



# Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Podstawy automatyki i teorii maszyn*  
semestr zimowy 2019/2020

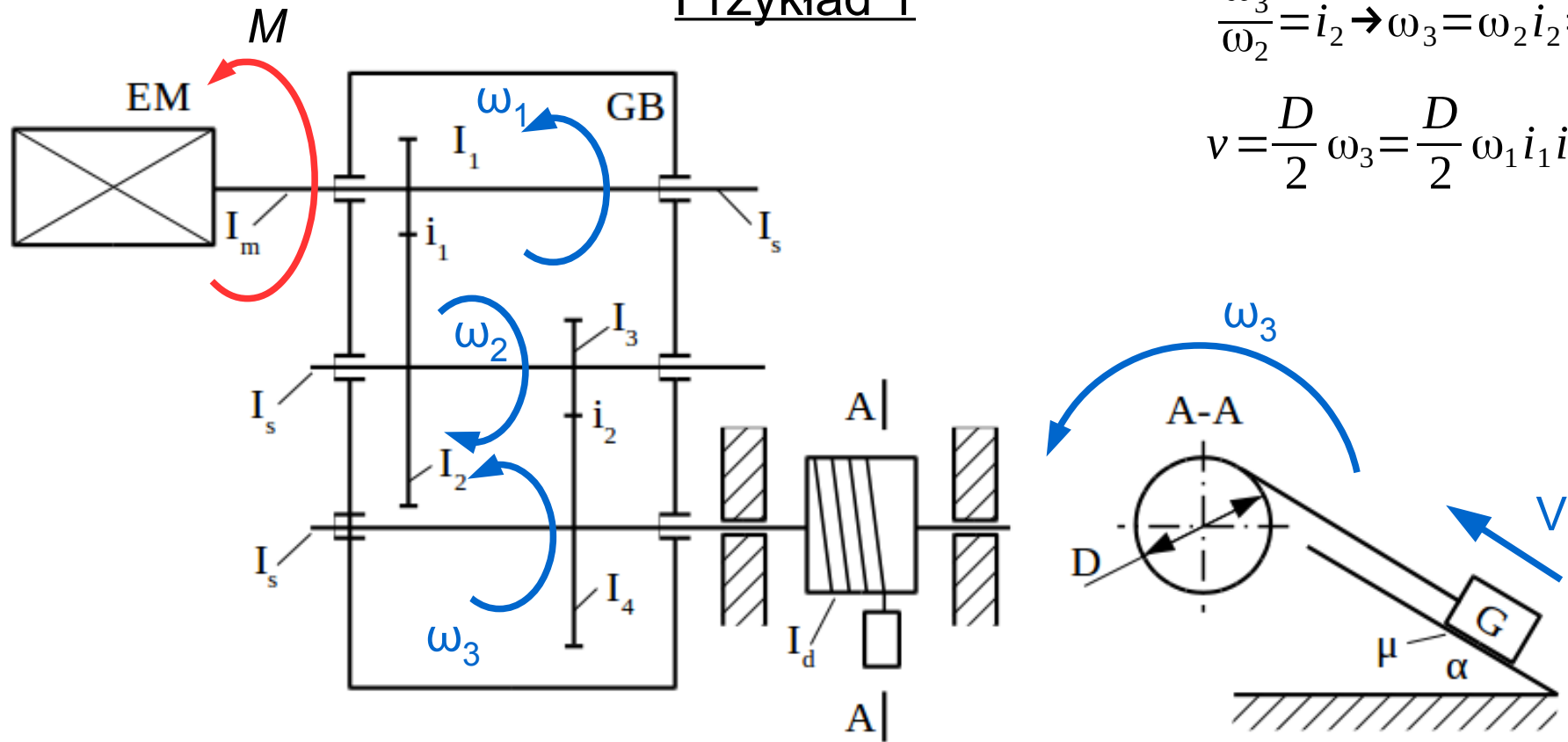
dr inż. Sebastian Korczak

## Wykład 6 cd.

Równanie ruchu maszyny – przykład.

# Redukcja mas i sił

## Przykład 1



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = i_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_2 i_2 = \omega_1 i_1 i_2$$

$$v = \frac{D}{2} \omega_3 = \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

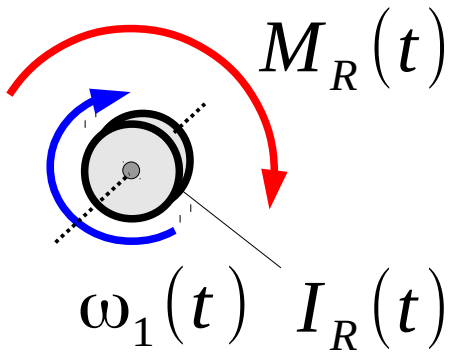
$$I_R = I_m + I_1 + I_s + (I_2 + I_3 + I_s) i_1^2 + (I_4 + I_d + I_s) i_1^2 i_2^2 + \frac{G}{g} \frac{D^2}{4} i_1^2 i_2^2$$

$$M_R = M_s - \left( M_f i_1 i_2 + (\mu G \cos \alpha + G \sin \alpha) \frac{D}{2} i_1 i_2 \right) = M_C - M_B$$

# Redukcja mas i sił

## Przykład 1

Rozruch maszyny



$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = M_R$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{B}{I_R} \omega_1 = \frac{A - M_B}{I_R}$$

rozwiązanie ogólne

rozwiązanie szczególne

$$\omega_{1og}(t) = E e^{-\frac{B}{I_R}t} \quad \omega_{1sz}(t) = F$$

warunek początkowy

$$\omega_1(t=0) = 0$$

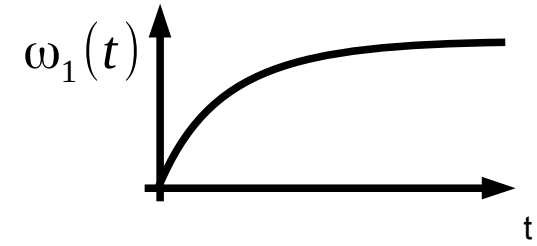
$$\omega_1(t) = \frac{A - M_B}{B} \left( 1 - e^{-\frac{B}{I_R}t} \right)$$

# Redukcja mas i sił

## Przykład 1

### Rozruch maszyny

$$\omega_1(t) = \frac{A - M_B}{B} \left( 1 - e^{-\frac{B}{I_R} t} \right)$$

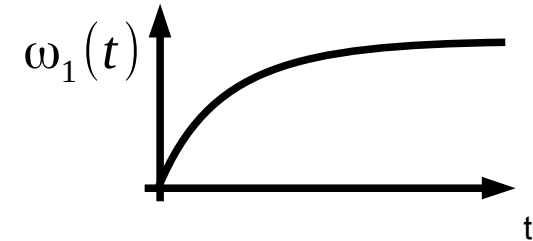


# Redukcja mas i sił

## Przykład 1

### Rozruch maszyny

$$\omega_1(t) = \frac{A - M_B}{B} \left( 1 - e^{-\frac{B}{I_R} t} \right)$$



prędkość ruchu ustalonego:

$$\omega_{max} = \frac{A - M_B}{B}$$

czas rozruchu  
(95% maks. prędk.):

$$0,95 \omega_{max} = \frac{A - M_B}{B} \left( 1 - e^{-\frac{B}{I_R} t_{95}} \right)$$

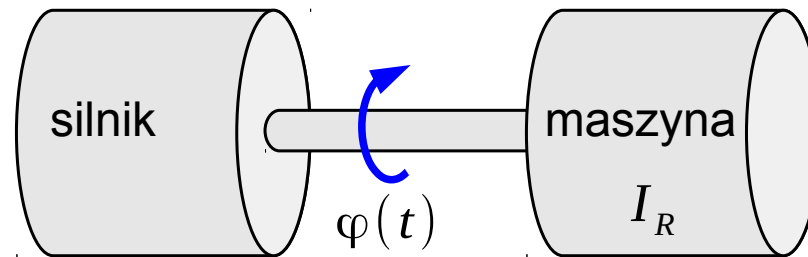
$$t_{95} \approx 3 \frac{I_R}{B}$$

# Wykład 7

Nierównomierność biegu maszyny.  
Koło zamachowe.  
Wstęp do automatyki.

# Nierównomierność biegu maszyny

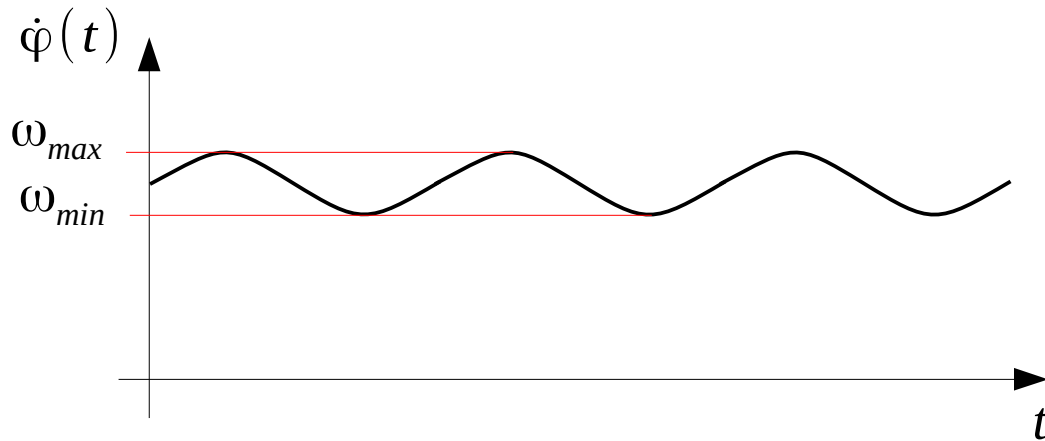
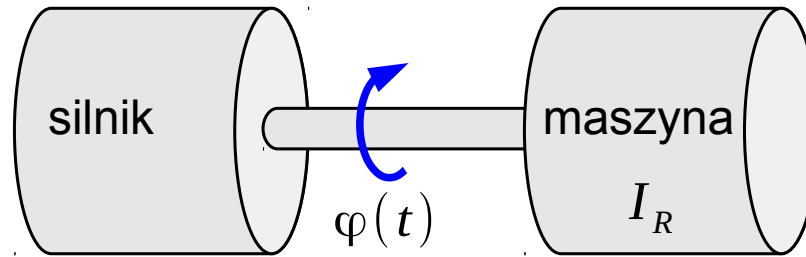
w ruchu ustalonym





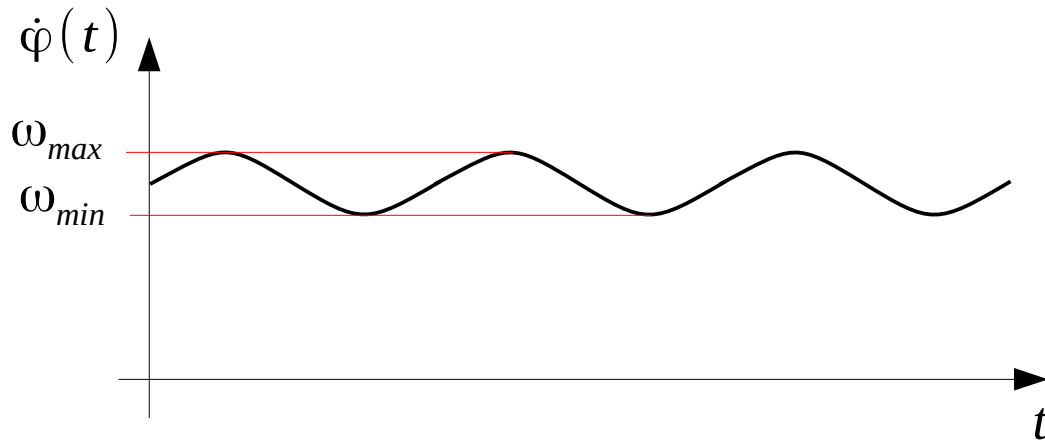
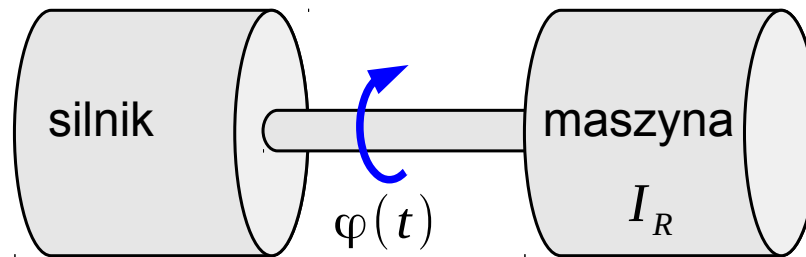
# Nierównomierność biegu maszyny

w ruchu ustalonym



# Nierównomierność biegu maszyny

w ruchu ustalonym

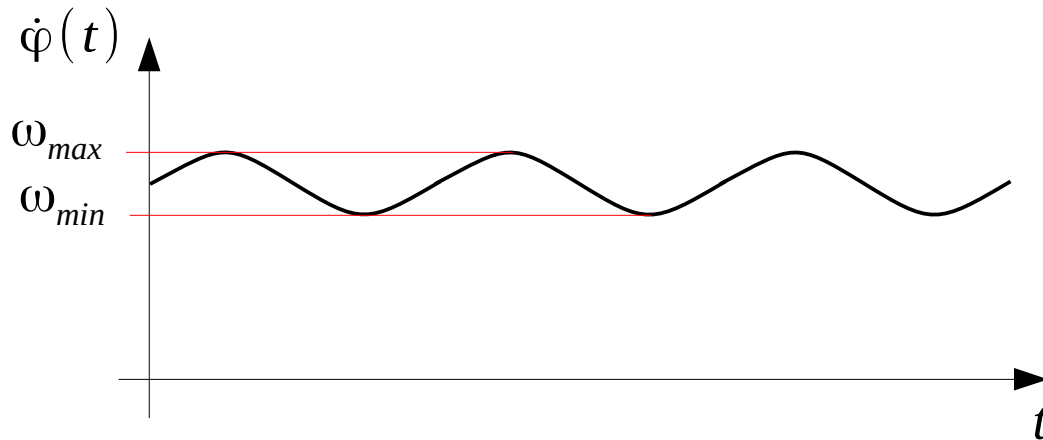
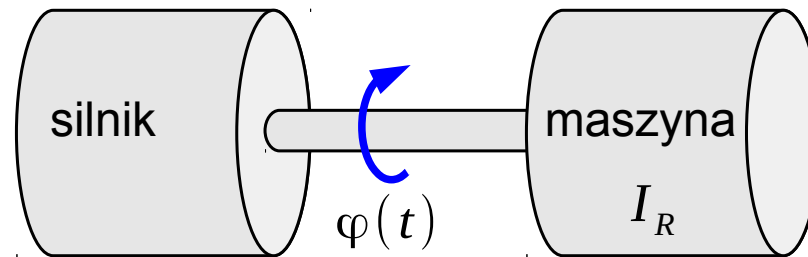


Nierównomierność biegu maszyny

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{\acute{s}r}} \quad \omega_{\acute{s}r} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

# Nierównomierność biegu maszyny

w ruchu ustalonym



Nierównomierność biegu maszyny

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{\acute{s}r}} \quad \omega_{\acute{s}r} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

Pompy

$$\delta = 1/5 \div 1/30$$

silniki spalinowe

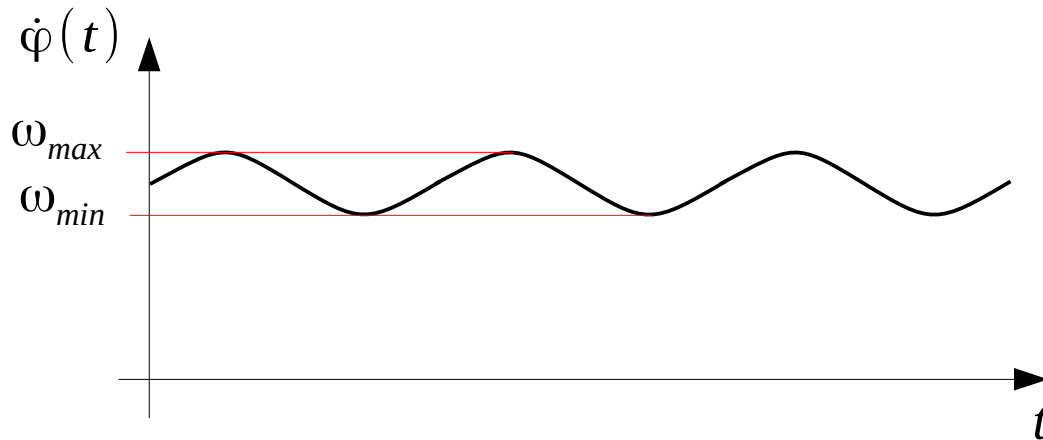
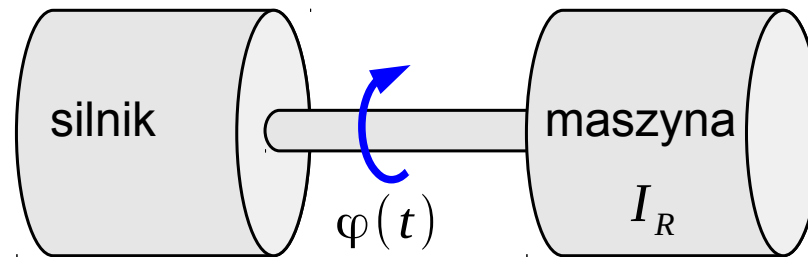
$$\delta = 1/50 \div 1/150$$

generatory

$$\delta = 1/200 \div 1/300$$

# Nierównomierność biegu maszyny

w ruchu ustalonym



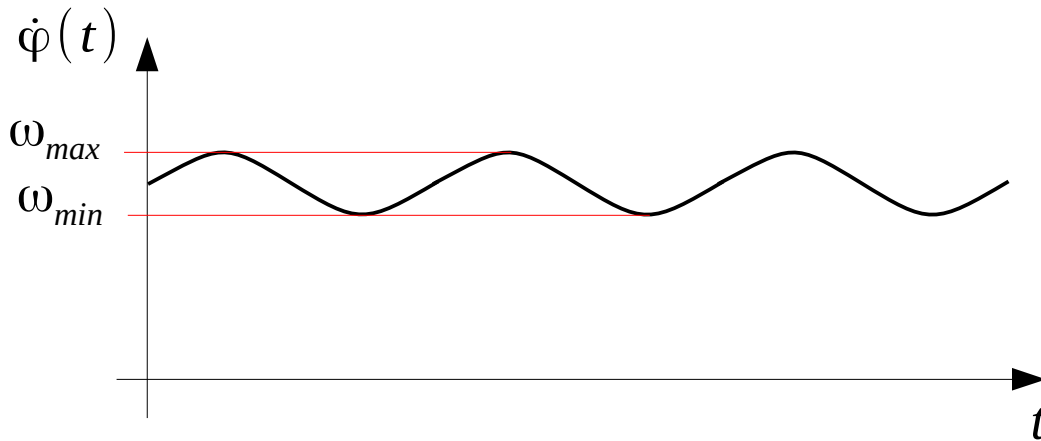
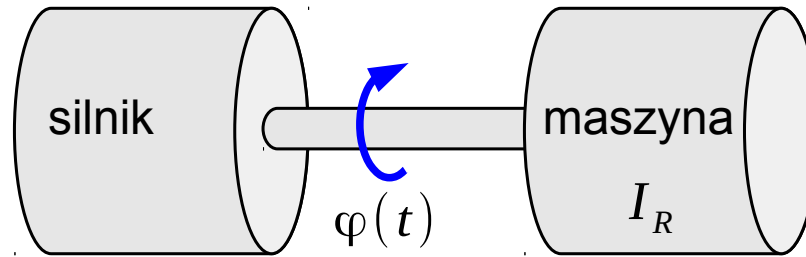
Nierównomierność biegu maszyny

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{\acute{s}r}} \quad \omega_{\acute{s}r} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

$$E_{k,max} = \frac{1}{2} I_R \omega_{max}^2 \quad E_{k,min} = \frac{1}{2} I_R \omega_{min}^2$$

# Nierównomierność biegu maszyny

w ruchu ustalonym



Nierównomierność biegu maszyny

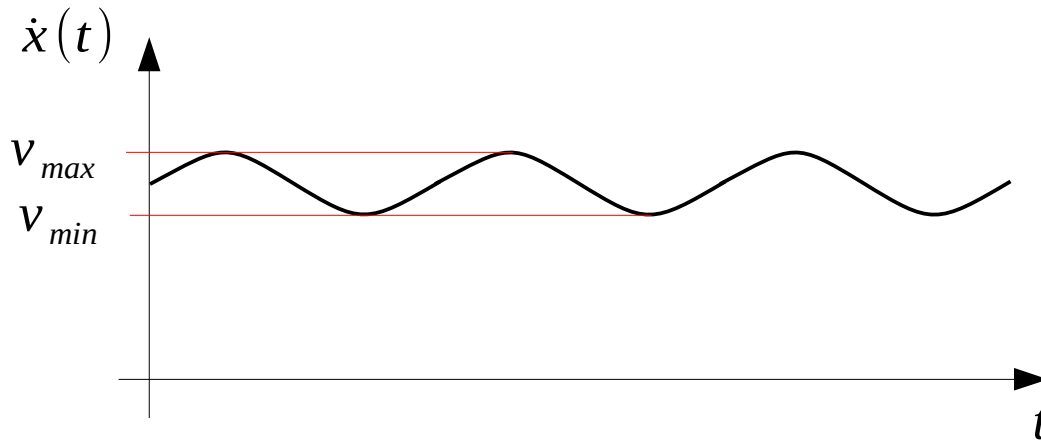
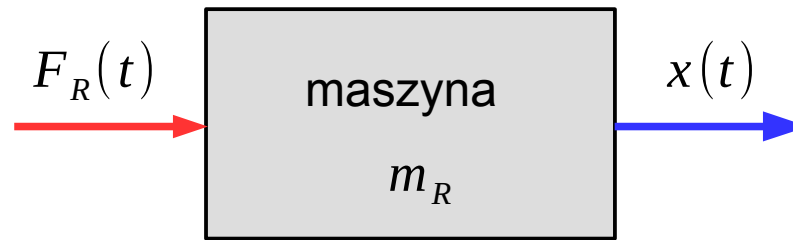
$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{\acute{s}r}} \quad \omega_{\acute{s}r} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}$$

$$E_{k.max} = \frac{1}{2} I_R \omega_{max}^2 \quad E_{k.min} = \frac{1}{2} I_R \omega_{min}^2$$

$$\Delta L = E_{k.max} - E_{k.min} = \delta I_R \omega_{\acute{s}r}^2$$

# Nierównomierność biegu maszyny

w ruchu ustalonym



Nierównomierność biegu maszyny

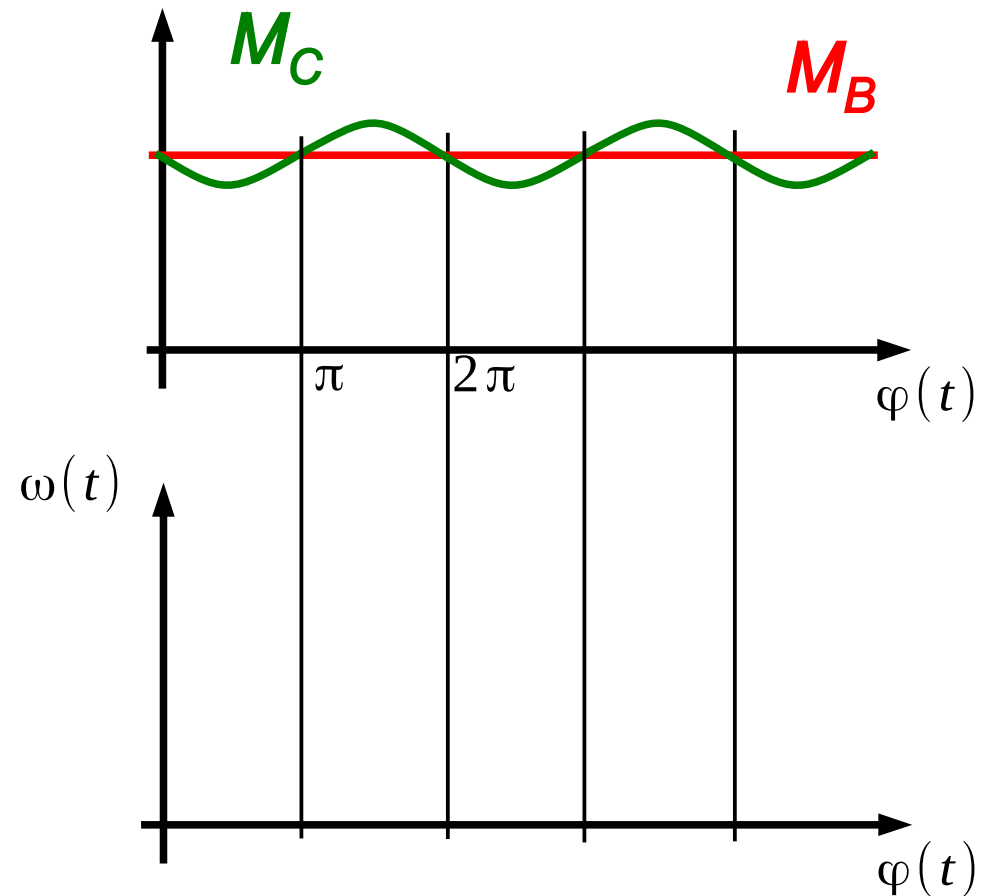
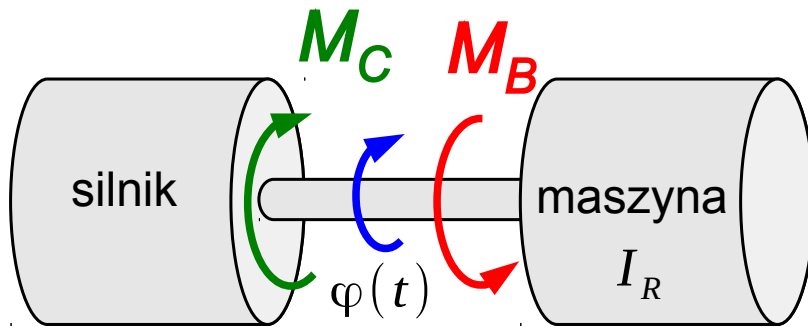
$$\delta = \frac{v_{max} - v_{min}}{v_{\acute{s}r}} \quad v_{\acute{s}r} = \frac{v_{max} + v_{min}}{2}$$

$$\Delta L = \delta m_R v_{\acute{s}r}^2$$

# Nierównomierność biegu maszyny

w ruchu ustalonym

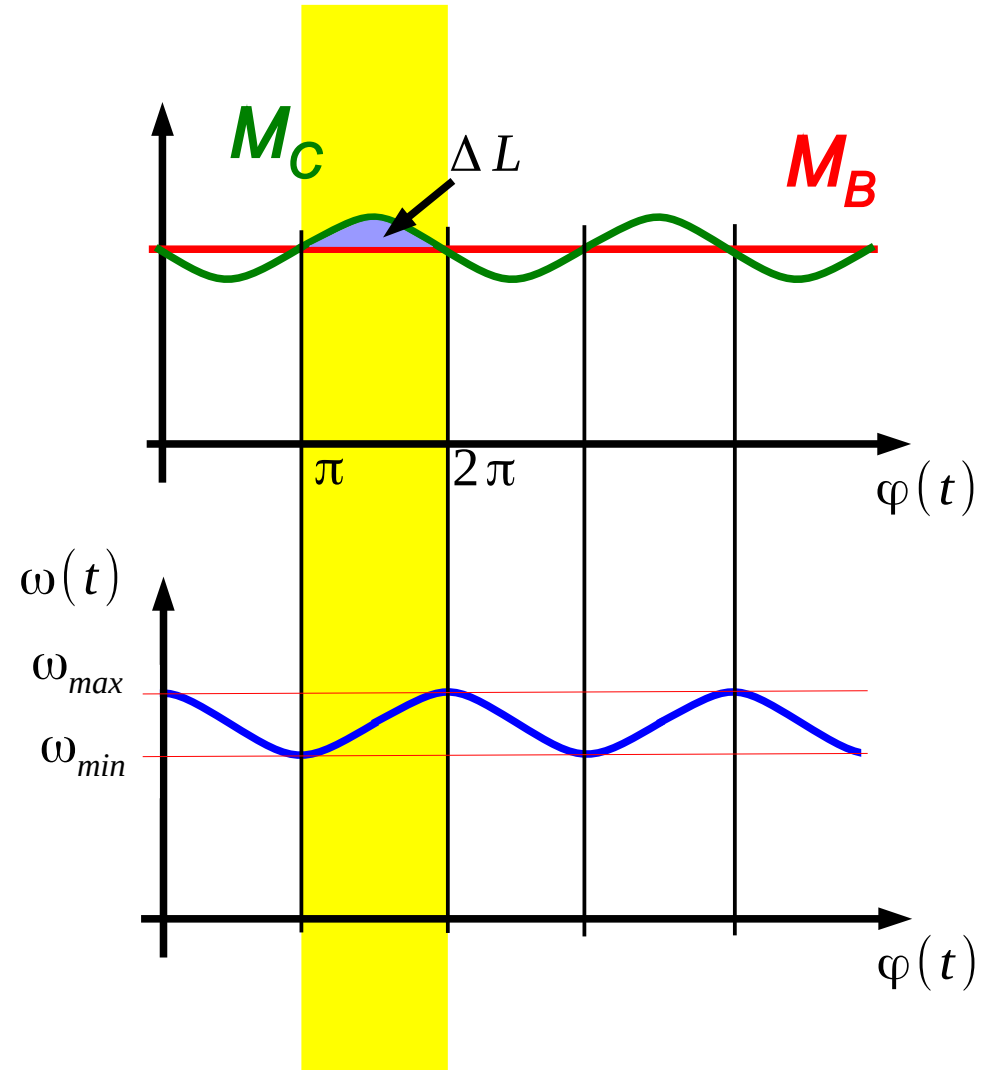
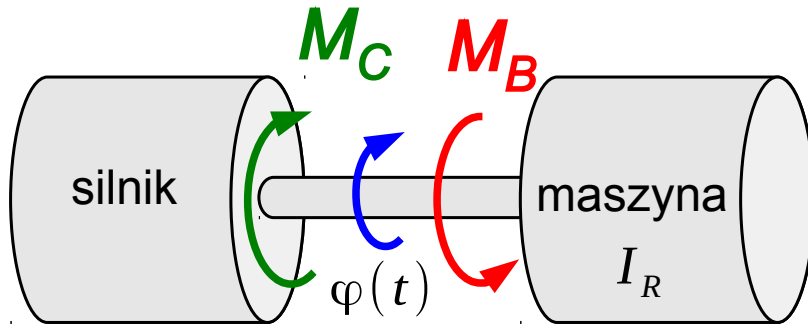
przyczyna nierównomierności biegu - przykład



# Nierównomierność biegu maszyny

w ruchu ustalonym

przyczyna nierównomierności biegu - przykład



$$\Delta L = \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} (M_C - M_B) d\varphi$$

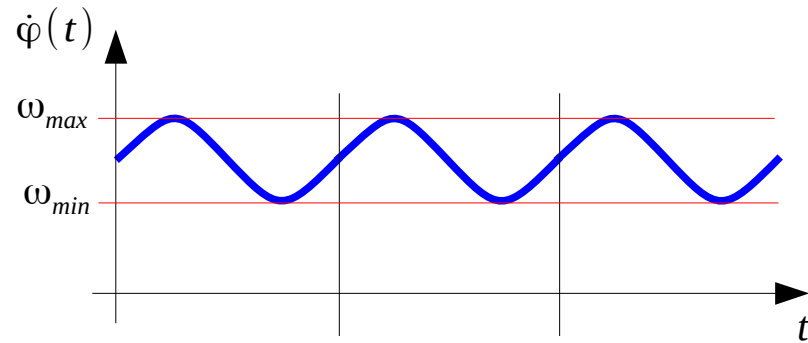
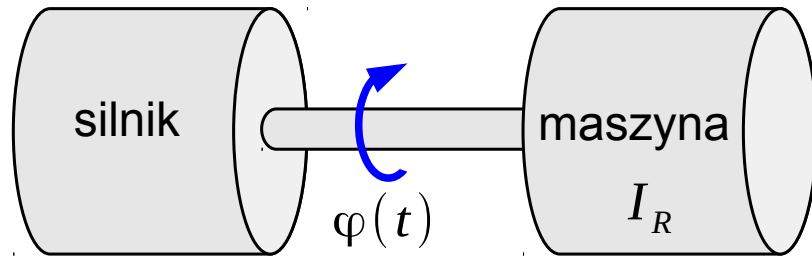
$$\Delta L = E_{k.max} - E_{k.min} = \delta I_R \omega_{sr}^2$$

$$\delta = \frac{\Delta L}{I_R \omega_{sr}^2}$$



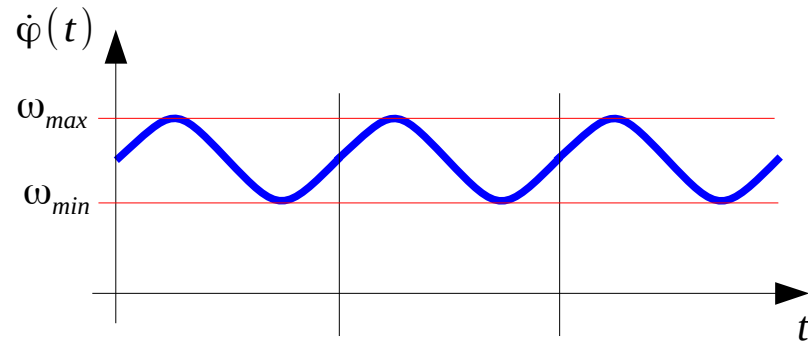
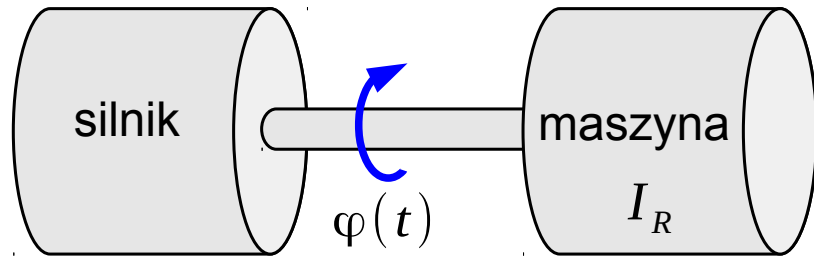
# Koło zamachowe

w ruchu ustalonym

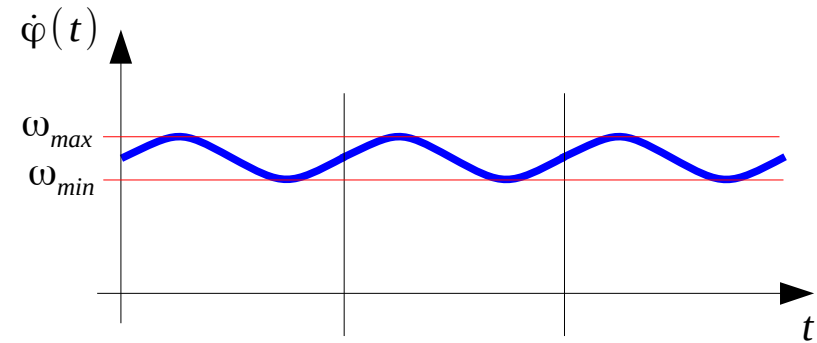
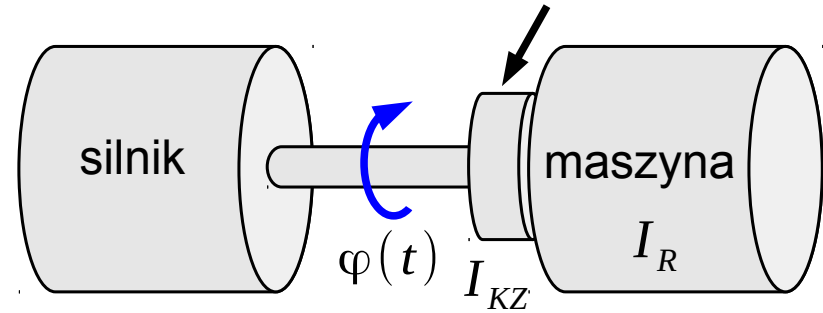


# Koło zamachowe

w ruchu ustalonym

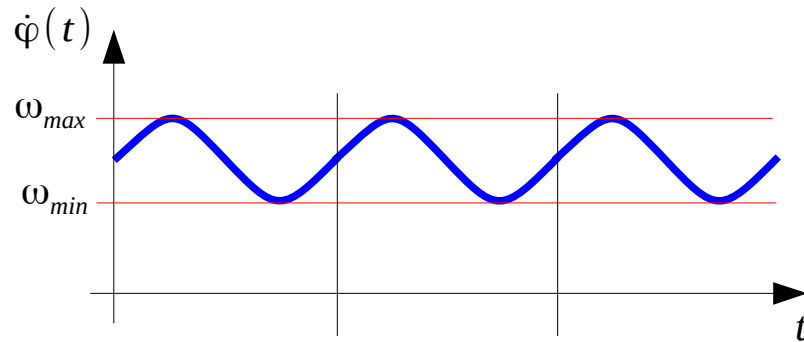
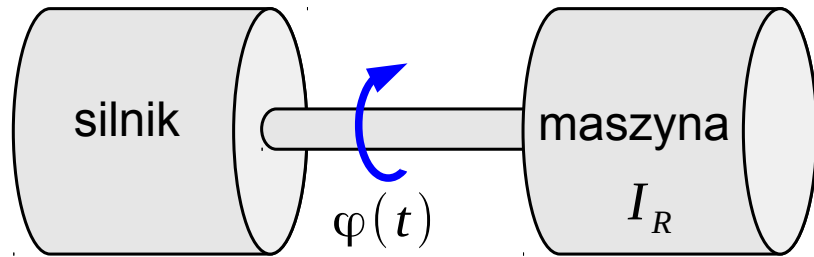


koło zamachowe



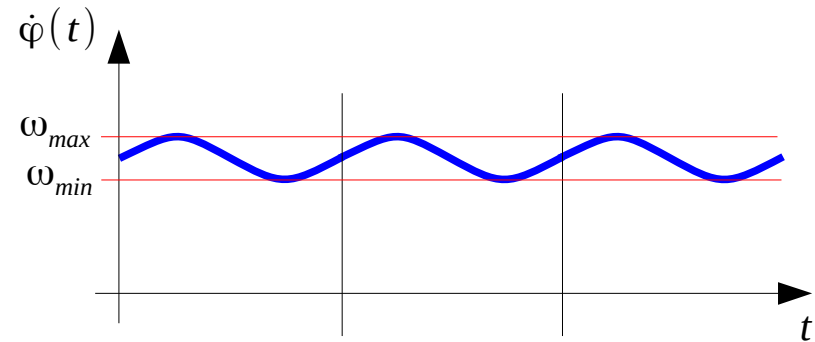
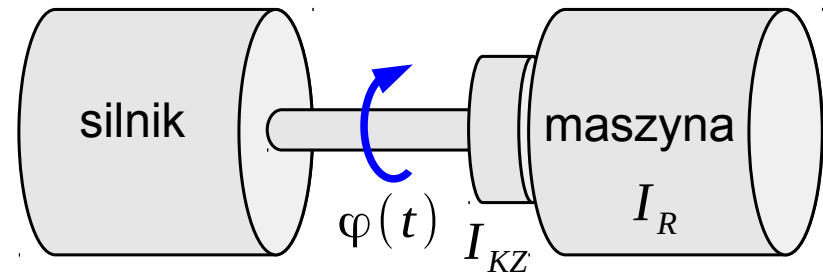
# Koło zamachowe

w ruchu ustalonym



$$\Delta L = \delta_1 I_R \omega_{sr}^2$$

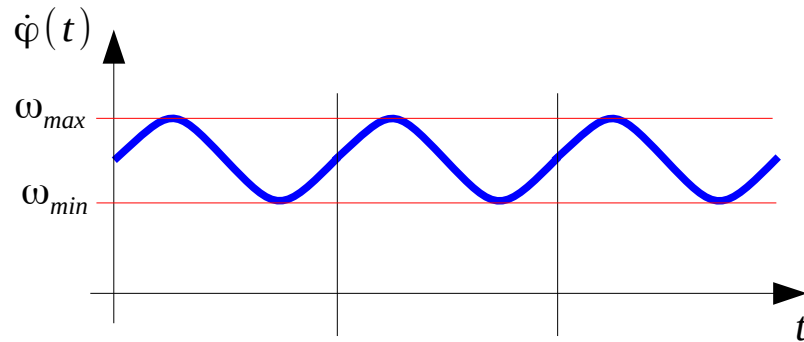
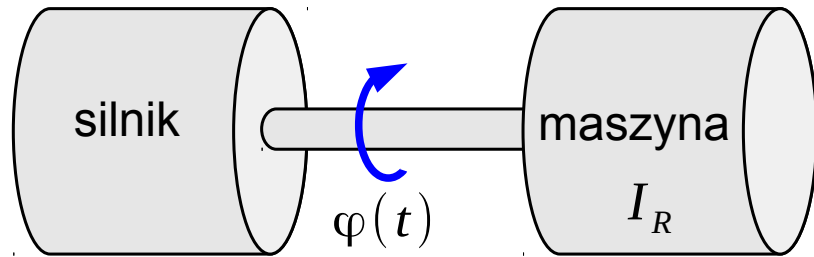
założenie  
 $I_R \approx const.$



$$\Delta L = \delta_2 (I_R + I_{FW}) \omega_{sr}^2$$

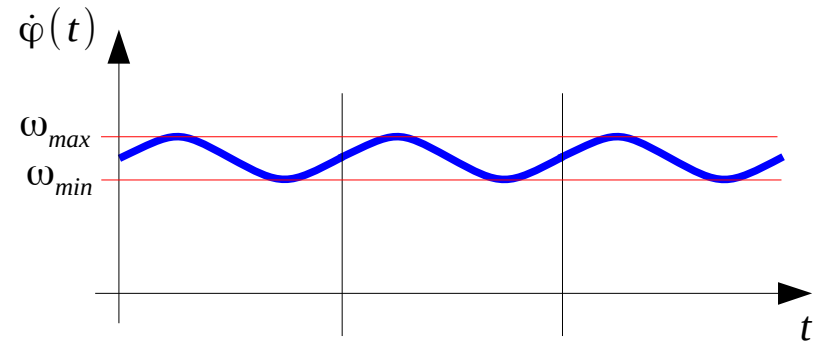
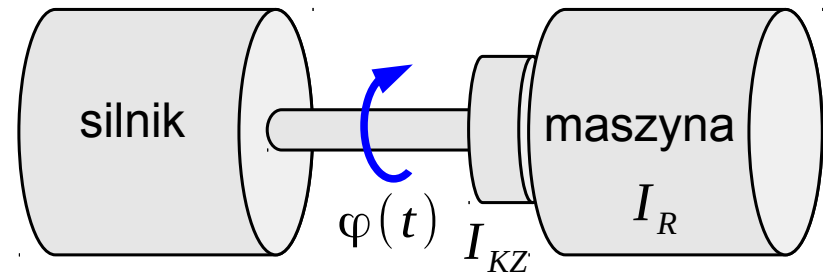
# Koło zamachowe

w ruchu ustalonym



$$\Delta L = \delta_1 I_R \omega_{\acute{s}r}^2$$

założenie  
 $I_R \approx const.$

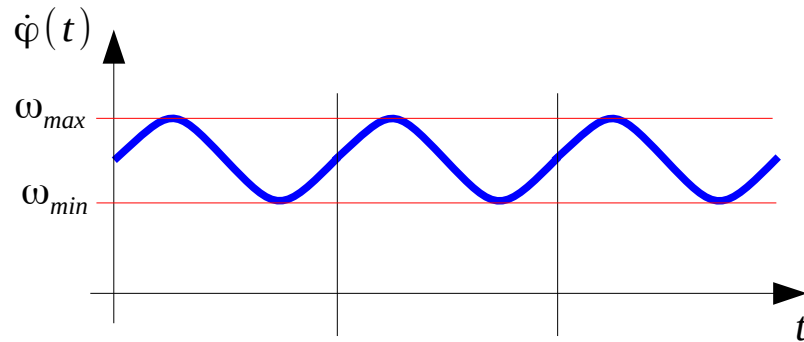
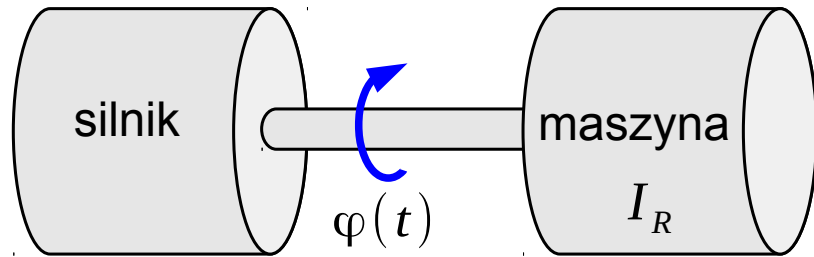


$$\Delta L = \delta_2 (I_R + I_{FW}) \omega_{\acute{s}r}^2$$

$$\delta_1 I_R \omega_{\acute{s}r}^2 = \delta_2 (I_R + I_{KZ}) \omega_{\acute{s}r}^2$$

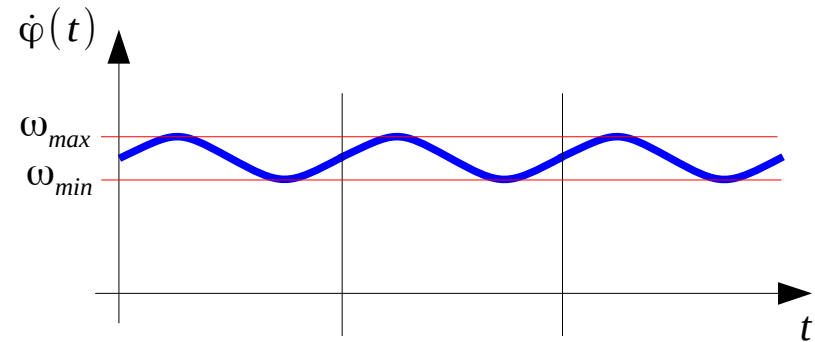
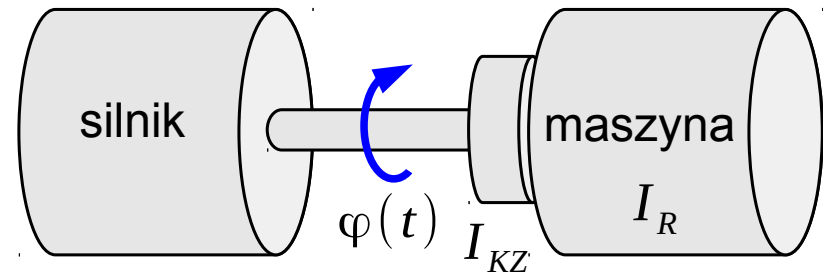
# Koło zamachowe

w ruchu ustalonym



$$\Delta L = \delta_1 I_R \omega_{\acute{s}r}^2$$

założenie  
 $I_R \approx const.$



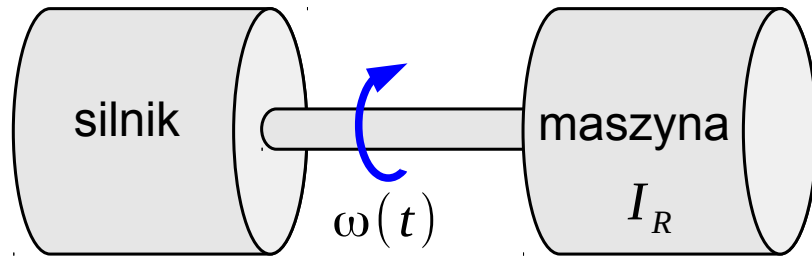
$$\Delta L = \delta_2 (I_R + I_{FW}) \omega_{\acute{s}r}^2$$

$$\delta_1 I_R \omega_{\acute{s}r}^2 = \delta_2 (I_R + I_{KZ}) \omega_{\acute{s}r}^2$$

$$I_{KZ} = \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} - 1 \right) I_R$$

# Koło zamachowe

## Przykład 1



Dane:

$$\omega_{max} = 1000 \text{ obr/min}$$

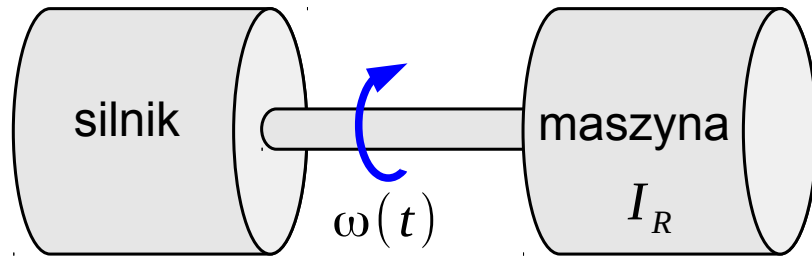
$$\omega_{min} = 950 \text{ obr/min}$$

$$I_R = 10 \text{ kgm}^2$$

Zadanie: dobrać koło zamachowe aby wahania obrotów spadły do 10obr/min.

# Koło zamachowe

## Przykład 1



Dane:

$$\omega_{max} = 1000 \text{ obr/min}$$

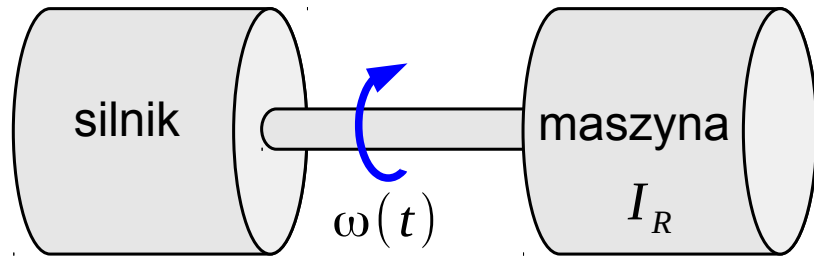
$$\omega_{min} = 950 \text{ obr/min}$$

$$I_R = 10 \text{ kgm}^2$$

Zadanie: dobrać koło zamachowe aby wahania obrotów spadły do 10obr/min.

# Koło zamachowe

## Przykład 1



Dane:

$$\omega_{max} = 1000 \text{ obr/min}$$

$$\omega_{min} = 950 \text{ obr/min}$$

$$I_R = 10 \text{ kgm}^2$$

Zadanie: dobrać koło zamachowe aby wahania obrotów spadły do 10obr/min.

Nierównomierność biegu bez koła zamachowego:

$$\delta_1 = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{sr}} = \frac{50}{975} = 0,05128$$

Nierównomierność biegu z kołem zamachowym:

$$\delta_2 = \frac{10}{975} = 0,01025$$

Moment bezwładności koła zamachowego:

$$I_{KZ} = \left( \frac{\delta_1}{\delta_2} - 1 \right) I_R = 40 \text{ kg m}^2$$

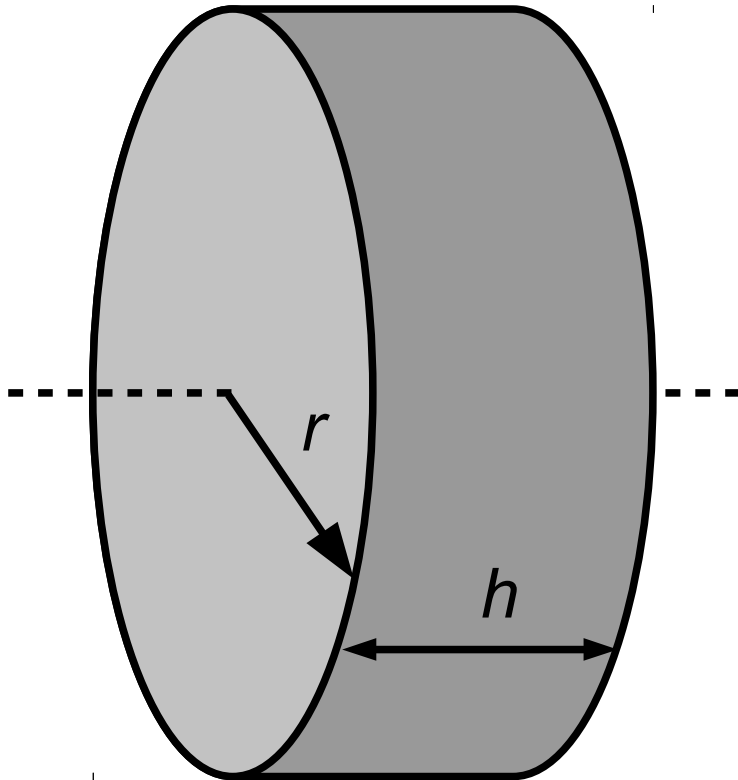


# Koło zamachowe

## Przykład 1

Walec pełen

$$I_{KZ} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi h r^4$$

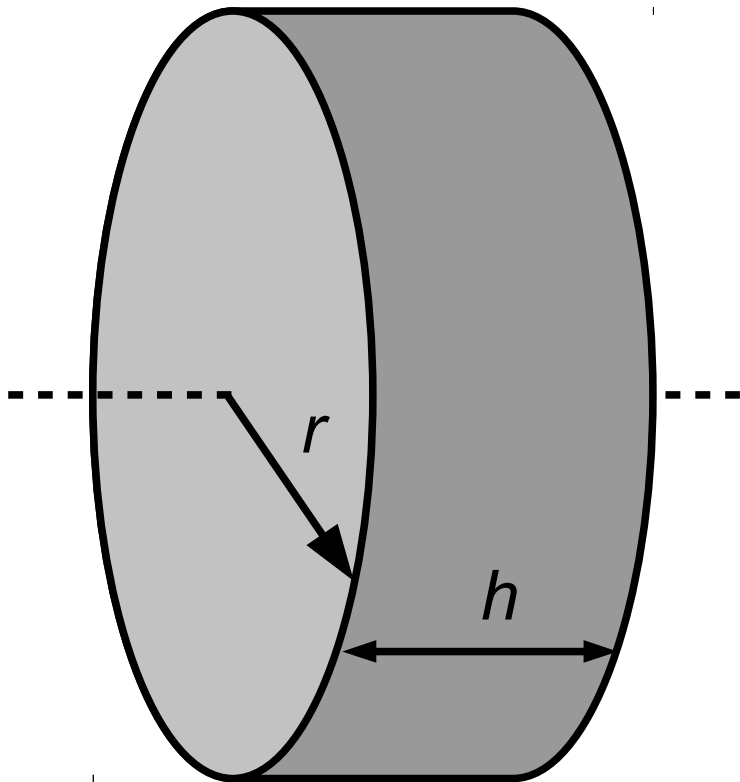


# Koło zamachowe

## Przykład 1

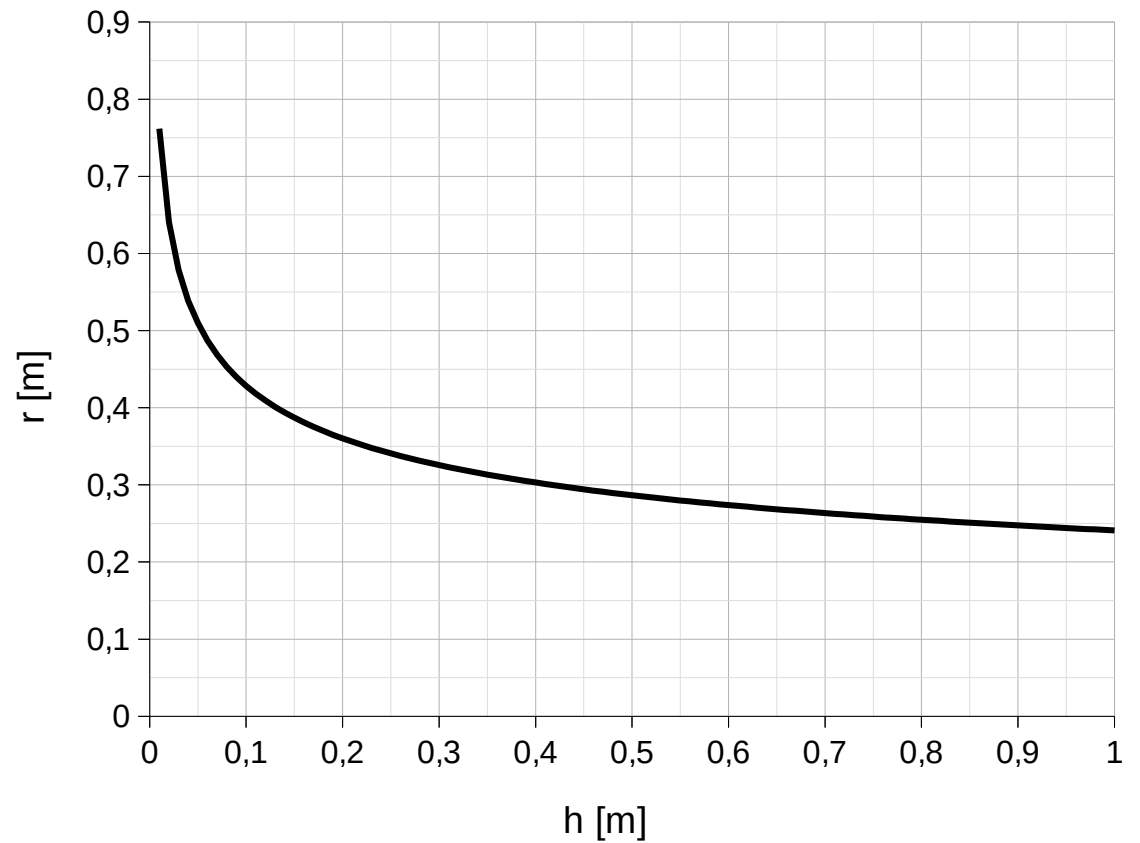
Walec pełen

$$I_{KZ} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi h r^4$$



$$I_{KZ} = 40 \text{ kgm}^2$$

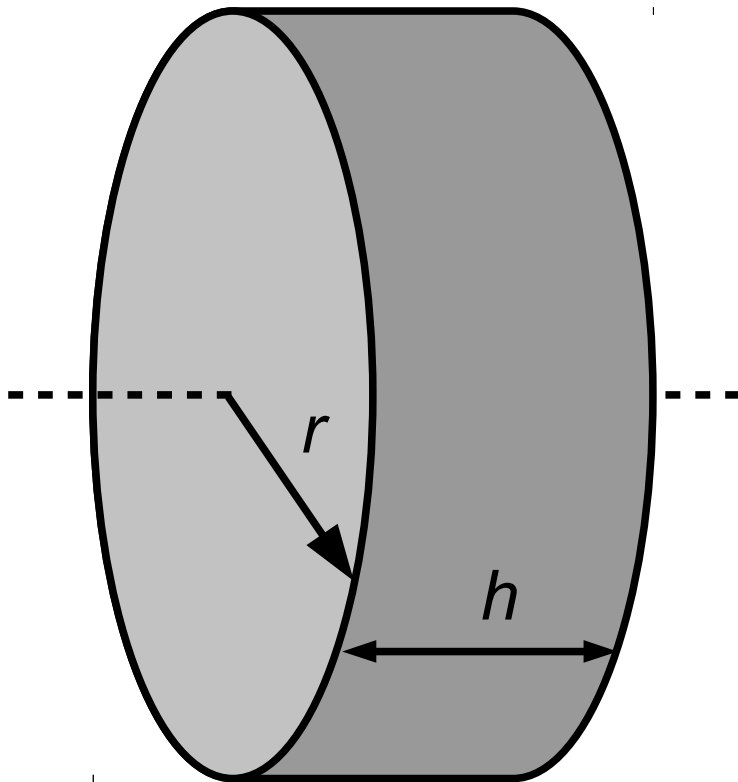
$$\rho_{\text{stal}} = 7800 \text{ kg/m}^3$$



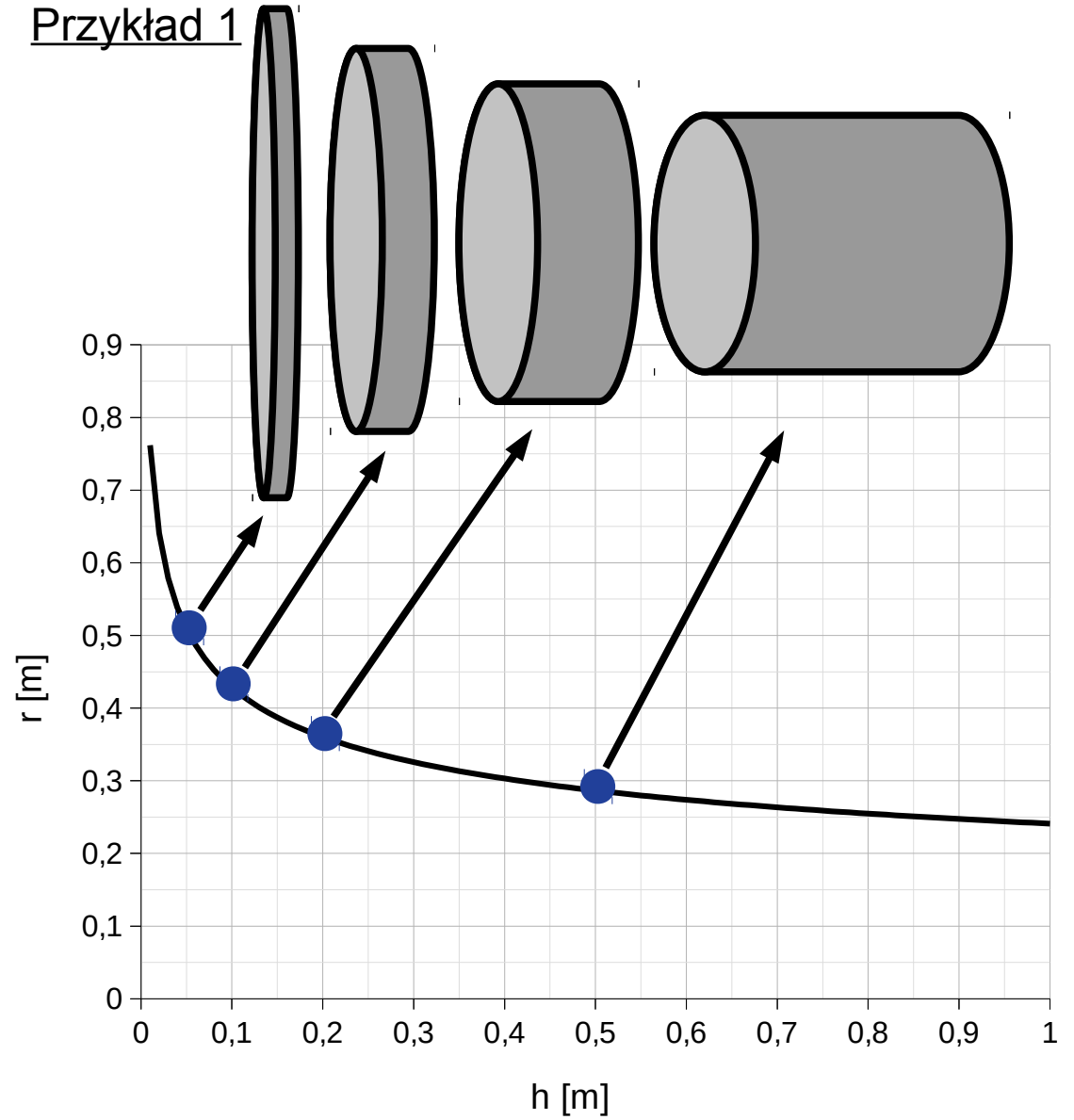
# Koło zamachowe

Walec pełen

$$I_{KZ} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi h r^4$$



Przykład 1



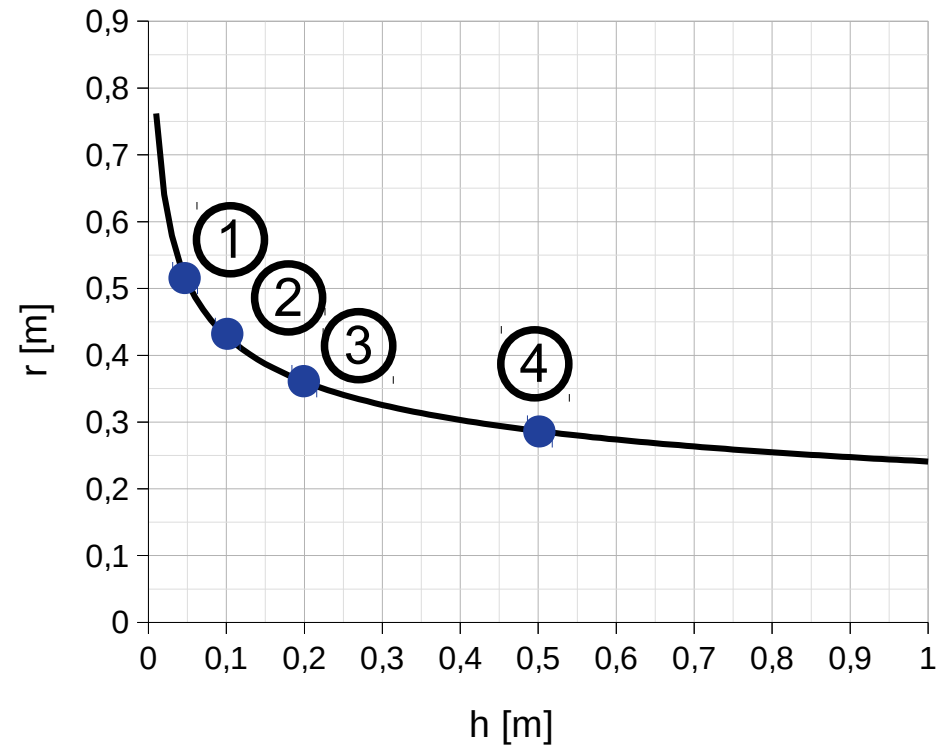
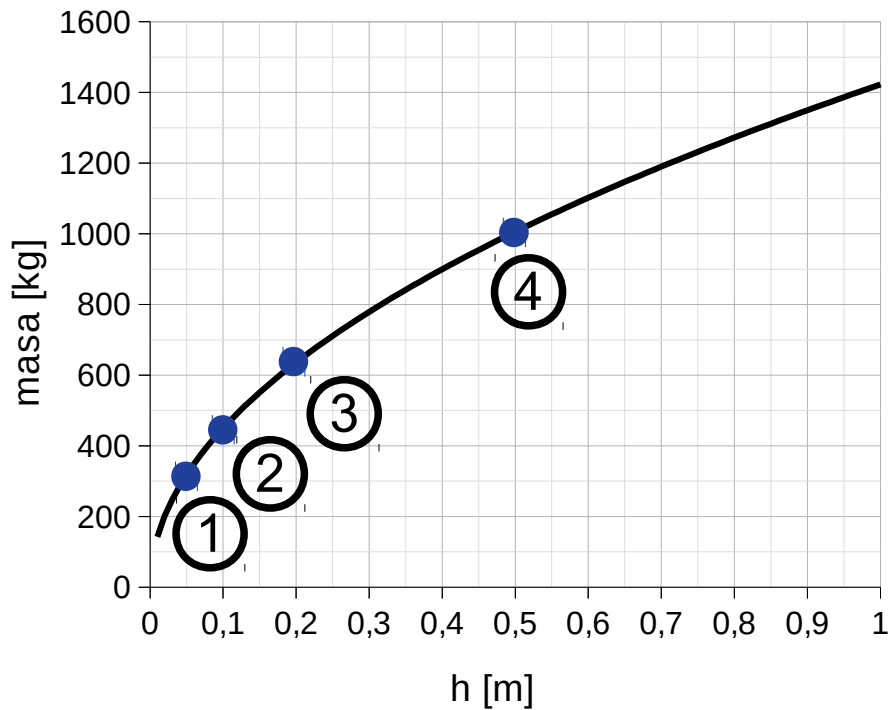
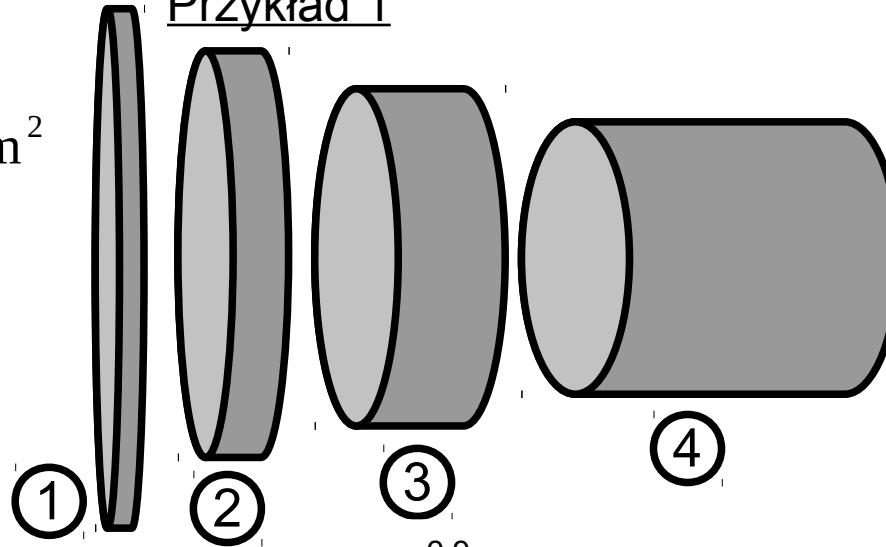
# Koło zamachowe

Przykład 1

Walec

$$I_{FW} = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2} \rho \pi h r^4 = 40 \text{ kgm}^2$$

$$\rho_{steel} = 7800 \text{ kg/m}^3$$

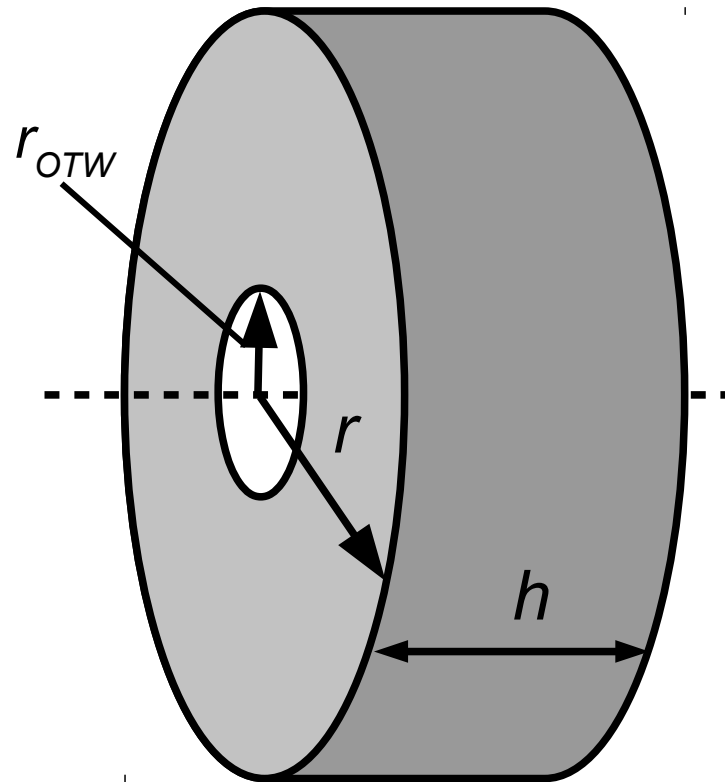


# Koło zamachowe

## Przykład 1

### Walec z otworem

$$I_{KZ} = \frac{1}{2} \rho \pi h r^4 - \frac{1}{2} \rho \pi h r_{OTW}^4 = 40 \text{ kgm}^2$$

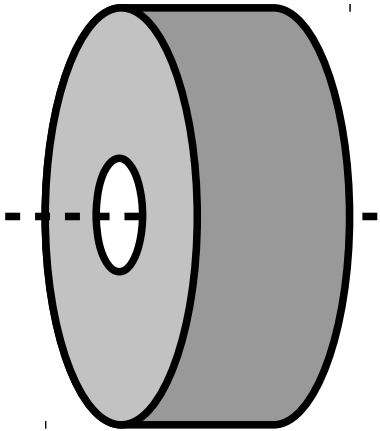


# Koło zamachowe

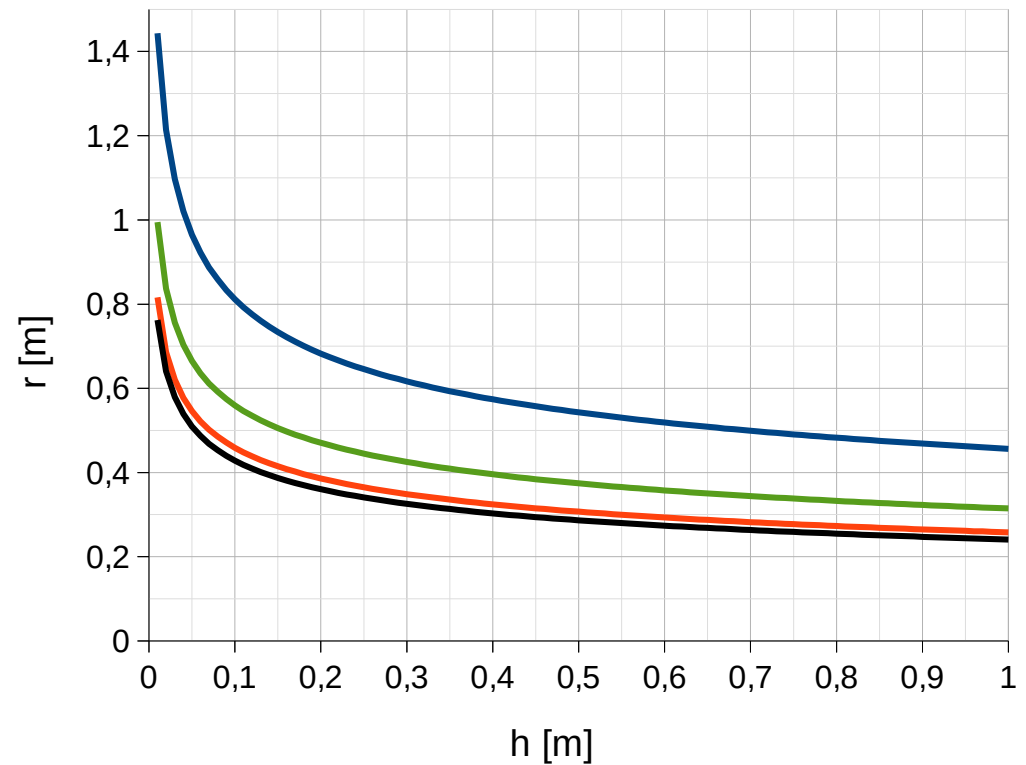
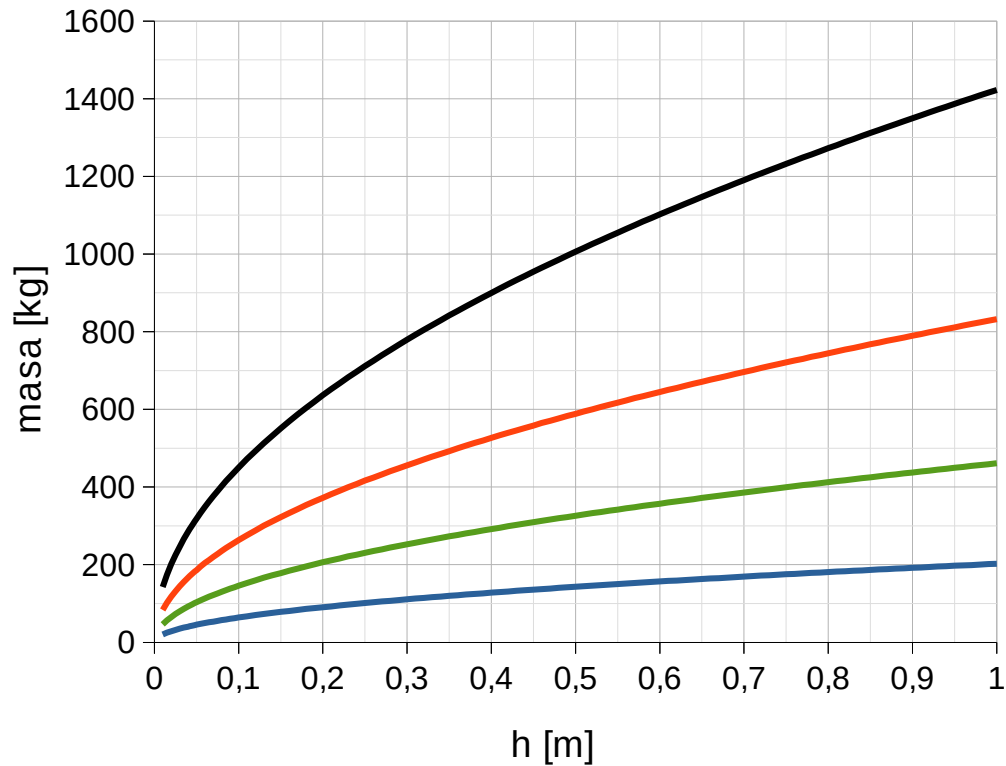
## Przykład 1

### Walec z otworem

$$I_{KZ} = \frac{1}{2} \rho \pi h r^4 - \frac{1}{2} \rho \pi h r_{OTW}^4 = 40 \text{ kgm}^2$$



— lity      — 70% otw.      — 90% otw.      — 98% otw.



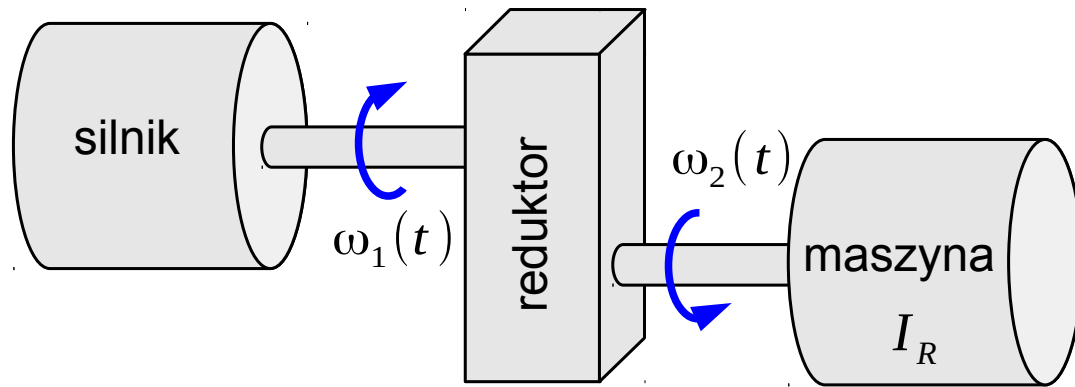
# Koło zamachowe

## Przykład 1

$$I_{FW} = \frac{1}{2} \rho \pi h r^4 - \frac{1}{2} \rho \pi h r_{OTW}^4 = 40 \text{ kgm}^2$$

	Lity walec	Walec z 90% otworem	Lity walec	Walec z 98% otworem
h=	10 cm	10 cm	5 cm	5 cm
r=	43 cm	56 cm	50 cm	96 cm
r <sub>OTW</sub> =	--	50.4 cm	--	94 cm
m=	442.8 kg	143.5 kg	313 kg	44.5 kg

# Koło zamachowe – przykład 2



Zadanie: dobrać koło zamachowe aby wahania prędkości wału maszyny spadły do 5obr/min.

Dane:

$$\omega_{2max} = 105 \text{ obr/min}$$

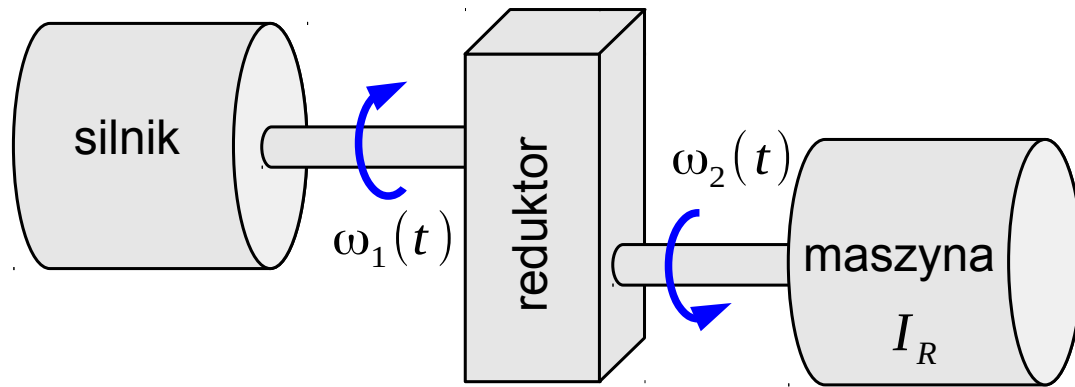
$$\omega_{2min} = 95 \text{ obr/min}$$

$$I_R = 2 \text{ kgm}^2 - \text{ dla redukcji do wału maszyny}$$

$$i = \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} = 0,2$$



# Koło zamachowe – przykład 2



Dane:

$$\omega_{2max} = 105 \text{ obr/min}$$

$$\omega_{2min} = 95 \text{ obr/min}$$

$$I_R = 2 \text{ kgm}^2 \text{ - dla redukcji do wału maszyny}$$

$$i = \frac{\omega_2(t)}{\omega_1(t)} = 0,2$$

Zadanie: dobrać koło zamachowe aby wahania prędkości wału maszyny spadły do 5obr/min.

$$\delta = \frac{\omega_{2max} - \omega_{2min}}{\omega_{2\acute{s}r}} = \frac{10}{100} = 0,1$$

$$\delta_{KZ} = \frac{\omega_{2max} - \omega_{2min}}{\omega_{2\acute{s}r}} = \frac{5}{100} = 0,05$$

uwaga: parametr nierównomierności biegu nie zależy od wyboru wału

Dla koła zamachowego na wale maszyny:

$$\delta I_R \omega_{2\acute{s}r}^2 = \delta_{KZ} (I_R + I_{KZ1}) \omega_{2\acute{s}r}^2$$

$$I_{KZ1} = \left( \frac{\delta}{\delta_{KZ}} - 1 \right) I_R = I_R$$

Dla koła zamachowego na wale silnika:

$$\delta I_R i^2 \omega_{2\acute{s}r}^2 = \delta_{KZ} I_R \omega_{2\acute{s}r}^2 + \delta_{KZ} I_{KZ2} \omega_{1\acute{s}r}^2$$

$$I_{KZ2} = \left( \frac{\delta}{\delta_{KZ}} - 1 \right) I_R i^2 = 0,04 I_R$$

# Koło zamachowe

Moment bezwładności koła zamachowego zmniejsza:

- montaż na najszybciej obracającym się wale maszyny
- montaż koła na dodatkowym wale, którego prędkość zwiększamy z użyciem przekładni

# Podstawy automatyki

# Podstawowe pojęcia automatyki

Automatyka – dyscyplina naukowa z dziedziny nauk inżynieryjno-technicznych (wymieniana razem z elektroniką i elektrotechniką) zajmująca się zagadnieniami sterowania procesami bez stałego nadzoru człowieka

Sterowanie – wpływanie na obiekt lub proces w celu osiągnięcia jego określonego zachowania

automatyka  $\neq$  automatyzacja

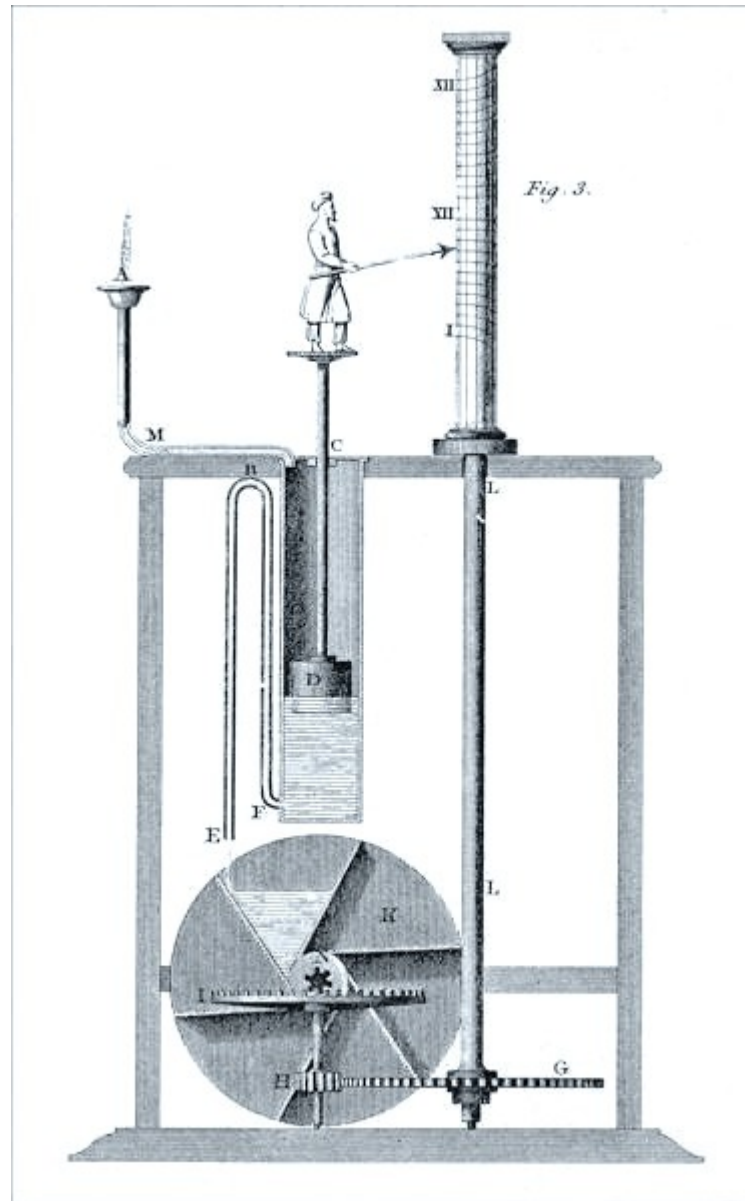
Teoria sterowania – gałąź matematyki i cybernetyki zajmująca się analizą i modelowaniem matematycznym układów i procesów traktowanych jako układy dynamiczne ze sprzężeniem zwrotnym.

# Historia automatyki

Starożytna Grecja, Egipt, Państwo Arabskie

Klepsydra Ktesibiosa  
(3w. p.n.e.)

*Źródło-wikipedia: Abraham Rees (1819) "Clepsydra" in Cyclopædia: or, a New Universal Dictionary of Arts and Sciences The image is the JPEG reproduction published 2007-02-01 by the Horological Foundation.*



- układy utrzymywania poziomu płynów
- układy automatycznego otwierania drzwi

# Historia automatyki

## XVII-XVIII

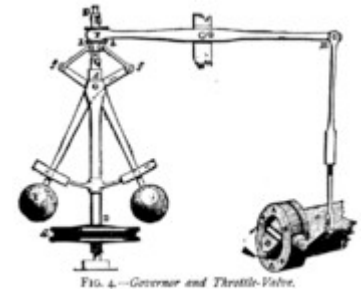
Regulacja temperatury pieców i kotłów  
regulacja ciśnienia

## XVIII-XIX

regulacja przepływu w dystrybucji wody i silnikach parowych  
regulacja prędkości i siły w młynach wiatrakowych  
regulator Watta dla silników parowych

## XIX-XX

Transformata Laplace'a i Z-transformata  
Lapunow – analiza stabilności  
Routh – analiza stabilności  
Hurwitz – analiza stabilności  
Nyquist – analiza stabilności i częstościowa  
Bode, Nichols – analiza w dziedzinie częstości  
Evans – linia pierwiastkowa  
Sperry, Minorsky – PID



# Teoria sterowania

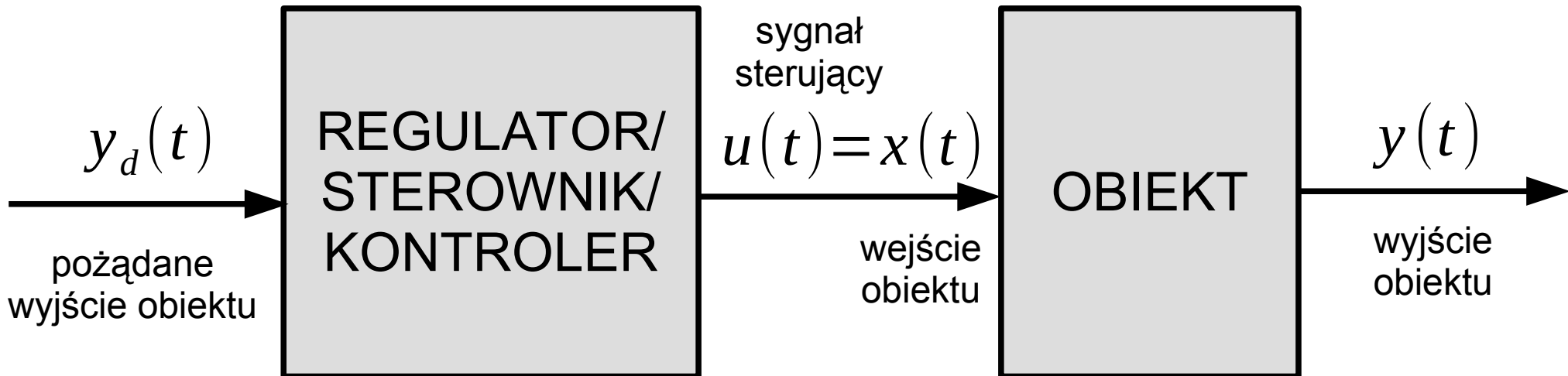
<b>Klasyczna teoria sterowania</b>	
układy o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO)	
układy liniowe	
układy niezależne od czasu	
opis za pomocą transmitancji	
analiza w dziedzinie czasu i częstości	
zainteresowanie odpowiedzią układu	

# Teoria sterowania

<b>Klasyczna teoria sterowania</b>	<b>Współczesna teoria sterowania (od około 1950)</b>
układy o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO)	układy o wielu wejściach i wyjściach
układy liniowe	często układy nieliniowe
układy niezależne od czasu	układy zależne od czasu
opis za pomocą transmitancji	opis równaniami stanu
analiza w dziedzinie czasu i częstości	analiza w dziedzinie czasu
zainteresowanie odpowiedzią układu	zainteresowanie stanem układu



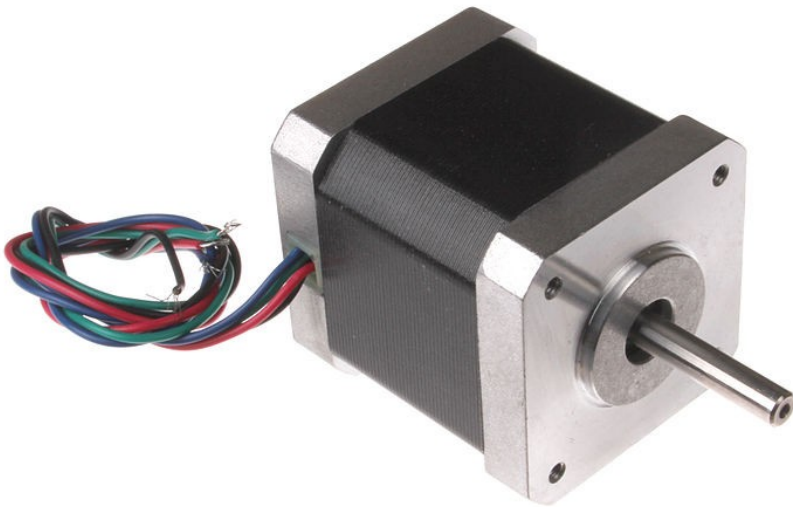
# Sterowanie w otwartej pętli



# Sterowanie w otwartej pętli

## Zastosowania

silniki krokowe



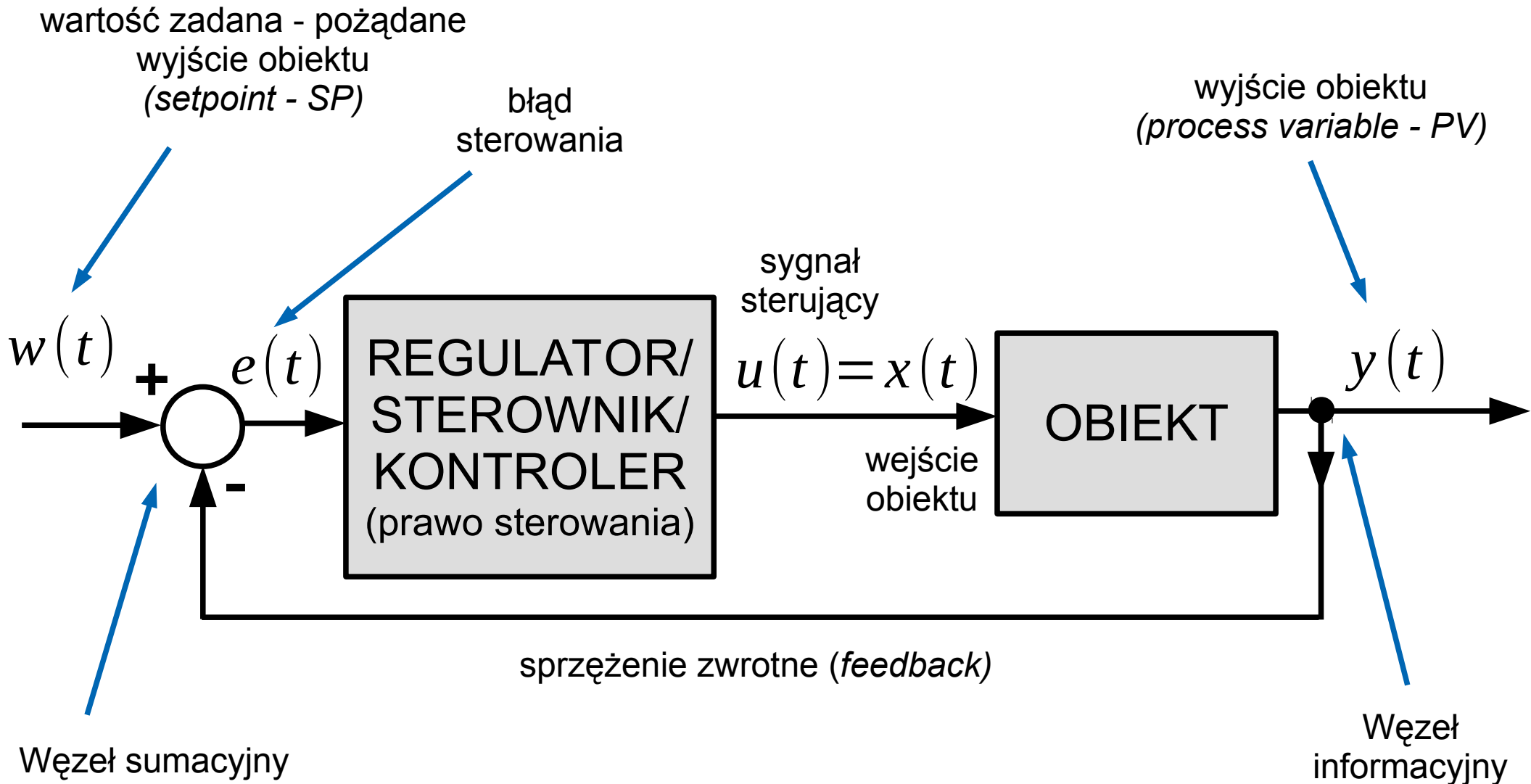
źródło: [wikimedia.org](http://wikimedia.org); author: oomlout

platformy mobilne  
(płaskie podłoże, brak poślizgu)



źródło: <http://www.robotliving.com>

# Sterowanie w zamkniętej pętli



# CELE STEROWANIA

Ograniczenie zakresu wartości błędu

Minimalizacja zmian błędu

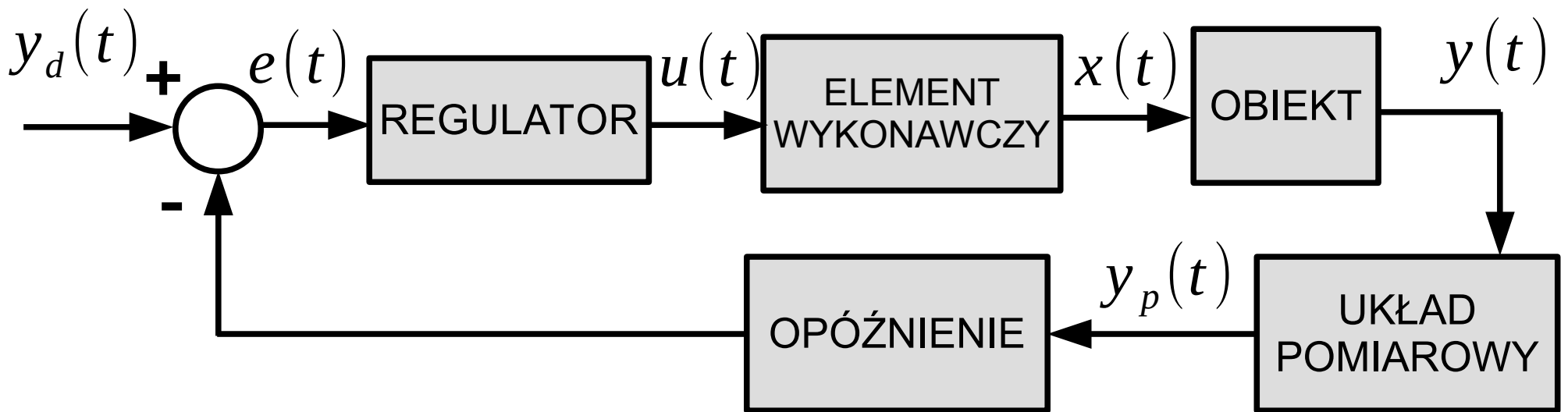
Dążenie do zerowego błędu

# Układy regulacji

Układ regulacji stałowartościowej – posiada stałą wartość zadaną

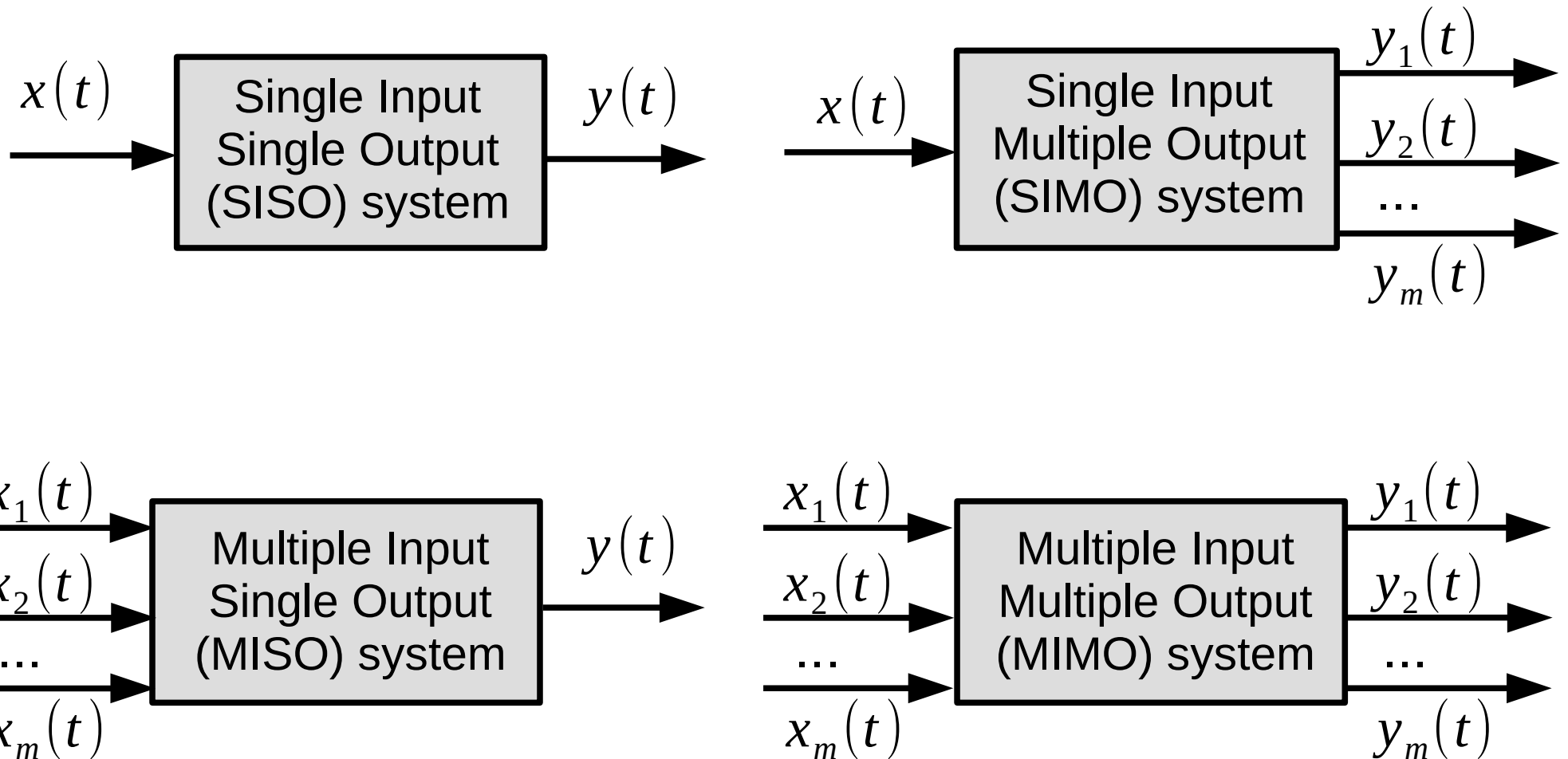
Układ regulacji nadążnej (śledzącej, *tracking*) – wartość zadaną jest zmienną funkcją o nieustalonym z góry przebiegu

# Sterowanie w zamkniętej pętli – realizacja



W dalszej części wykładu analizować będziemy obiekty liniowe, niezależne od czasu, o jednym wejściu i jednym wyjściu, dla sygnałów ciągłych.

# Liczba wejść i wyjść obiektu automatyki





# Układy liniowe niezależne od czasu (Linear time-invariant LTI)

## Układ liniowy

$x(t)$  - wejście,  $y(t) = h(x(t))$  - wyjście

$h(\alpha x(t)) = \alpha h(x(t)) = \alpha y(t)$  skalowanie

$h(x_1(t) + x_2(t)) = h(x_1(t)) + h(x_2(t))$  superpozycja

# Układy liniowe niezależne od czasu (Linear time-invariant LTI)

## Układ niezależny od czasu

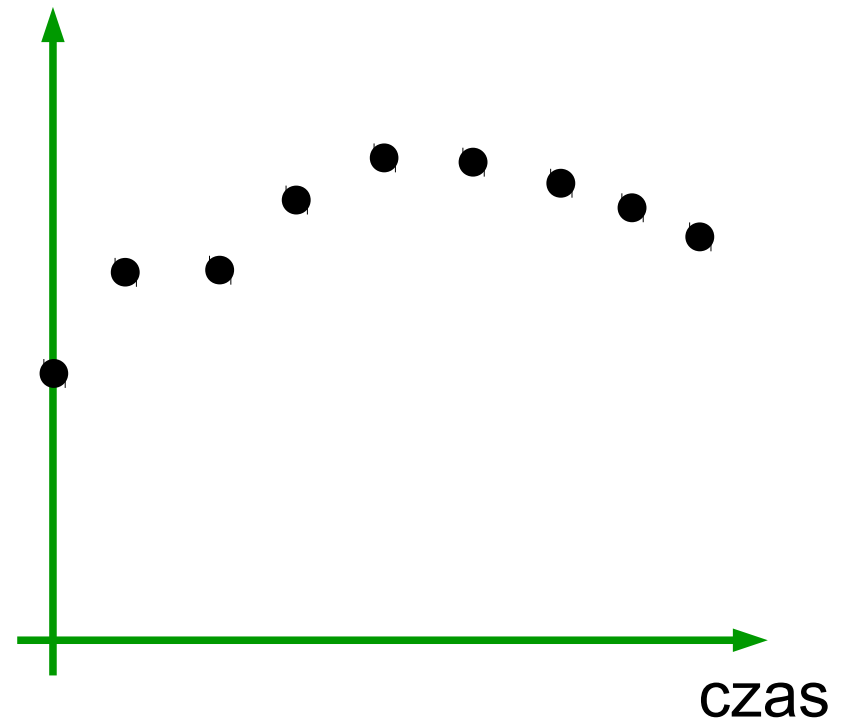
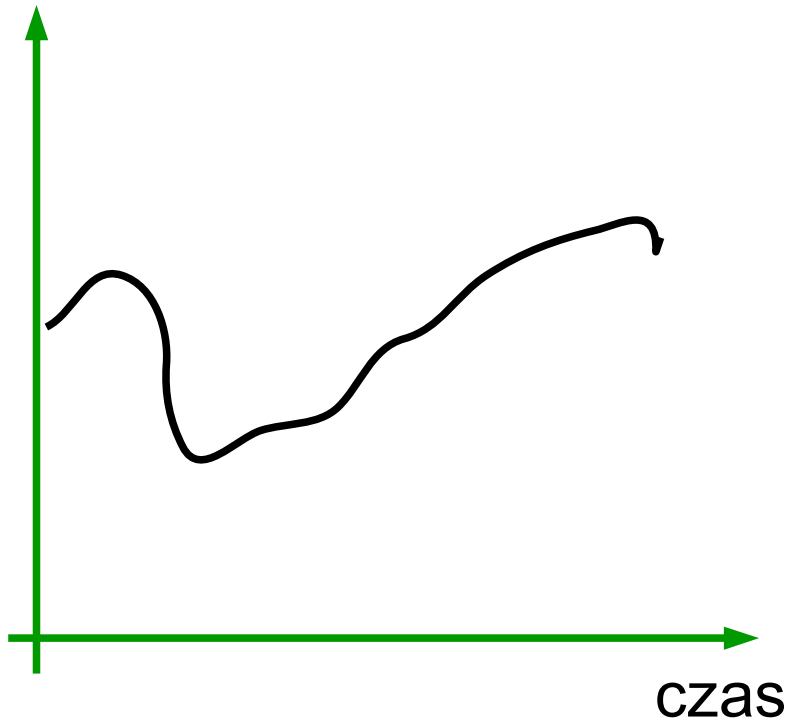
*wyście układu nie zależy wprost od czasu*

jeżeli  $y(t) = h(x(t))$  to  $y(t - \tau) = h(x(t - \tau))$

## Układ zależny od czasu

jeżeli  $y(t) = h(x(t))$  to  $y(t - \tau) \neq h(x(t - \tau))$

# Sygnały ciągłe i dyskretne



# Modelowanie matematyczne

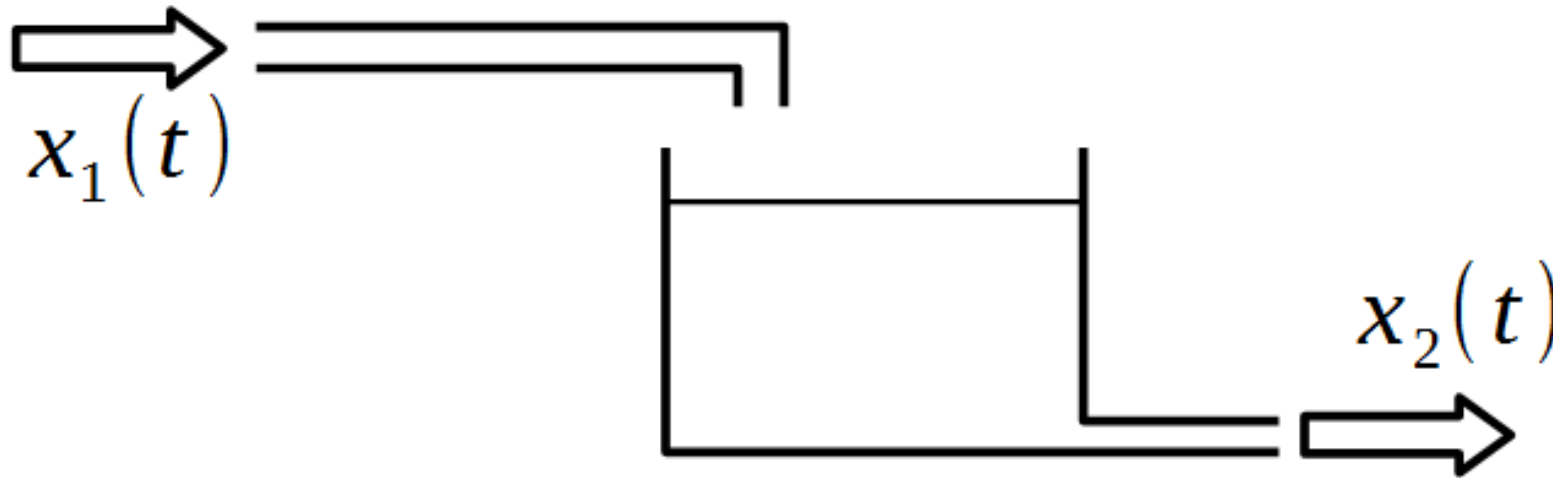
Matematyczny opis procesu lub obiektu pomaga opracować układ sterowania bez przeprowadzania doświadczeń.

Model matematyczny może mieć postać:

- równania różniczkowego zwyczajnego
- równania różniczkowego cząstkowego
- równania całkowego
- równania rekurencyjnego
- tabeli danych
- reprezentacji stochastycznej
- sieci logicznej
- sieci neuronowej
- kombinacji powyższych

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 1 – zbiornik prostopadłościenny



$x_1(t) [m^3/s]$  - dopływ cieczy

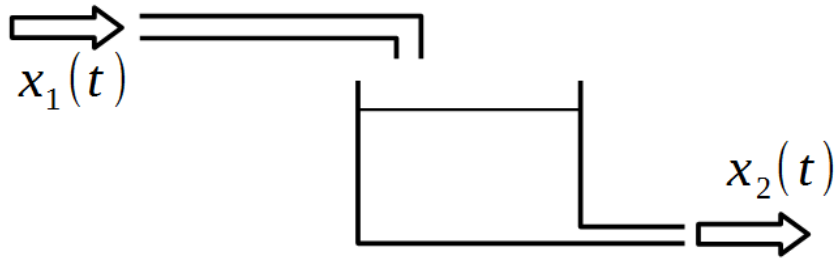
$x_2(t) [m^3/s]$  - odpływ cieczy

$v(t) [m^3]$  - objętość cieczy w zbiorniku

Zadanie: Stworzyć model matematyczny opisujący relację dopływu, odpływu i objętości cieczy.

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 1 – zbiornik prostopadłościenny



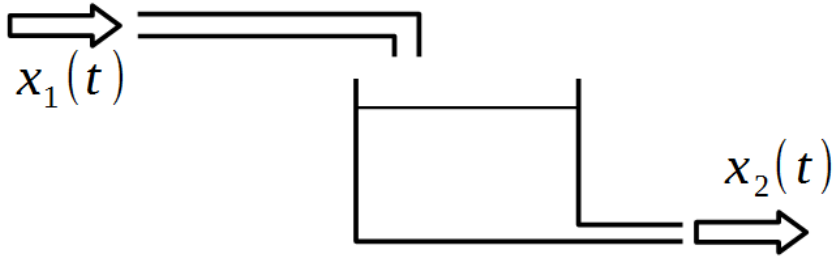
$x_1(t) [m^3/s]$  - dopływ cieczy

$x_2(t) [m^3/s]$  - odpływ cieczy

$v(t) [m^3]$  - objętość cieczy w zbiorniku

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 1 – zbiornik prostopadłościenny



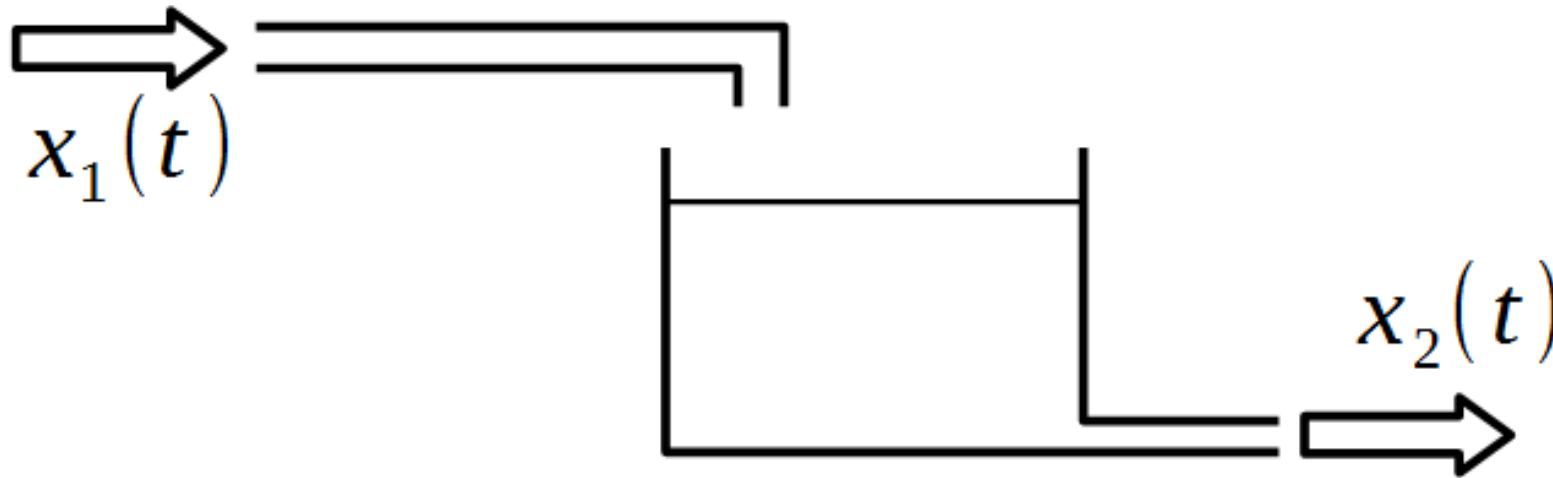
$x_1(t) [m^3/s]$  - dopływ cieczy

$x_2(t) [m^3/s]$  - odpływ cieczy

$v(t) [m^3]$  - objętość cieczy w zbiorniku

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 1 – zbiornik prostopadłościenny



$x_1(t)$  [ $m^3/s$ ] - dopływ cieczy

$x_2(t)$  [ $m^3/s$ ] - odpływ cieczy

$v(t)$  [ $m^3$ ] - objętość cieczy w zbiorniku

Zadanie: Stworzyć model matematyczny opisujący relację dopływu, odpływu i objętości cieczy.

Odpowiedź:

$$t_2 = t_1 + \Delta$$

$$v(t_2) \approx v(t_1) + \Delta x_1(t_2) - \Delta x_2(t_2)$$

$$\frac{v(t_2) - v(t_1)}{\Delta} \approx x_1(t_2) - x_2(t_2)$$

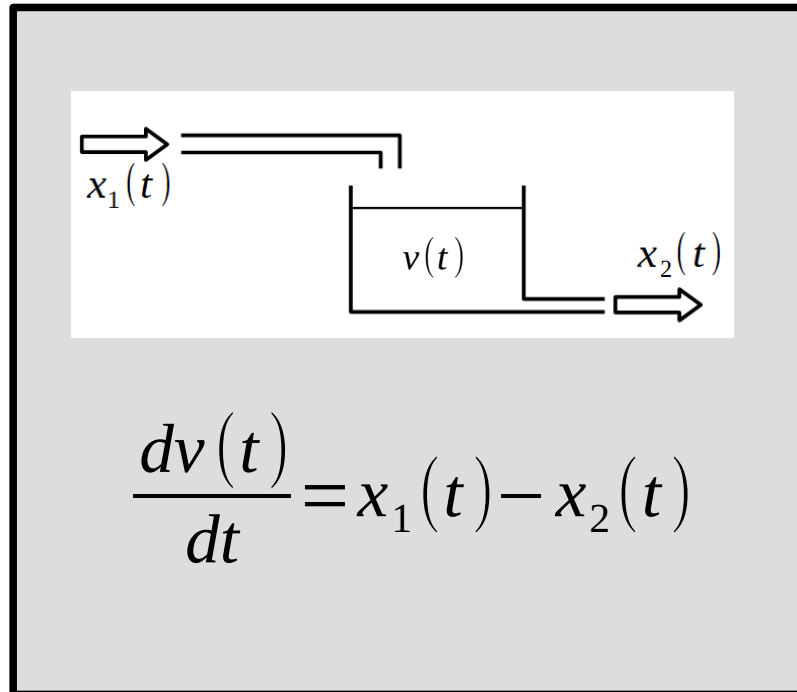
$$\frac{dv(t)}{dt} = x_1(t) - x_2(t)$$



# Modelowanie matematyczne

## Przykład 1

wejścia?

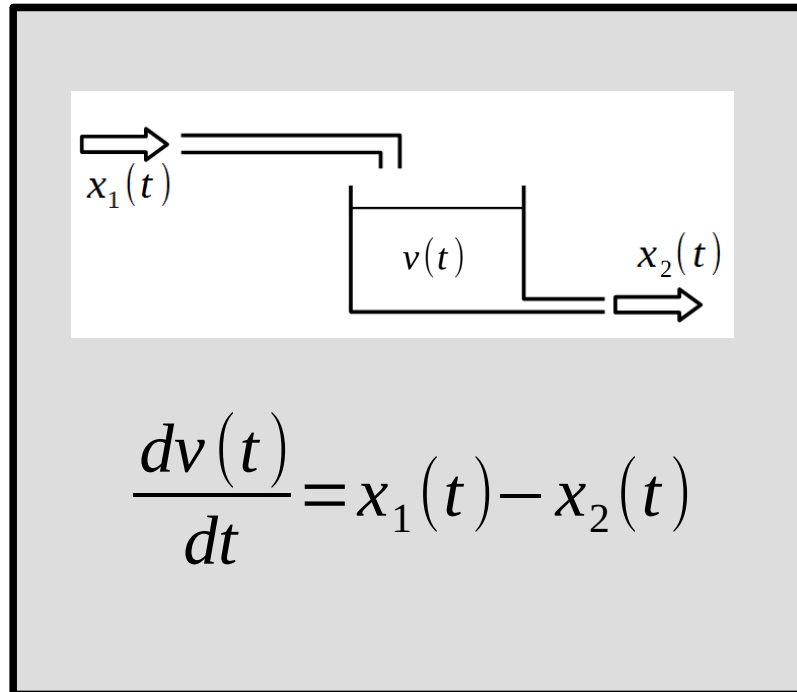


wyjścia?

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 1

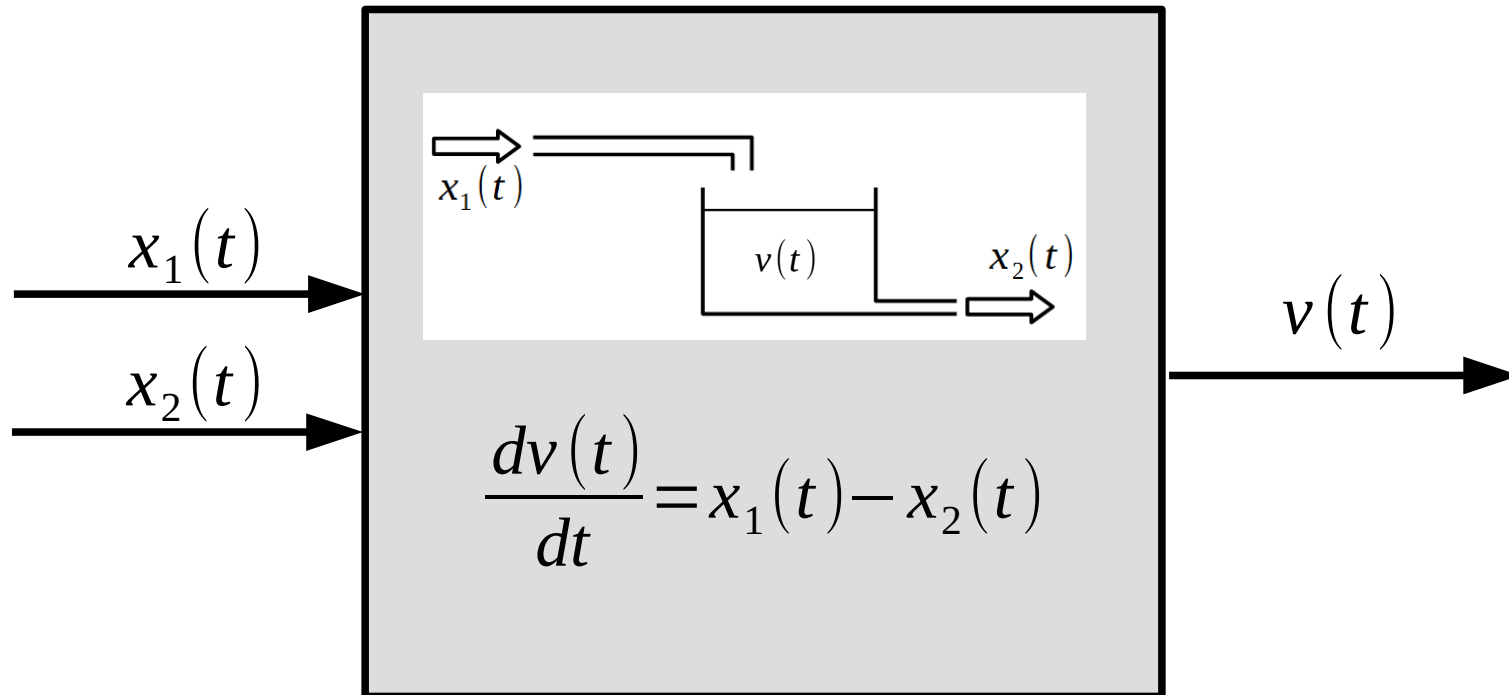
wejścia?



wyjścia?

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 1



# Modelowanie matematyczne

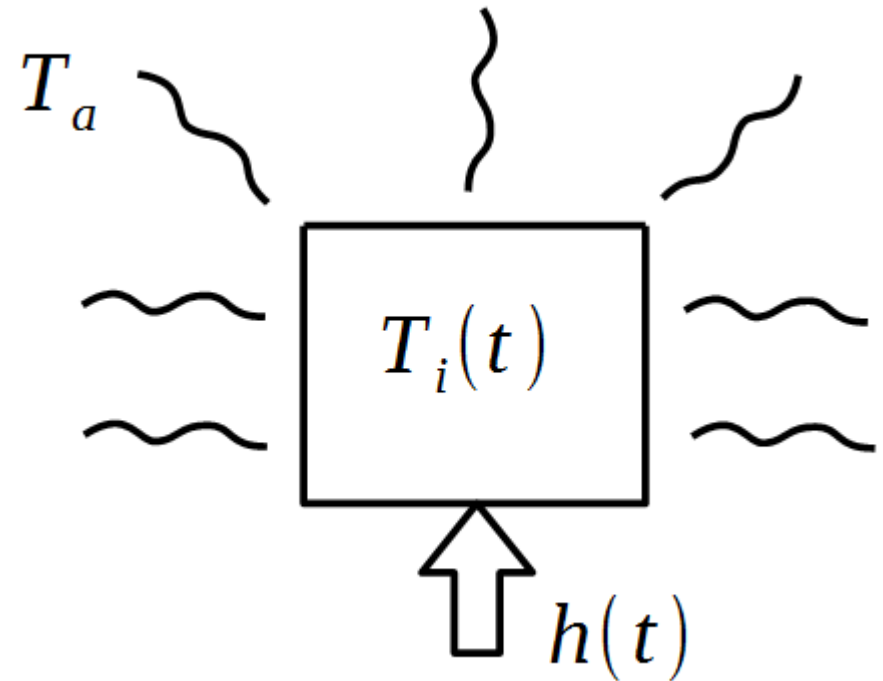
## Przykład 2

$h(t)[W]$  - moc grzałki

$T_a(t)[K]$  - temperatura otoczenia

$T_i(t)[K]$  - temperatura obiektu

Zadanie: opisać relację między mocą grzałki (wejściem) a temperaturą obiektu (wyjściem).  
Założyć straty energii tylko przez konwekcję.



# Modelowanie matematyczne

## Przykład 2

Odpowiedź:

zmiana ciepła = ogrzewanie – konwekcja

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 2

Odpowiedź:

zmiana ciepła = ogrzewanie – konwekcja

$$\frac{dQ(t)}{dt} = Q_H - Q_L$$

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 2

Odpowiedź:

zmiana ciepła = ogrzewanie – konwekcja

$$\frac{dQ(t)}{dt} = Q_H - Q_L$$

$Q[J] = c_p m T_i$  - ciepło zgromadzone w obiekcie

$c_p[J/kg K]$  - ciepło właściwe,  $m[kg]$  - masa obiektu

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 2

Odpowiedź:

zmiana ciepła = ogrzewanie – konwekcja

$$\frac{dQ(t)}{dt} = Q_H - Q_L$$

$Q[J] = c_p m T_i$  - ciepło zgromadzone w obiekcie

$c_p[J/kg K]$  - ciepło właściwe,  $m[kg]$  - masa obiektu

$Q_H[W] = h(t)$  - wzrost ciepła przez ogrzewanie grzałką



# Modelowanie matematyczne

## Przykład 2

Odpowiedź:

zmiana ciepła = ogrzewanie – konwekcja

$$\frac{dQ(t)}{dt} = Q_H - Q_L$$

$Q [J] = c_p m T_i$  - ciepło zgromadzone w obiekcie

$c_p [J/kg K]$  - ciepło właściwe,  $m [kg]$  - masa obiektu

$Q_H [W] = h(t)$  - wzrost ciepła przez ogrzewanie grzałką

$Q_L [W] = \alpha (T_i - T_a)$  - straty ciepła przez konwekcję

$\alpha [W/K]$  - współczynnik konwekcji (z zał. stały)

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 2

$$c_p m \frac{dT_i(t)}{dt} = h(t) - \alpha (T_i(t) - T_a(t))$$

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 2

$$c_p m \frac{dT_i(t)}{dt} = h(t) - \alpha (T_i(t) - T_a(t))$$

$$c_p m \frac{dT_i(t)}{dt} + \alpha T_i(t) = h(t) - \alpha T_a(t)$$



# Modelowanie matematyczne

## Przykład 2

Pytanie: Czy i kiedy możemy przekształcić ten model na model o jednym wejściu i jednym wyjściu?

$$c_p m \frac{dT_i(t)}{dt} = h(t) - \alpha (T_i(t) - T_a(t))$$

# Modelowanie matematyczne

## Przykład 2

Pytanie: Czy i kiedy możemy przekształcić ten model na model o jednym wejściu i jednym wyjściu?

$$c_p m \frac{dT_i(t)}{dt} = h(t) - \alpha (T_i(t) - T_a(t))$$