Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Podstawy automatyki i teorii maszyn

semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 8

Transformata Laplace'a.
Transmitancja.
Wyznaczanie odpowiedzi układu.

Transformata Laplace'a

Zał. ciągła f. czasu $x(t)$, która $=0$ dla $t<0$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} \overset{def}{=} \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(s) \qquad s \in \mathbb{C}$$

$$s = \sigma + j\omega \qquad j = \sqrt{-1}$$

Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a

Założenie: $x(t)$ - sygnał taki, że dla $t<0 \quad x(t)=0$

Transformata Laplace'a funkcji x(t):

$$X(s)=L\{x(t)\}=\int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

gdzie: $s\in \mathbb{C}, \quad s=\sigma+j\omega, \quad j=\sqrt{-1}$

Warunkiem koniecznym istnienia całki jest lokalna całkowalność x(t) dla t <0, ∞).

Odwrotna transformata Laplace'a x(t):

$$x(t)=L^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2\pi j}\lim_{\omega\to\infty}\int_{\gamma-j\omega}^{\gamma+j\omega} X(s)e^{st}ds$$

$\int e^{-at} dt$

Transformata Laplace'a

Przykład 1

Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji x(t) korzystając z definicji.

$$\boxed{x(t)=e^{-2t}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-2t}\} = \int_0^\infty e^{-2t} e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(2+s)t} dt =$$

$$= \left[\frac{e^{-(2+s)t}}{-(2+s)}\right]_0^\infty = \lim_{\substack{t\to\infty \\ (Re(s)>-2)}} \left(\frac{e^{-(2+s)t}}{-(2+s)}\right) - \left(\frac{e^{-(2+s)\cdot 0}}{-(2+s)}\right) =$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{-(2+s)}\right) = \frac{1}{2+s}$$

Transformata Laplace'a

<u>Przykład 1</u>

Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji x(t) korzystając z definicji.

$$x(t)=e^{-2t}$$

Transformata Laplace'a

Przykład 1

Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji x(t) korzystając z definicji.

$$x(t)=e^{-2t}$$

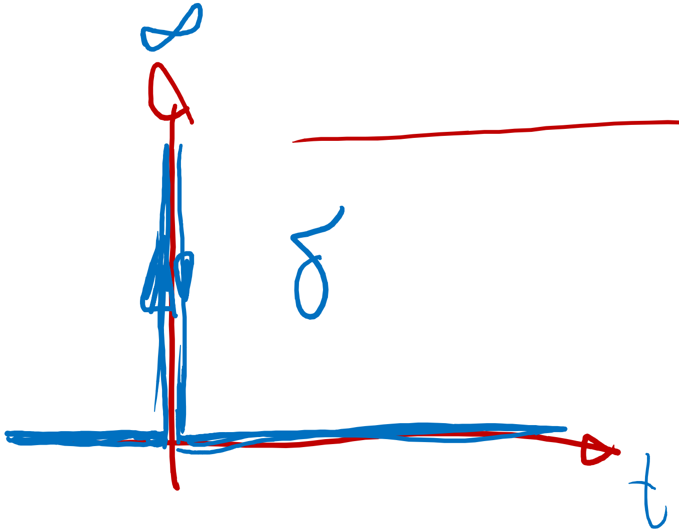
$$X(s)=L\{e^{-2t}\}=\int_0^{\infty} e^{-2t}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-(2+s)t}dt=\left[\frac{e^{-(2+s)t}}{-(2+s)}\right]_0^{\infty}=$$

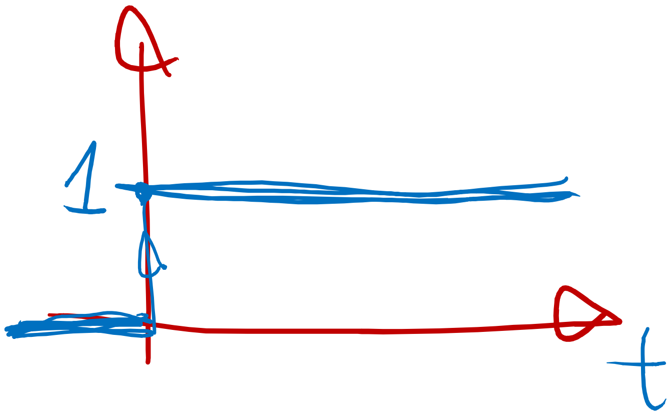
$$=\lim_{(t\to\infty,\,\Re(s)>-2)}\left(\frac{e^{-(2+s)t}}{-(2+s)}\right)-\frac{e^{-(2+s)0}}{-(2+s)}=\frac{0}{-(2+s)}-\frac{1}{-(2+s)}=\frac{1}{s+2}$$

Transformata Laplace'a

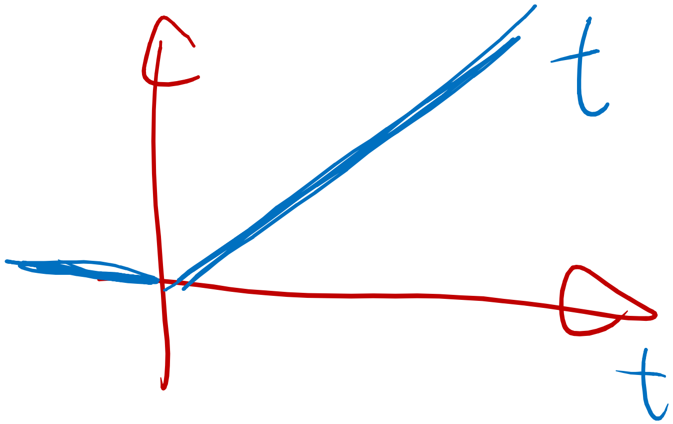
$f(t),\ t \geqslant 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ unit impulse	1
$1(t)$ unit step	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega}$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(s)$
$x(t)+y(t)$	$X(s)+Y(s)$
$x(t)*y(t)$ convolution	$X(s) \cdot Y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s)-y(0)$
$\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$	$s^2 Y(s)-s\,y(0)-\frac{dy(0)}{dt}$
$\frac{d^n y(t)}{dt^n}$	$s^n Y(s)-\frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}}-s\frac{d^{n-2} y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1} y(0)$

tabela na stronie www





1(t)



$f(t),\ t \geqslant 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ impuls jednostkowy	1
$1(t)$ skok jednostkowy	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega}$

$a \in R$ Własności transformaty Laplace'a

$$! \ \mathcal{L}\{a \cdot f(t)\} = a \cdot \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$! \ \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t) \cdot g(t)\} \neq \mathcal{L}\{f(t)\} * \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$! \ \mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$$

Własności transformaty Laplace'a

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s\cdot\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(t=0) = s\cdot F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - s\cdot f(t=0) - \frac{df(t=0)}{dt}$$

$$\mathcal{L}\left\{\int f(t)\,dt\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\iint f(t)\,dt^2\right\} = \frac{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}}{s^2}$$

Własności transformaty Laplace'a

Własności transformaty Laplace'a

$f(t),\ t \geqslant 0$	$F(s)$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(s)$
$x(t) + y(t)$	$X(s) + Y(s)$
$x(t) * y(t)$ splot	$X(s) \cdot Y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s) - y(0)$
$\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$	$s^2 Y(s) - s\,y(0) - \frac{dy(0)}{dt}$
$\frac{d^n y(t)}{dt^n}$	$s^n Y(s) - \frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}} - s\frac{d^{n-2} y(0)}{dt^{n-2}} - \ldots - s^{n-1} y(0)$
$\int_{t=0}^{\infty} f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$\underbrace{\int\int \ldots \int}_{n} f(t)dt$	$\frac{F(s)}{s^n}$
$\boxed{f(t-\tau)}$ $\tau > 0$	$\boxed{e^{-\tau s} F(s)}$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + \boxed{2y(t)} = \underbrace{1(t)}\right), \quad \frac{dy(0)}{dt} = 2, \; y(0) = 3, \; t \geqslant 0$$

$$\mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{2y(t)\} = 2 \cdot Y(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{3\frac{dy(t)}{dt}\right\} = 3\left(sY(s) - y(0)\right) = 3sY(s) - 9$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt} = s^2Y(s) - 3s - 2$$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t), \quad \frac{dy(0)}{dt} = 2, \; y(0) = 3, \; t \geqslant 0$$

$$s^2 Y(s) - 3s - 2 - 3sY(s) + 9 + 2Y(s) = \frac{1}{s} \quad \Big| \cdot s$$

$$Y(s)\left(s^3 - 3s^2 + 2s\right) - 3s^2 - 2s + 9s = 1$$

$$Y(s) = \frac{3s^2 - 7s + 1}{s\left(s^2 - 3s + 2\right)} \rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}$$

Transformata Laplace'a

<u>Przykład 2</u>

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}-3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=1(t)\,,\quad \frac{dy(0)}{dt}=2,\; y(0)=3,\; t\geqslant 0$$

$$Y(s)=\frac{3s^2-7s+1}{s(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}=$$

$$=\frac{A(s-1)(s-2)+Bs(s-2)+Cs(s-1)}{s(s-1)(s-2)}$$

$$=\frac{s^2\boxed{(A+B+C)}+s\boxed{(-3A-2B-C)}+2A}{s(s-1)(s-2)}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}$$

$$B=3$$

$$C=-\frac{1}{2}$$

Transformata Laplace'a

<u>Przykład 2</u>

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t), \quad \frac{dy(0)}{dt} = 2, \ y(0) = 3, \ t \geqslant 0$$

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + 3\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} 1(t) + 3e^{t} - \frac{1}{2} e^{2t}$$

Transformata Laplace'a

Przykład 2

Rozwiązać równanie różniczkowe dla zadanych warunków początkowych z użyciem transformaty Laplace'a.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 1(t)\ ,\ \frac{dy(0)}{dt} = 2,\ y(0) = 3,\ t \geqslant 0$$

po transformacie Laplace'a

$$Y(s) = \frac{1 - 7s + 3s^2}{s(s-1)(s-2)}$$

po rozkładzie na ułamki proste

$$Y(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} + 3\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-2}$$

po odwrotnej transformacie Laplace'a

$$y(t) = \frac{1}{2}1(t) + 3e^{t} - \frac{1}{2}e^{2t}$$

Transmitancja

Dany jest liniowy niezależny od czasu układ typu SISO o ciągłym sygnale wejściowym *x(t)* i wyjściowym *y(t)* opisany ogólnym równaniem różniczkowym

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy(t)}{dt}+a_n y(t)=\frac{d^m x(t)}{dt^m}+b_1\frac{d^{m-1}x(t)}{dt^{m-1}}+\ldots+b_{m-1}\frac{dx(t)}{dt}+b_m x(t)$$

po transformacie Laplace'a z zerowymi warunkami początkowymi

$$s^n Y(s)+a_1 s^{n-1}Y(s)+\ldots+a_{n-1}sY(s)+a_n Y(s)=s^m X(s)+b_1 s^{m-1}X(s)+\ldots+b_{m-1}sX(s)+b_m X(s)$$

$$(s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n)Y(s)=(s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m)X(s)$$

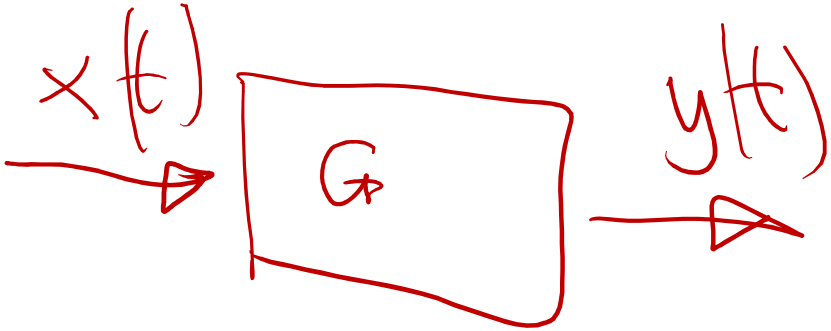
Transmitancja: $\boxed{G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots+a_{n-1}s+a_n}}$

Transmitancja – definicja

operatorowa

Dla układu liniowego niezależnego od czasu, o jednym wejściu i jednym wyjściu oraz ciągłych sygnałach wejściowym x(t) i wyjściowym y(t), transmitancja jest stosunkiem transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego i transformaty Laplace'a sygnału wejściowego dla zerowych warunków początkowych.

$$\boxed{H(s)=\frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}=\frac{Y(s)}{X(s)}}$$



Forma transmitancja

Standardowa:

$$G(s)=\frac{b^{m}s^{m}+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_{1}s+b_{0}}{a_{n}s^{n}+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_{1}s+a_{0}}$$

Iloczynowa:

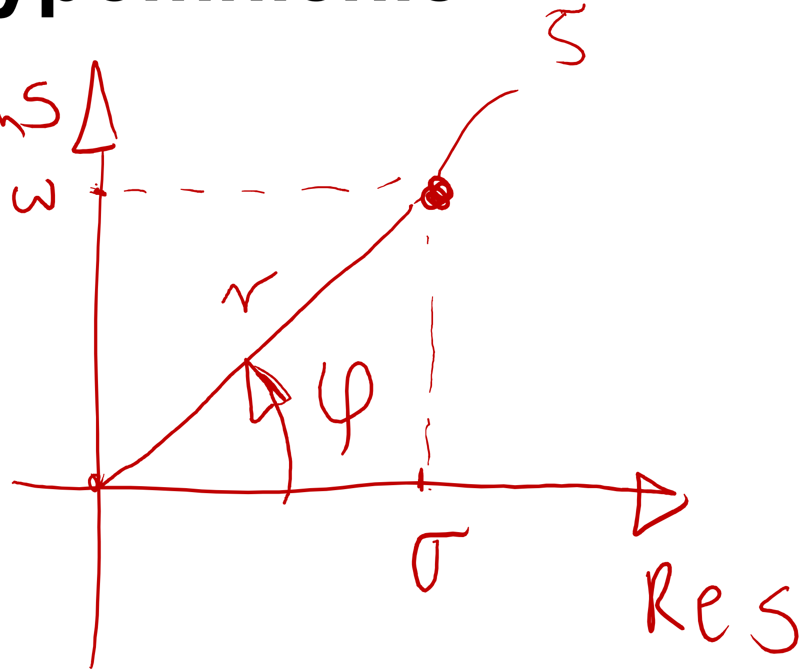
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{(s-z_{1})(s-z_{2})\ldots(s-z_{m})}{(s-p_{1})(s-p_{2})\ldots(s-p_{n})}$$

$z_{1},\ z_{2},\ \ldots,\ z_{m}$ - zera transmitancji $\in \mathbb{C}$

$p_{1},\ p_{2},\ \ldots,\ p_{n}$ - bieguny transmitancji $\in \mathbb{C}$

Liczby zespolone – przypomnienie

$$\boxed{s=\sigma+j\omega}$$



$$r=\sqrt{\sigma^2+\omega^2}=|s|$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\sigma}=\operatorname{Arg} s$$

$$s=r\cos\varphi+jr\sin\varphi$$

$$s=r(\cos\varphi+j\sin\varphi)=re^{j\varphi}$$

$$\boxed{s=|s|e^{j\operatorname{Arg} s}}$$

Transmitancja

Prezentacja graficzna

$$G(s) = |G(s)| e^{j \arg G(s)}$$

dla każdego $s \in \mathbb{C}$
liczymy $G(s) \in \mathbb{C}$

4D

dla każdego $s \in \mathbb{C}$
liczymy $|G(s)| \in \mathbb{R}$

3D

dla każdego $s \in \mathbb{C}$
liczymy $\operatorname{Arg} G(s) \in \mathbb{R}$

3D

Transmitancja

Przykład

$$G(s) = \boxed{\frac{2-s}{s^3+s^2-2}}, \text{ narysować: } |G(s)| \text{ i } \arg G(s)$$

Transmitancja

Przykład

$$G(s) = \frac{2 - s}{s^3 + s^2 - 2} = \frac{s - 2}{(s-1)(s+j+1)(s-j+1)}$$

Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}=\frac{s-2}{(s-1)(s+j+1)(s-j+1)}$$

Bieguny: $p_1=1,\ p_2=-1-j,\ p_3=-1+j$ zera: $z_1=2$

$s \to \sigma + j\omega$

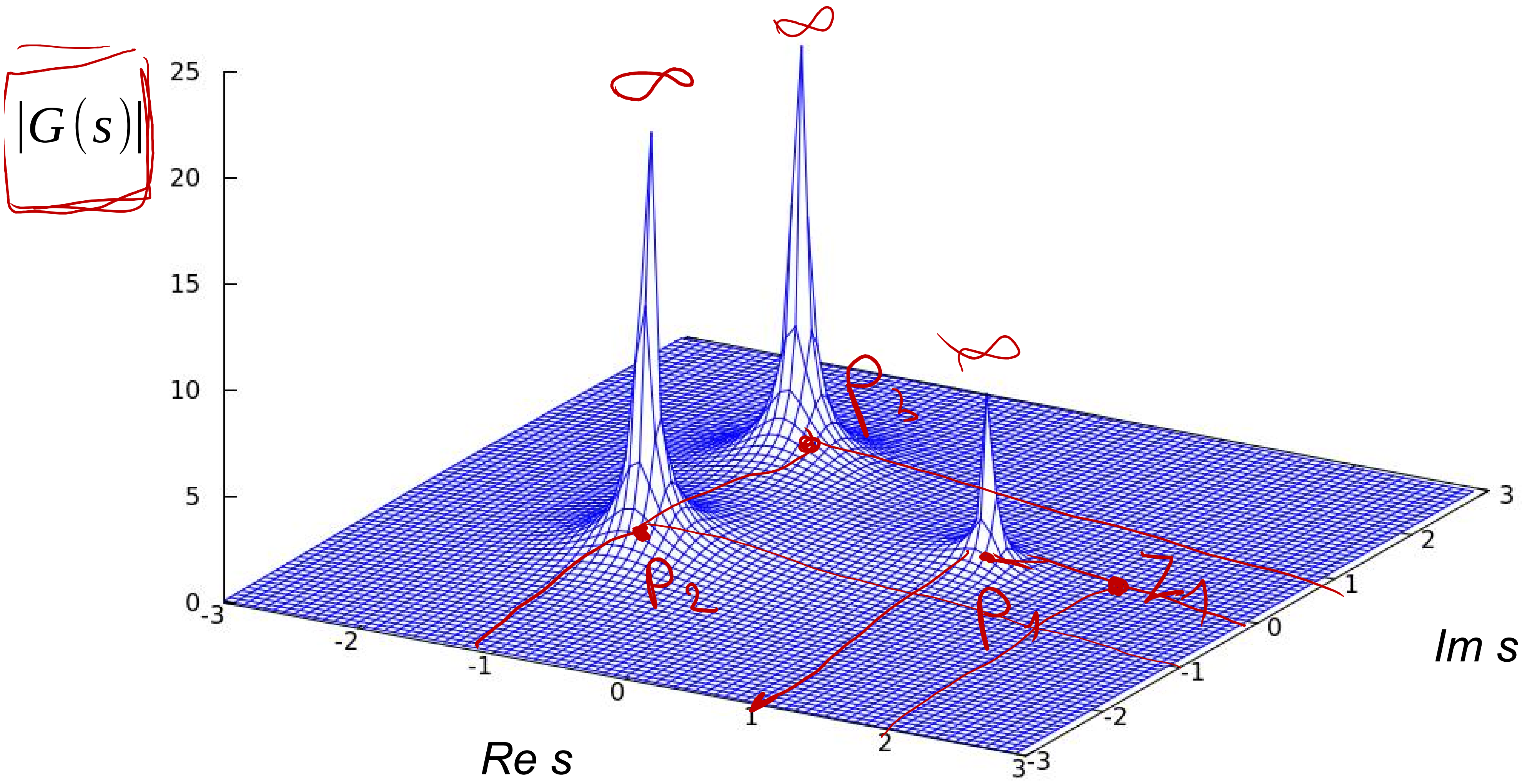
Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Bieguny: $p_1=1,\ \ p_2=-1-j,\ \ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$



Transmitancja

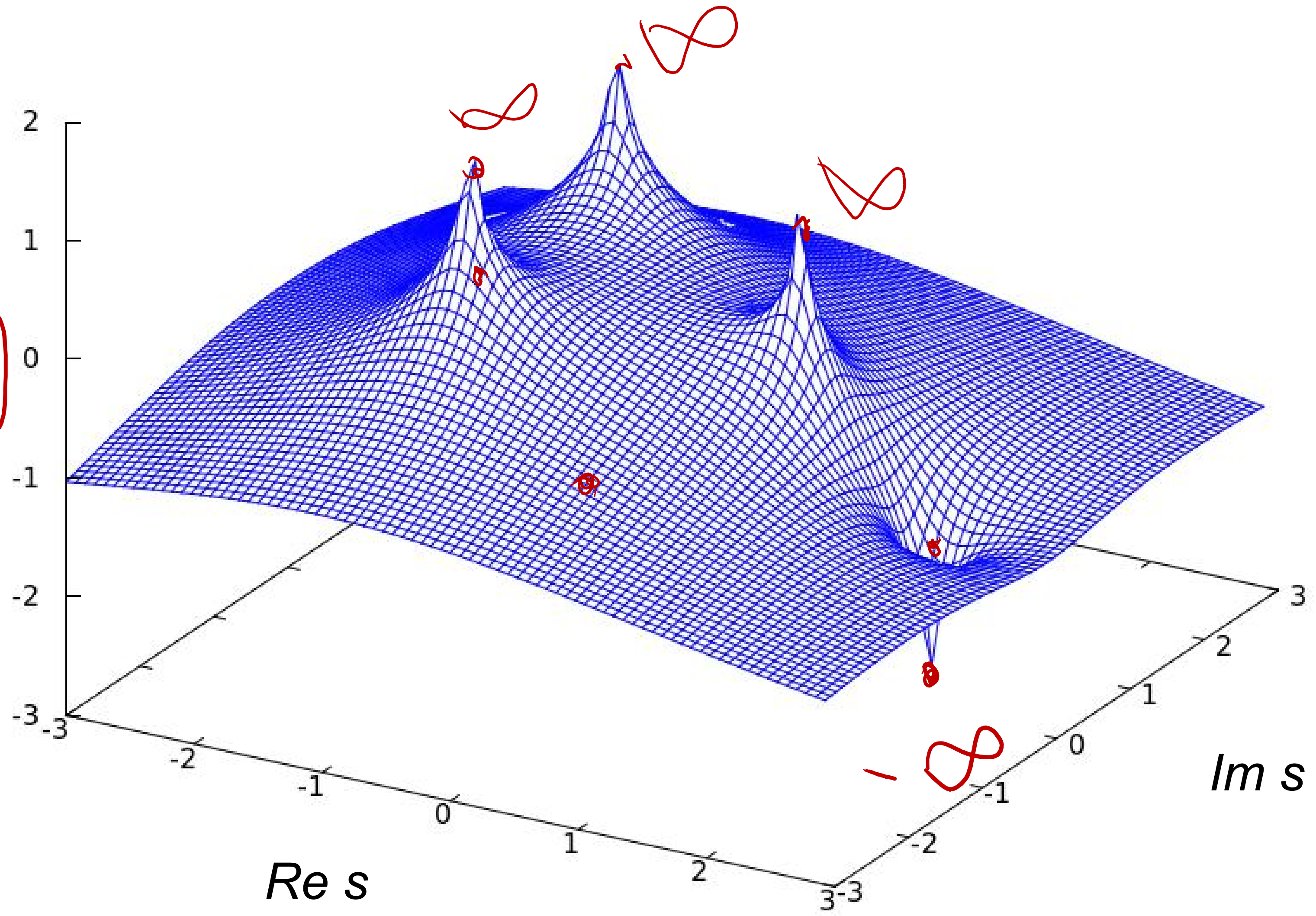
Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Bieguny: $p_1=1,\ p_2=-1-j,\ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$

$\log_{10}|G(s)|$



Transmitancja

Przykład

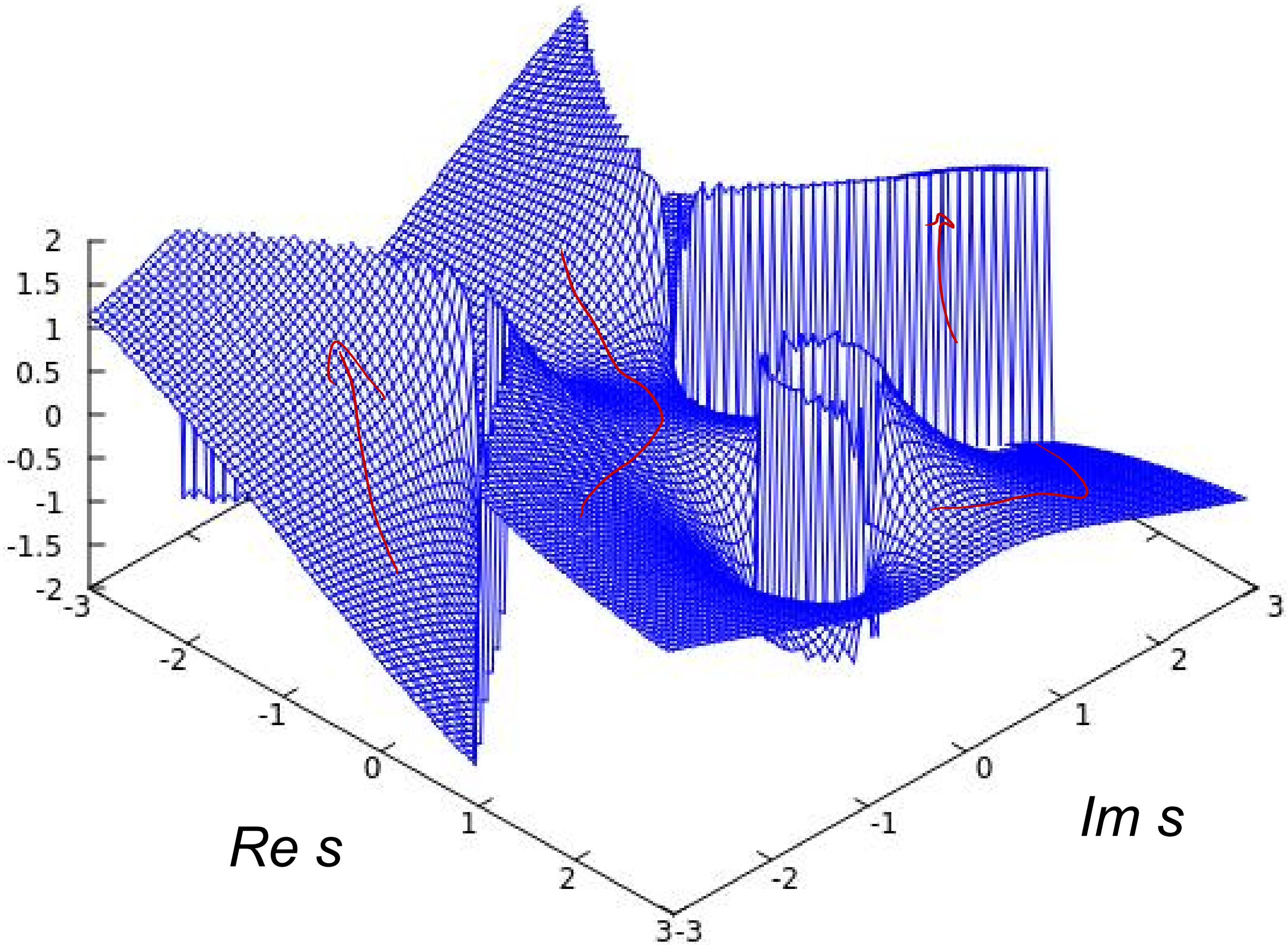
$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Bieguny: $p_1=1,\ \ p_2=-1-j,\ \ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$

$\mathrm{Arg}\,G(s)$

$\mathrm{arctg}\left(\frac{Im}{Re}\right)$



Transmitancja

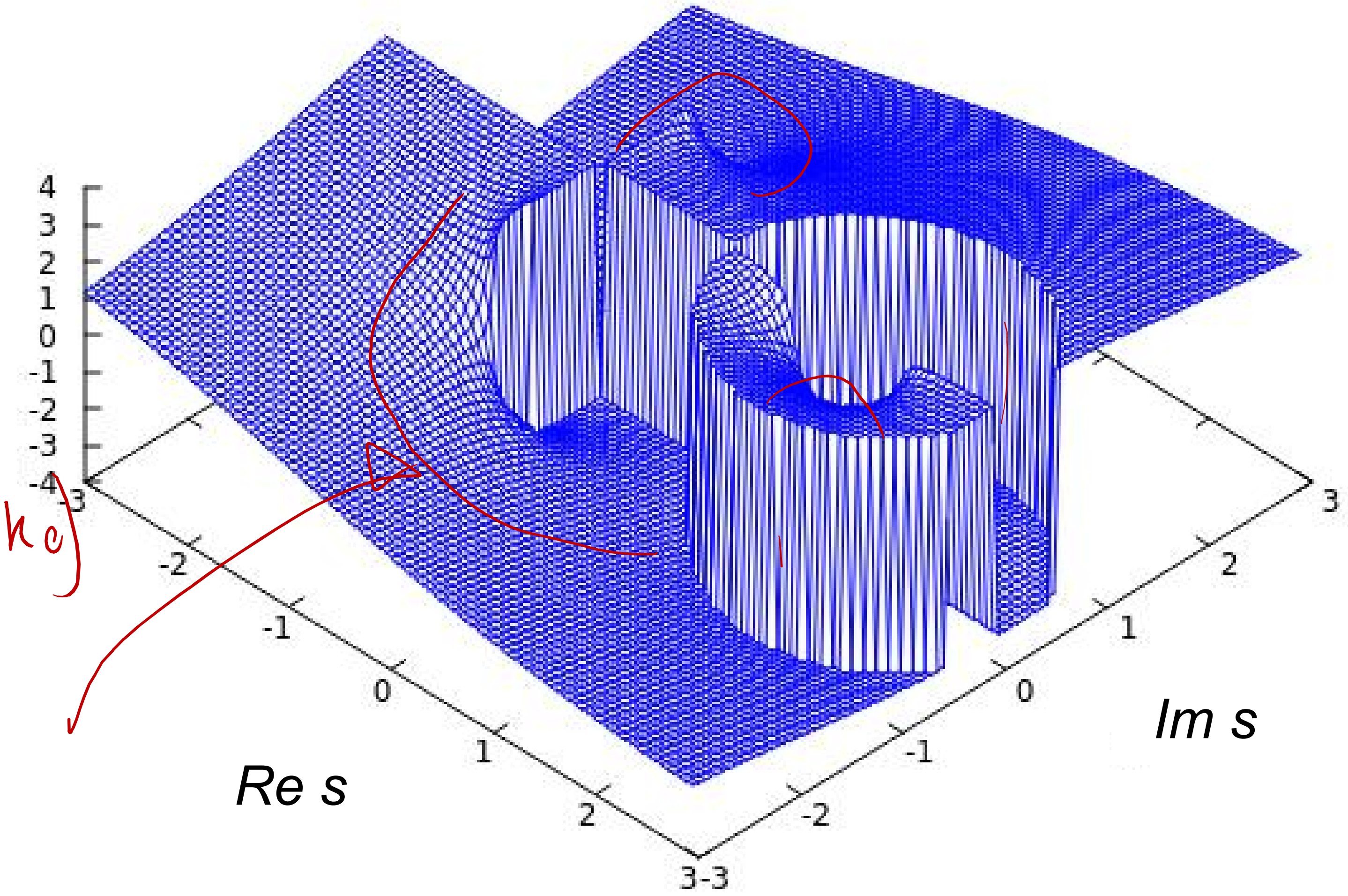
Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Bieguny: $p_1=1,\ p_2=-1-j,\ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$

$\arg G(s)$



atan2(Im, Re)

$\pm 2\pi$

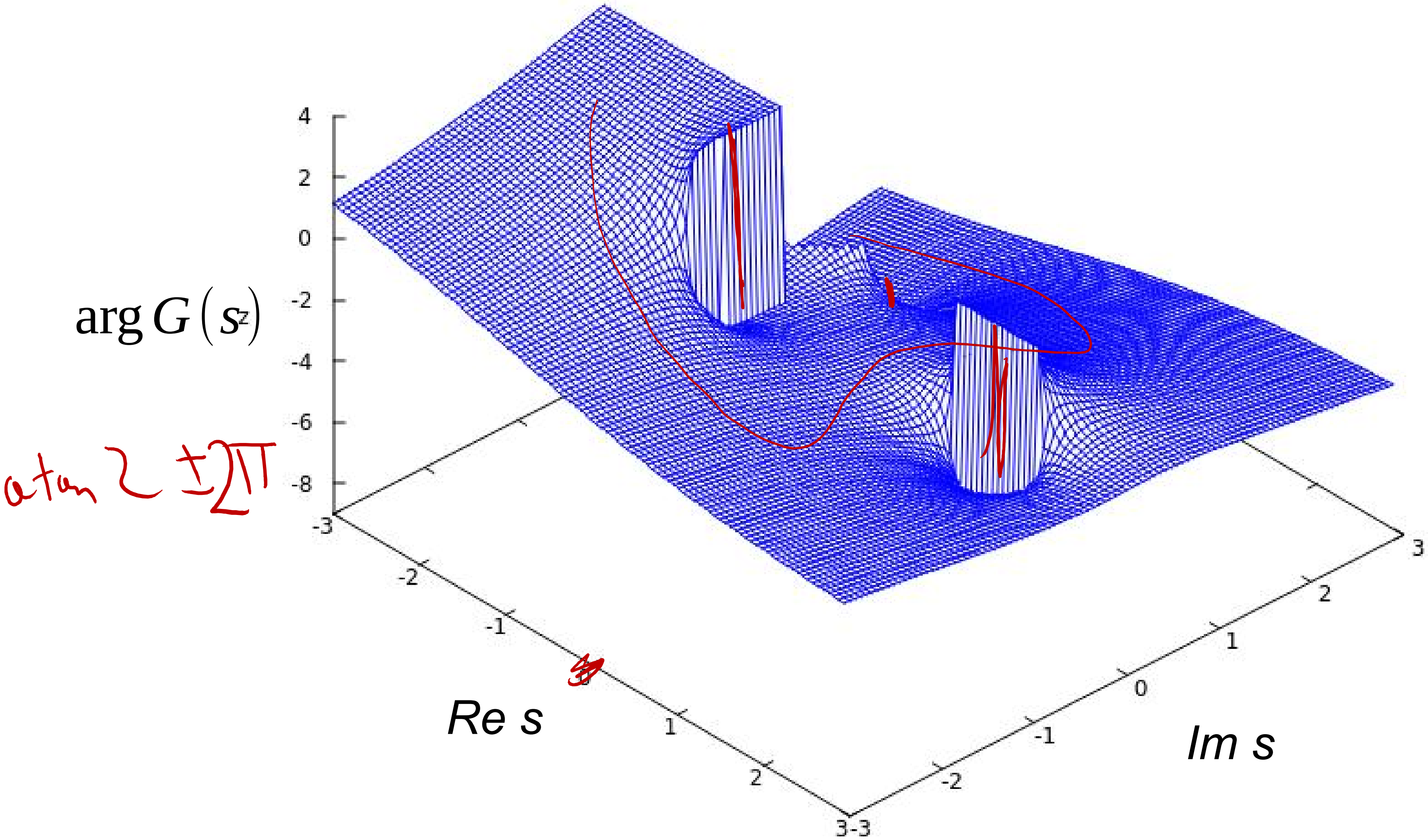
Transmitancja

Przykład

$$G(s)=\frac{2-s}{s^3+s^2-2}$$

Bieguny: $p_1=1,\ p_2=-1-j,\ p_3=-1+j$

zera: $z_1=2$



Wejście i wyjście

Transmitancja: $G(s)=\dfrac{Y(s)}{X(s)}$ – WY / – WE

$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot X(s)\}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$

odp. impulsowa.

$y(t) = g(t) * x(t)$

Wejście i wyjście

Transmitancja: $$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

Wejście i wyjście

Transmitancja: $G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s)=G(s)X(s)$

Wyjście w dziedzinie czasu: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$

$$y(t)=L^{-1}\{G(s)X(s)\}=L^{-1}\{G(s)\}* L^{-1}\{X(s)\}=g(t)* x(t)$$

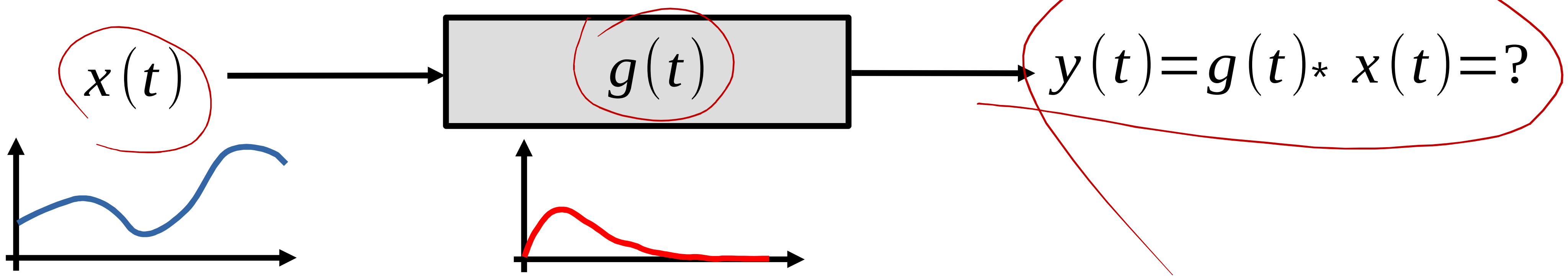
$g(t)$ - odpowiedź impulsowa układu ($y(t)$ dla $x(t)=\delta(t)$)

Splot

$$g(t)*x(t)=\int_0^{\infty} g(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$

Splot

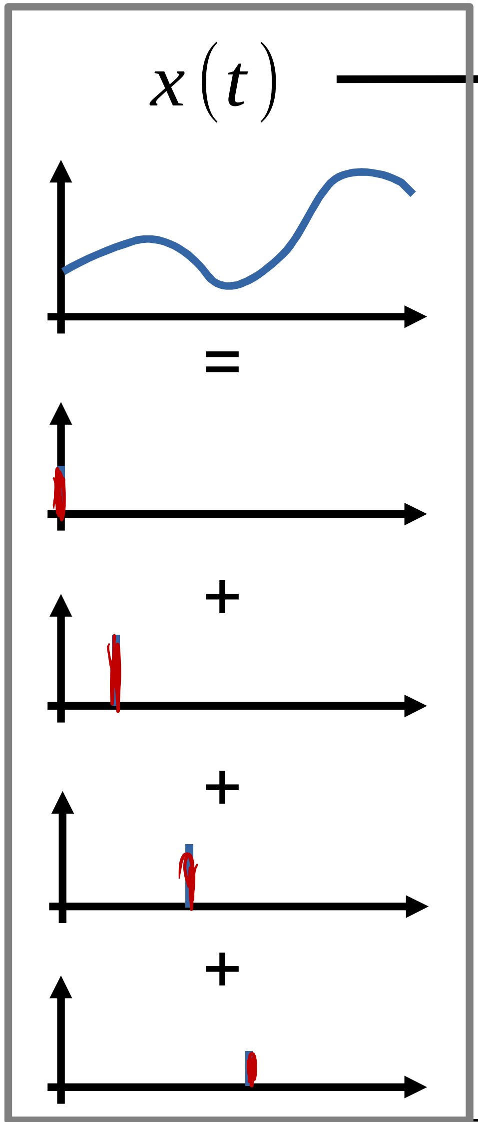
$$g(t) * x(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

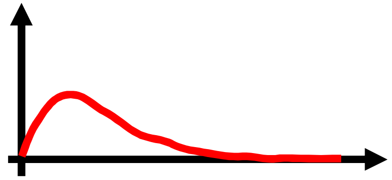


Splot

$$g(t) * x(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

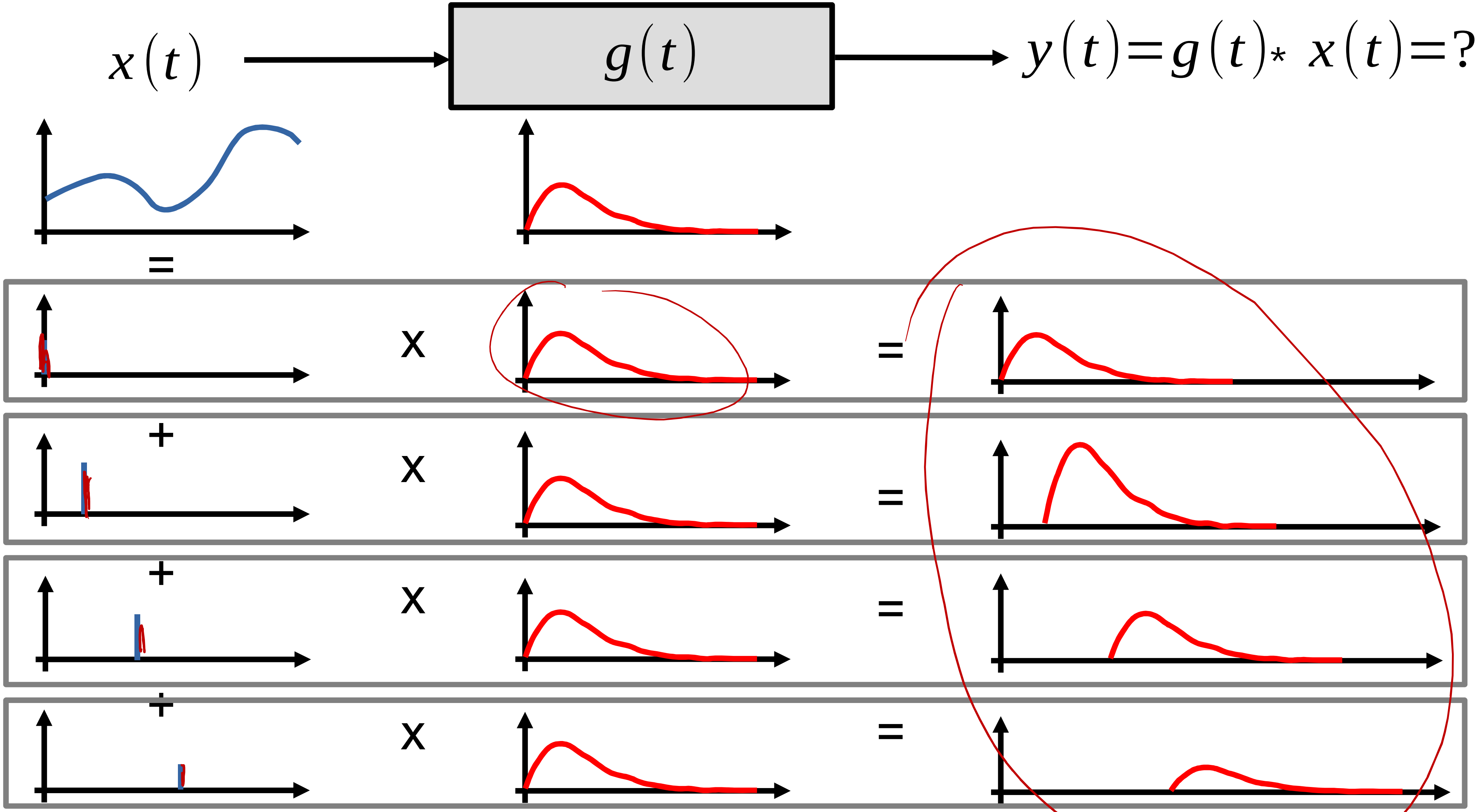
$$x(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow y(t) = g(t) * x(t) = ?$$





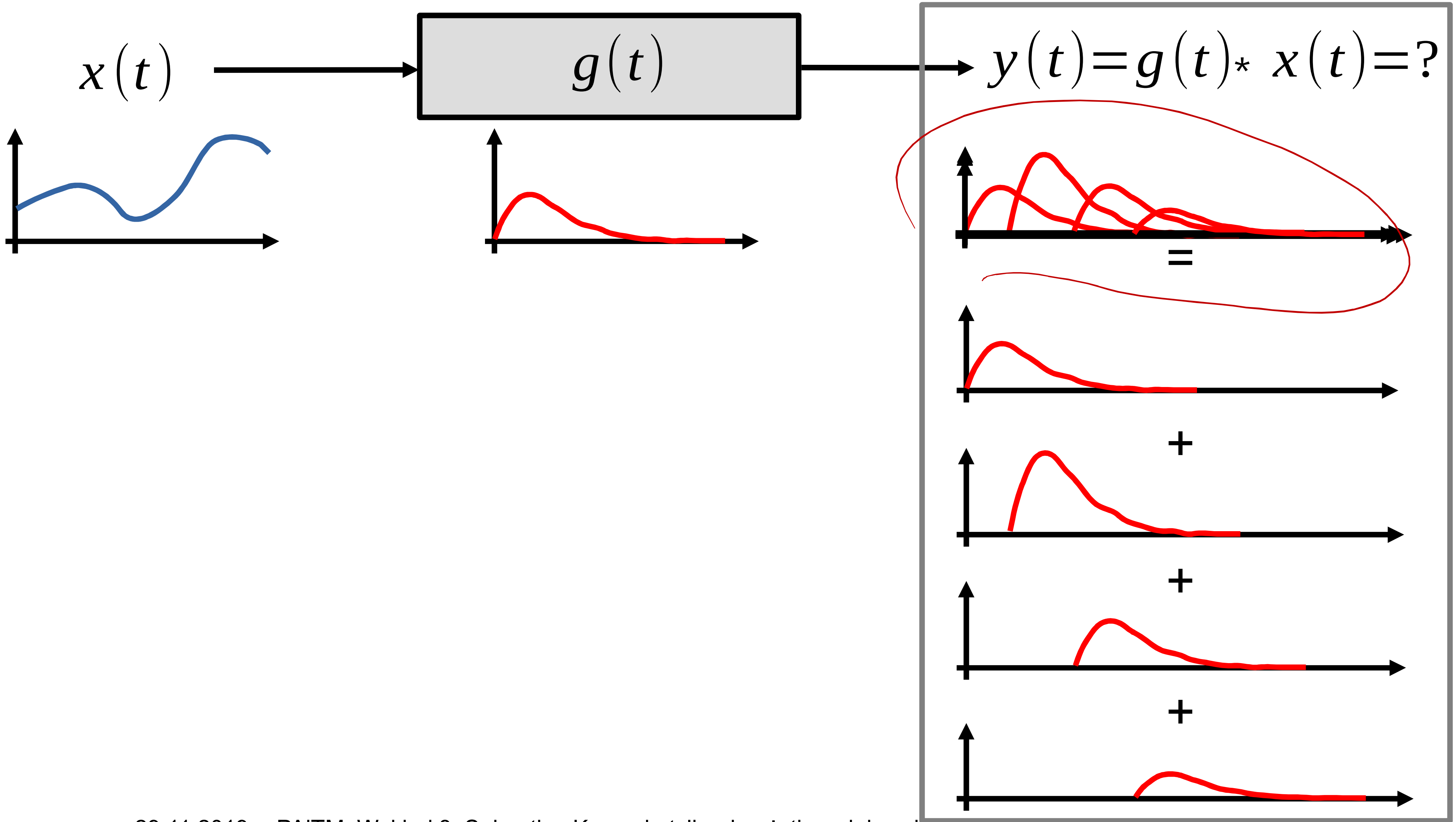
Splot

$$g(t) * x(t) = \int_0^{\infty} g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$



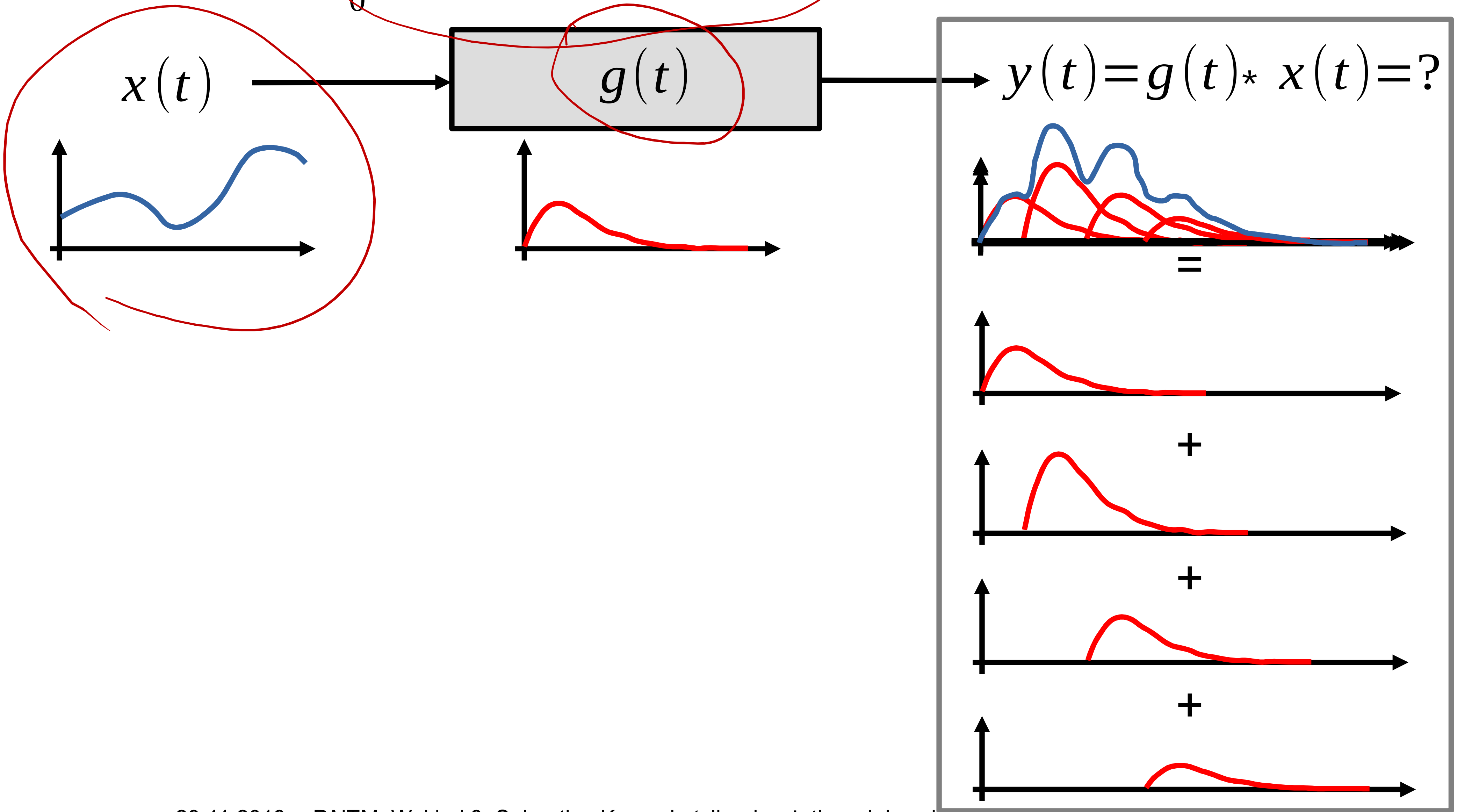
Splot

$$g(t) * x(t) = \int_0^\infty g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$



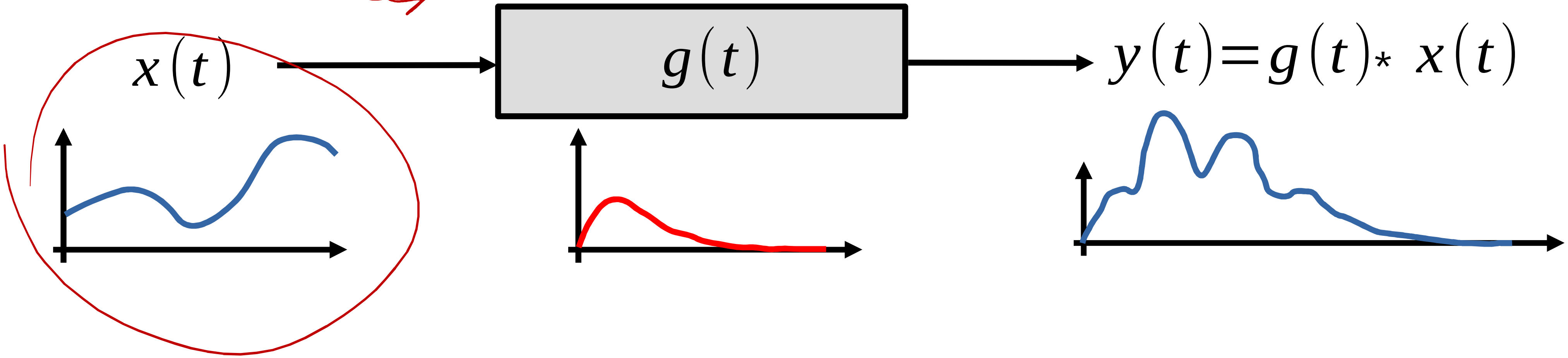
Splot

$$g(t) * x(t) = \int_0^\infty g(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$



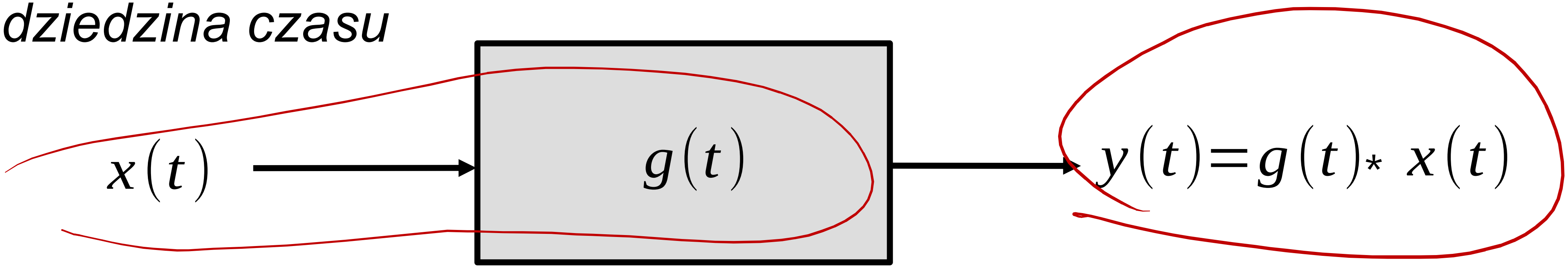
Splot

$$g(t)*x(t)=\int_{0}^{\infty} g(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau$$



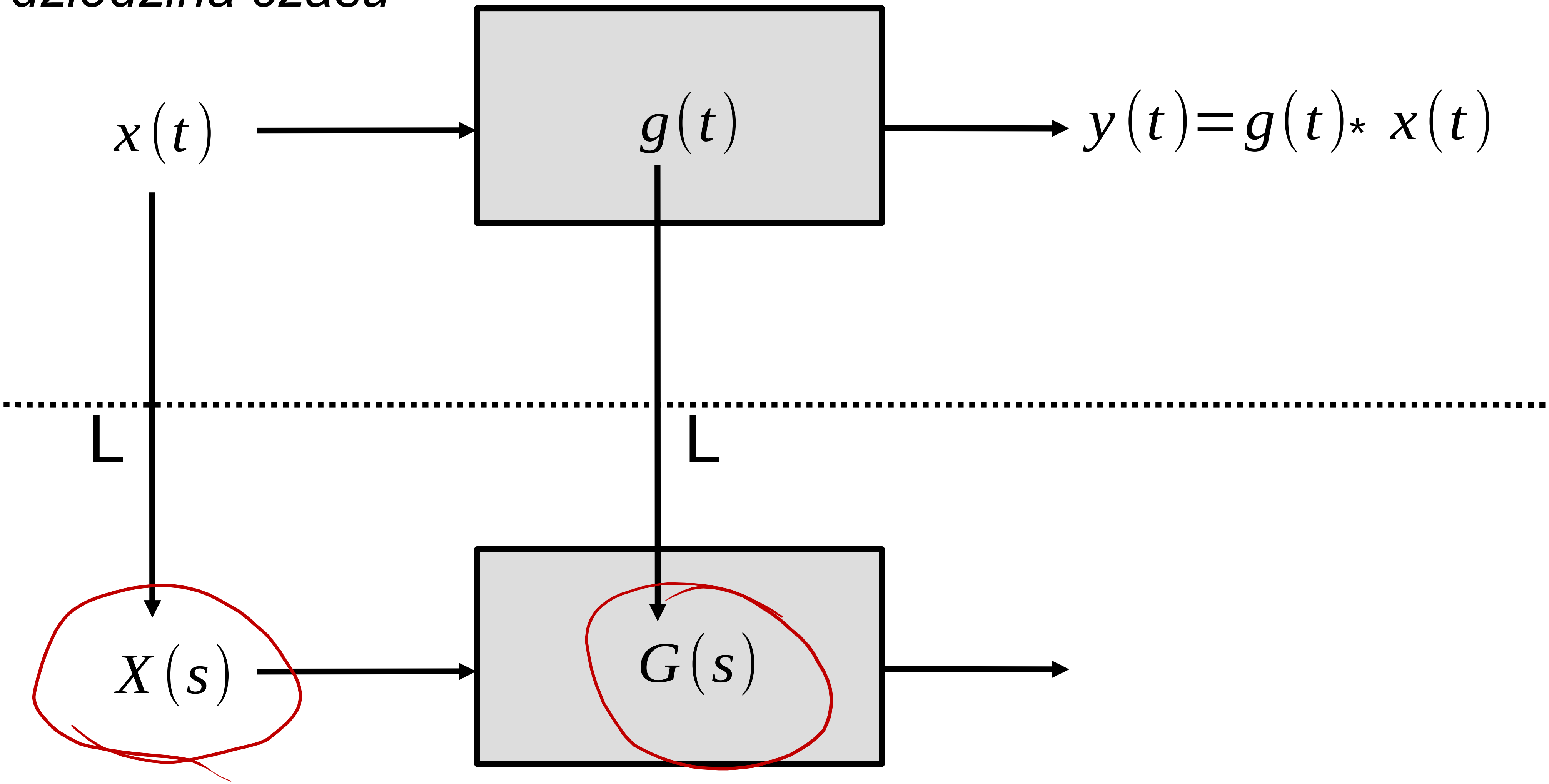
Wejście i wyjście

dziedzina czasu



Wejście i wyjście

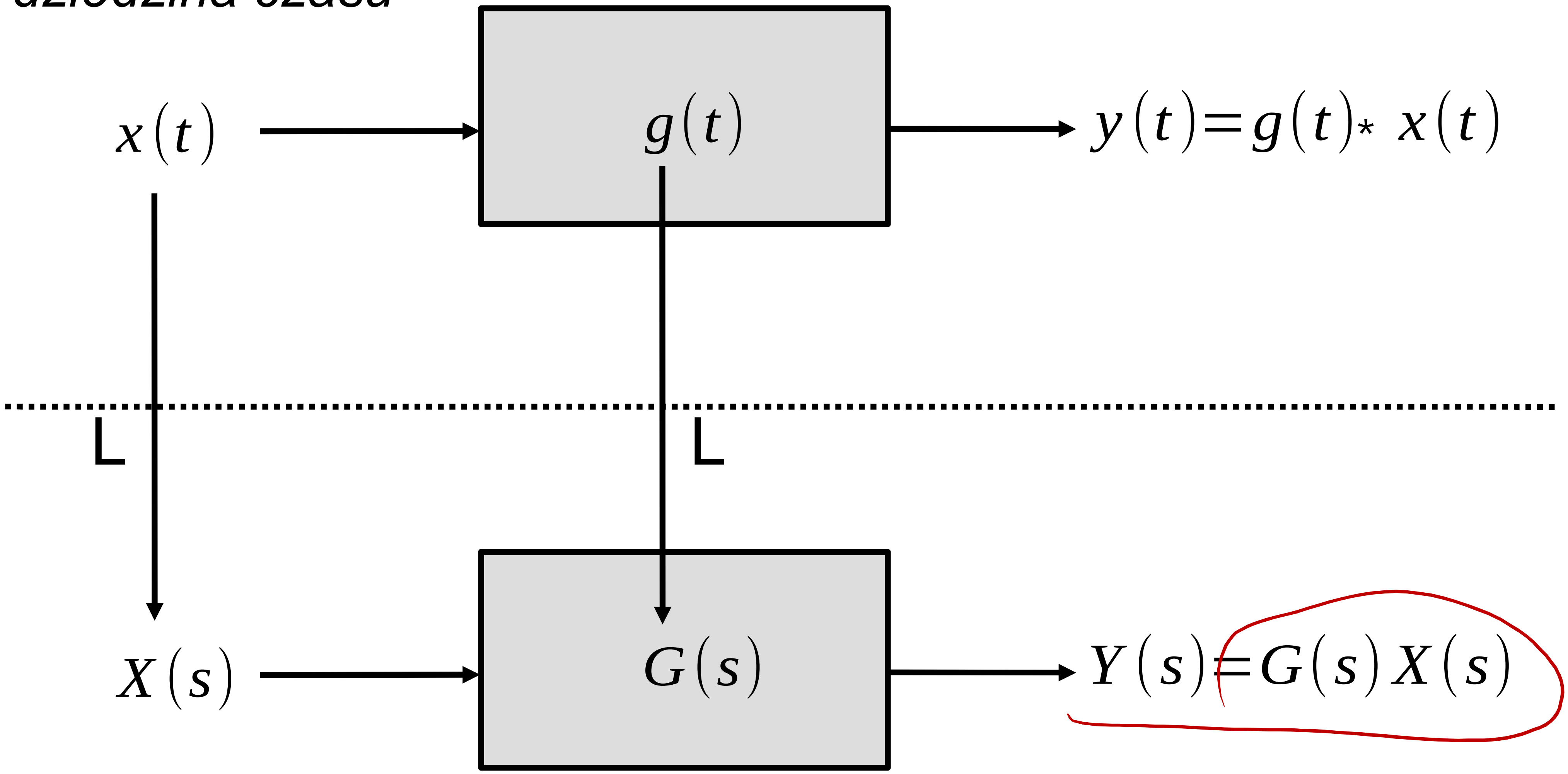
dziedzina czasu



dziedzina zespolona

Wejście i wyjście

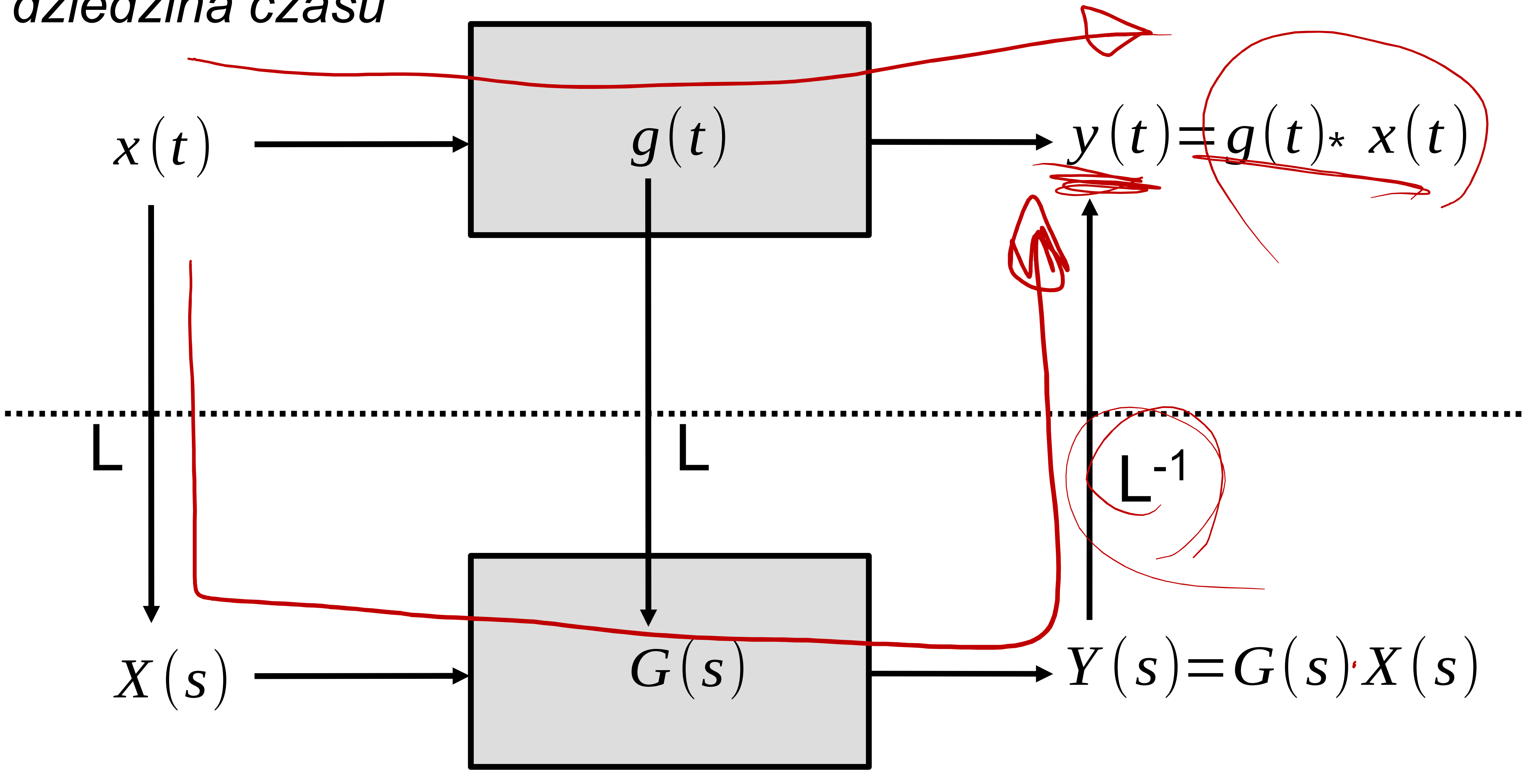
dziedzina czasu



dziedzina zespolona

Wejście i wyjście

dziedzina czasu



dziedzina zespolona

Wejście i wyjście

$$g(t)$$

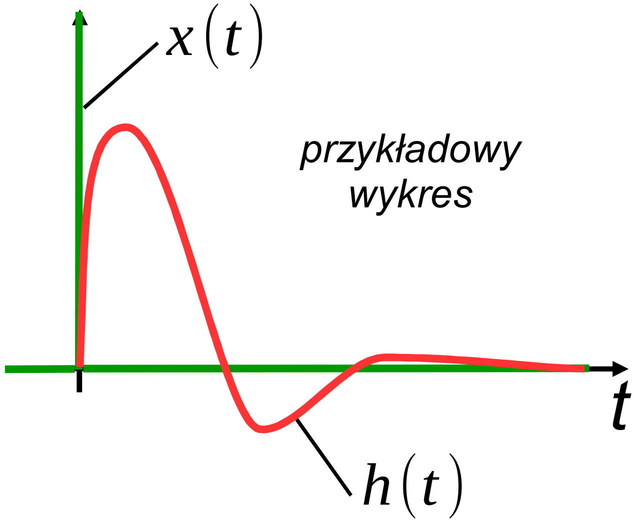
odpowiedź impulsowa

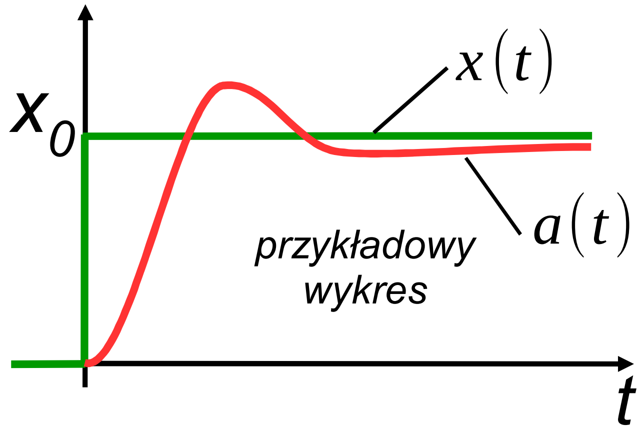
$$y(t) \text{ dla } x(t)=\delta(t)$$

$$a(t)$$

odpowieź skokowa

$$y(t) \text{ dla } x(t)=1(t)$$





$$\frac{d\,a(t)}{dt}=g(t)$$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \infty, & t=0 \\ 0, & t>0 \end{cases}$

Jendostkowe wymuszenie skokowe (funkcja Heaviside'a): $1(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t\geqslant 0 \end{cases}$

$H(t)$ lub $1_{+}(t)$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \infty, & t=0\\ 0, & t>0\end{cases}$

Jendostkowe wymuszenie skokowe (funkcja Heaviside'a): $1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geqslant 0\end{cases}$

$H(t)$ lub $1_{+}(t)$

Funkcja liniowo narastająca: $x(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geqslant 0\end{cases}$

Przykłady funkcji sygnałów wejściowych

Brak wejścia: $x(t)=0$

Wymuszenie impulsowe (Delta Diraca): $\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \infty, & t=0\\ 0, & t>0\end{cases}$

Jendostkowe wymuszenie skokowe (funkcja Heaviside'a): $1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geqslant 0\end{cases}$

$H(t)$ lub $1_+(t)$

Funkcja liniowo narastająca: $x(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geqslant 0\end{cases}$

Funkcja harmoniczna: $x(t)=a\sin(\omega t)$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe

wejście: $x(t)=a\cdot 1(t)$ Transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t)=?$

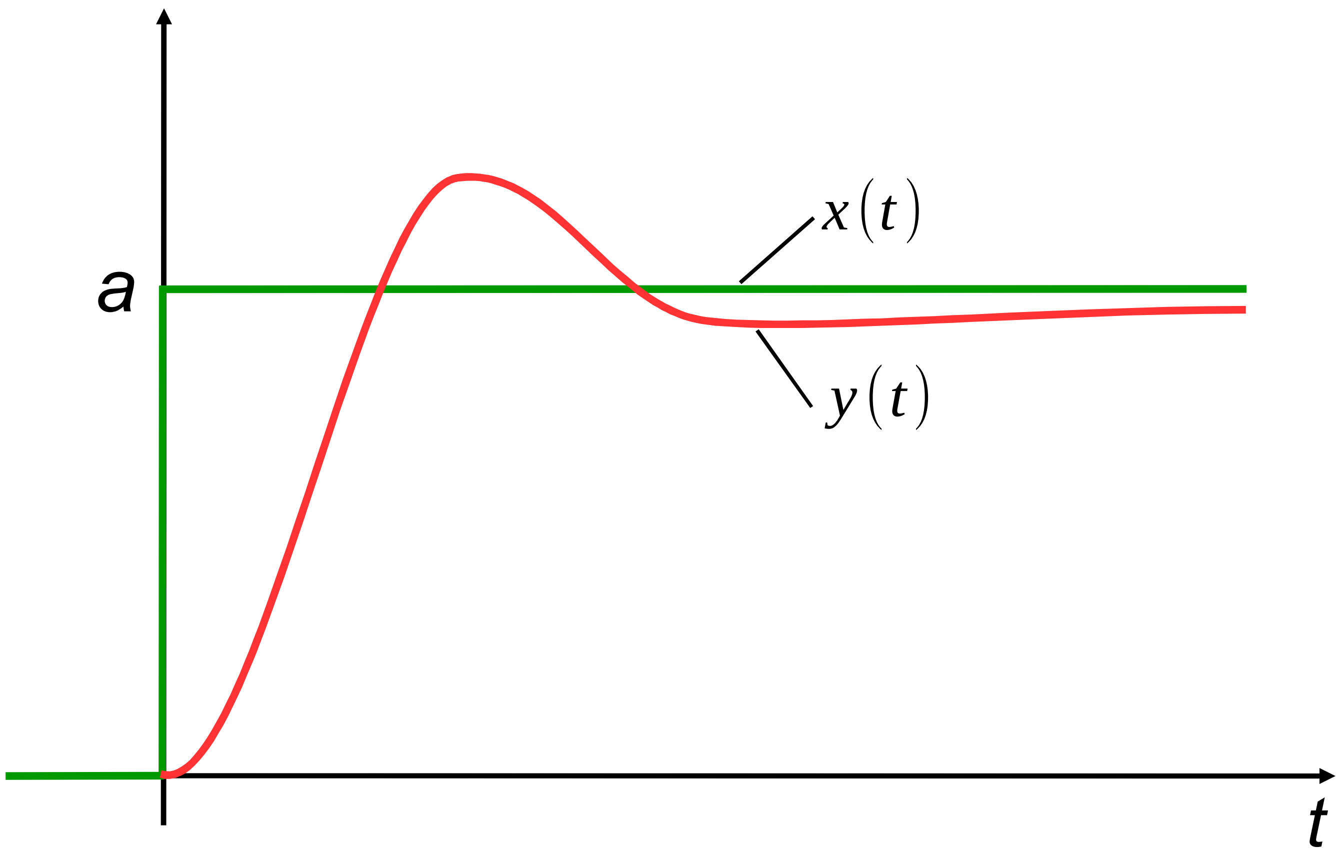
Odpowiedź na wymuszenie skokowe

wejście: $x(t)=a\cdot 1(t)$ Transmitancja: $G(s)$ wyjście: $y(t)=?$

$$X(s)=L\{x(t)\}=a\cdot\frac{1}{s}$$

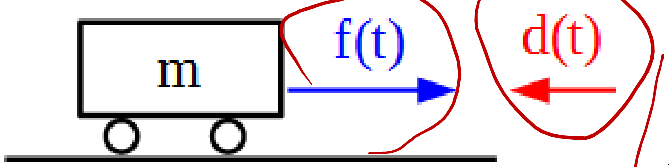
$$Y(s)=X(s)\cdot G(s)$$

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$$



Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-\underbrace{d(t)}_{c\cdot v(t)}$$

$$\mathcal{L})\quad m s\cdot V(s)-\cancel{v(0)}=F(s)-c\cdot V(s)$$

$f_0\,[N]$

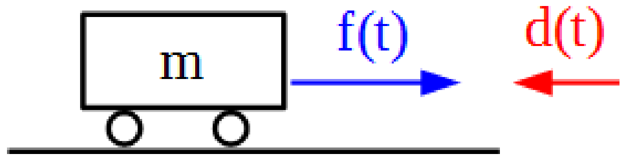
$$\boxed{G(s)=\frac{V(s)}{F(s)}=\frac{1}{ms+c}}$$

zał. $f(t)=f_0\cdot 1(t)$; $F(s)=\mathcal{L}\{f_0\,1(t)\}=f_0\frac{1}{s}$

$$V(s)=G(s)\cdot F(s)=\frac{1}{ms+c}\cdot f_0\frac{1}{s}=\frac{f_0}{s(ms+c)}$$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

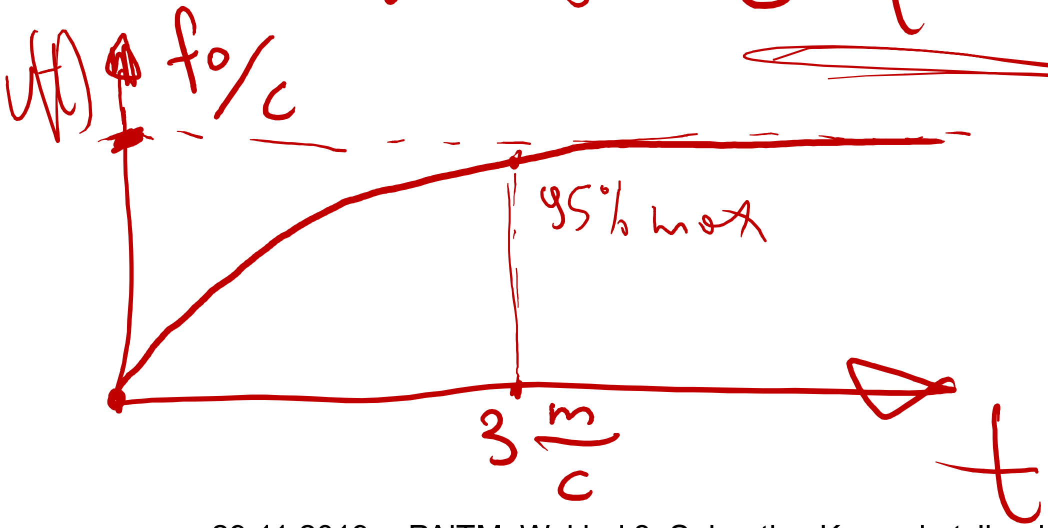
pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



$$m\frac{dv(t)}{dt}=f(t)-d(t)$$

$$V(s)=\frac{f_0}{s(ms+c)}=\frac{f_0}{m}\frac{1}{s\left(s+\frac{c}{m}\right)}=\frac{f_0}{c}\frac{\frac{c}{m}}{s(s+c/m)}$$

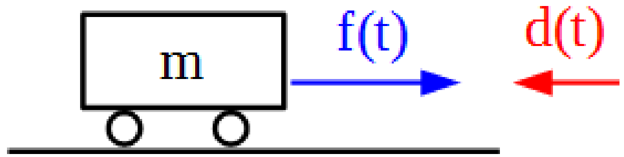
$$v(t)=\mathcal{L}^{-1}\{V(s)\}=\frac{f_0}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$



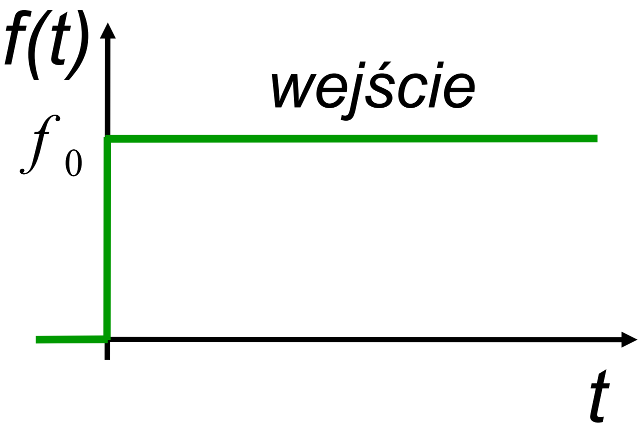
$$\boxed{1-e^{-bt} \quad \Big| \quad \frac{b}{s(s+b)}}$$

Odpowiedź na wymuszenie skokowe – przykład 1

pojazd na płaskim podłożu
m – masa pojazdu,
f(t) – siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
v(t) – prędkość pojazdu



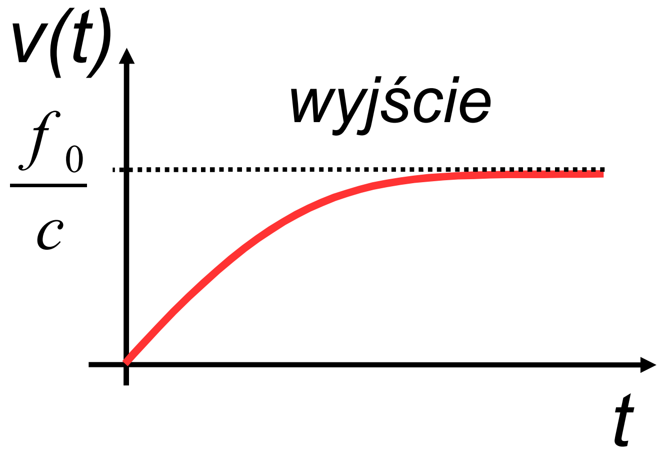
$$m\frac{dv(t)}{dt} = f(t) - d(t)$$



$$m\frac{dv(t)}{dt} = f(t) - c\,v(t)$$

$$m\,s\,V(s) = F(s) - c\,V(s)$$

$$G(s) = \frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms+c}$$



$$f(t) = f_0 1(t)$$

$$F(s) = f_0\frac{1}{s}$$

$$V(s) = H(s)F(s) = \frac{1}{ms+c} f_0 \frac{1}{s} = \frac{f_0}{s(ms+c)}$$

$$v(t) = L^{-1}\left\{\frac{f_0}{s(ms+c)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{f_0}{c}\frac{c/m}{s(s+c/m)}\right\} = \frac{f_0}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$