Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Teoria maszyn i podstawy automatyki

semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 10

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki z przykładami.

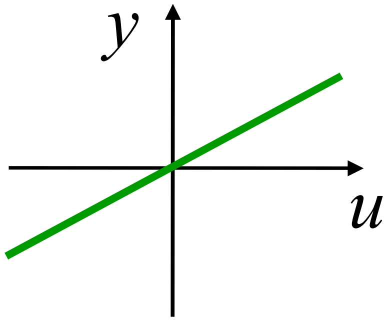
Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

nazwa elementu	**transmitancja**
Proporcjonalny	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$

Element proporcjonalny

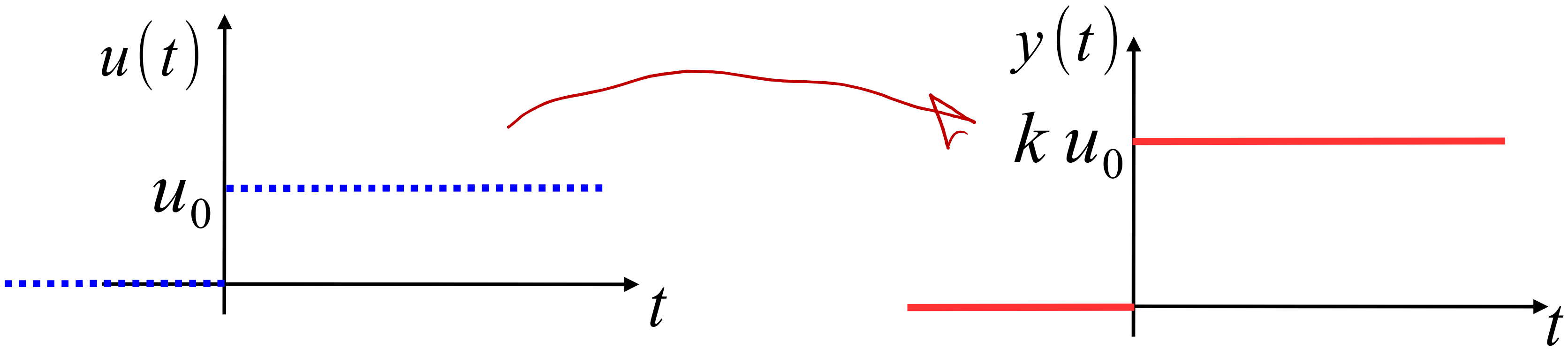
1. Równanie: $y(t)=ku(t)$ $k \in R$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $G(s)=k$

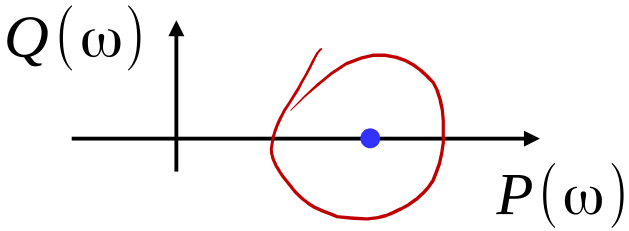
4. Odp. skokowa: $y(t)=k\,u_0\,1(t)$ dla $u(t)=u_0\,1(t)$



Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k \qquad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

6. Wykres Nyquista:

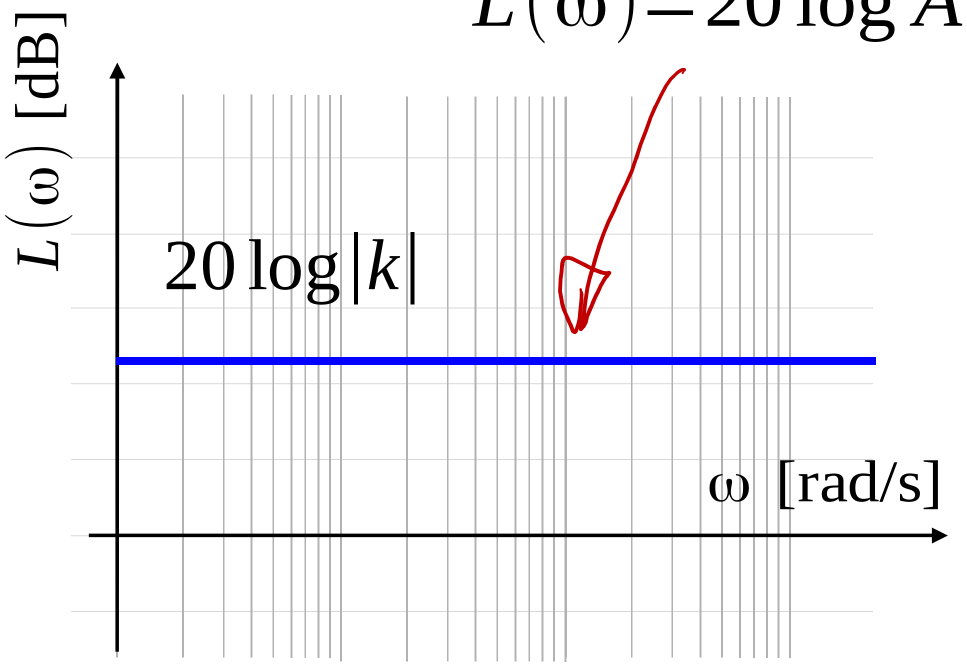


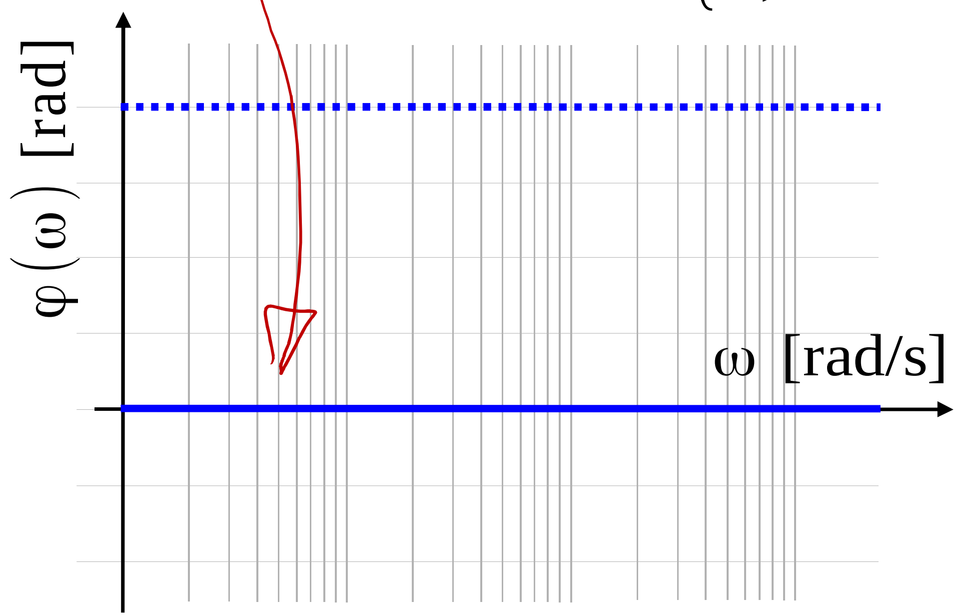
dla $k>0$

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)$$

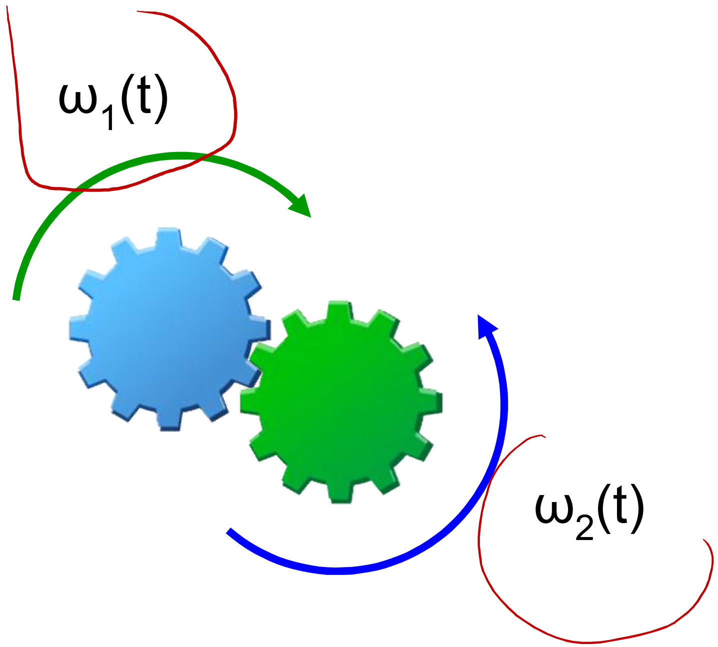
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\begin{cases}0, & \text{dla } k\geq 0\\ \pi, & \text{dla } k<0\end{cases}$$



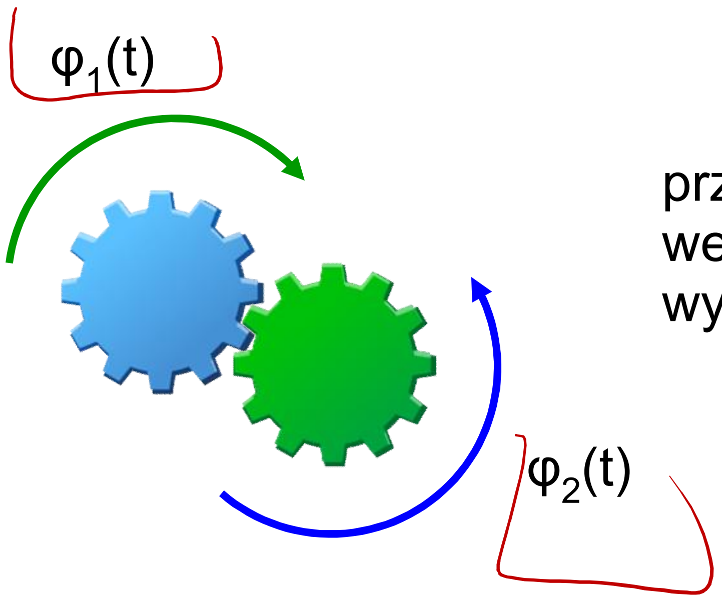


Element proporcjonalny

Przykłady



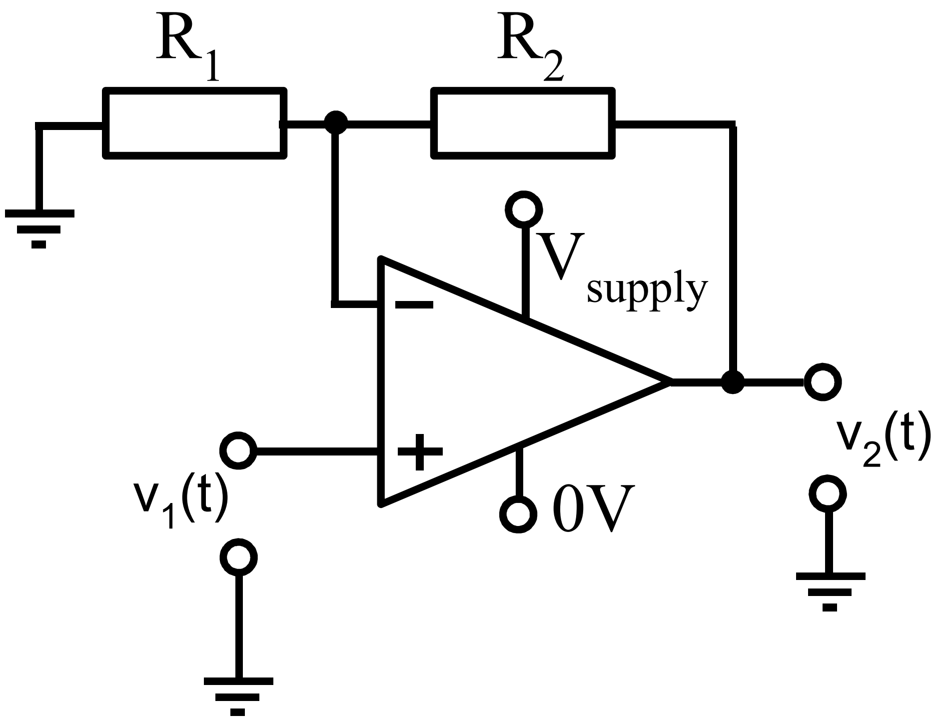
przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa $\omega_1(t)$
wyjście – prędkość kątowa $\omega_2(t)$



przekładnia zębata:
wejście – kąt obrotu $\varphi_1(t)$
wyjście – kąt obrotu $\varphi_2(t)$

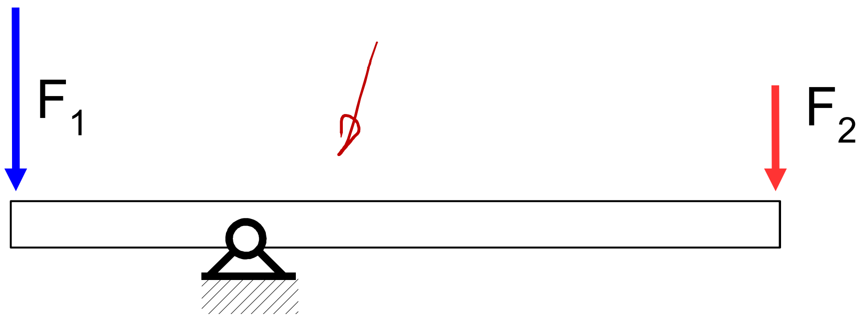
Element proporcjonalny

Przykłady



WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

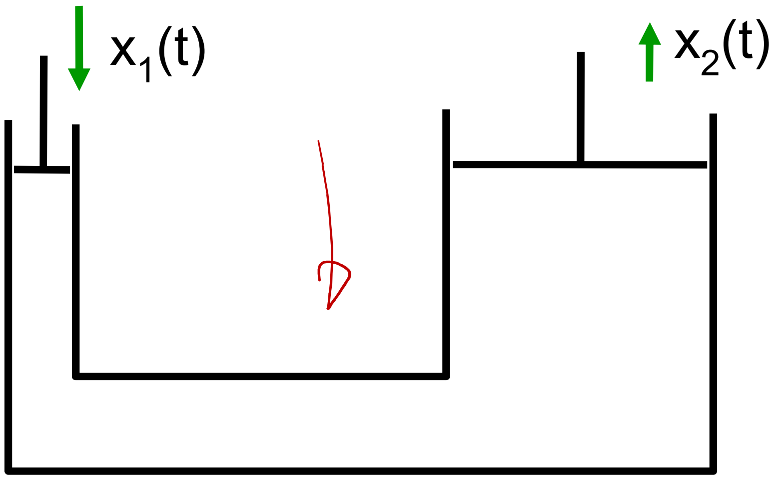
$$v_2(t) = v_1(t)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$



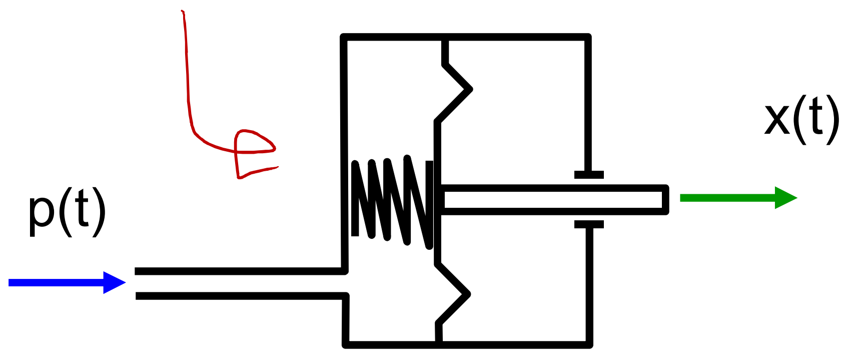
BELKA w stanie ustalonym:
wejście – siła F_1
wyjście – siła F_2

Element proporcjonalny

Przykłady



PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:
wejście – przemieszczenie $x_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x_2(t)$



SIŁOWNIK PNEUMATYCZNY:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – przemieszczenie x(t)

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$k \in \mathbb{R}$

$T \in \mathbb{R}_+$

$[s]$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:

$$T\frac{\overset{0}{dy(t)}}{dt}+\overset{\text{const.}}{y(t)}=k\overset{\text{const.}}{u(t)}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $u=\text{const};\quad y=\text{const}$

$y=k\cdot u$

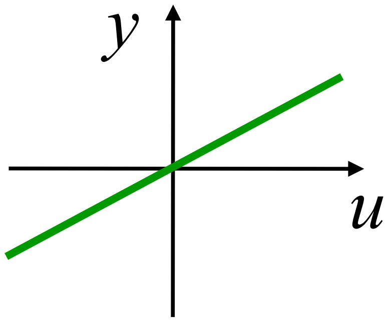
Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $$y=ku \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$$

$\mathcal{L}$



zał.: $k>0$

3. Transmitancja: $$T\,s\cdot Y(s)+Y(s)=k\,U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{Ts+1}$$

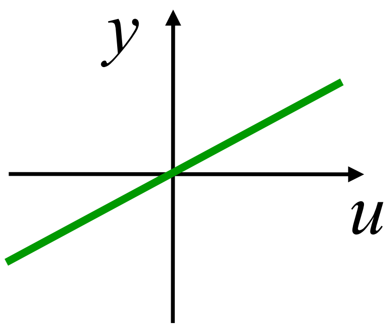
Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $$y=ku \quad \text{dla} \quad \frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$$



zał.: $k>0$

3. Transmitancja: $$G(s)=\frac{k}{Ts+1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa: $u(t) = u_0 \mathbb{1}(t)$

$$U(s) = u_0 \, {}^{1}\!/_{s}$$

$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot \frac{u_0}{s} = \frac{k u_0}{s(Ts+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k u_0}{s(Ts+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k u_0}{Ts\left(s+\frac{1}{T}\right)}\right\} =$$

$$= k u_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{T}}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)}\right\} = k u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

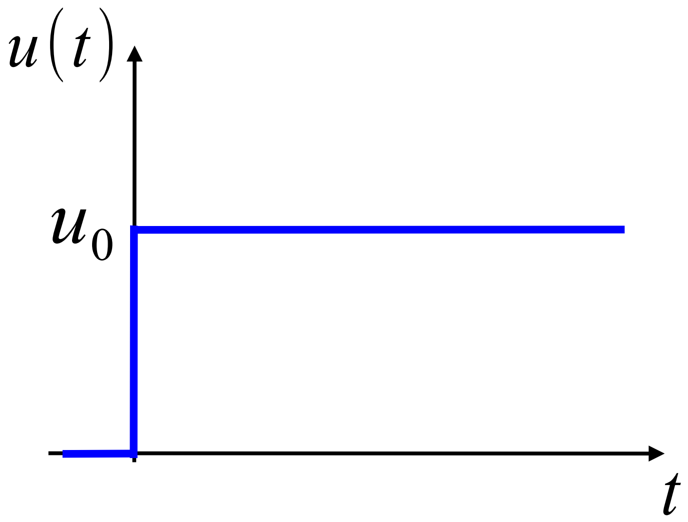
4. Odp. skokowa:

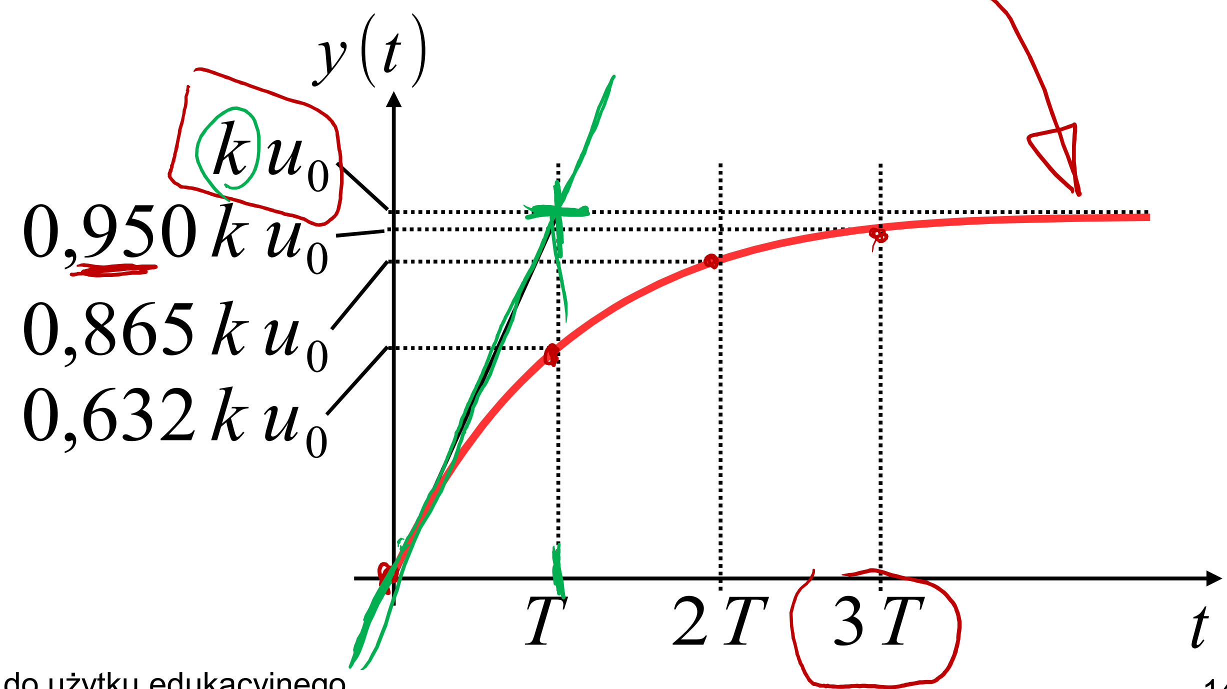
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s(Ts+1)}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k u_0(1-e^{-t/T})$





Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$= \frac{k}{1+Tj\omega} \cdot \frac{1-Tj\omega}{1-Tj\omega} = \frac{k - Tj\omega k}{1^2 - T^2 j^2 \omega^2} =$$

$$= \frac{k - jTk\omega}{1+T^2\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2} \qquad Q(\omega) = \frac{-Tk\omega}{1+T^2\omega^2}$$

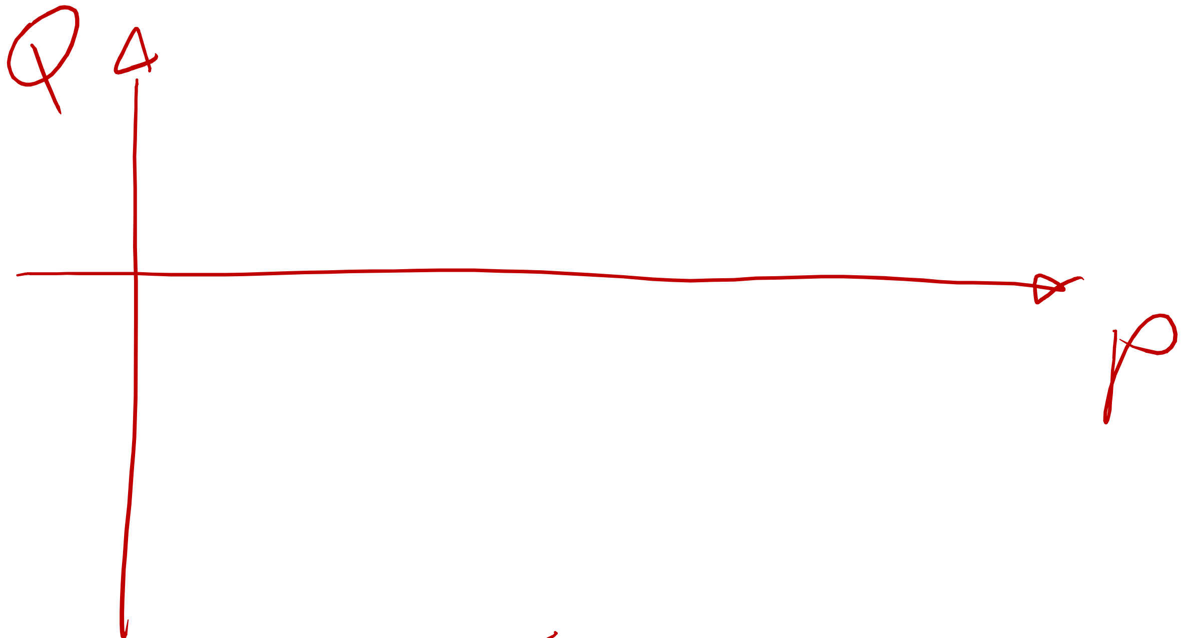
Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:



$P(0)=k \quad Q(0)=0$

$P\left(\frac{1}{T}\right)=\frac{k}{2} \quad Q\left(\frac{1}{T}\right)=\frac{-k}{2}$

$P(\infty)=\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{k/\omega^2}{T^2+1/\omega^2}=0$

$Q(\infty)=\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{-\frac{kT}{\omega}}{T^2+\frac{1}{\omega^2}}=0$

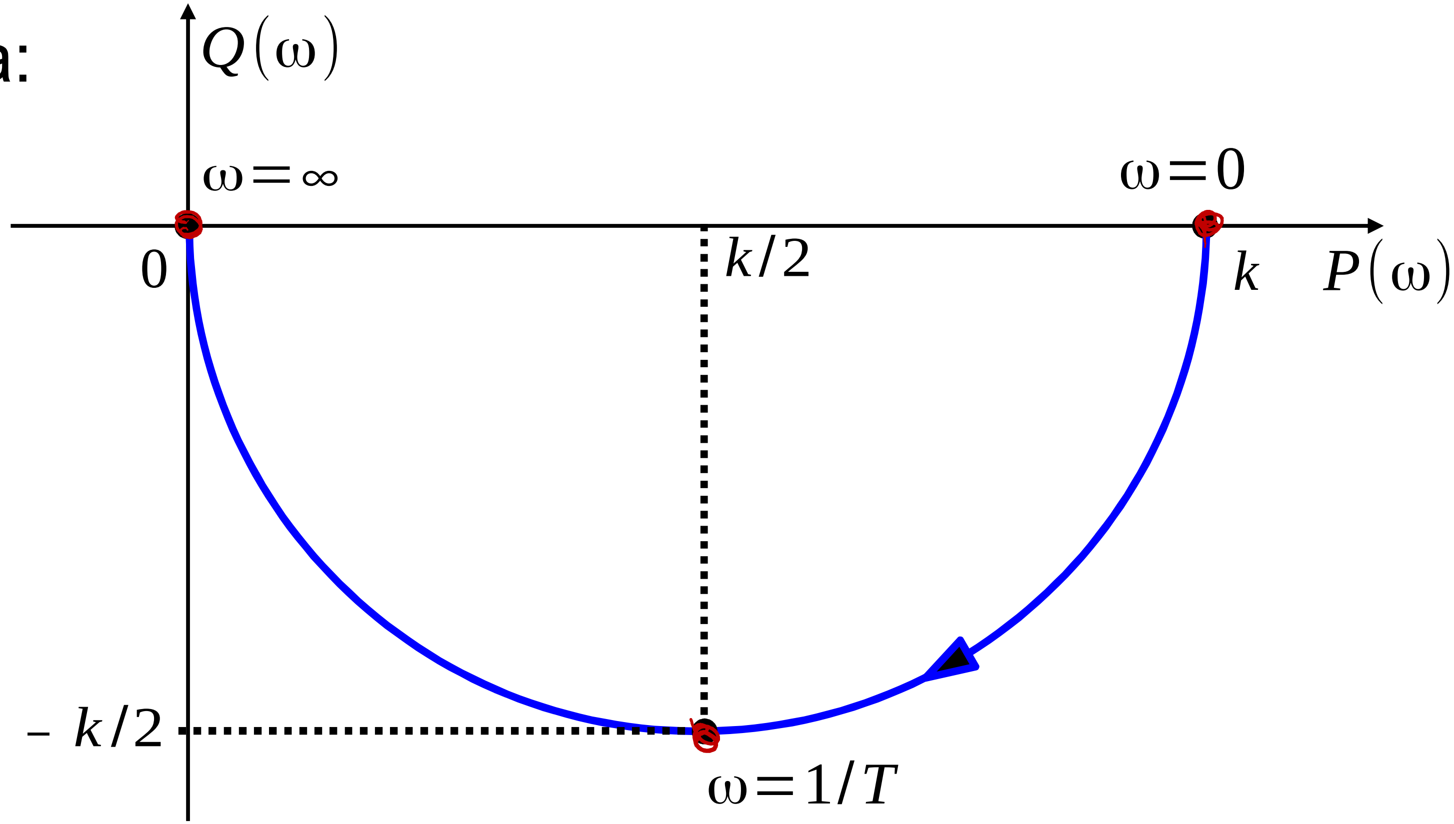
Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:



Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1}, \quad Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

$$A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{\frac{k^2+k^2T^2\omega^2}{(T^2\omega^2+1)^2}}=\sqrt{\frac{k^2\cancel{(1+T^2\omega^2)}}{(T^2\omega^2+1)^{\cancel{2}}}}$$

$$A(\omega)=\frac{|k|}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

$$L(\omega)\,[dB]=20\log_{10}A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)\,[rad]=\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}=\operatorname{arctg}(-T\omega)=-\operatorname{arctg}(T\omega)$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

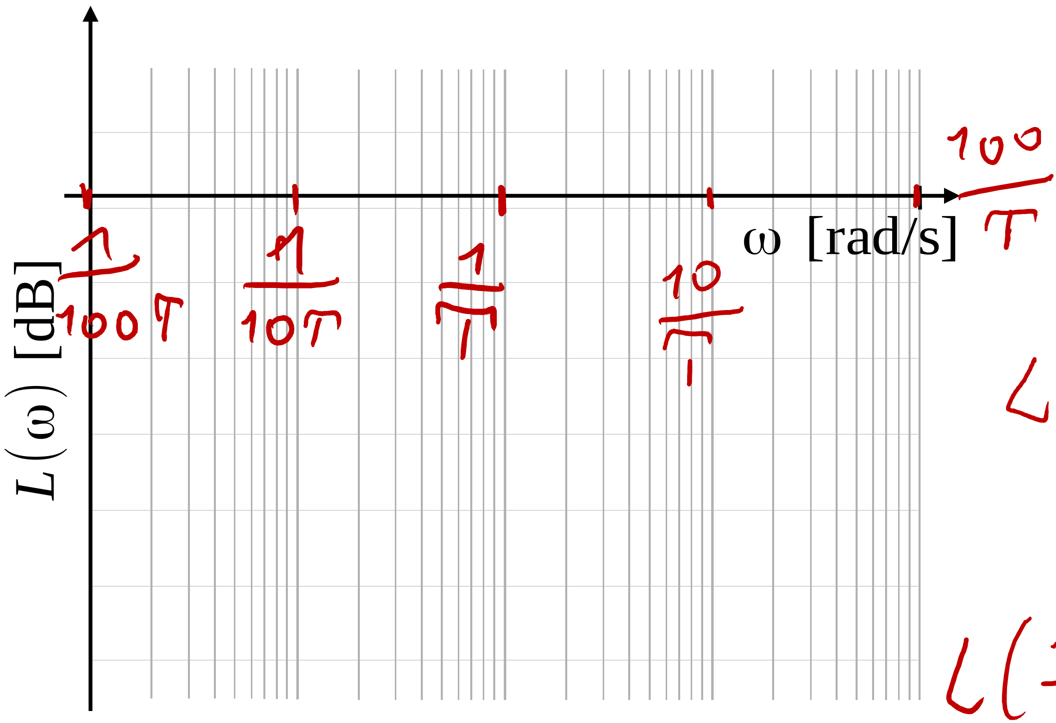
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T\omega)$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$



$$L\left(\frac{1}{T}\right)=20\log|k|-20\log\sqrt{2}=$$
$$=20\log|k|-3$$

$$L\left(\frac{10}{T}\right)=20\log|k|-20\log\sqrt{101}=$$
$$=20\log|k|-20$$

$$L\left(\frac{100}{T}\right)=20\log|k|-20\log\sqrt{10001}=$$
$$=20\log|k|-40$$

$$L\left(\frac{1}{10T}\right)=20\log|k|-20\log\sqrt{\frac{101}{100}}=$$
$$=20\log|k|$$

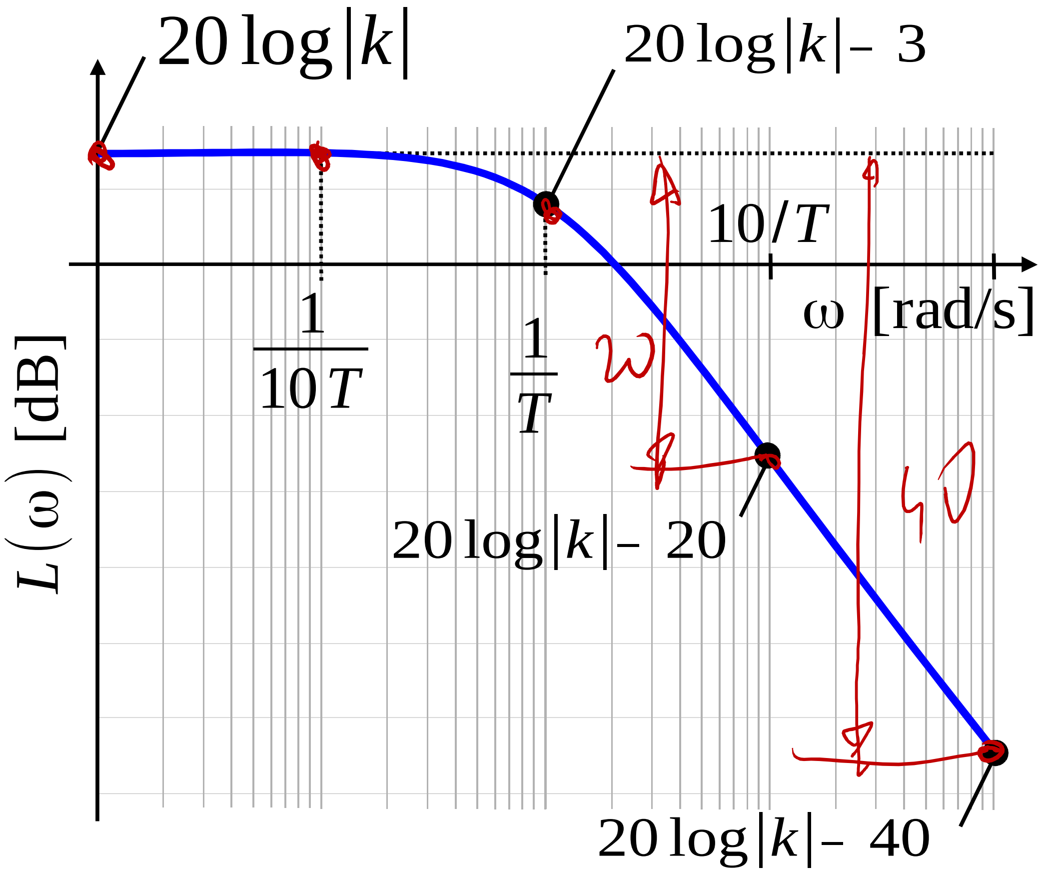
$$L\left(\frac{1}{100T}\right)=20\log|k|$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega)$$



Element inercyjny pierwszego rzędu

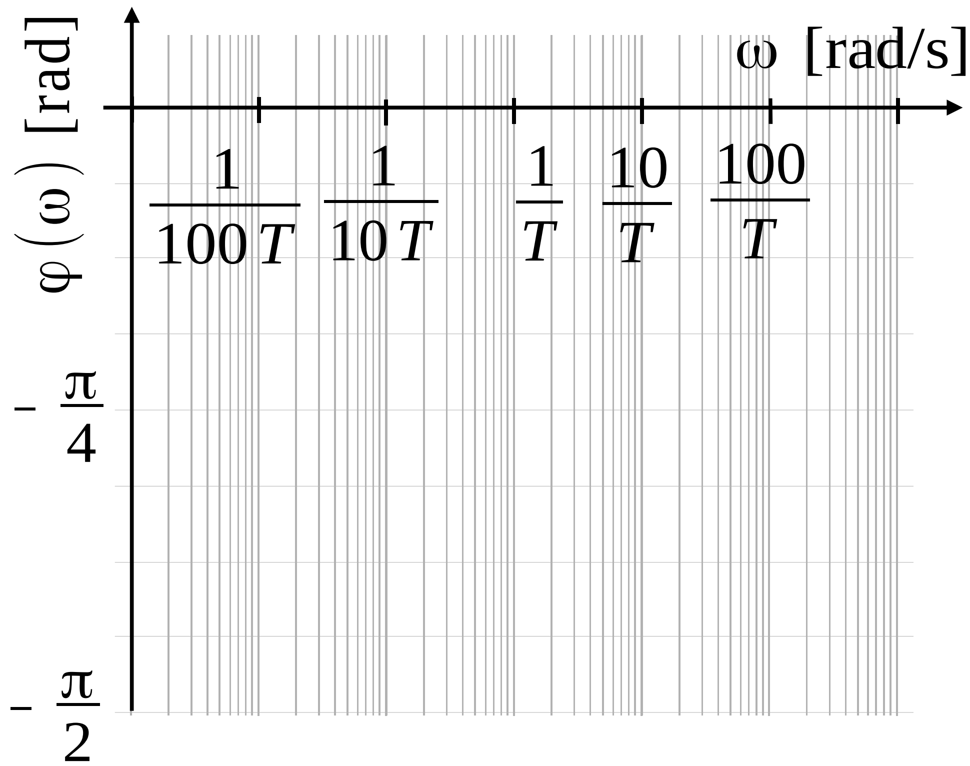
7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega)=-\mathrm{arctg}(T\omega)$$

$$\varphi\left(\frac{1}{T}\right)=-45^\circ$$

$$\varphi\left(\omega\gg\frac{10}{T}\right)\simeq-90^\circ$$

$$\varphi\left(\omega\ll\frac{1}{10T}\right)\simeq 0^\circ$$

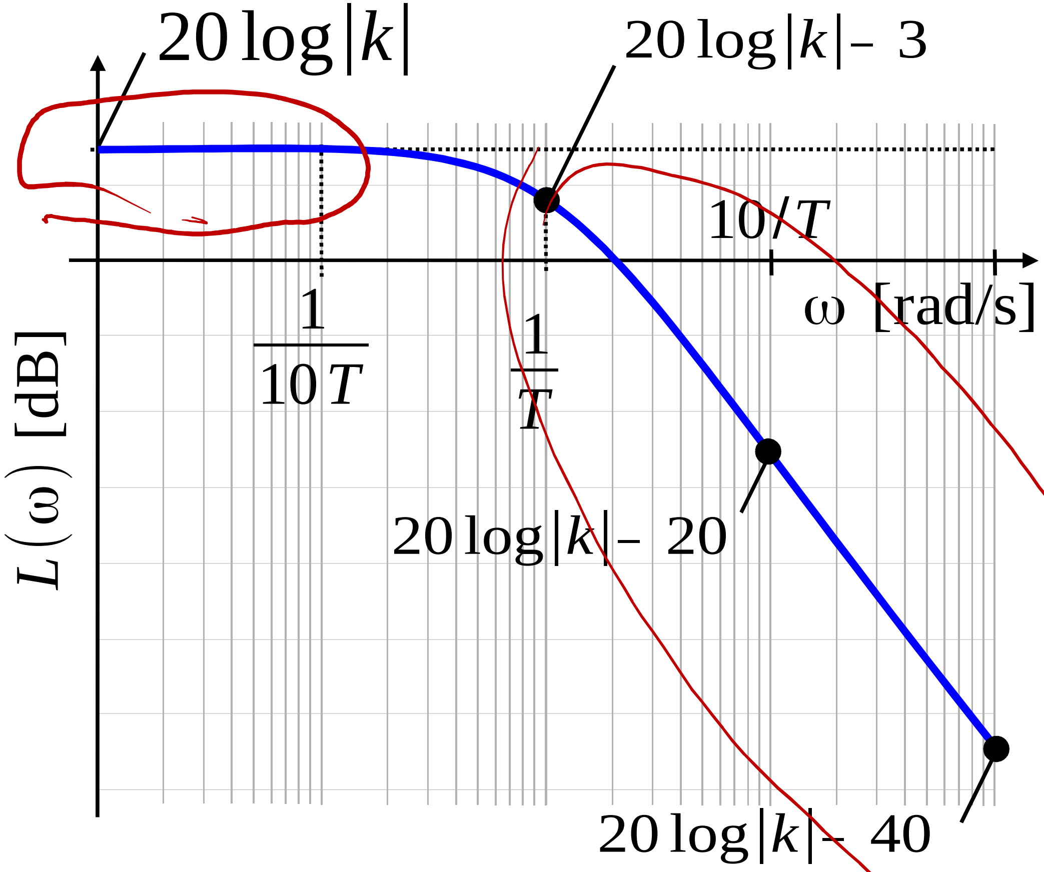


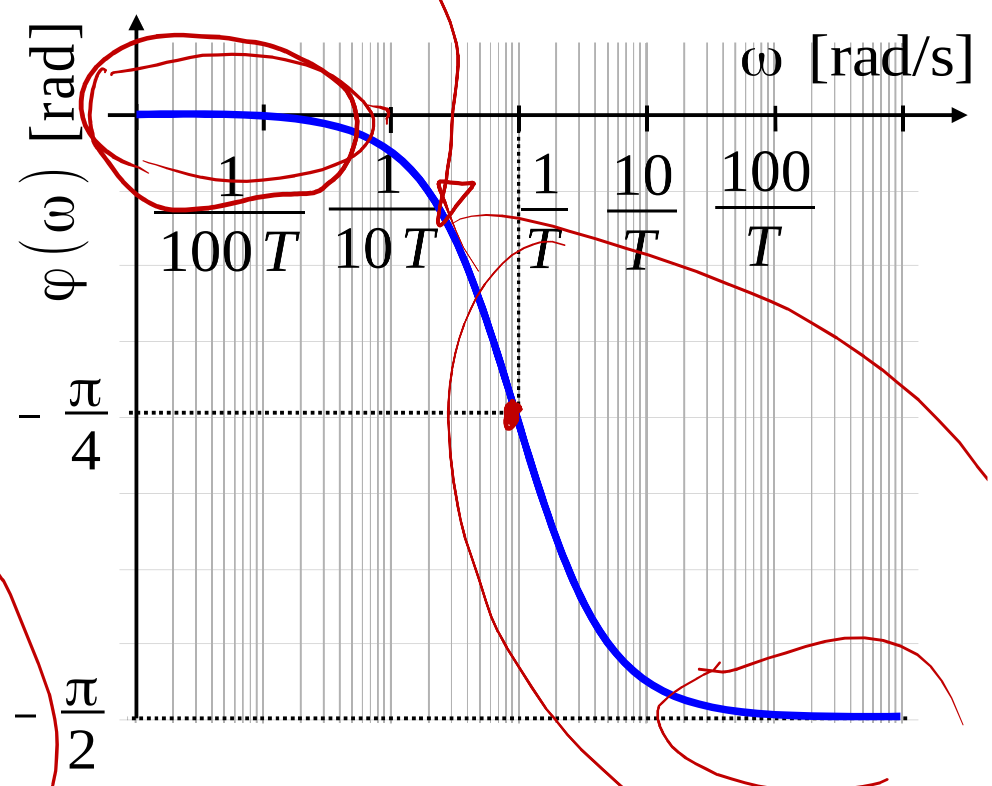
Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega)$$

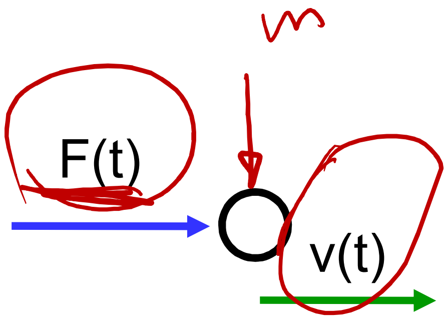




Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

1



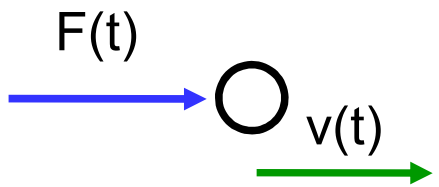
RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła F(t)
wyjście – prędkość v(t)

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną – stałe przełożenia w układzie napędowym)

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

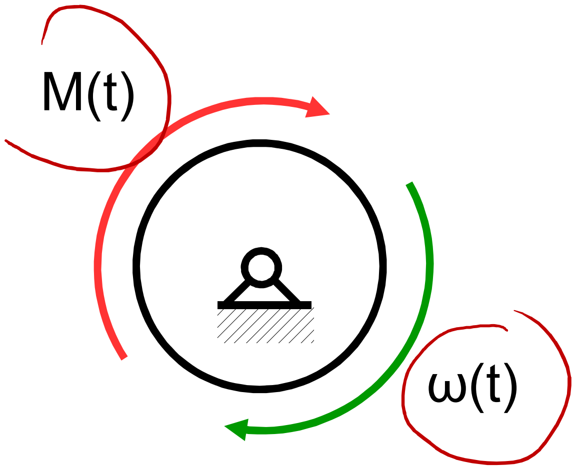
1



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła F(t)
wyjście – prędkość v(t)

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

2

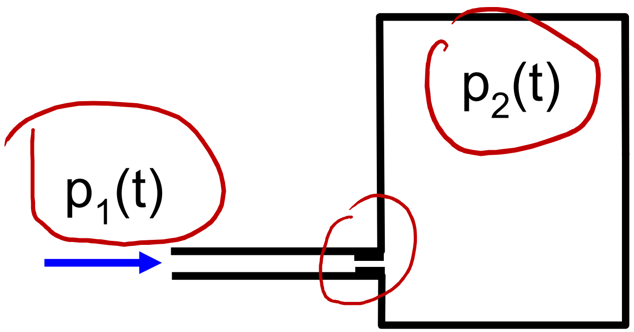


RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – moment M(t)
wyjście – prędkość kątowa ω(t)

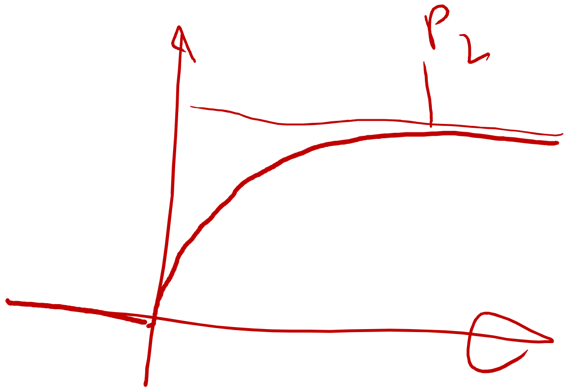
Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

3



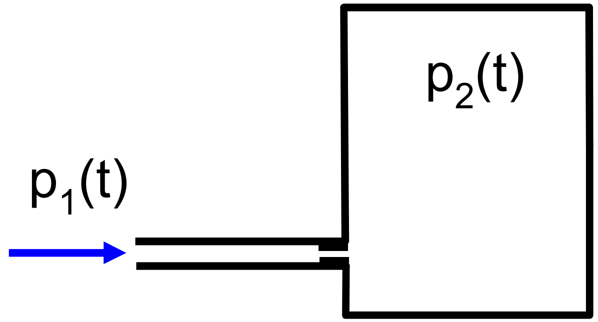
ZBIORNIK POWIETRZA:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – ciśnienie $p_2(t)$



Element inercyjny pierwszego rzędu

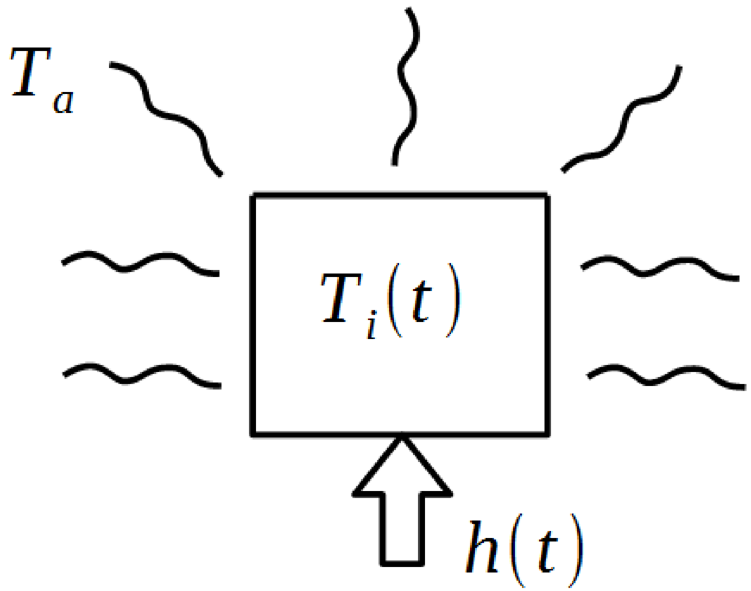
Przykłady

3

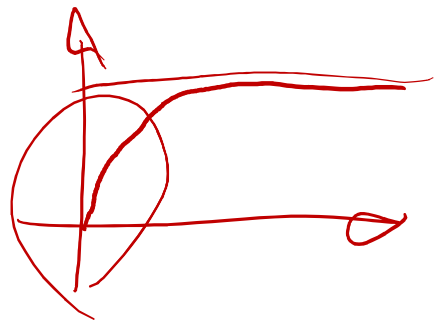


ZBIORNIK POWIETRZA:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – ciśnienie $p_2(t)$

4



OGRZEWANY OBIEKT O MAŁEJ BEZWŁADNOŚCI:
wejście – moc grzałki h(t)
wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$



Element całkujący

$y(t) = k \int_0^t u(\tau) d\tau$

1. Równanie: $\boxed{\frac{dy(t)}{dt}} = \underline{k}\,\underline{u(t)}$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element całkujący

1. Równanie:

$$0 = \frac{d\overset{const}{y}(t)}{dt} = k\,\overset{const.}{u}(t)$$

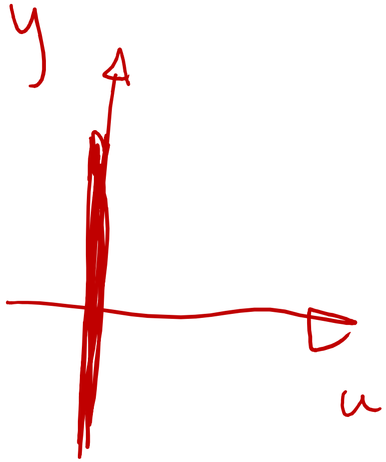
$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

u = const. ; y - const.

u = 0 ; y - const, dowolne



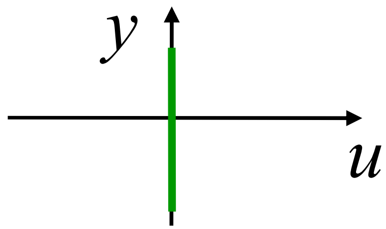
Element całkujący

1. Równanie: $\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

$\mathcal{L}$

2. Charakterystyka statyczna: $u = 0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $sY(s) = k \cdot U(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s} \qquad \left(\frac{1}{Ts} \quad T(s) \right)$$

Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$$

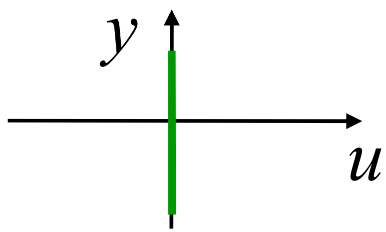
$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$u = 0$$

dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k}{s}$$

Element całkujący

4. Odp. skokowa: $u(t) = u_0 \mathbb{1}(t)$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k}{s} \cdot \frac{u_0}{s} = \frac{k u_0}{s^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{k u_0}{s^2} \right\} = k u_0 t$$

Element całkujący

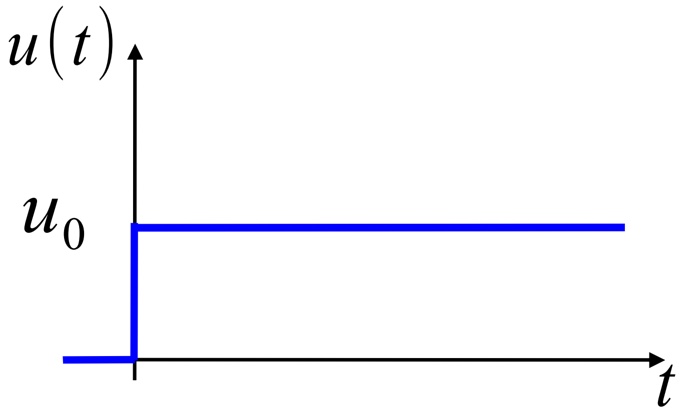
4. Odp. skokowa:

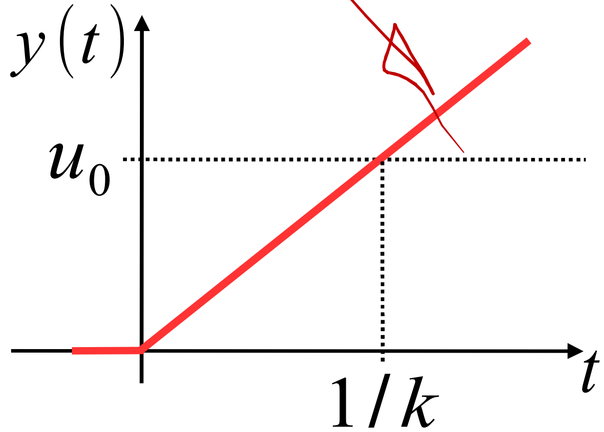
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0\frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s^2}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k u_0 t$





Element całkujący

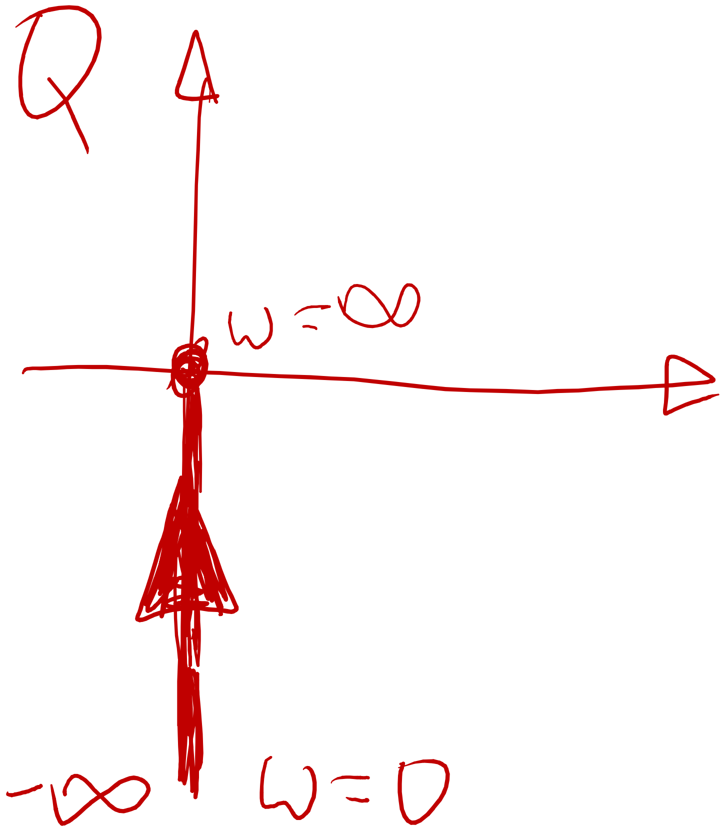
5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} = \frac{kj}{j^2\omega}$$

$$G(j\omega) = -\frac{jk}{\omega}$$

$$P(\omega) = 0 \ ; \ Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

zał. $k > 0$



Element całkujący

5. Transmitancja widmowa: $$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega)=0,\quad Q(\omega)=-\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:

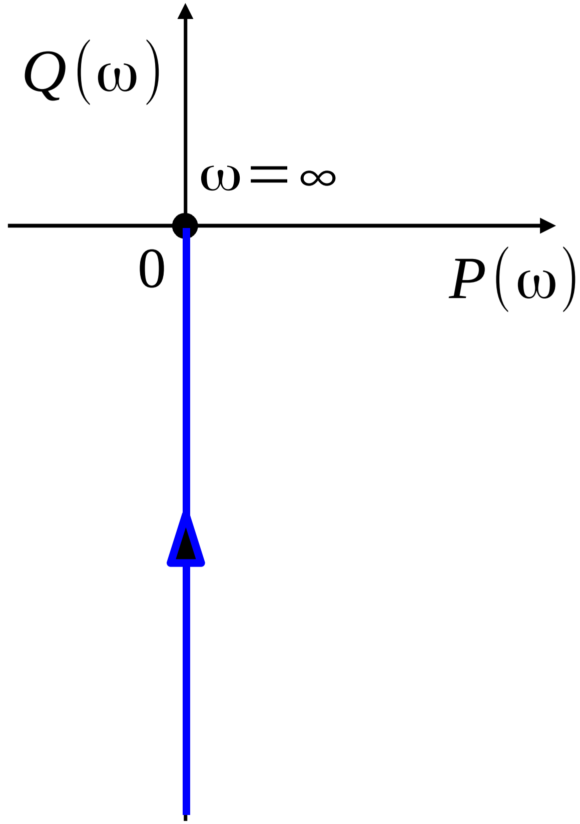
Element całkujący

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k}{j\omega}$

$$P(\omega)=0,\quad Q(\omega)=-\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element całkujący

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega)=0, \quad Q(\omega)=-\frac{k}{\omega}$$

$$A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=\left|\frac{k}{\omega}\right|$$

$$L(\omega)=20\log\left|\frac{k}{\omega}\right|$$

dl. $k>0$

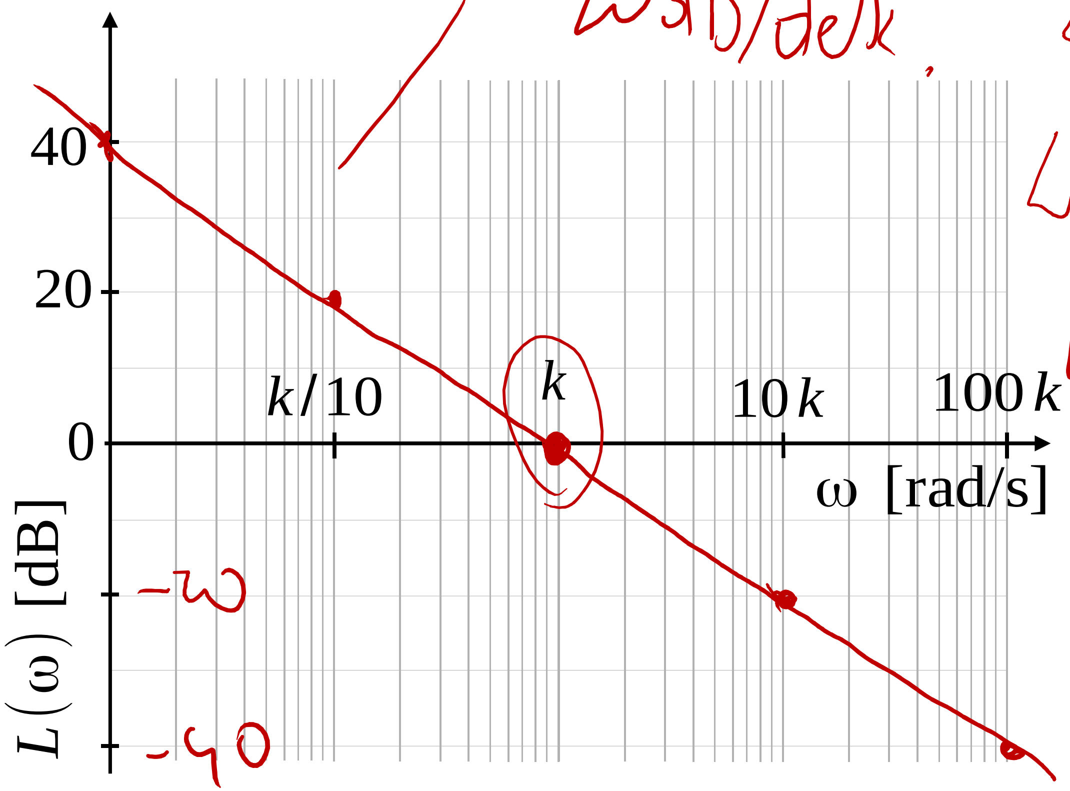
$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{k}{\omega}}{0}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left|\frac{k}{\omega}\right|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left|\frac{k}{\omega}\right|$$

$-20\,\mathrm{dB/dek}$



$L(\omega = k) = 20 \log 1 = 0$

$L(\omega = 10k) = 20 \log \frac{1}{10} = -20$

$L(\omega = 100k) = 20 \log \frac{1}{100} = -40$

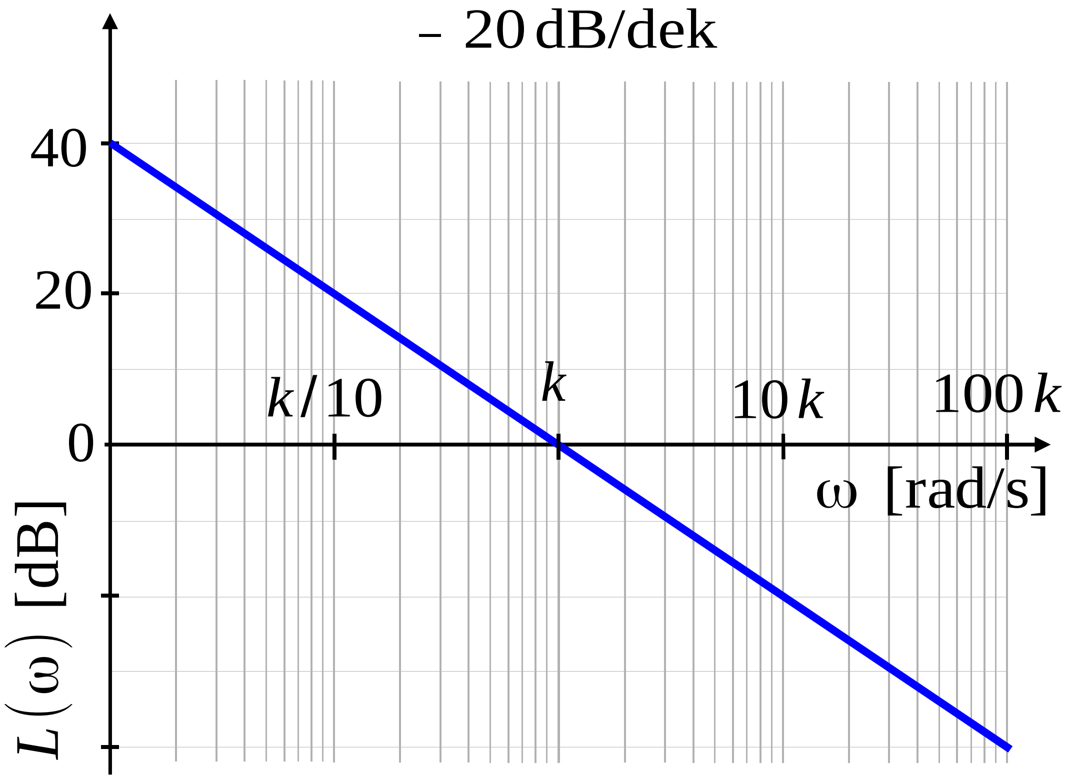
$L\left(\omega = \frac{k}{10}\right) = 20 \log 10 = 20$

$L\left(\omega = \frac{k}{100}\right) = 20 \log 100 = 40$

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|\frac{k}{\omega}|$

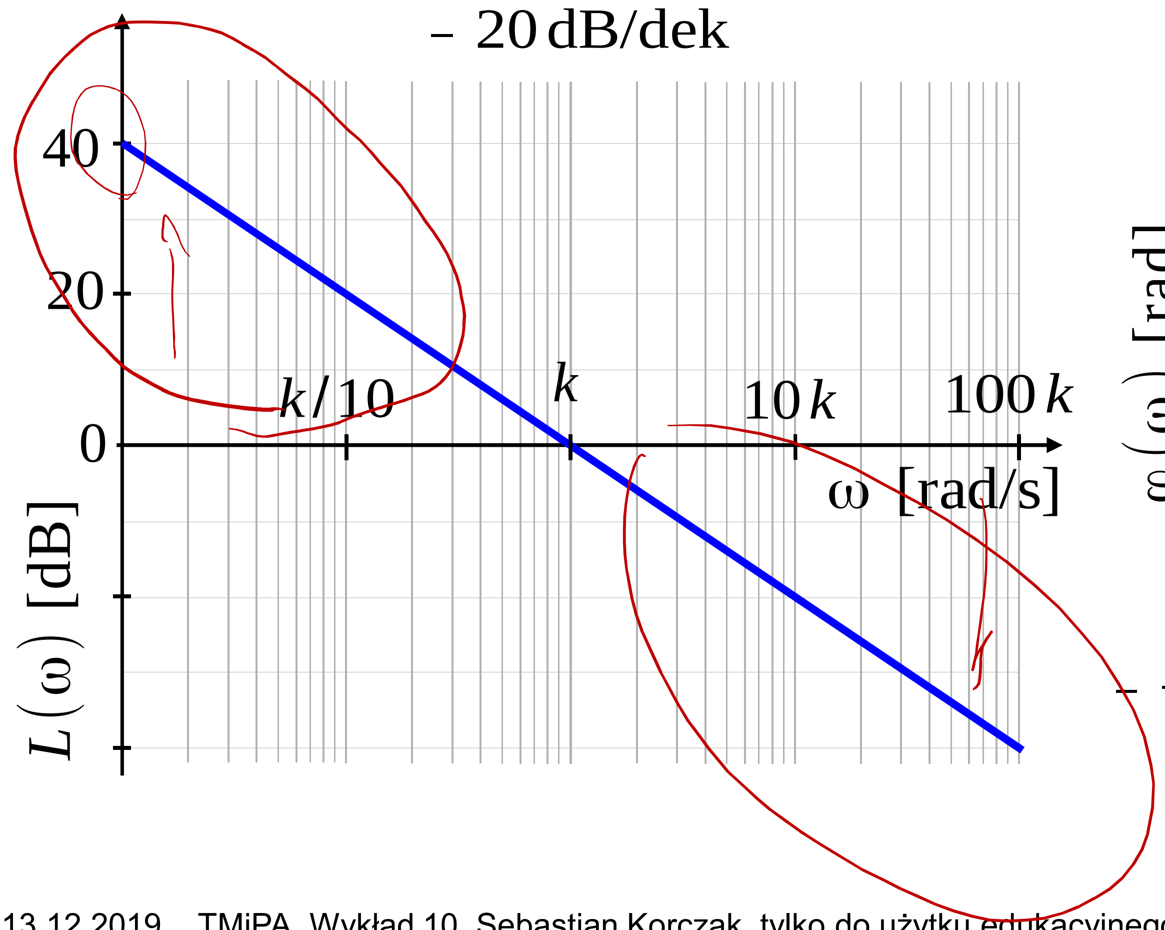
$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|\frac{k}{\omega}|$$



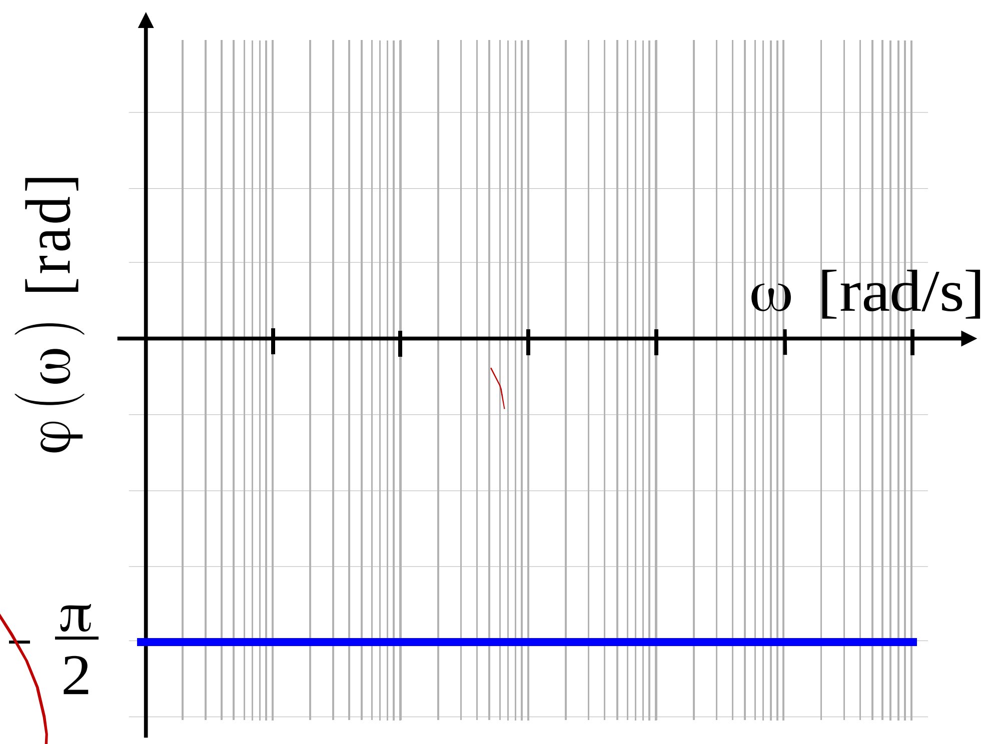
Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=\left|\frac{k}{\omega}\right|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log\left|\frac{k}{\omega}\right| \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-\infty)$$



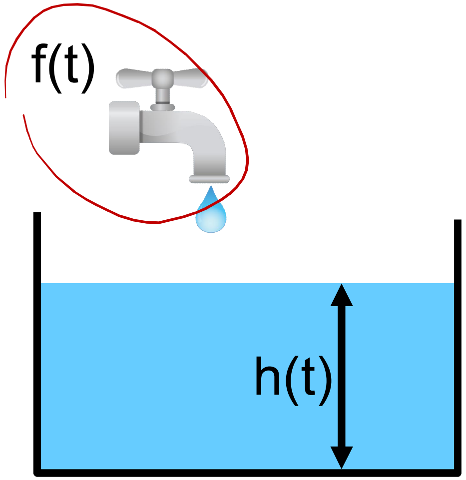
dla $k>0$



Element całkujący

Przykłady

1

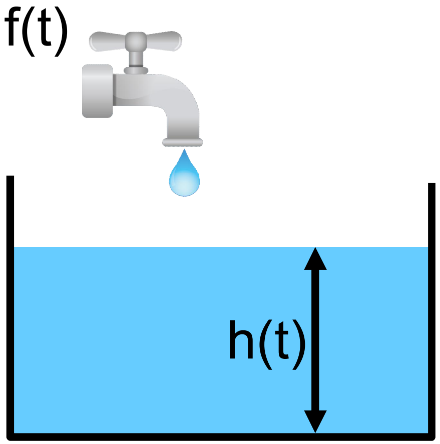


PROSTOPADŁOŚCIENNY ZBIORNIK PŁYNU:
wejście – wydatek dopływu f(t)
wyjście – poziom cieczy h(t)

Element całkujący

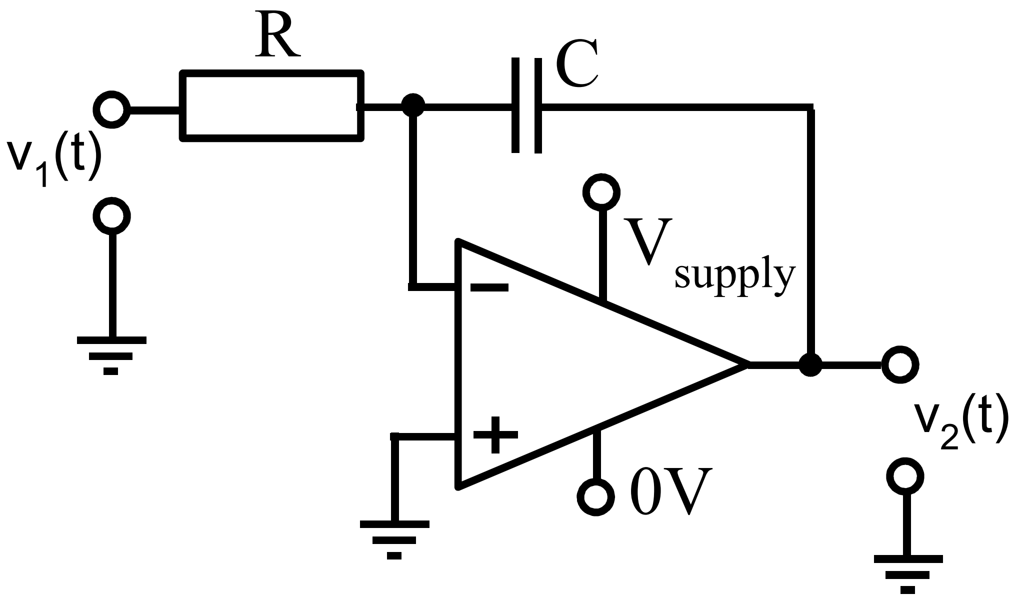
Przykłady

1



PROSTOPADŁOŚCIENNY ZBIORNIK PŁYNU:
wejście – wydatek dopływu f(t)
wyjście – poziom cieczy h(t)

2



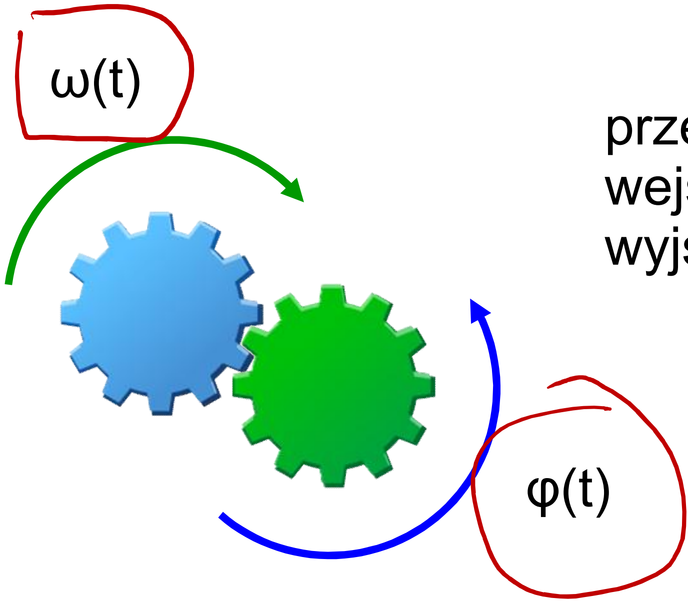
WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t v_1(t)\,dt$$

Element całkujący

Przykłady

3

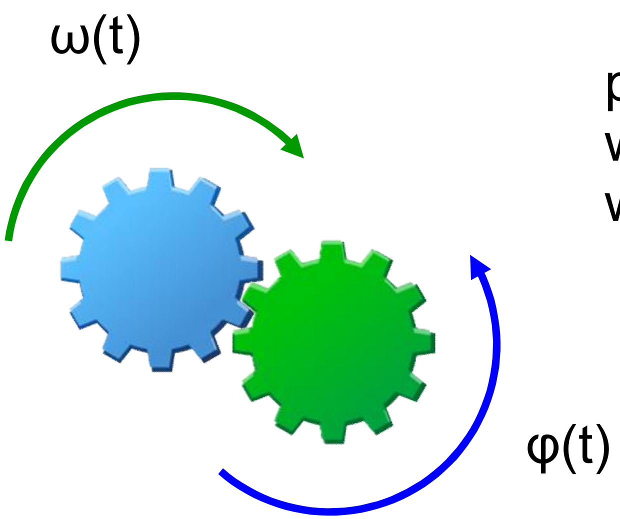


przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa ω(t)
wyjście – kąt obrotu φ(t)

Element całkujący

Przykłady

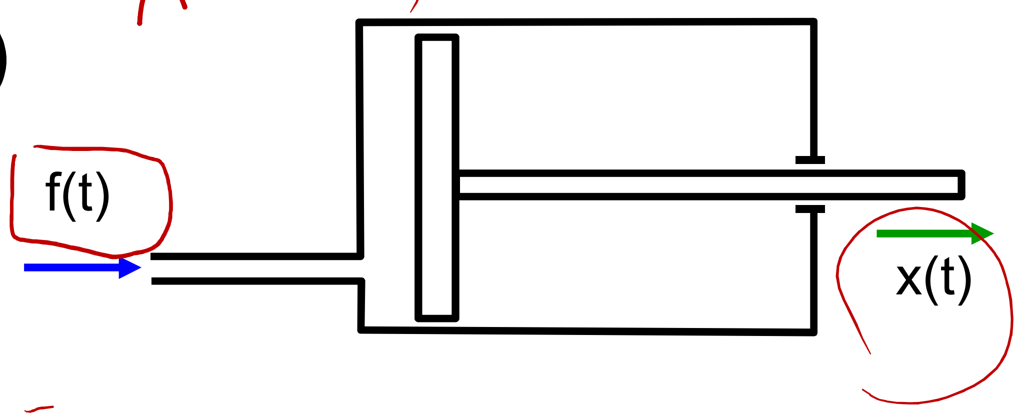
3



przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa ω(t)
wyjście – kąt obrotu φ(t)

$$\frac{f(t)}{A} = V(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

4



CYLINDER HYDRAULICZNY:
wejście – wydatek cieczy f(t)
wyjście – przemieszczenie x(t)

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t) = k\frac{du(t)}{dt}$$ $k \in R$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$u = const.$
$y = 0$

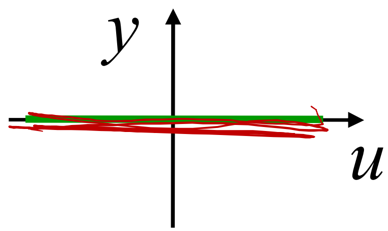
Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t) = k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $$y = 0 \quad \text{dla} \quad \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



3. Transmitancja:

$$Y(s) = k \cdot s\, U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k \cdot s$$

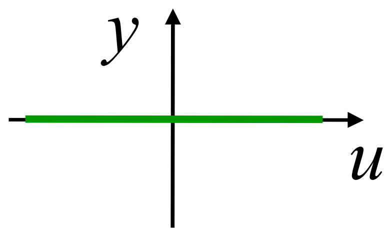
Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $$y=0 \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$$



3. Transmitancja: $$G(s)=k\,s$$

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa: $u(t) = u_0 \mathbb{1}(t)$ $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = k \cdot s \cdot u_0 \frac{1}{s} = k \cdot u_0$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{k u_0\} = k u_0 \mathcal{L}^{-1}\{1\} = k u_0 \delta(t)$$

Element różniczkujący idealny

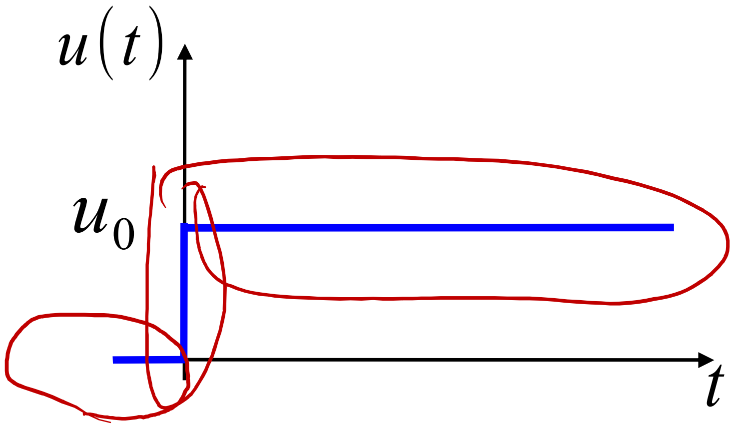
4. Odp. skokowa:

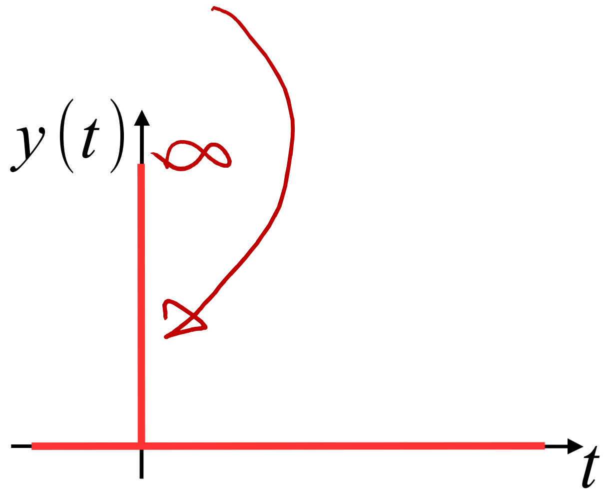
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0\dfrac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=k\,u_0$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k\,u_0\delta(t)$



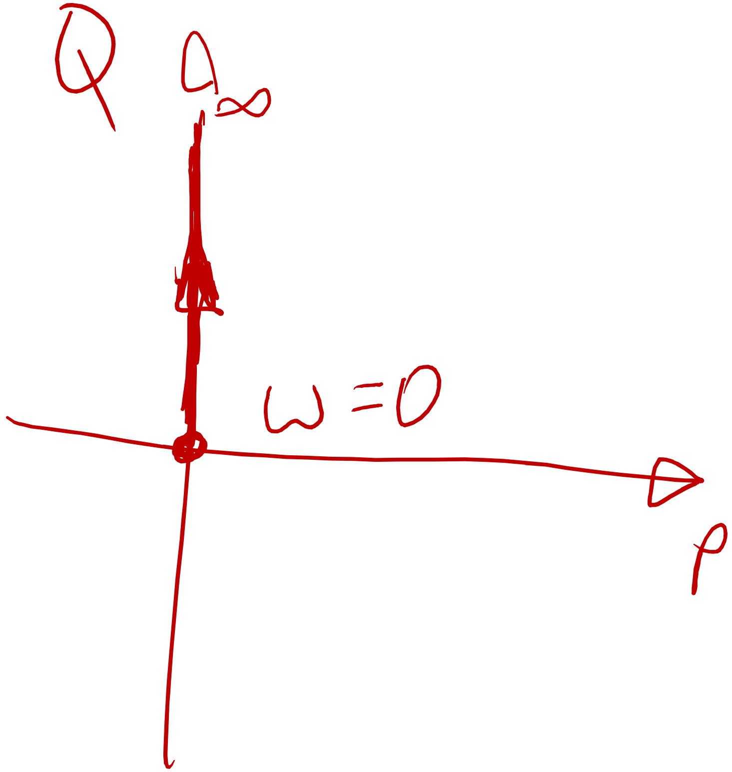


Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = kj\omega$

$P(\omega) = 0$ $\quad$ $Q(\omega) = k\omega$

war.: $k > 0$



Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=jk\omega$

$$P(\omega)=0, \quad Q(\omega)=k\omega$$

6. Wykres Nyquista:

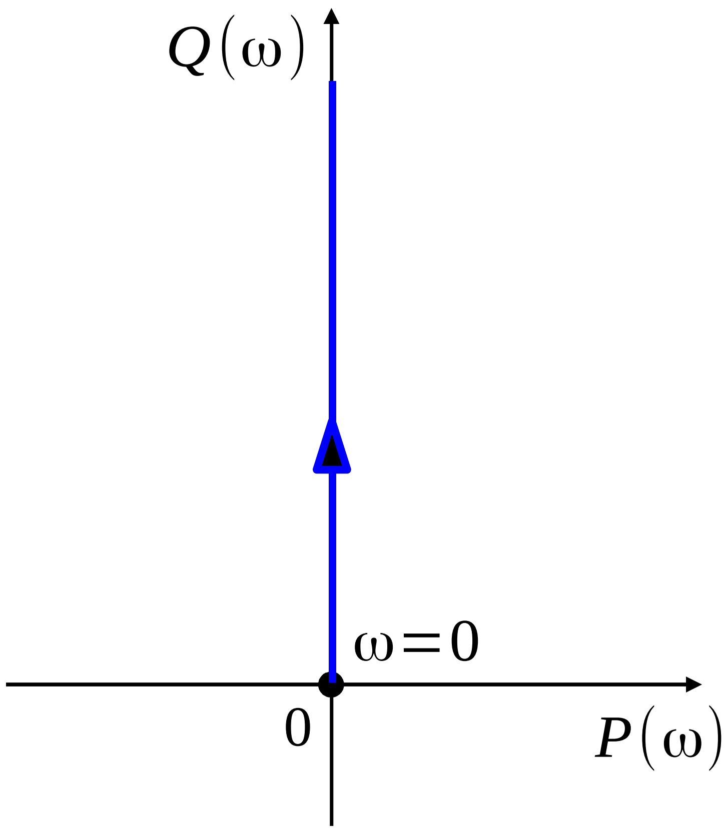
Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=jk\omega$

$$P(\omega)=0, \quad Q(\omega)=k\omega$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega)=0,\quad Q(\omega)=k\,\omega$$

$$A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}=\operatorname{arctg}\left(k\omega/0\right)=\left(\text{dla } k>0\right)=\frac{\pi}{2}$$

Element różniczkujący idealny

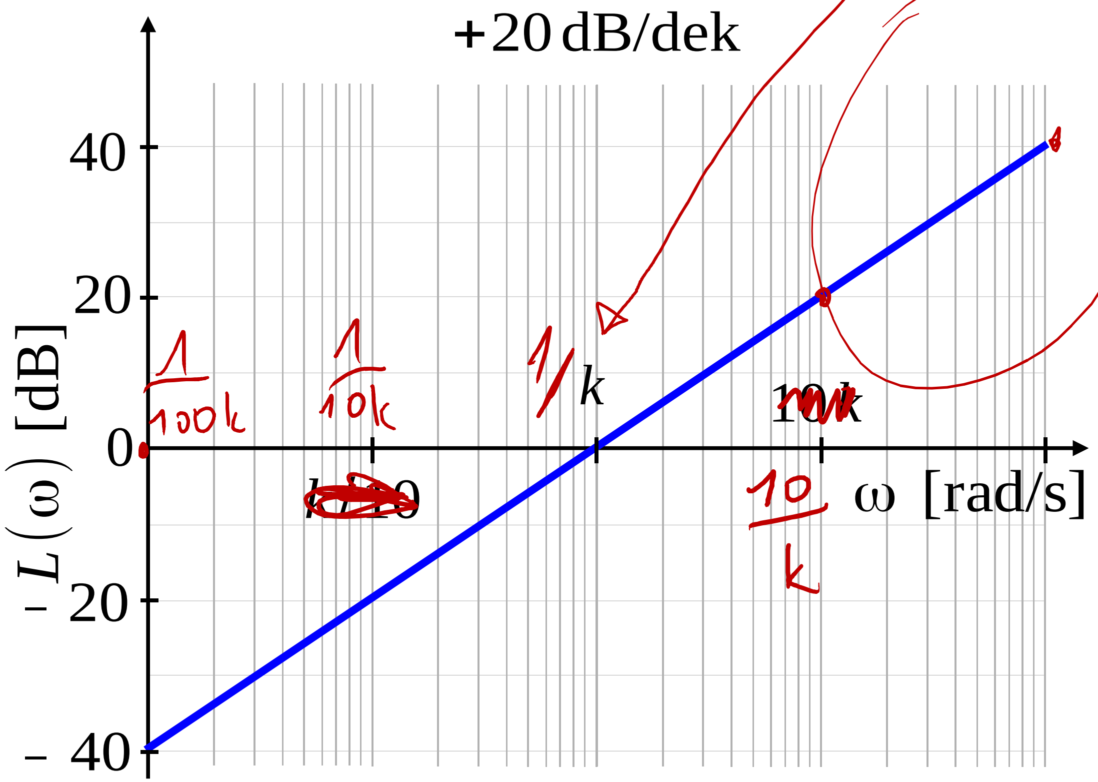
7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\,\omega|$

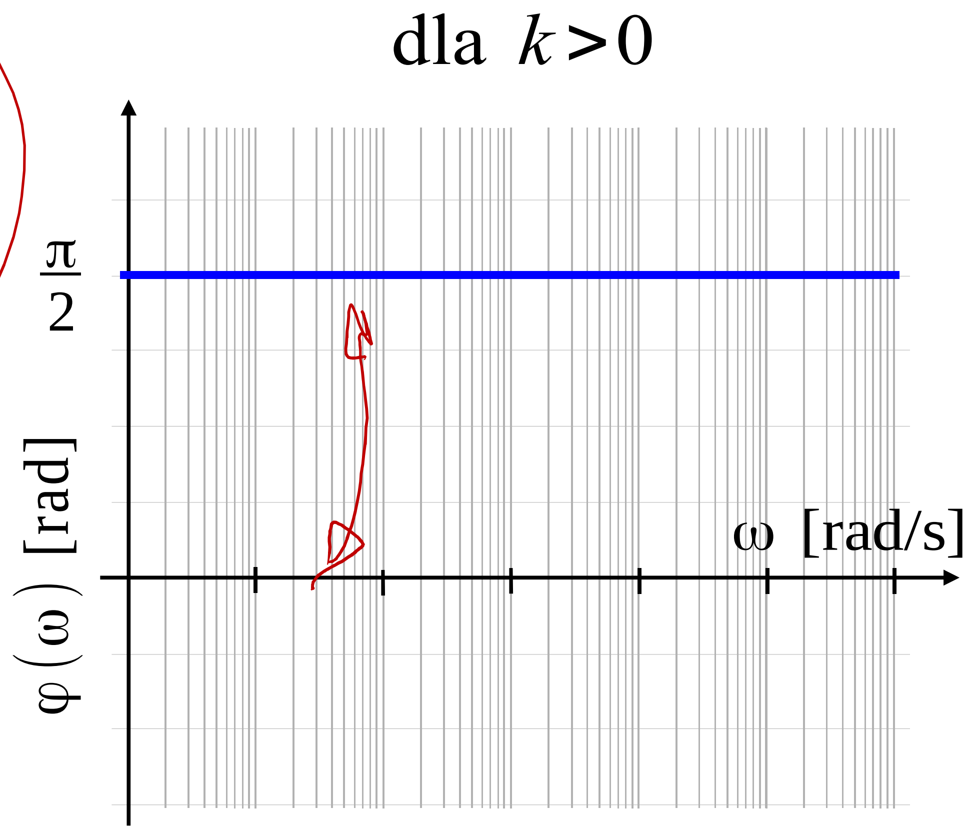
$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\,\omega| \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(\infty)$$

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega| \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(\infty)$$

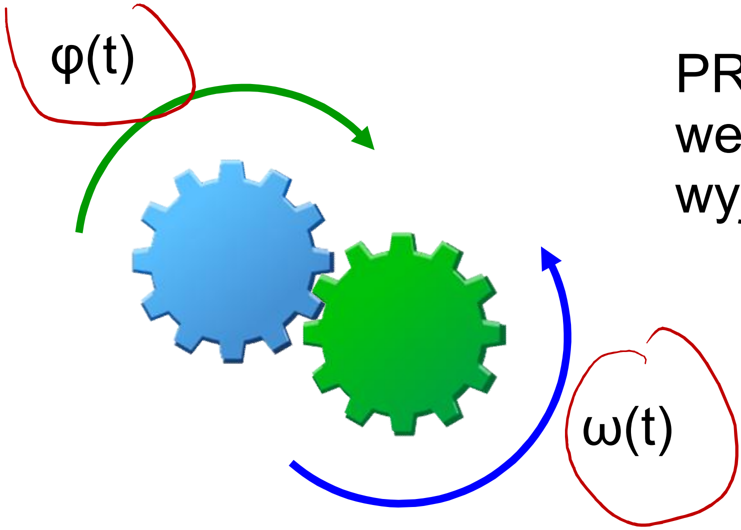




Element różniczkujący idealny

Przykłady

1

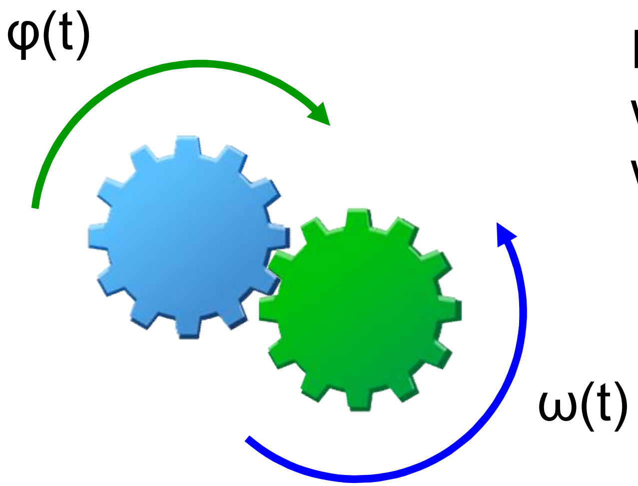


PRZEKŁADNIA ZĘBATA:
wejście – kąt obrotu φ(t)
wyjście – prędkość kątowa ω(t)

Element różniczkujący idealny

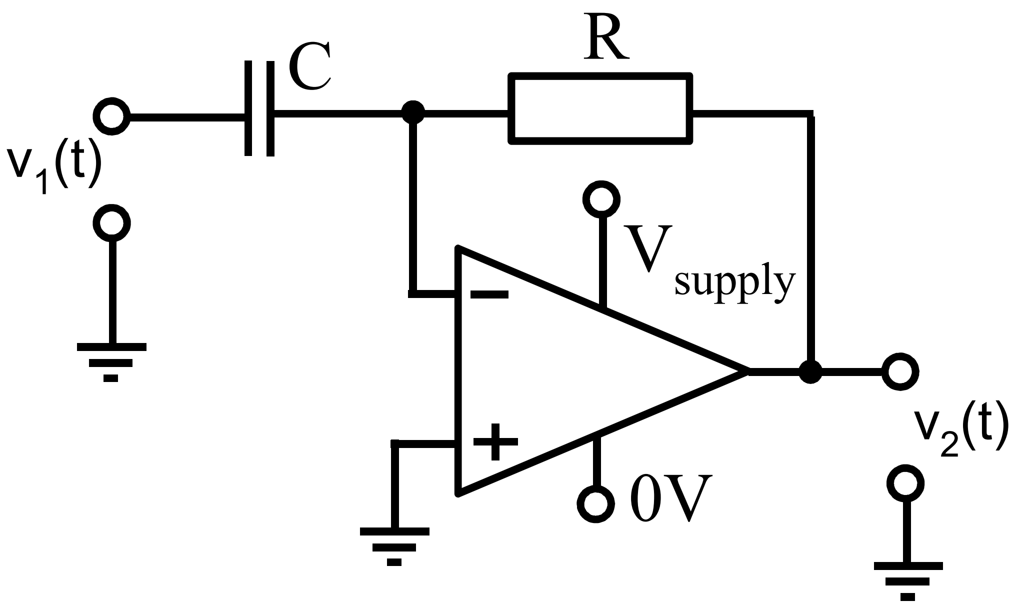
Przykłady

1



PRZEKŁADNIA ZĘBATA:
wejście – kąt obrotu φ(t)
wyjście – prędkość kątowa ω(t)

2



WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = -RC\frac{dv_1(t)}{dt}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:

$$T\frac{d\overset{\prime\,0}{y}(t)}{dt}+\overset{\prime\,\text{const.}}{y}(t)=k\frac{d\overset{\prime\,0}{u}(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna: $u=\text{const.}$, $y=0$

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie: $T\dfrac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\dfrac{du(t)}{dt}$

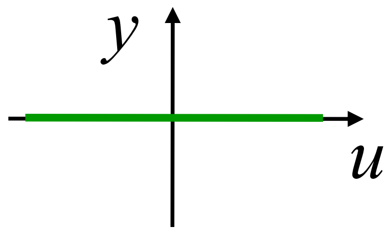
$k \in \mathbb{R}$

$u(t)$ - wejście

$T \in \mathbb{R}_+$ $[s]$

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\dfrac{dy}{dt}=0 \wedge \dfrac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja:

$$Ts\,Y(s) + Y(s) = ks\,U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{ks}{Ts+1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

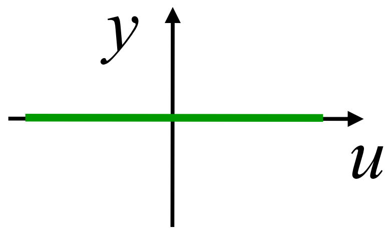
1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$y=0 \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$$



3. Transmitancja:

$$G(s)=\frac{k\,s}{Ts+1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa: $u(t) = u_0 \mathbb{1}(t)$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{ks}{Ts+1} \cdot u_0 \frac{1}{s} = \frac{ku_0}{Ts+1} = \frac{\frac{ku_0}{T}}{s+\frac{1}{T}}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\} = \frac{ku_0}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

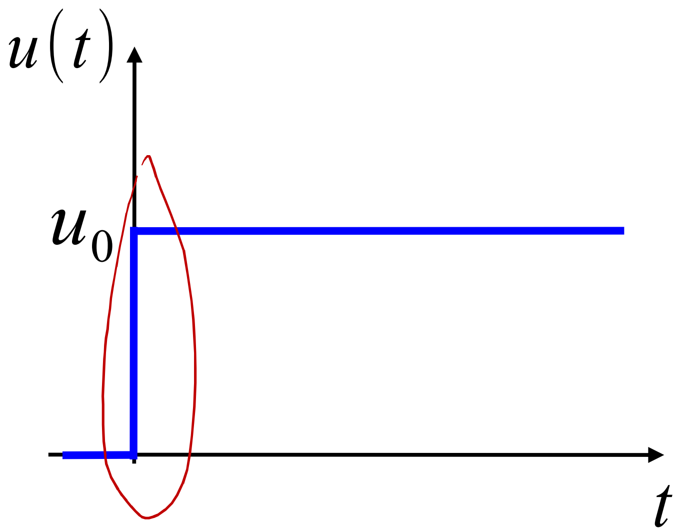
4. Odp. skokowa:

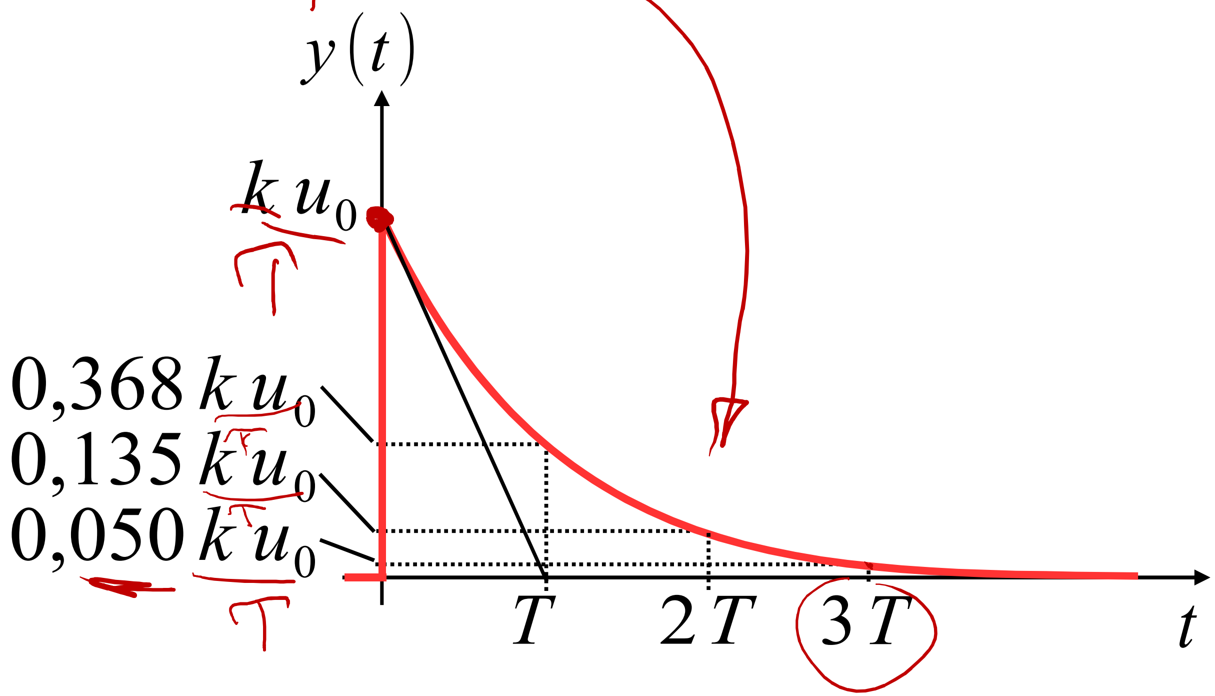
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{Ts+1}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k u_0 e^{-t/T}$





Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{kj\omega}{Tj\omega + 1}$

$$G(j\omega) = \frac{jk\omega}{1 + jT\omega} \cdot \frac{1 - jT\omega}{1 - jT\omega} = \frac{jk\omega + Tk\omega^2}{1^2 + T^2\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{Tk\omega^2}{1 + T^2\omega^2} \qquad Q = \frac{k\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k\,j\omega}{Tj\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{kT\omega^2}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{k\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:

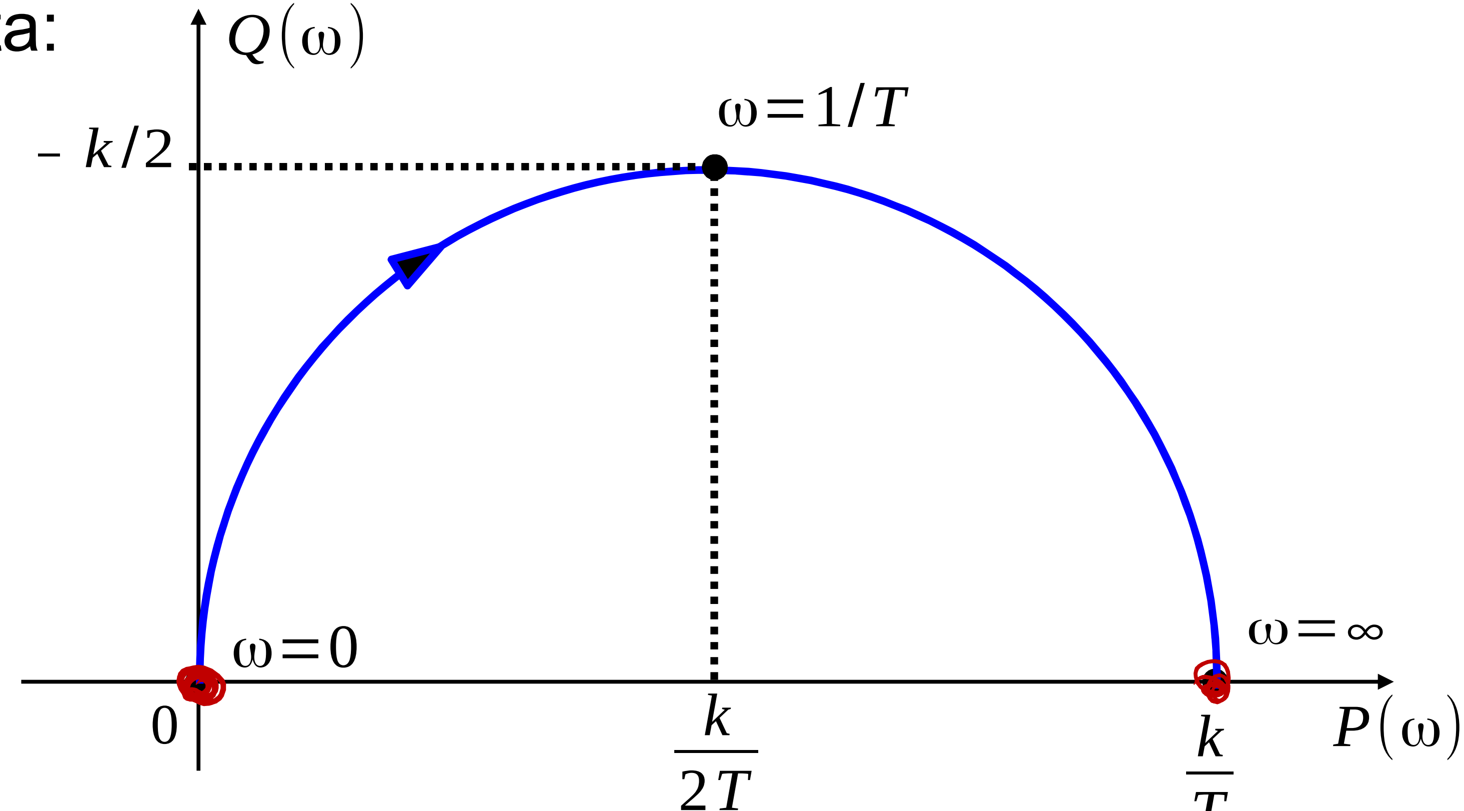
Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k\,j\omega}{Tj\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{kT\omega^2}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{k\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega)=\frac{k\,T\,\omega^2}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{k\,\omega}{T^2\omega^2+1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=\underline{20\log|k\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

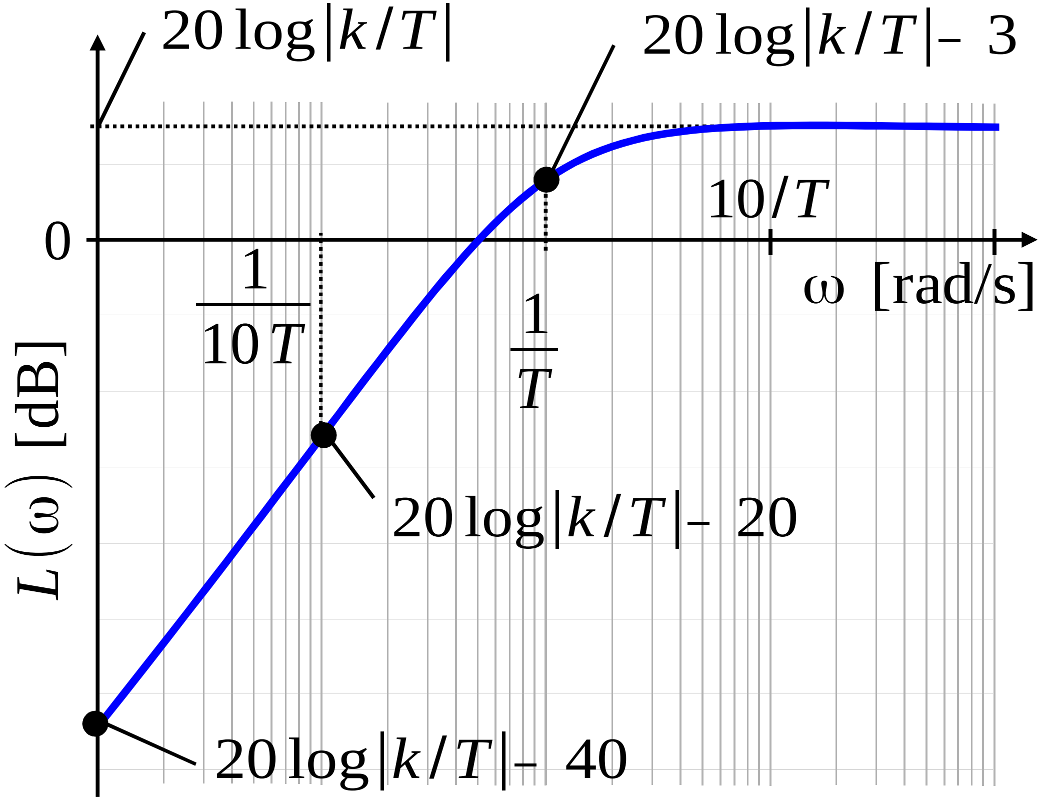
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\underline{\arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

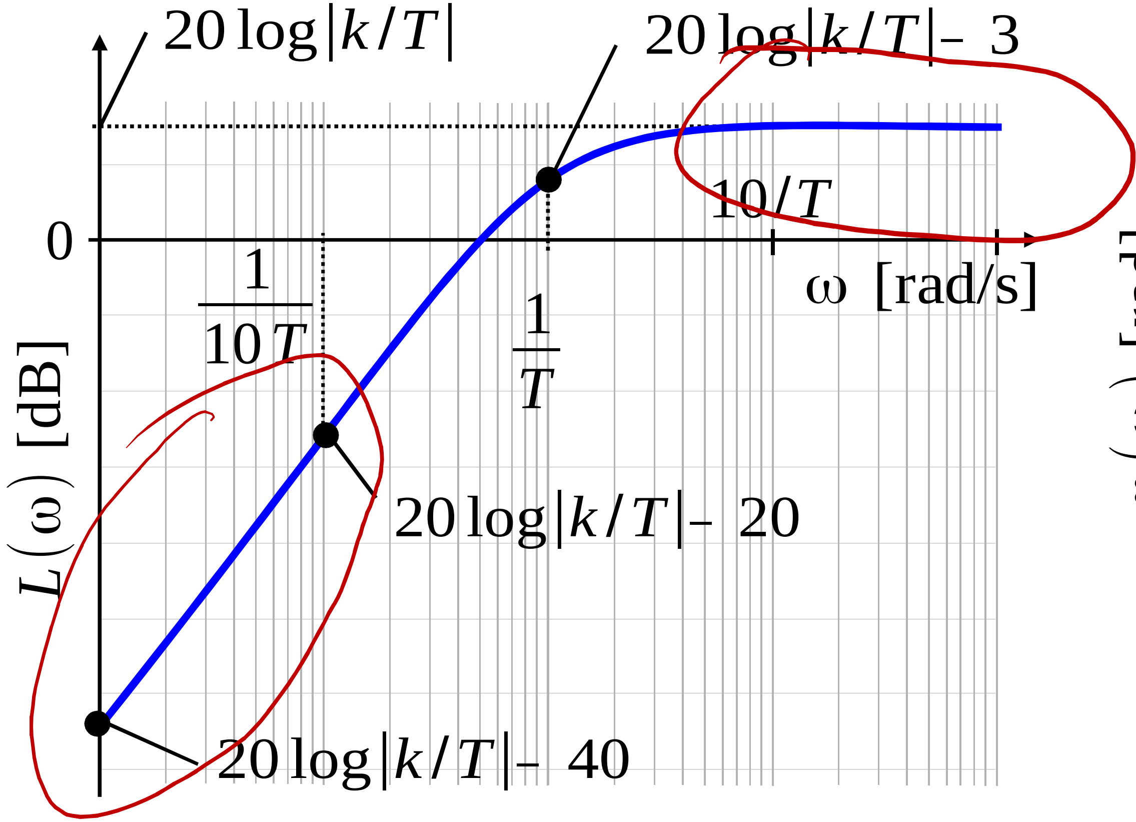


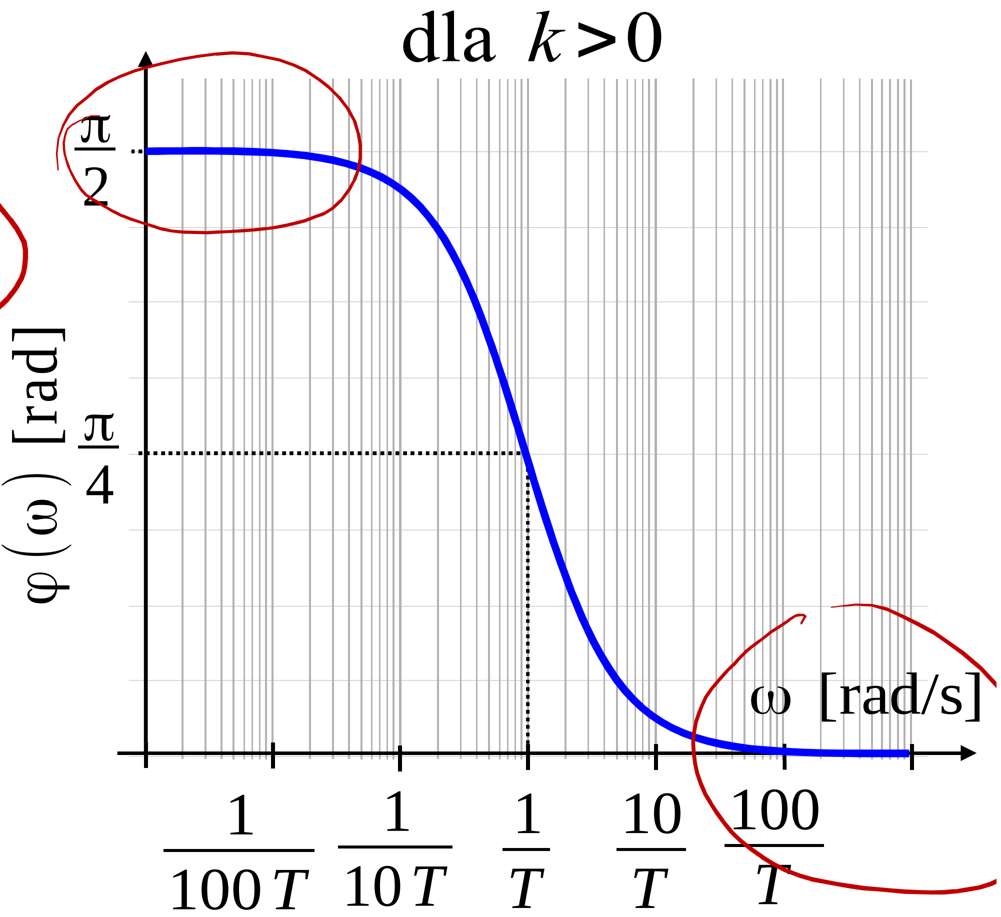
Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

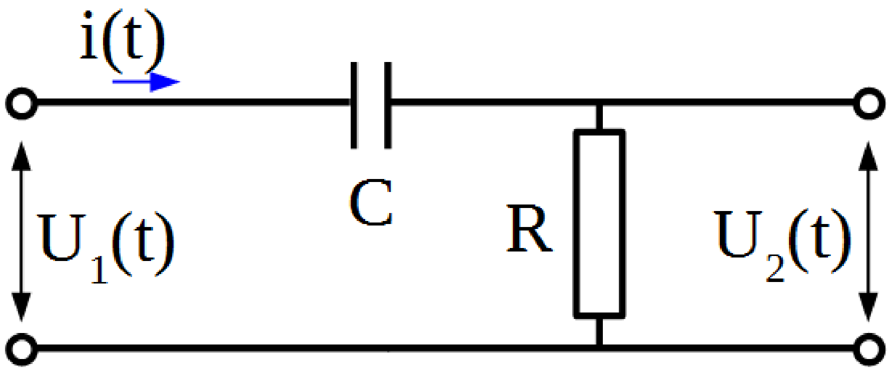




Element różniczkujący rzeczywisty

Przykłady

1



OBWÓD RC:
wejście – napięcie $u_1(t)$
wyjście – napięcie $u_2(t)$

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t) = u(t - \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ [s]

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t) = u(t - \tau)$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

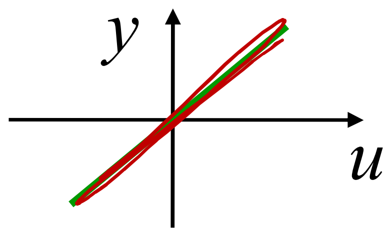
2. Charakterystyka statyczna: $u = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t)=u(t-\tau)$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=u$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja:

$$Y(s)=U(s)e^{-\tau s}$$

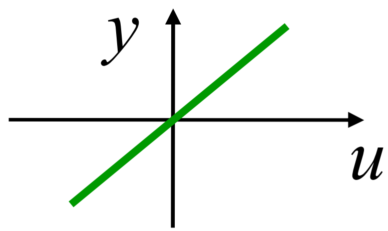
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=e^{-\tau s}$$

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t) = u(t - \tau)$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = u$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $G(s) = e^{-\tau s}$

Element opóźniający

4. Odp. skokowa: $u(t) = u_0 \mathbb{1}(t)$ $\quad U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = e^{-\tau s} \cdot u_0 \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{u_0 \frac{1}{s} e^{-\tau s}\right\} = u_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\tau s}\right\} =$$

$$= u_0 \mathbb{1}(t) * \mathbb{1}(t-\tau) = u_0 \mathbb{1}(t-\tau)$$

Element opóźniający

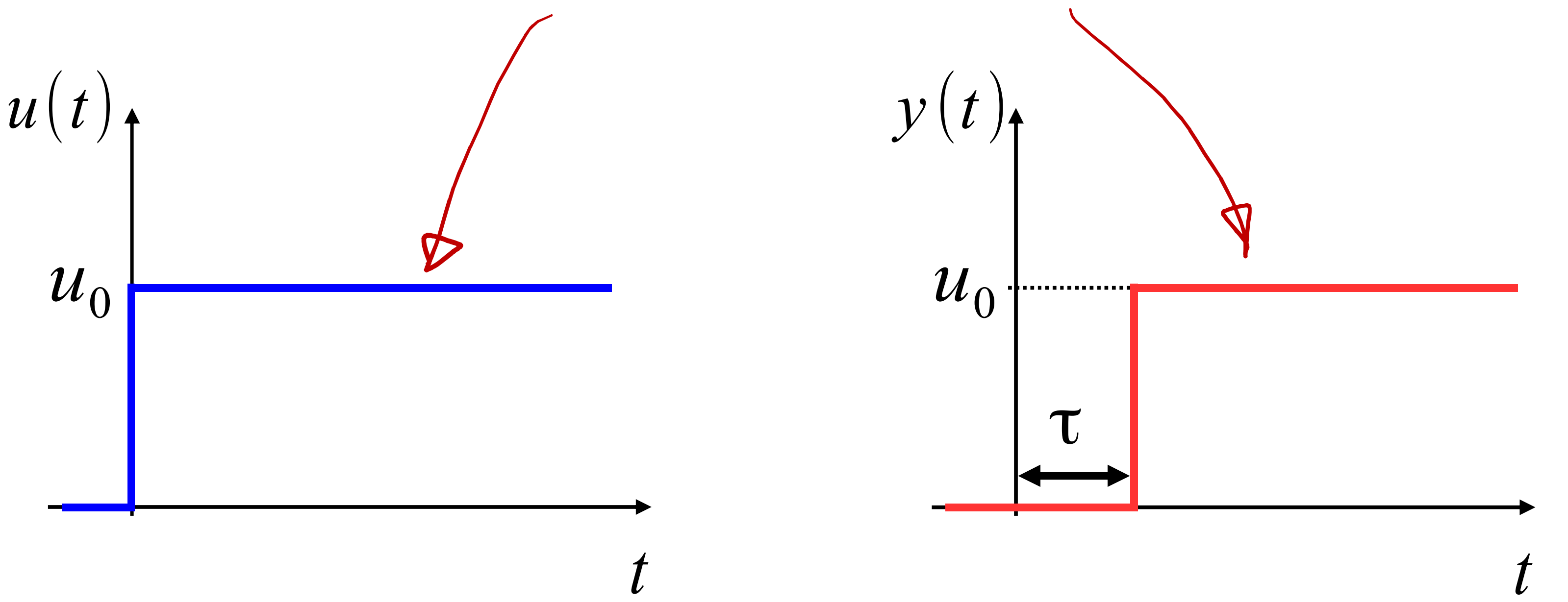
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s) U(s) = \frac{u_0}{s} e^{-\tau s}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = u_0 1(t - \tau)$



Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$G(j\omega) = \cos(\tau\omega) - j\sin(\tau\omega)$$

$$P(\omega) = \cos\tau\omega$$

$$Q(\omega) = -\sin\tau\omega$$

Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$

$$\boxed{e^{-x} = \cos x - j\sin x}$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:

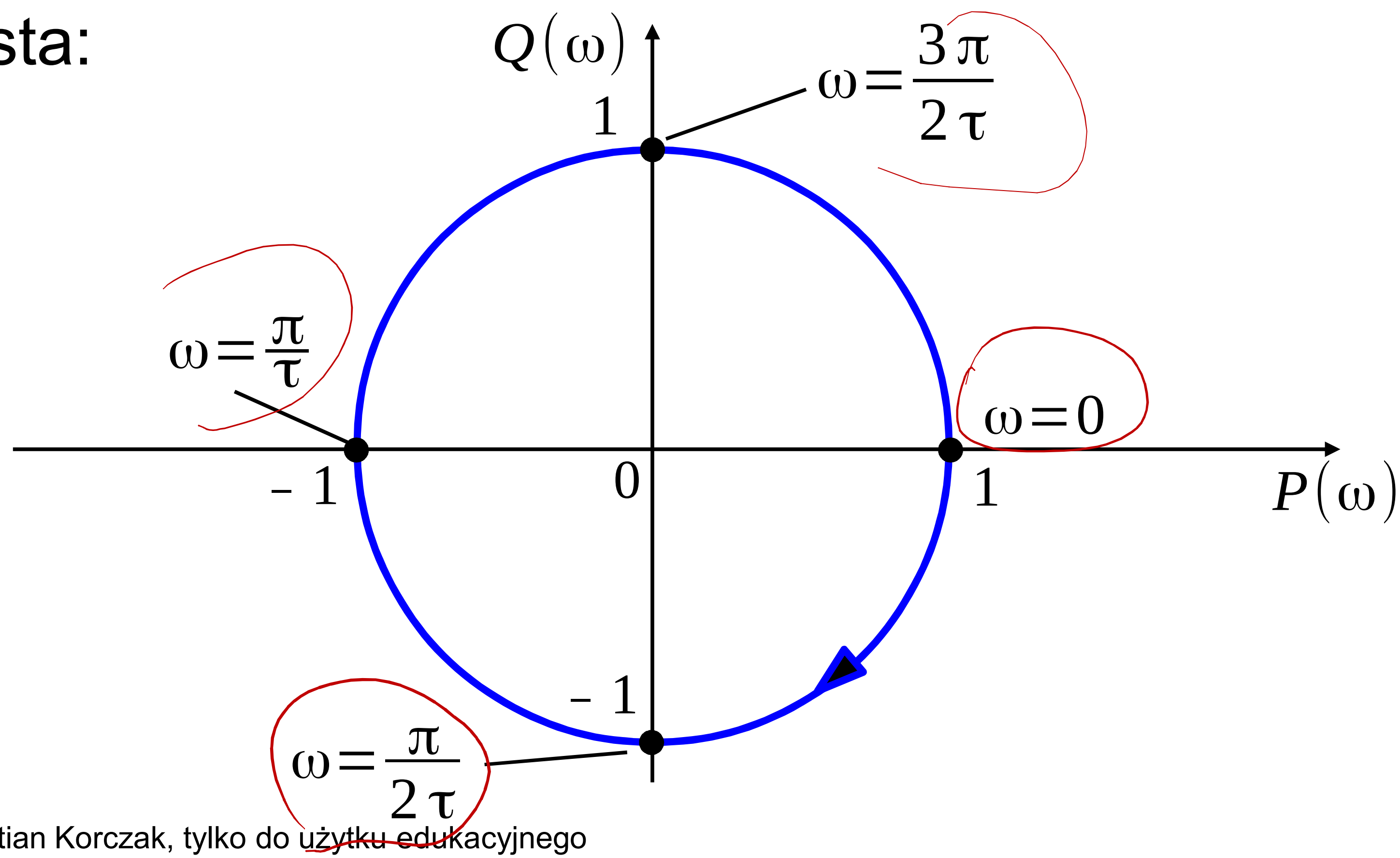
Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=e^{-\tau j\omega}$

$$\boxed{e^{-x}=\cos x-j\sin x}$$

$$P(\omega)=\cos(\tau\omega),\quad Q(\omega)=-\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:



Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $P(\omega)=\cos(\tau\omega),\ Q(\omega)=-\sin(\tau\omega)$

$$A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1 \qquad L(\omega)=20\log 1=0$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}=\operatorname{arctg}\frac{-\sin\tau\omega}{\cos\tau\omega}=\operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}\tau\omega)=$$

$$=-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\tau\omega)=-\tau\omega$$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

$$L(\omega) = 20\log A(\omega) = 20\log 1 = 0$$

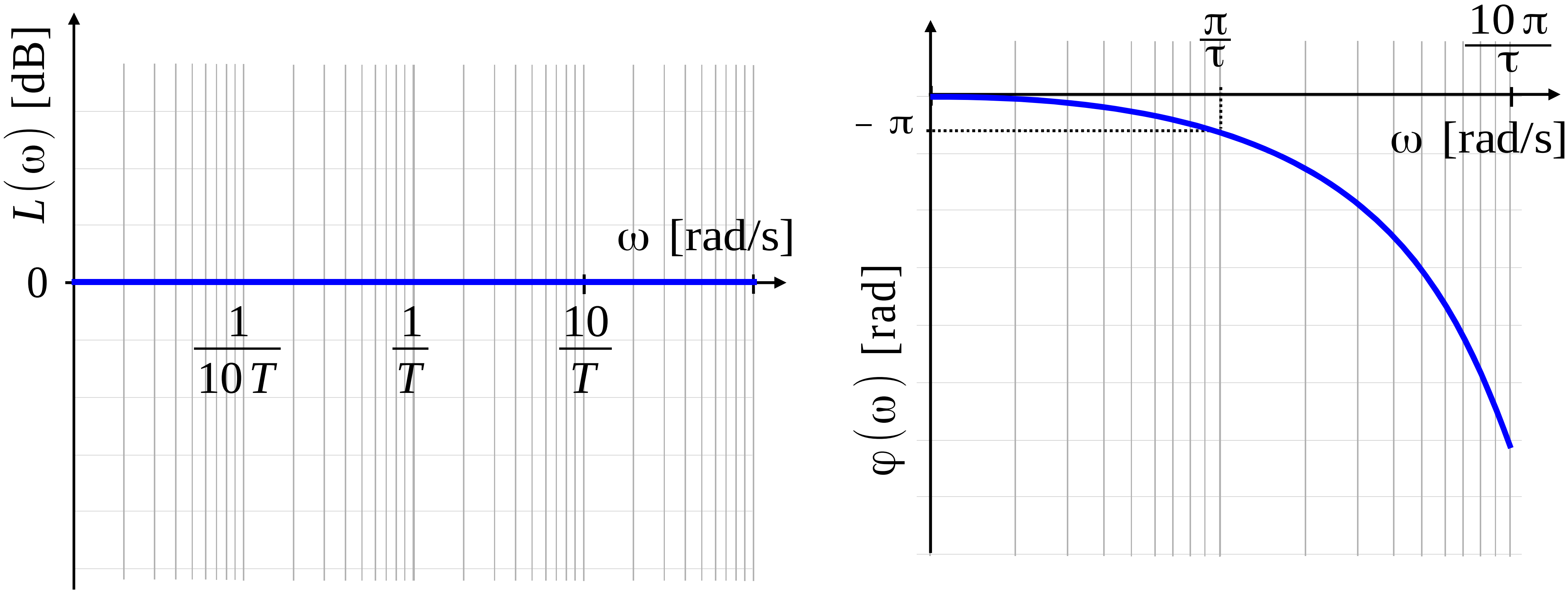
$$\varphi(\omega) = \arctan\frac{Q}{P} = \arctan\left(-\tan(\tau\omega)\right) = -\tau\omega$$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1$

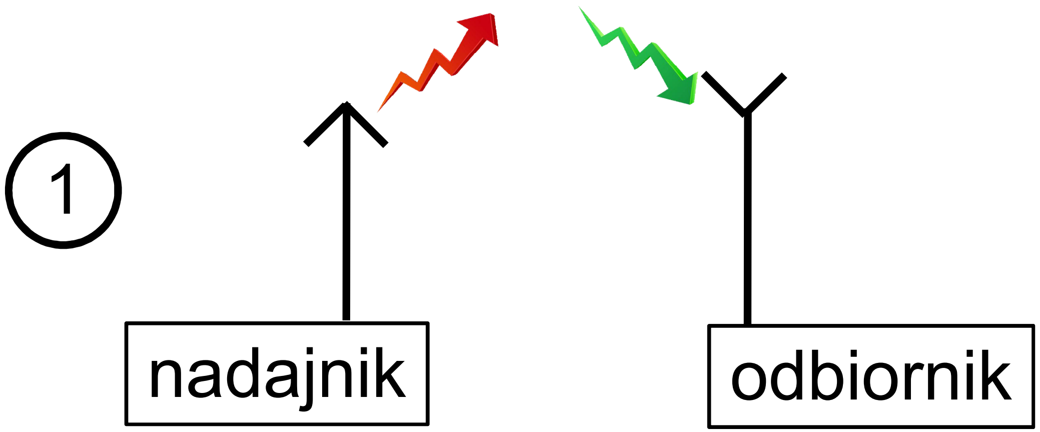
$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log 1=0$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-\tan(\tau\omega))=-\tau\omega$$



Element opóźniający

Przykłady



TRANSMISJA BEZPRZEWODOWA:
wejście – dane wysłane
wyjście – dane odebrane

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: $$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

$T_1, T_2 \in \mathbb{R}_+ \; [s] \; ; \; k \in \mathbb{R}$

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

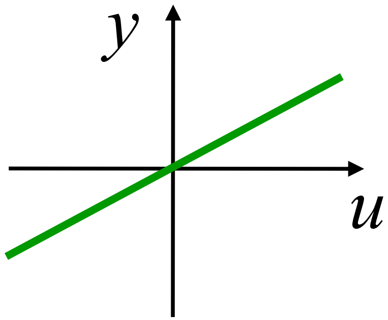
$$T_1^2 \overset{\to 0}{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}} + T_2 \overset{\to 0}{\frac{dy(t)}{dt}} + \overset{\text{const.}}{y(t)} = k\,\overset{\text{const.}}{u(t)}$$

2. Charakterystyka statyczna:

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: $$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $$y = ku \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



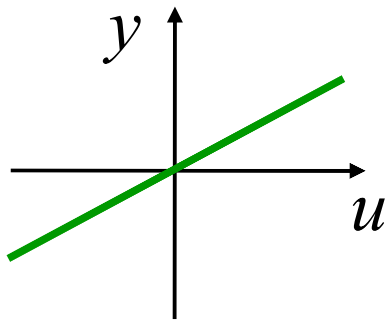
3. Transmitancja: $$T_1^2 s^2 Y(s) + T_2 s Y(s) + Y(s) = k \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{T_1 s^2 + T_2 s + 1}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: $$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $$y = ku \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



3. Transmitancja: $$G(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k\,u_0}{\underbrace{(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}\, s}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0\frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2+T_2 s+1)}$

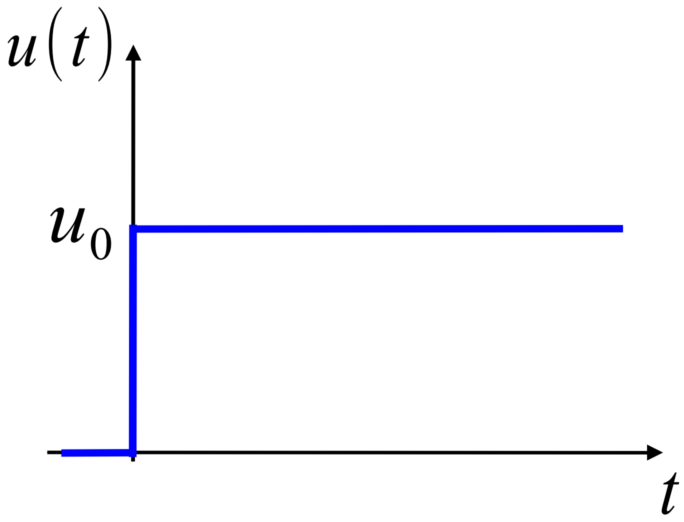
wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=$

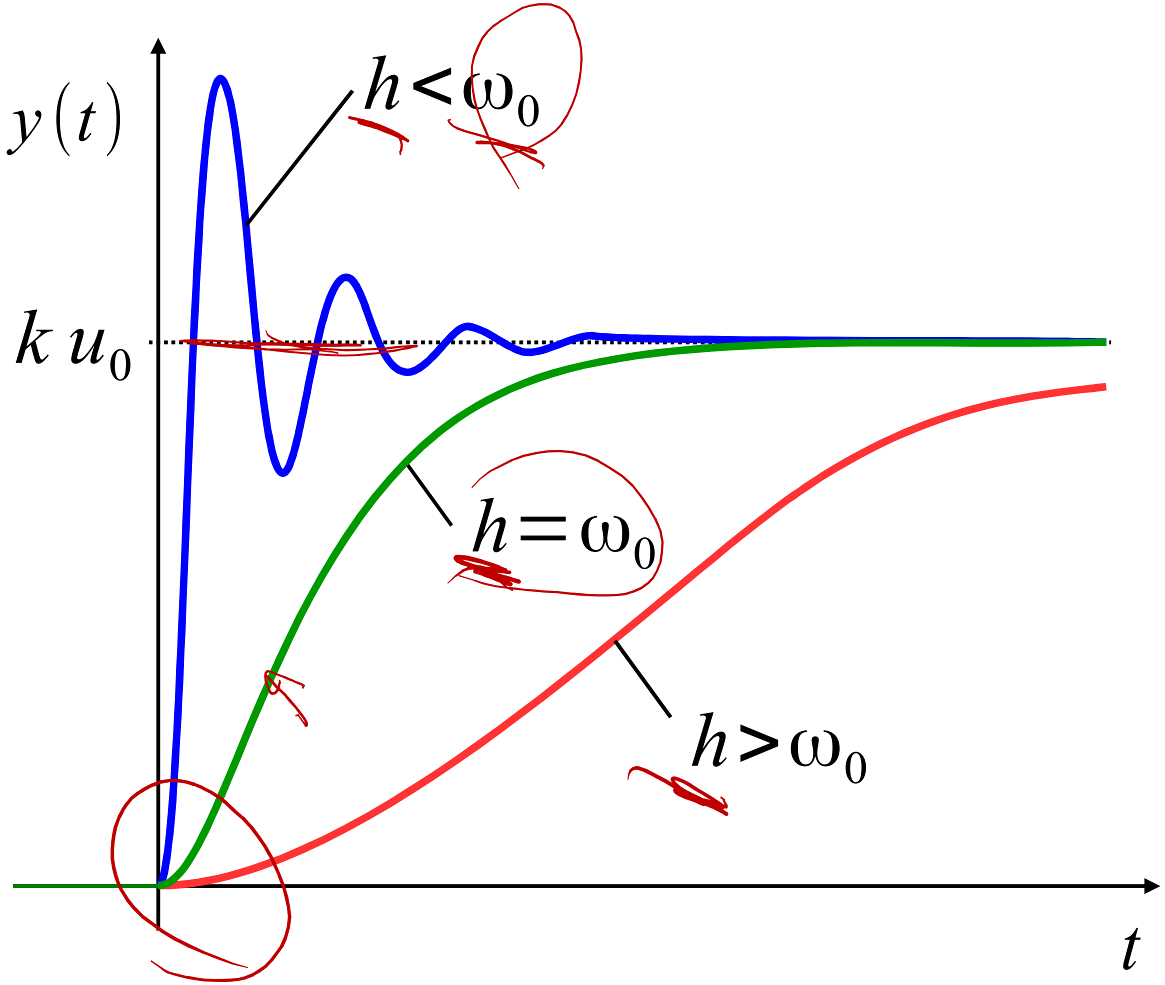
$$=\begin{cases} \frac{k u_0}{T_1^2}\left(1-e^{-ht}\left(\cos\omega t+\frac{h}{\omega}\sin\omega t\right)\right), \text{ dla } h\leq\omega_0 \\ \frac{k u_0}{T_1^2}\left(1+e^{-ht}\left(\left(\frac{h+w}{2w}-1\right)e^{-wt}-\frac{h+w}{2w}e^{wt}\right)\right), \text{ dla } h\geq\omega_0 \end{cases}$$

gdzie: $h=\frac{T_2}{2T_1^2}$, $\omega_0=\frac{1}{T_1}$, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2}$, $w=\sqrt{h^2-\omega_0^2}$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:





Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(s)=\frac{k}{T_1^2 s^2+T_2 s+1}$$

$s \to j\omega$, $s \to j\omega$

$$\frac{k}{-T_1^2\omega^2+T_2 j\omega+1}=\frac{k}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)+jT_2\omega}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k}{-T_1^2\omega^2+T_2 j\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{k\left(1-T_1^2\omega^2\right)}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2},\quad Q(\omega)=\frac{-kT_2\omega}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2}$$

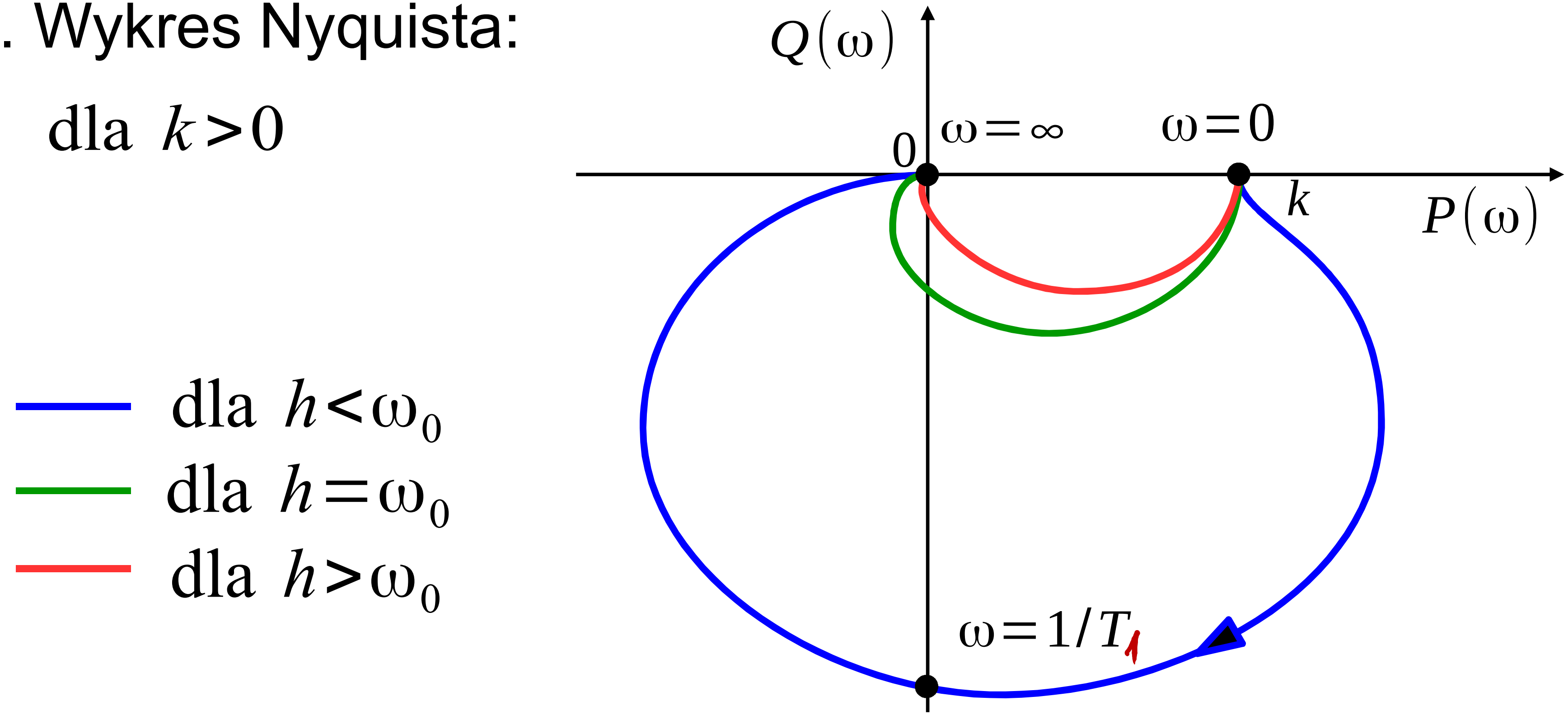
Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k}{-T_1^2\omega^2+T_2 j\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{k\left(1-T_1^2\omega^2\right)}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2},\quad Q(\omega)=\frac{-kT_2\omega}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}$

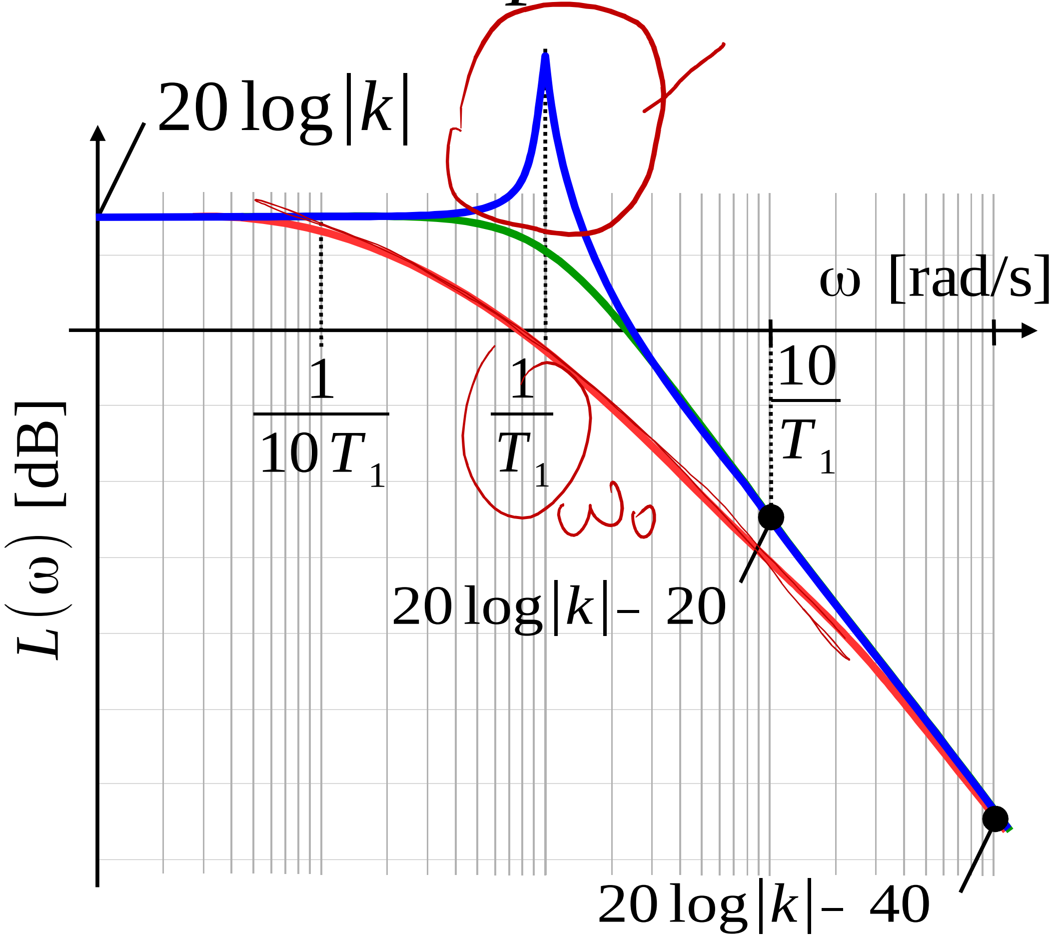
$$L(\omega)=20\log A(\omega)$$

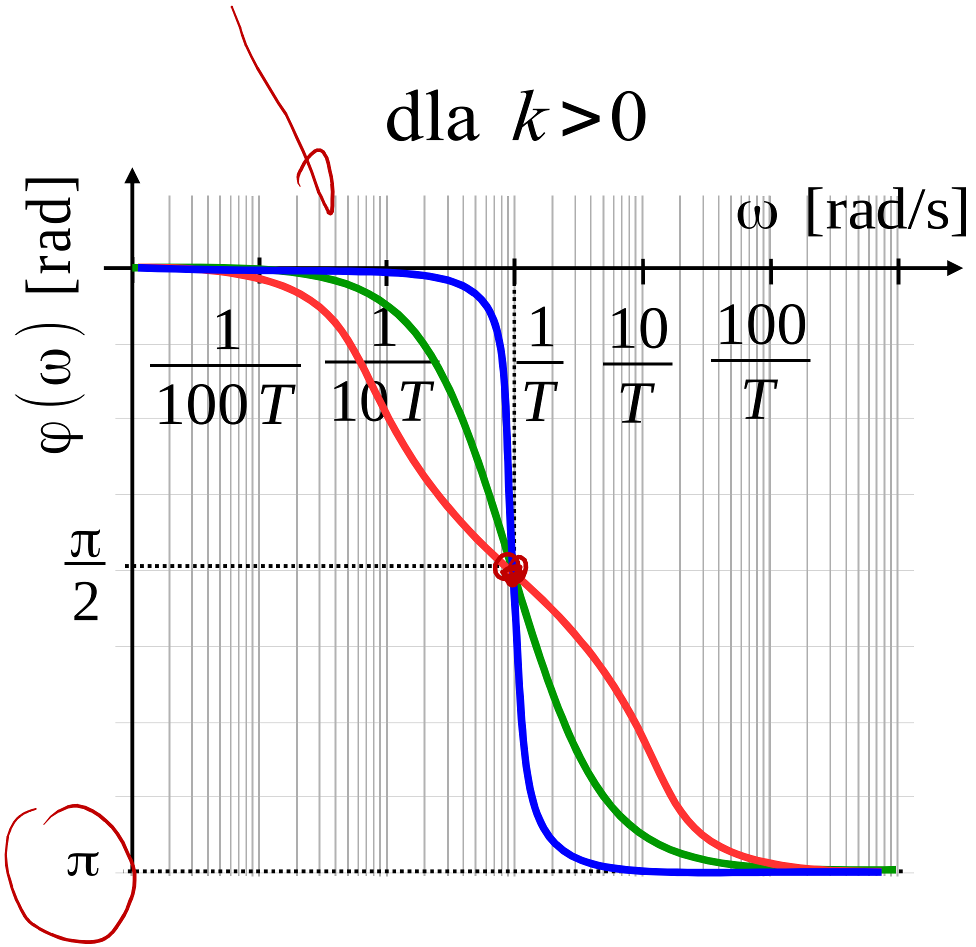
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}$$

dla $h<\omega_0$

dla $h=\omega_0$

dla $h>\omega_0$

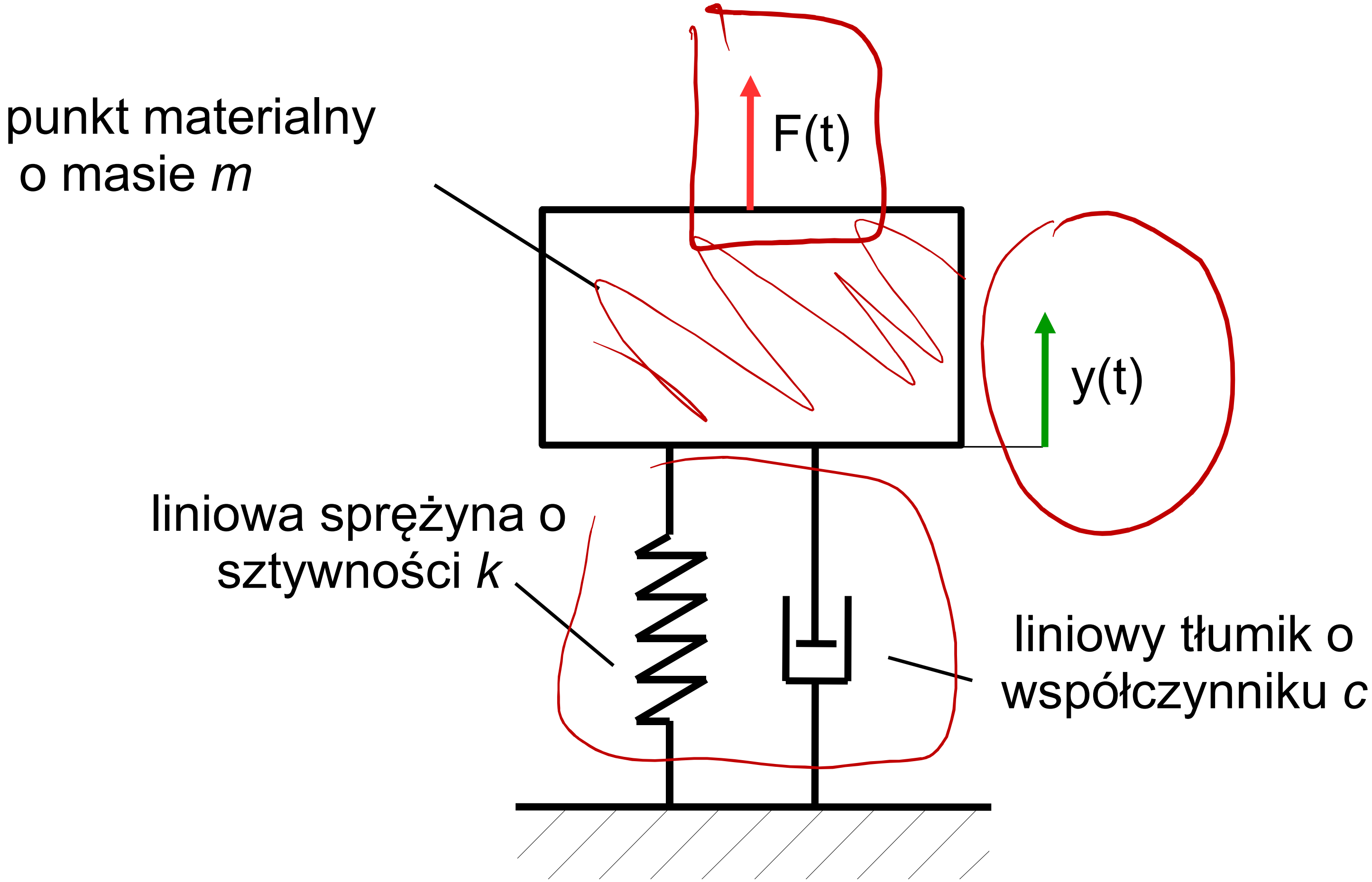




Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

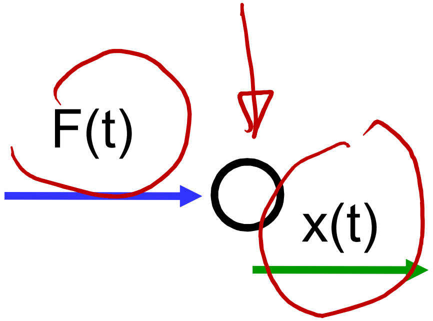
1 UKŁAD DRGAJĄCY:
wejście – siła F(t)
wyjście – przemieszczenie y(t)



Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

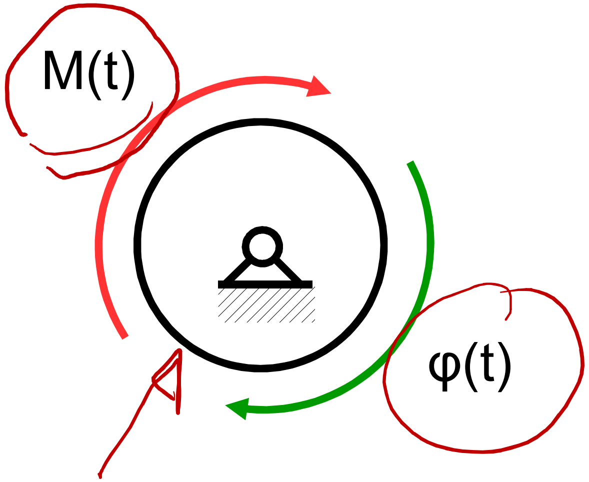
2



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła F(t)
wyjście – przemieszczenie x(t)

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

3

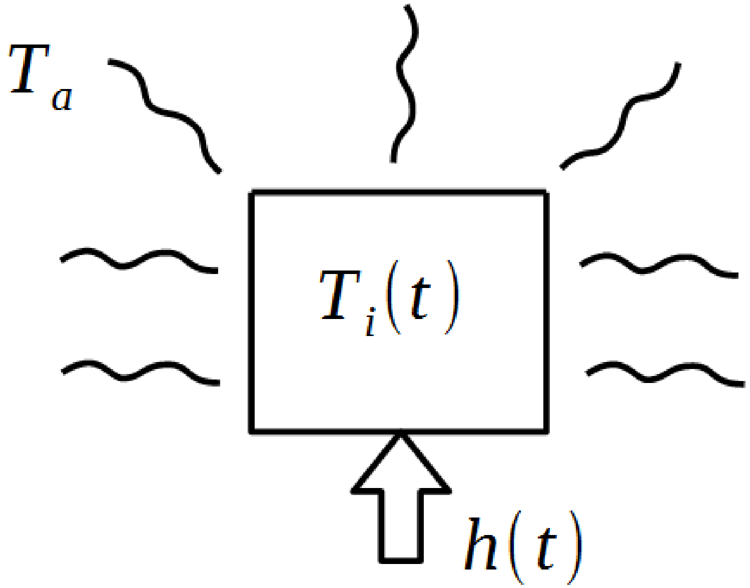


RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – moment M(t)
wyjście – kąt obrotu φ(t)

Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

4

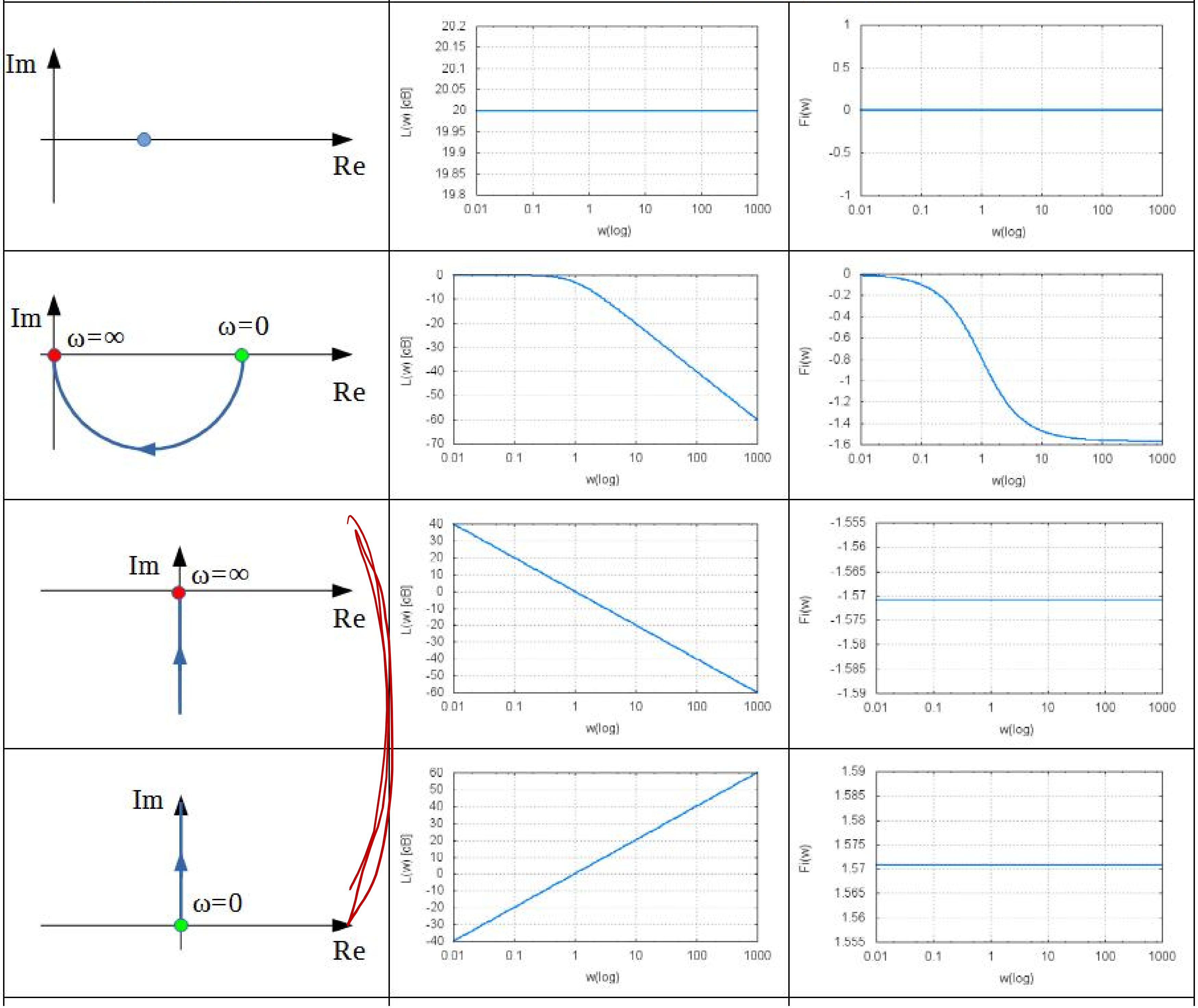


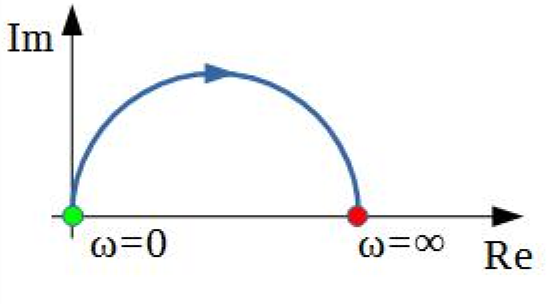
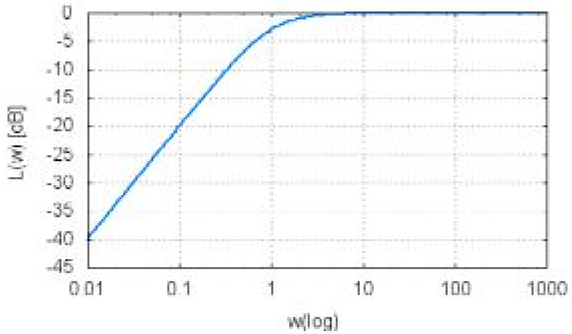
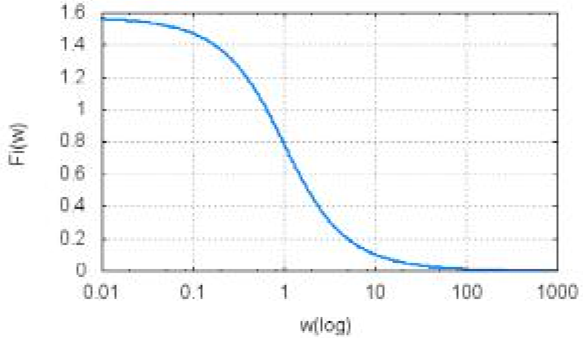
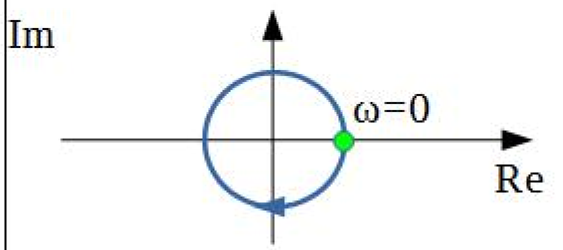
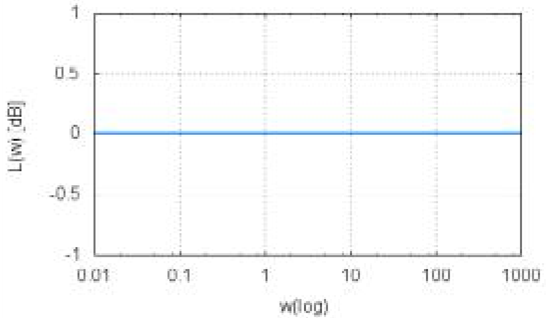
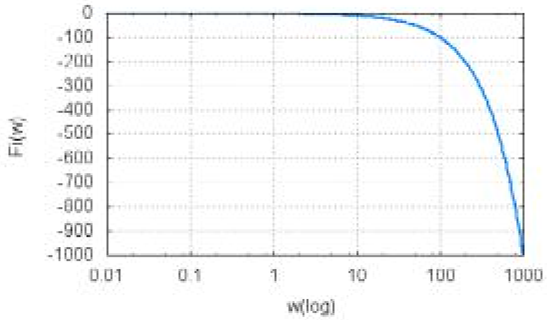
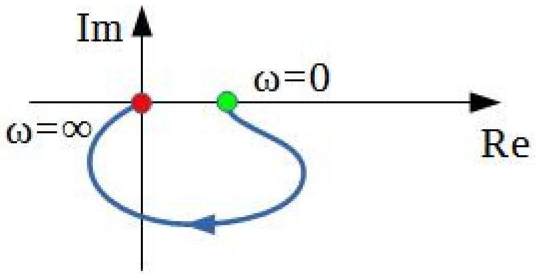
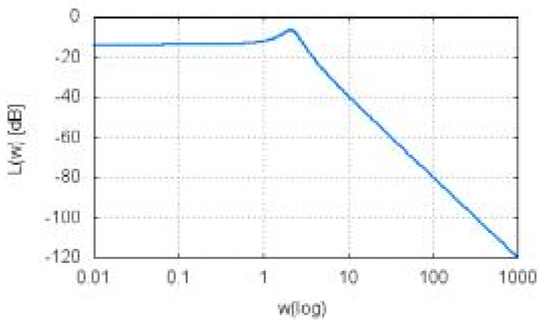
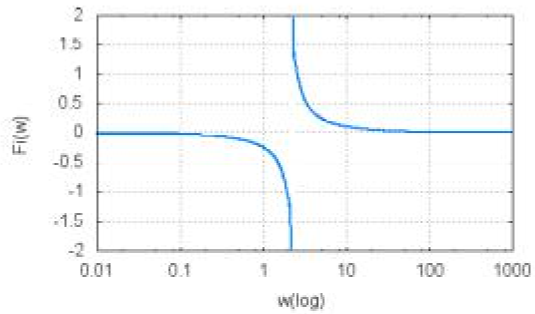
OGRZEWANY OBIEKT O DUŻEJ BEZWŁADNOŚCI:
wejście – moc grzałki h(t)
wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

nazwa elementu	transmitancja
Proporcjonalny	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$

Nyquist plot	Bode Plot (example)



<table>
<tr><th>Nyquist plot</th><th colspan="2">Bode Plot (example)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>