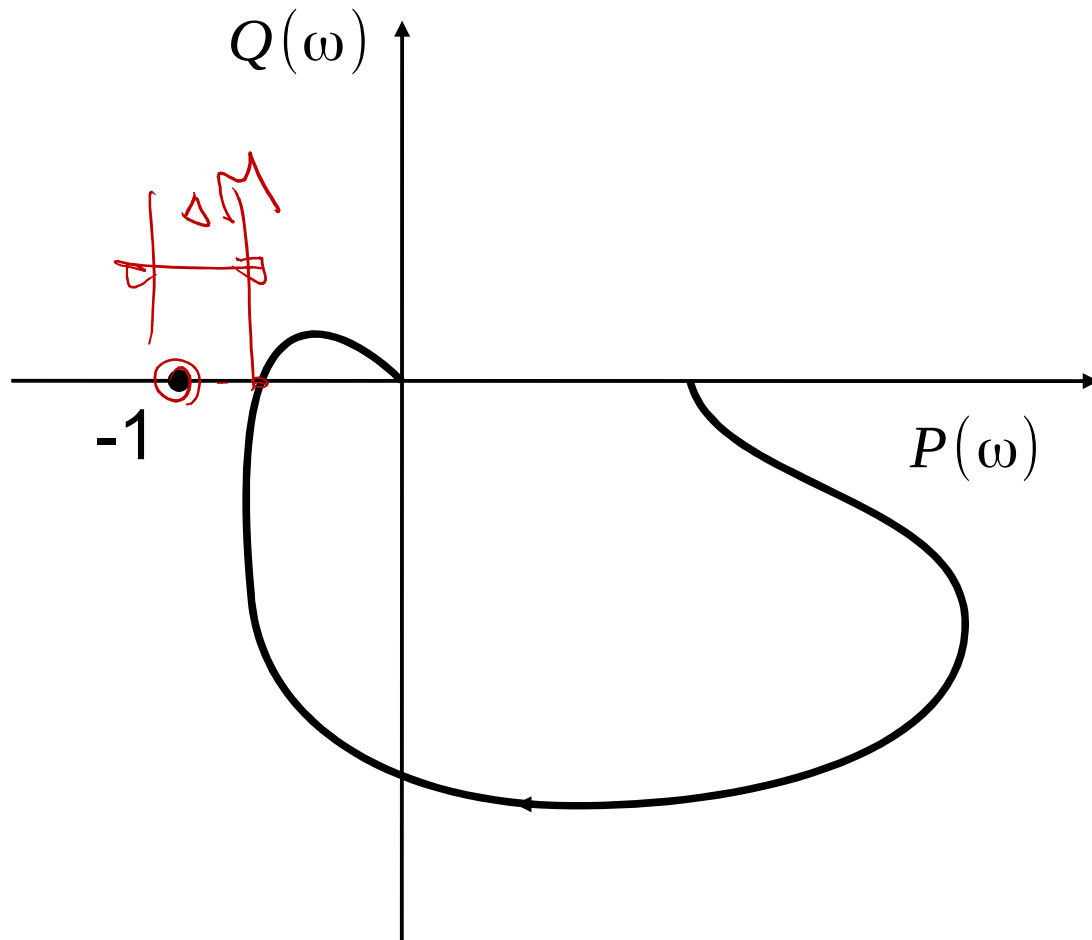
Przykład 8

$$P(\omega) = \frac{2k - 6k\omega^2}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{2k\omega^3 - 2k\omega}{(1 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$



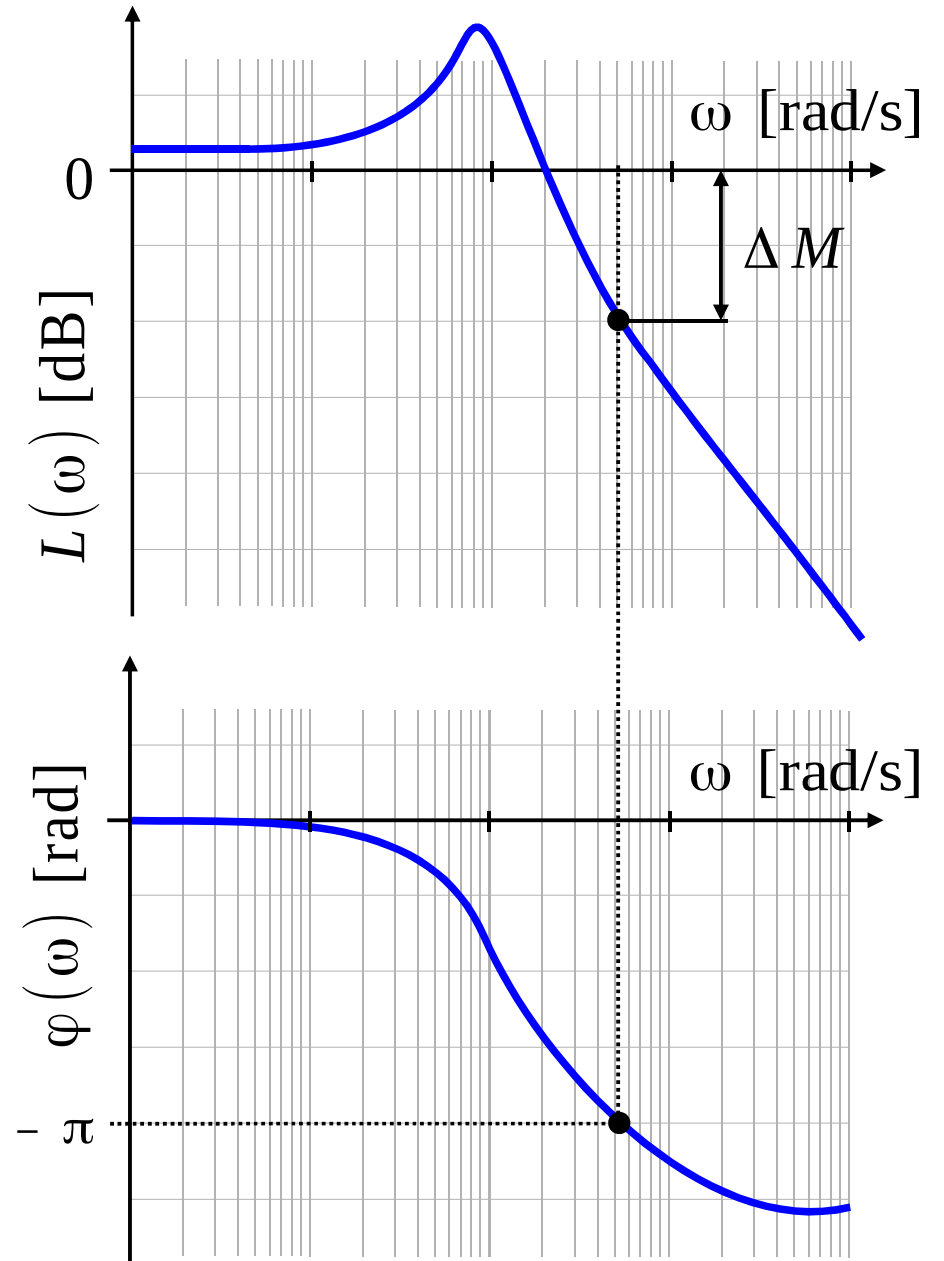
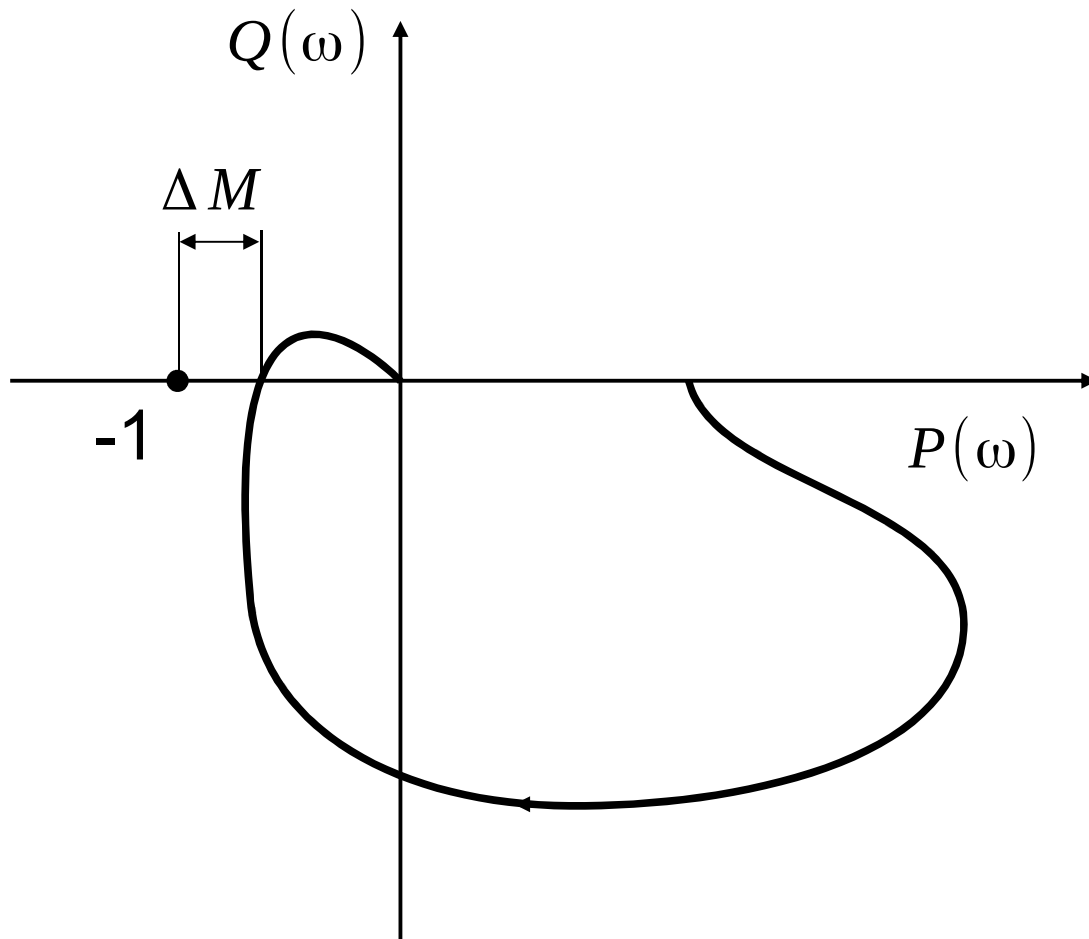
układ
zamknięty
stabilny dla
 $0 < k < 1$

Zapas modułu

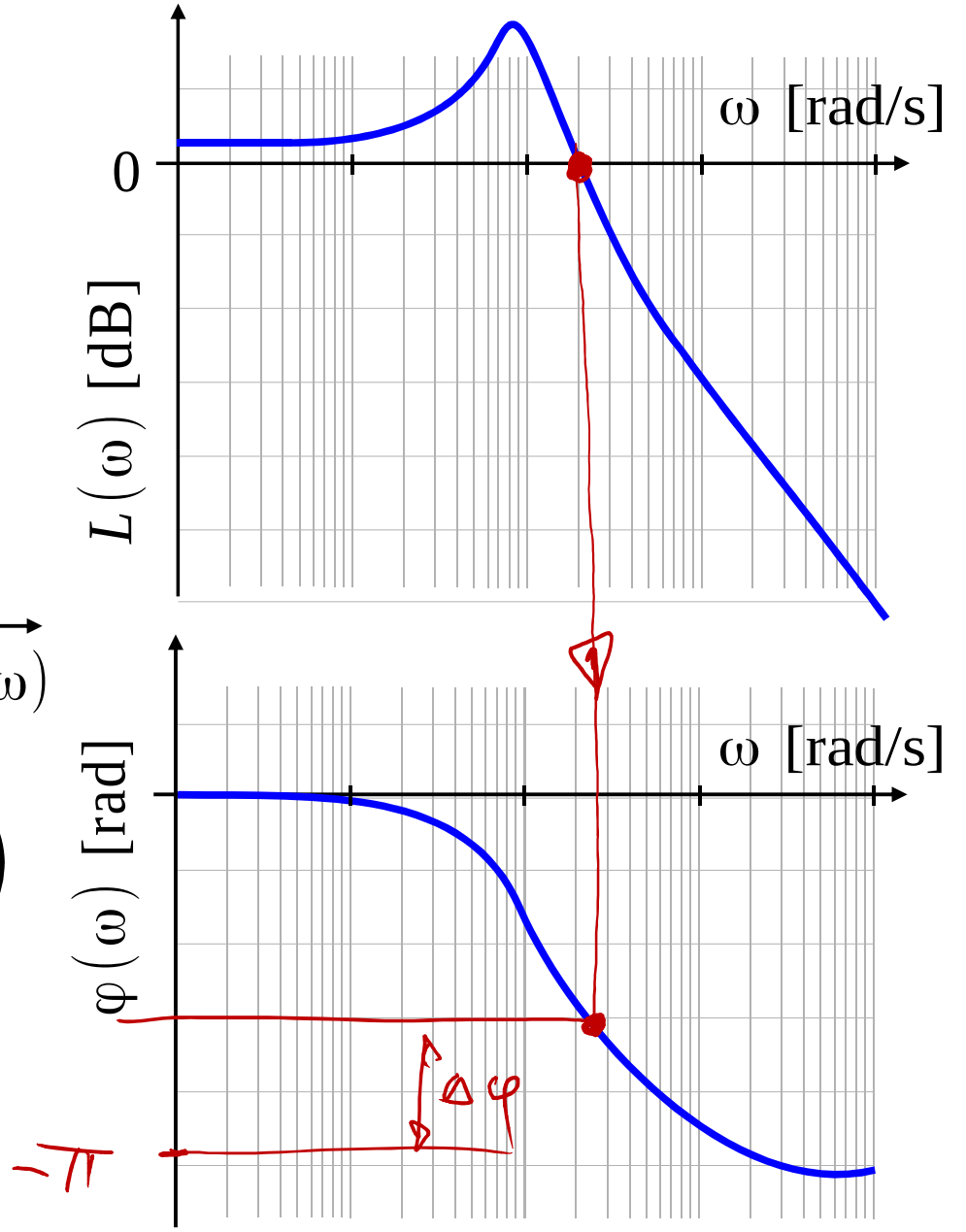
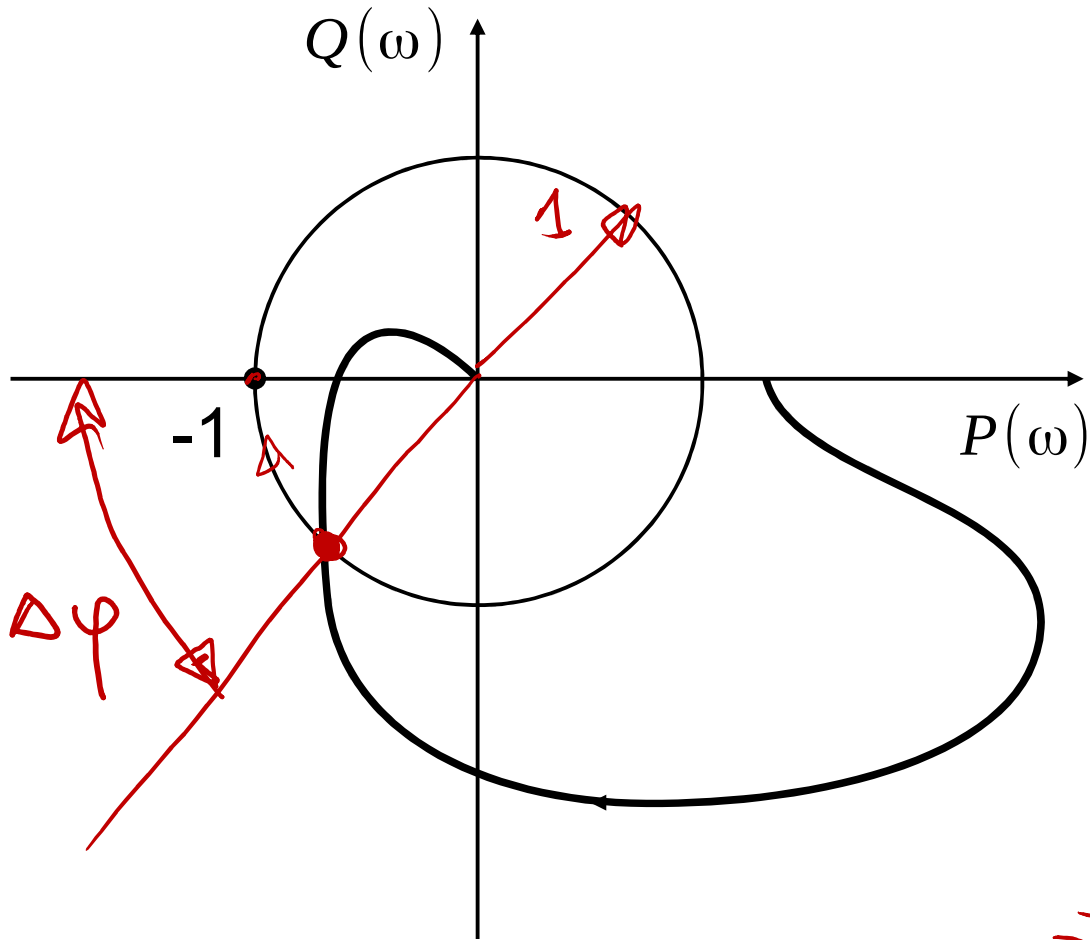


Zapas modułu

Dodanie do układu (szeregowo) wzmacnienia o wartości zapasu modułu spowoduje utratę jego stabilności w czasie pracy ze sprzężeniem zwrotnym.

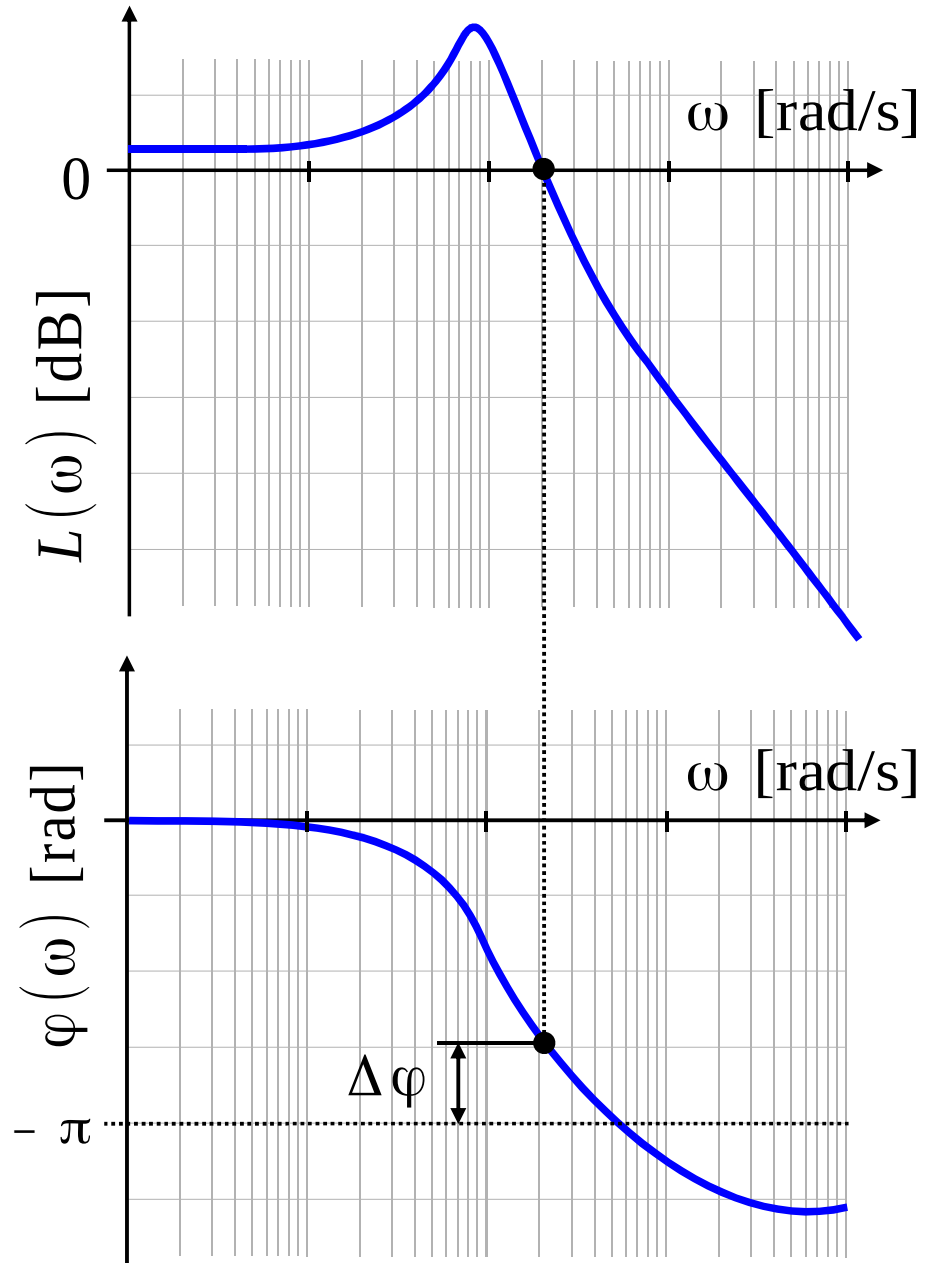
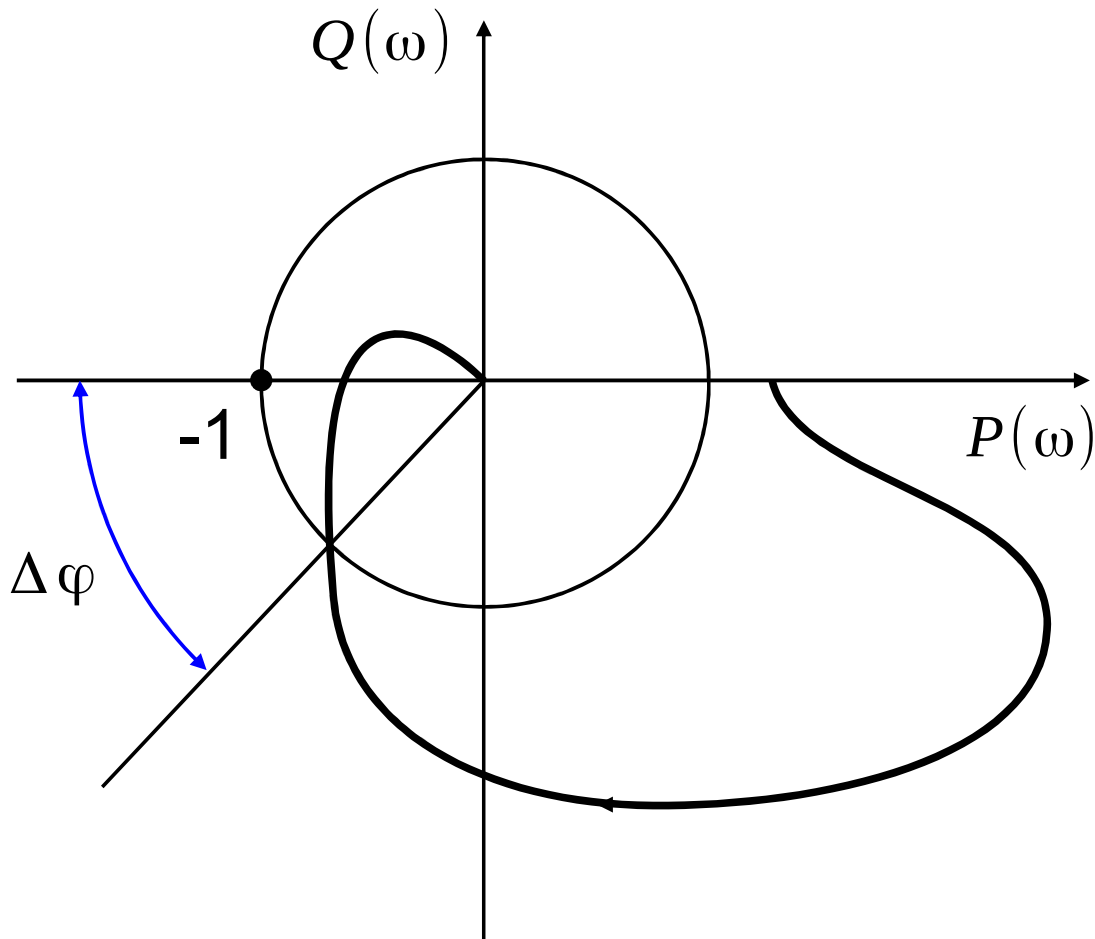


Zapas fazy



Zapas fazy

Dodanie do układu (szeregowo) obiektu opóźniającego o wartości zapasu fazy spowoduje utratę jego stabilności w czasie pracy ze sprzężeniem zwrotnym.



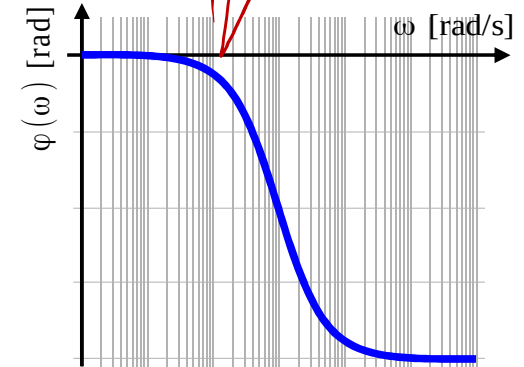
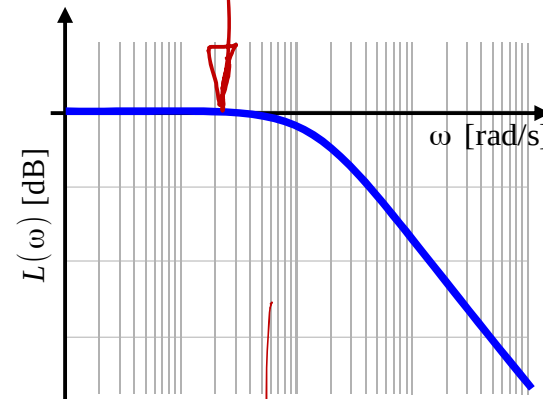
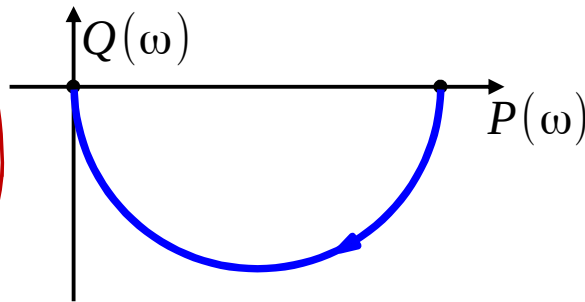
Stabilność układu a charakterystyka Bodego

Charakterystyki Bodego (wzmocnienie + opóźnienie)
nie ma interpretacji fizycznej dla układu niestabilnego!

Przykład:

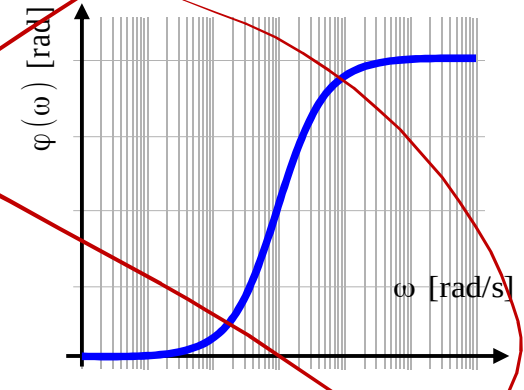
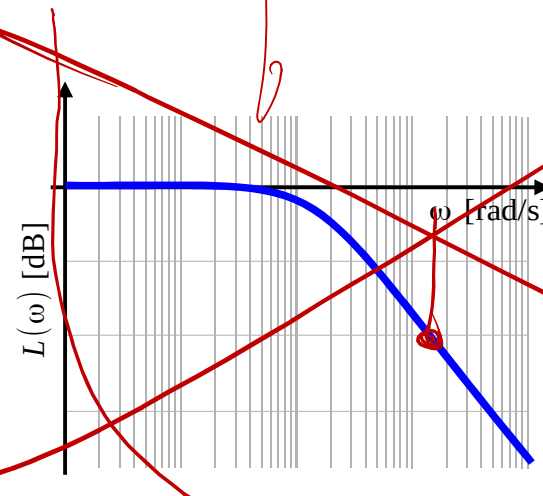
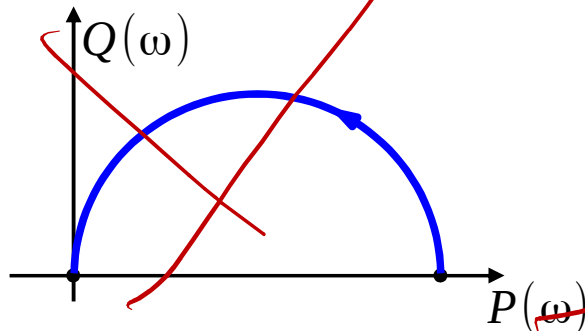
STAB.

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$



NIESTAB.

$$G(s) = \frac{1}{s-1}$$



Dodawanie charakterystyk Bodego

$$G(s) = G_1(s) G_2(s)$$

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) G_2(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| e^{j \text{Ang } G(j\omega)} = |G_1(j\omega)| e^{j \text{Ang } G_1(j\omega)} \cdot |G_2(j\omega)| e^{j \text{Ang } G_2(j\omega)}$$

$$|G(j\omega)| e^{j \text{Ang } G(j\omega)} = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| e^{j(\text{Ang } G_1 + \text{Ang } G_2)}$$

$$\text{Ang } G(j\omega) = \text{Ang } G_1(j\omega) + \text{Ang } G_2(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)|$$

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |G_1(j\omega)| + 20 \log |G_2(j\omega)|$$

Dodawanie charakterystyk Bodego

$$G(s) = G_1(s) G_2(s)$$

$$G(j\omega) = G_1(j\omega) G_2(j\omega)$$

$$|G(j\omega)| e^{j \text{Arg } G(j\omega)} = |G_1(j\omega)| e^{j \text{Arg } G_1(j\omega)} \cdot |G_2(j\omega)| e^{j \text{Arg } G_2(j\omega)}$$

$$|G(j\omega)| e^{j \text{Arg } G(j\omega)} = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| e^{j(\text{Arg } G_1(j\omega) + \text{Arg } G_2(j\omega))}$$

Wzmocnienie: $|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot |G_3(j\omega)|$

Wzmocnienie [dB]: $20 \log(|G_1(j\omega)|) + 20 \log(|G_2(j\omega)|)$

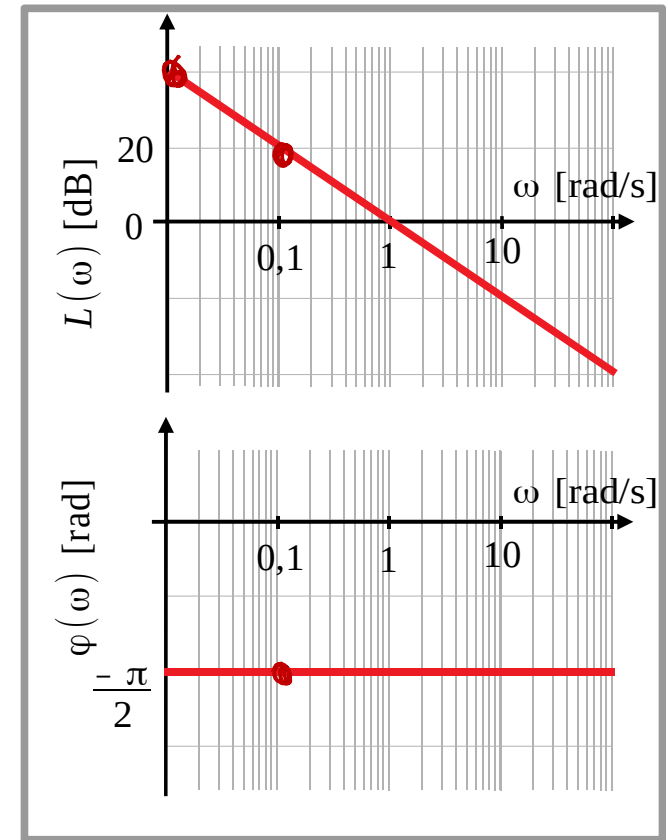
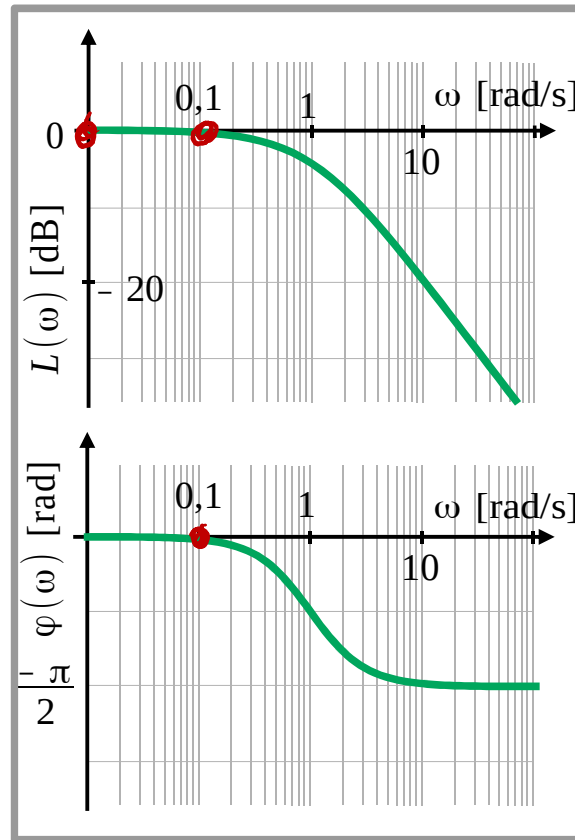
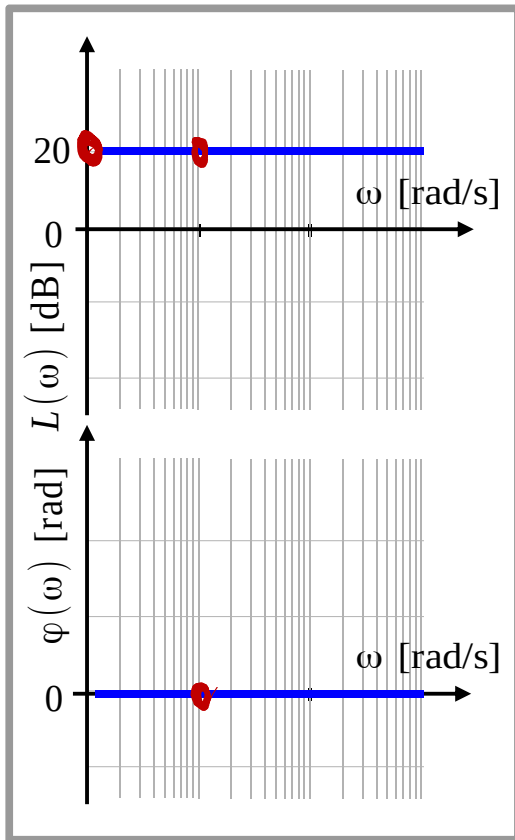
Faza: $\text{Arg } G(j\omega) = \text{Arg } G_1(j\omega) + \text{Arg } G_2(j\omega)$

Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

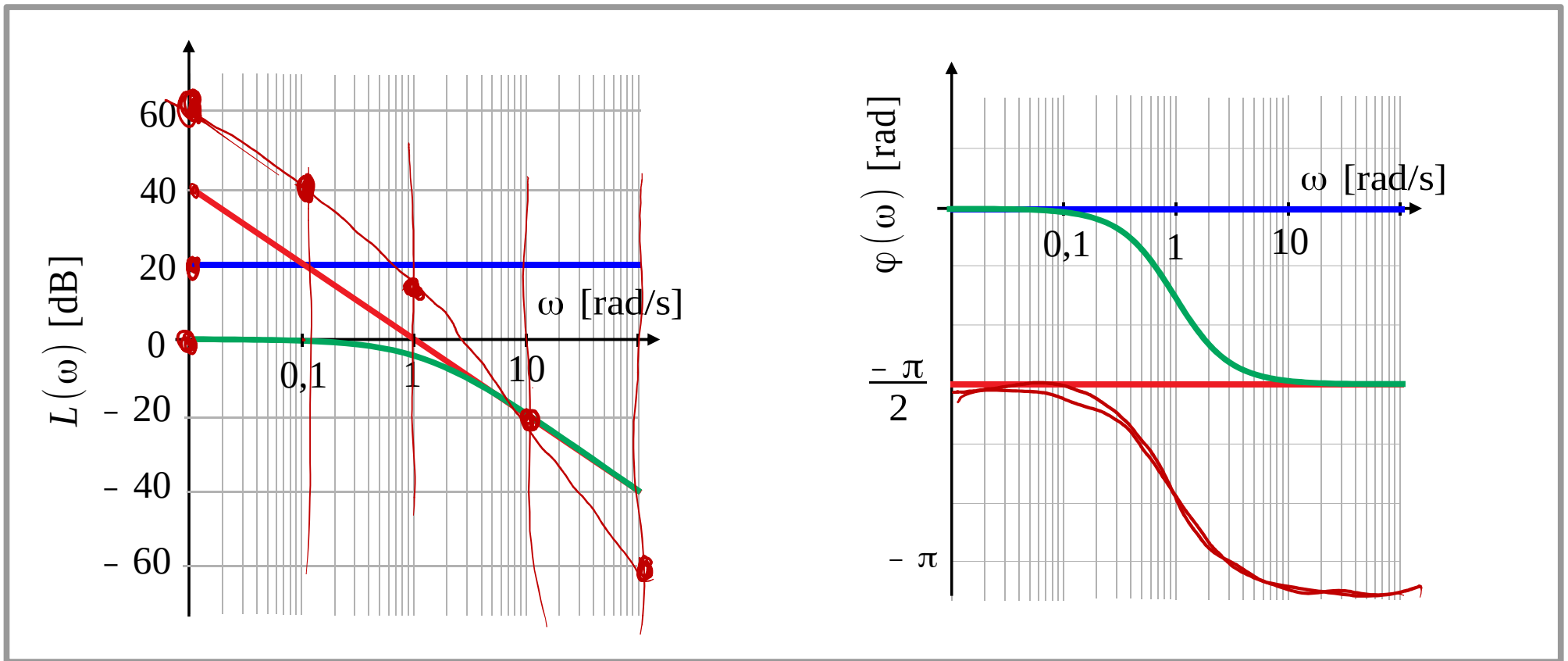
Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$



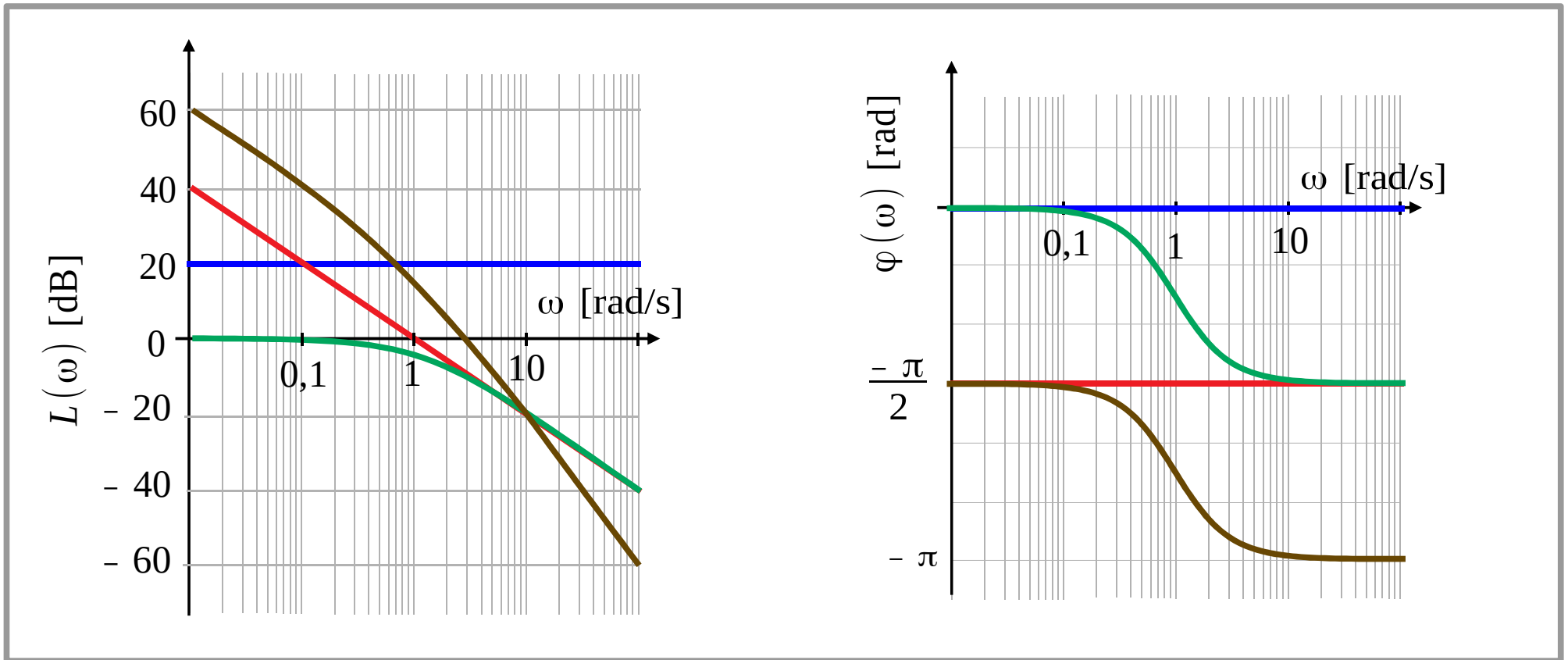
Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + s} = \underbrace{10}_{\text{blue}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\text{green}} \cdot \underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{red}}$$



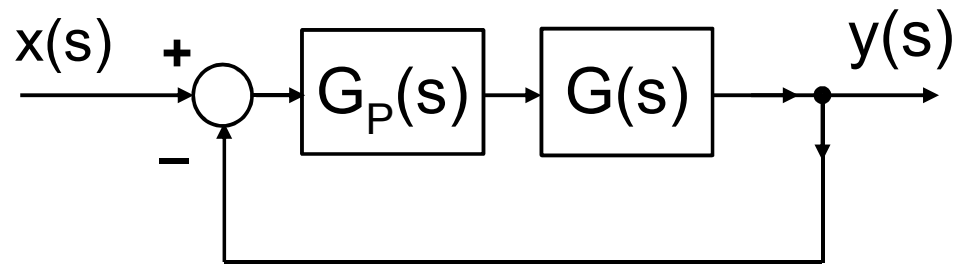
Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P



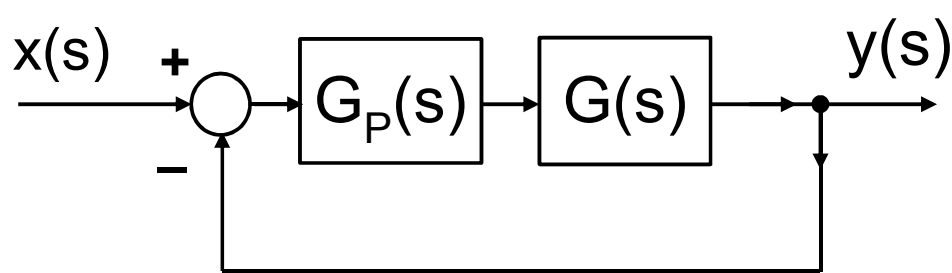
$$G_{zam}(s) = \frac{G_P(s)G(s)}{1 + G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s) = k_P$$

Kryterium Nyquista

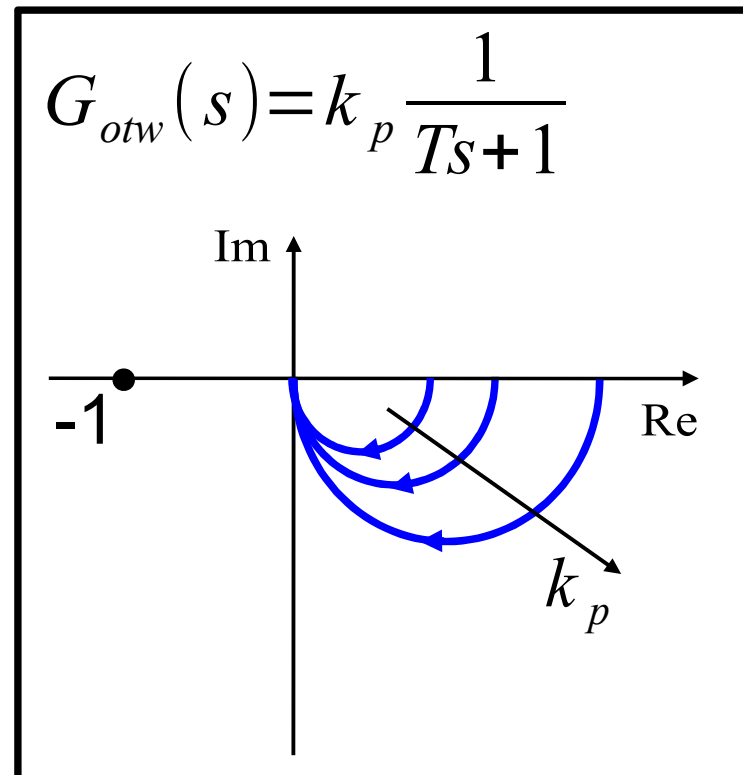
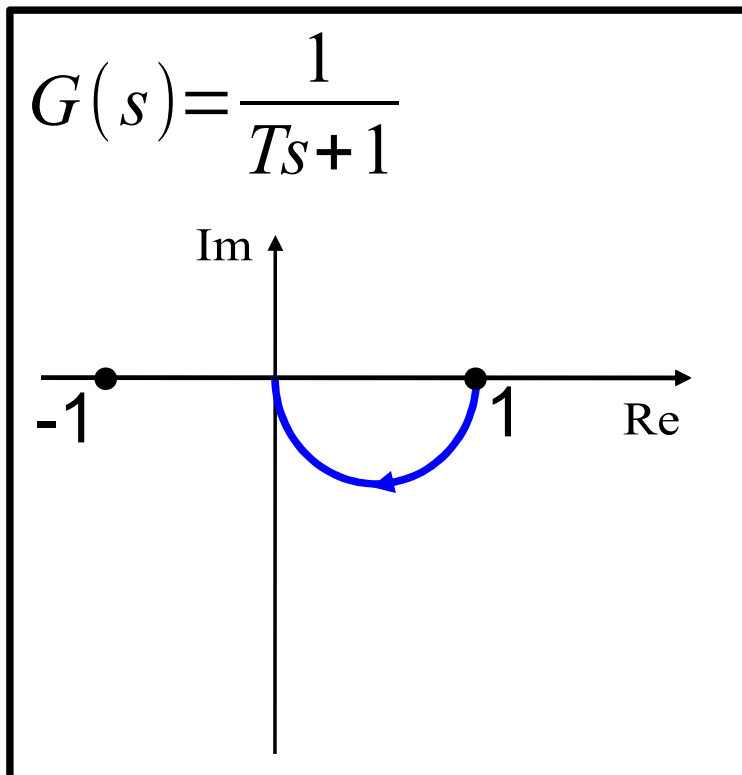
Układ sterowania z regulatorem P



$$G_{zam}(s) = \frac{G_P(s)G(s)}{1 + G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s) = k_p$$



G_{otw} zawsze stabilny,

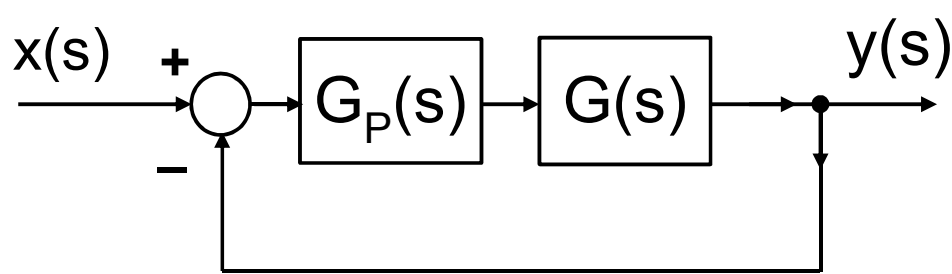
G_{zam} zawsze stabilny.

Błąd w stanie ustalonym:

$$\frac{k_p}{k_p + 1} x_{st}$$

Kryterium Nyquista

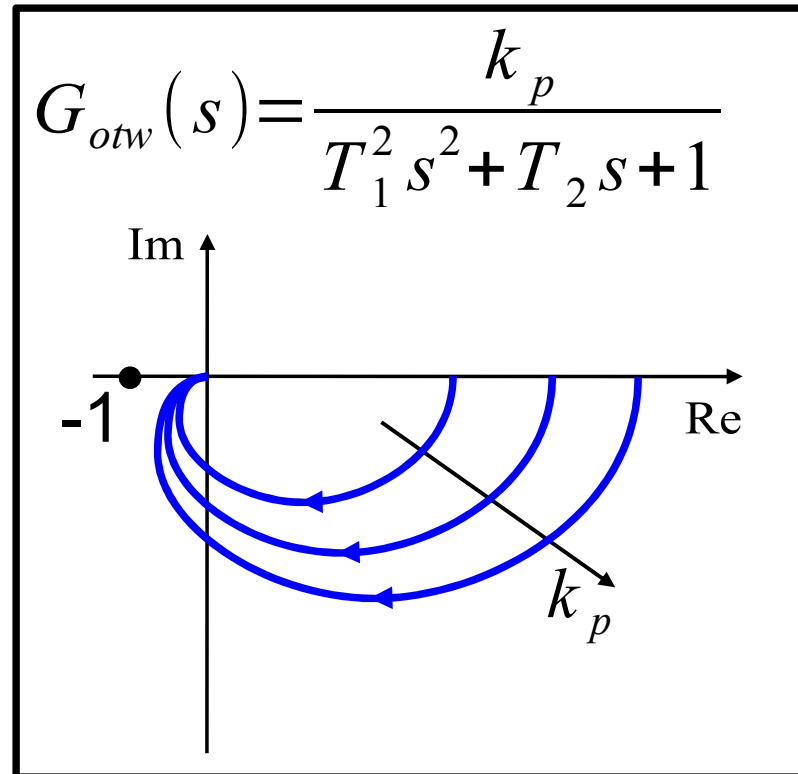
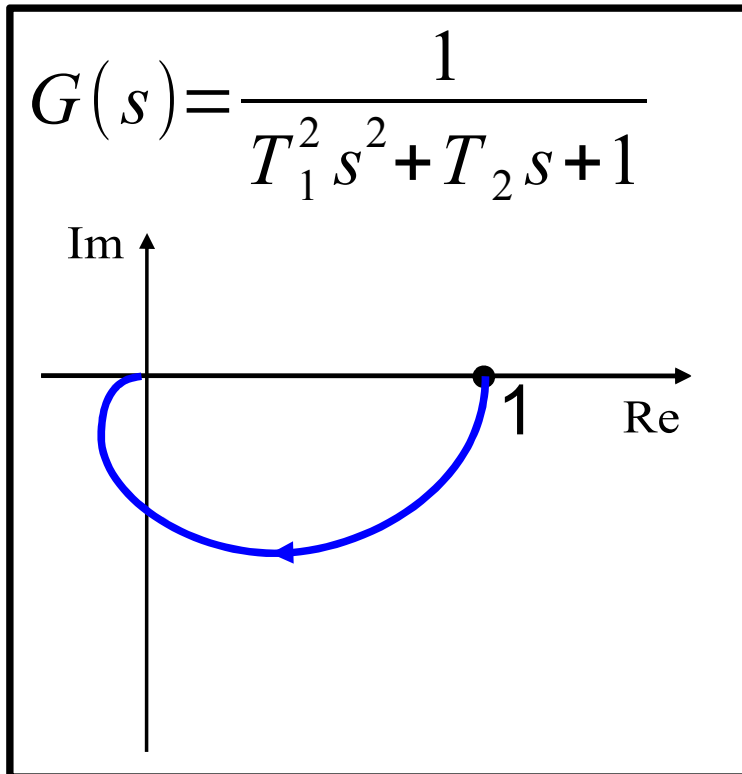
Układ sterowania z regulatorem P



$$G_{zam}(s) = \frac{G_P(s)G(s)}{1 + G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s) = k_p$$



G_{otw} zawsze stabilny,

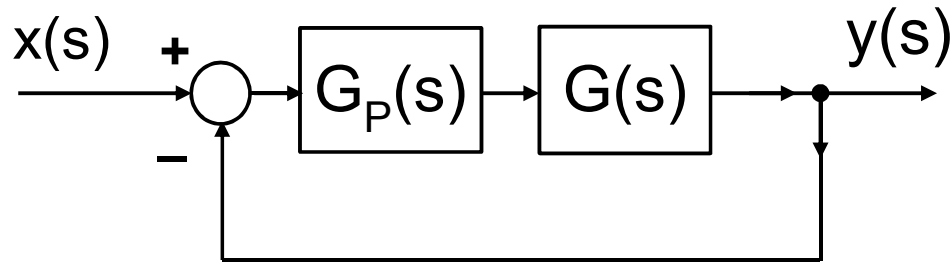
G_{zam} zawsze stabilny.

Błąd w stanie ustalonym:

$$\frac{k_p}{k_p + 1} x_{st}$$

Kryterium Nyquista

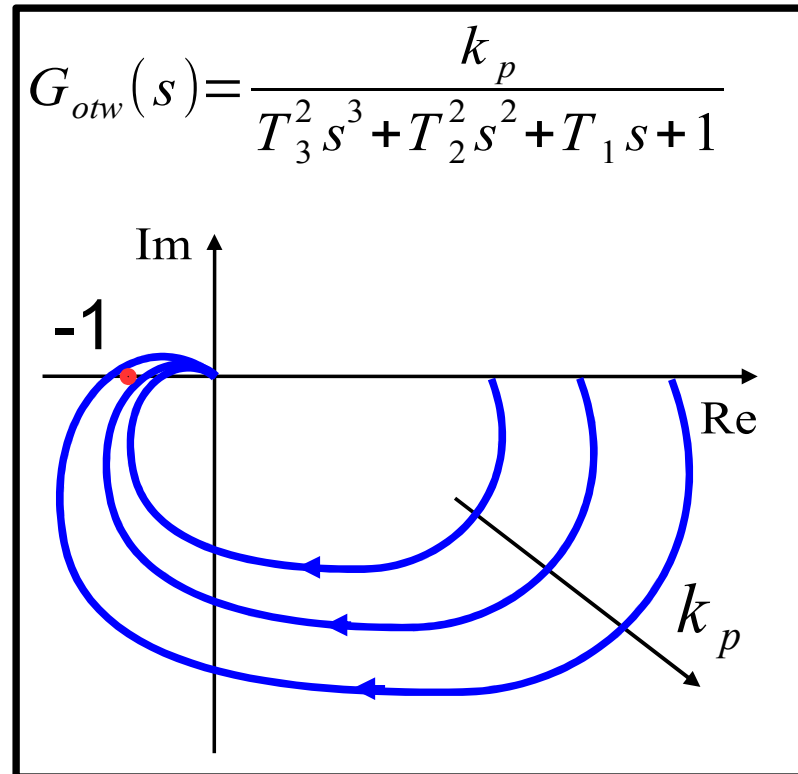
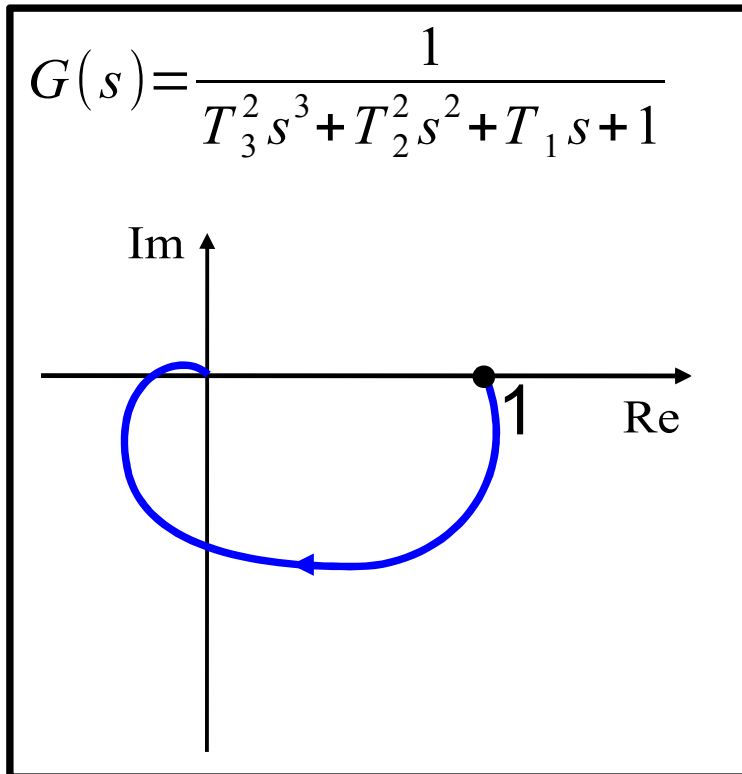
Układ sterowania z regulatorem P



$$G_{zam}(s) = \frac{G_P(s)G(s)}{1 + G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s) = k_P$$



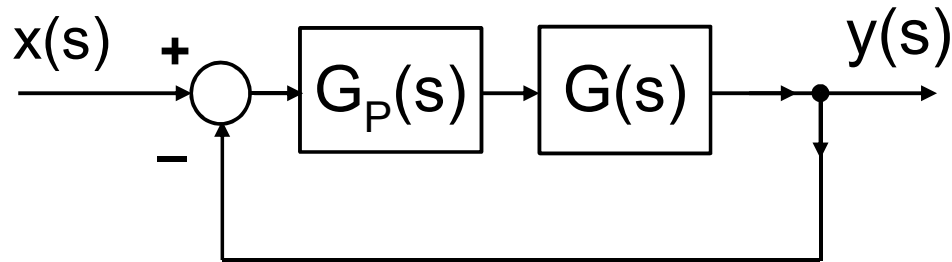
G_{otw} może być stabilny lub niestabilny i może obejmować punkt $(-1, j0)$

Błąd w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P + 1} x_{st}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P



$$G_{zam}(s) = \frac{G_P(s)G(s)}{1 + G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)G(s)$$

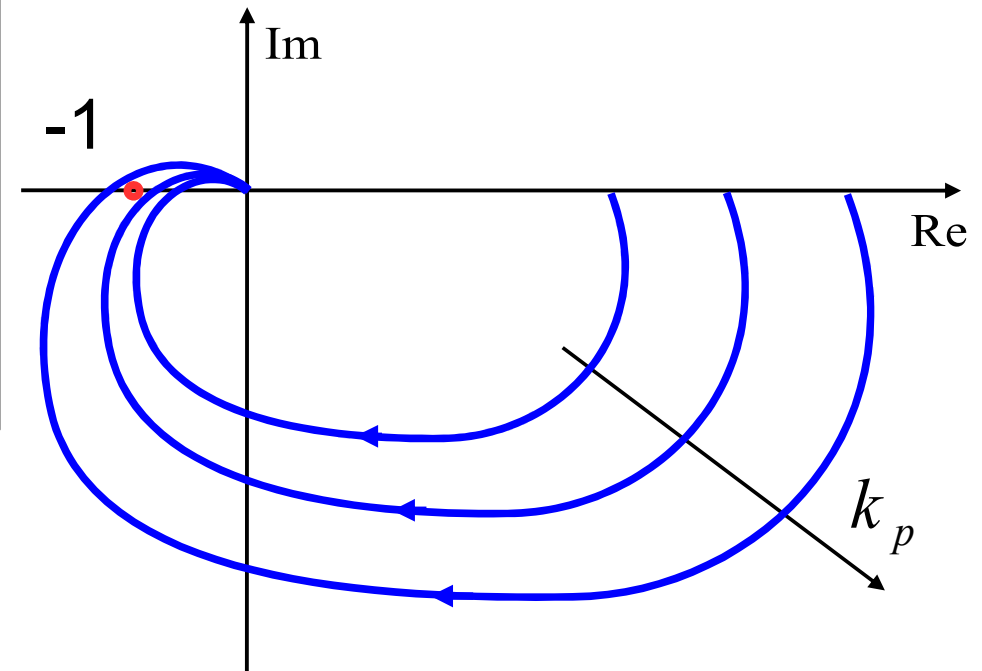
$$G_P(s) = k_p$$

$$G(s) = \frac{1}{T_3^2 s^3 + T_2^2 s^2 + T_1 s + 1}$$

podsumowanie:

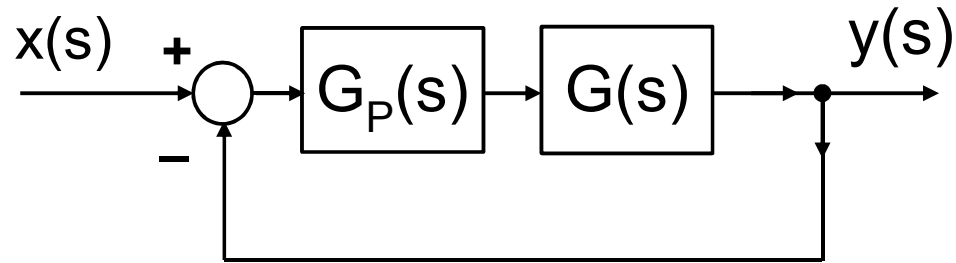
większy $k_p \rightarrow$ mniejszy błąd
w stanie ustalonym

mniejszy $k_p \rightarrow$ większy zapas modułu



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem PI

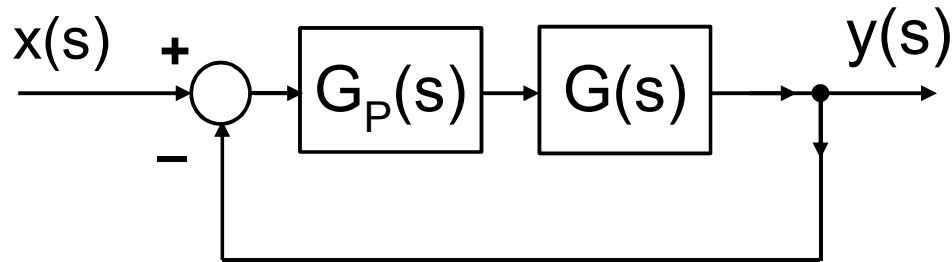


$$G_P(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s) G(s)$$

Kryterium Nyquista

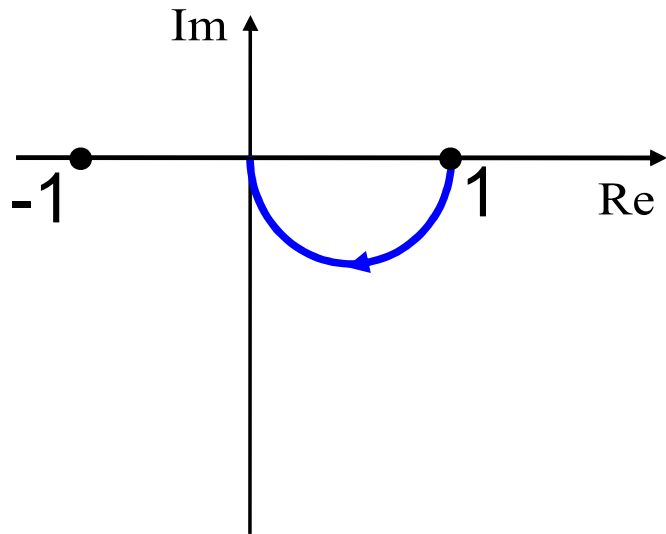
Układ sterowania z regulatorem PI



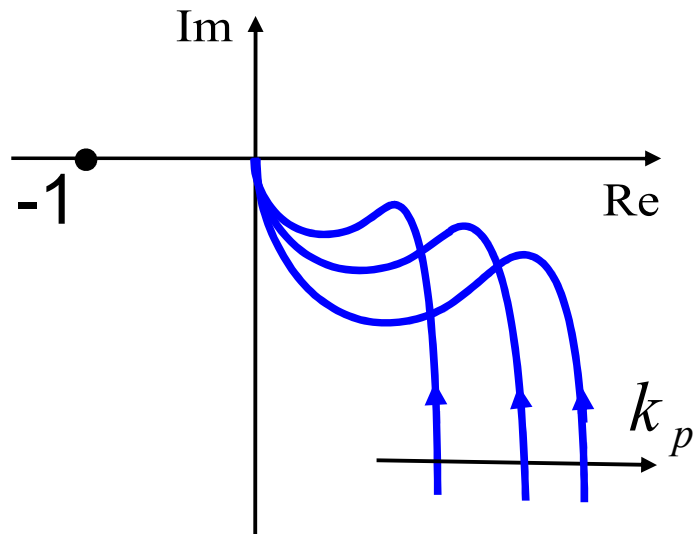
$$G_P(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s) G(s)$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$



$$G_{otw}(s) = k_P \frac{T_i s + 1}{T_i T s^2 + T_i s}$$



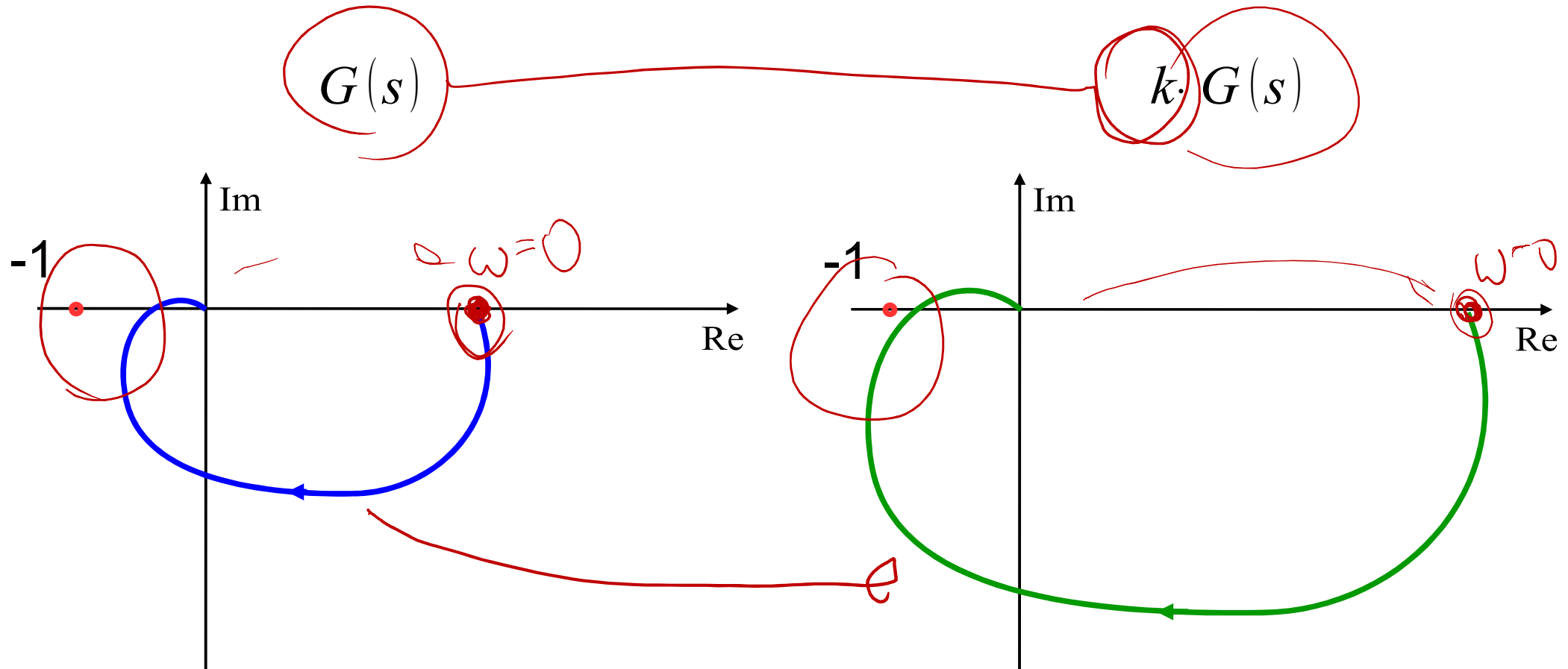
G_{otw} jest na granicy stabilności,

G_{zam} jest stabilny

$G_{otw}(\omega=0) \rightarrow \infty$
więc błąd w stanie ustalonym $\rightarrow 0$

Korekcja

Wpływ dodatkowego wzmacnienia na układ

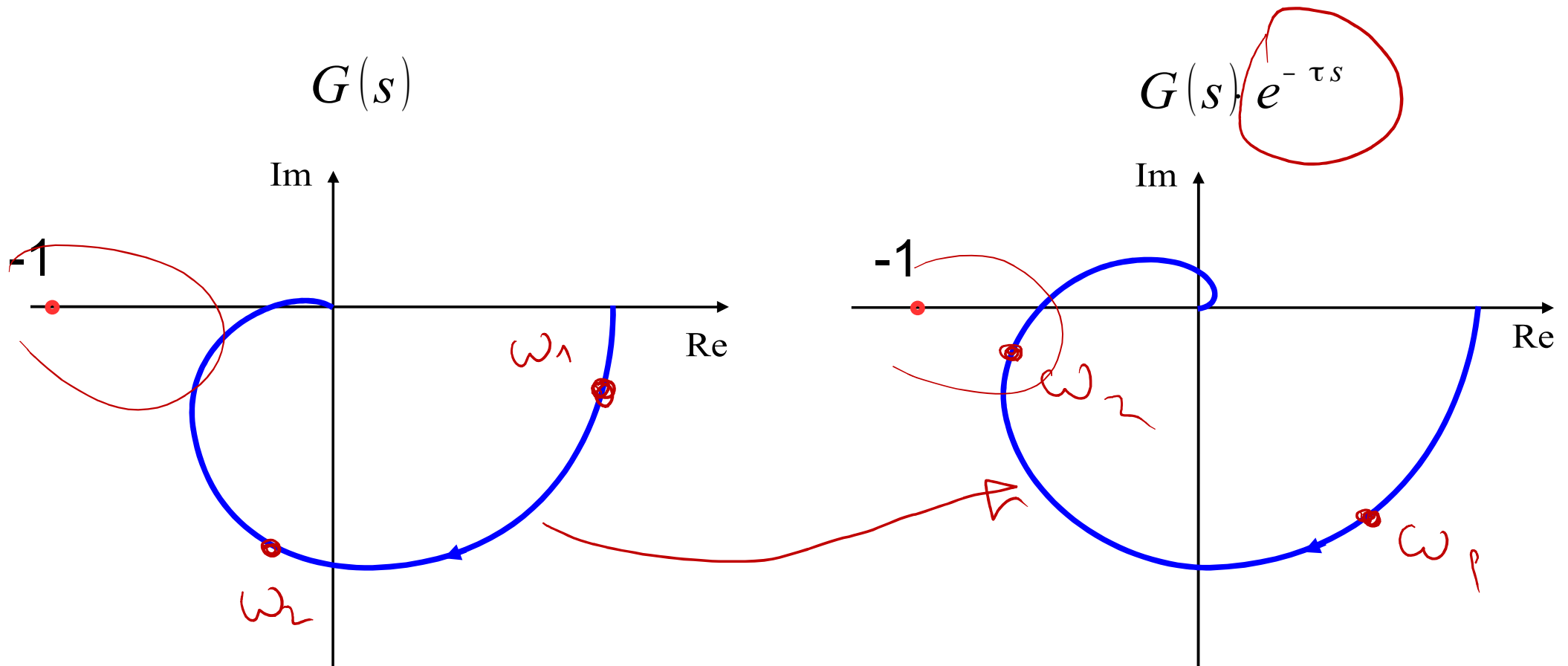


Większy zapas modułu i fazy,
Większy błąd w stanie ustalonym

Mniejszy zapas modułu i fazy,
Mniejszy błąd w stanie ustalonym

Korekcja

Wpływ opóźnienia na układ



Większy zapas
modułu i fazy

Mniejszy zapas
modułu i fazy

Korekcja

Przez opóźnienie

$$K(s) = \frac{1 + T s}{1 + a s + b s^2}$$

Układem PD

$$K(s) = k_P \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1}, \quad \alpha < 1$$

Przez całkowanie

$$K(s) = 1 + \frac{k}{1 + T s}$$


Układem PI

$$K(s) = \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1}, \quad \alpha > 1$$

Układem PID

$$K(s) = k (T_d s + 1) \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

Materiał na egzamin – wykłady od 1 do 14
(ponad 1100 slajdów...)



**Wykład 14 – współczesne problemy teorii
sterowania, konsultacje**

**Wykład 15 – powtórzenie materiału,
informacje o egzaminie,
ankiety, konsultacje**