Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Podstawy automatyki i teorii maszyn

semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 6

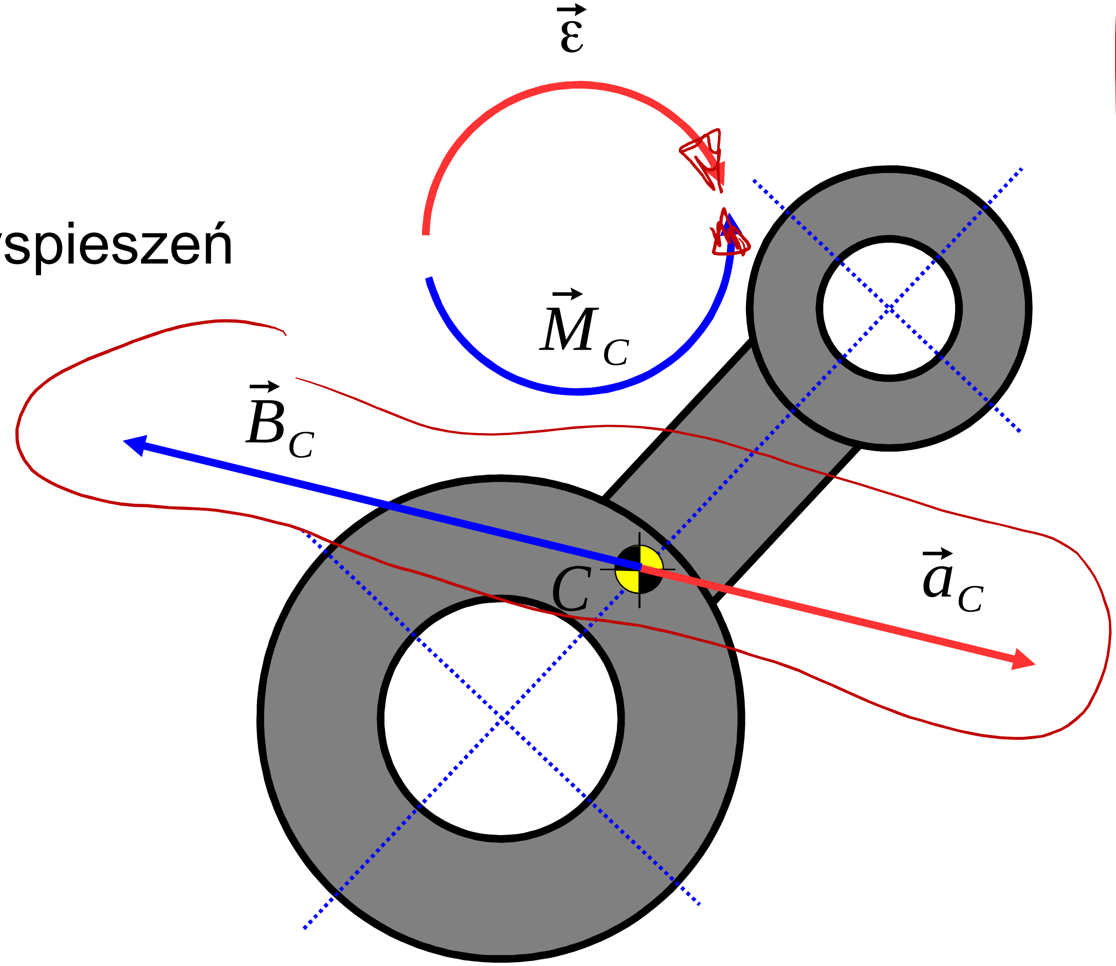
Dynamika mechanizmów płaskich.
Dynamika maszyn.
Redukcja mas i sił.
Równanie ruchu maszyny.

Dynamika mechanizmów

Siły i momenty sił bezwładności

Dane:

z planu przyspieszeń



siła bezwładności

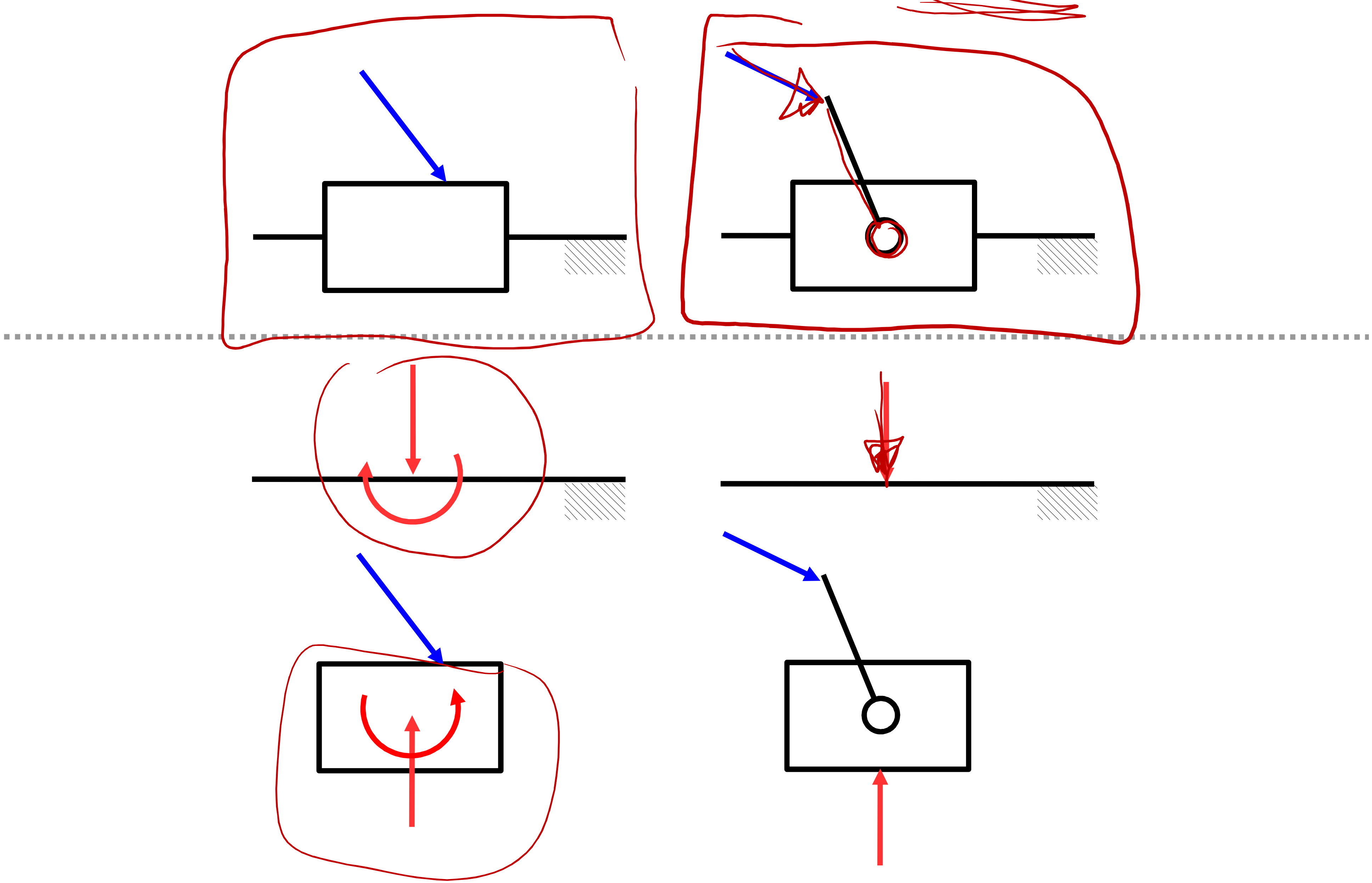
$$\vec{B}_C = -\, m\vec{a}_C$$

Moment od sił bezwładności

$$\vec{M}_C = -\, I_C\vec{\varepsilon}$$

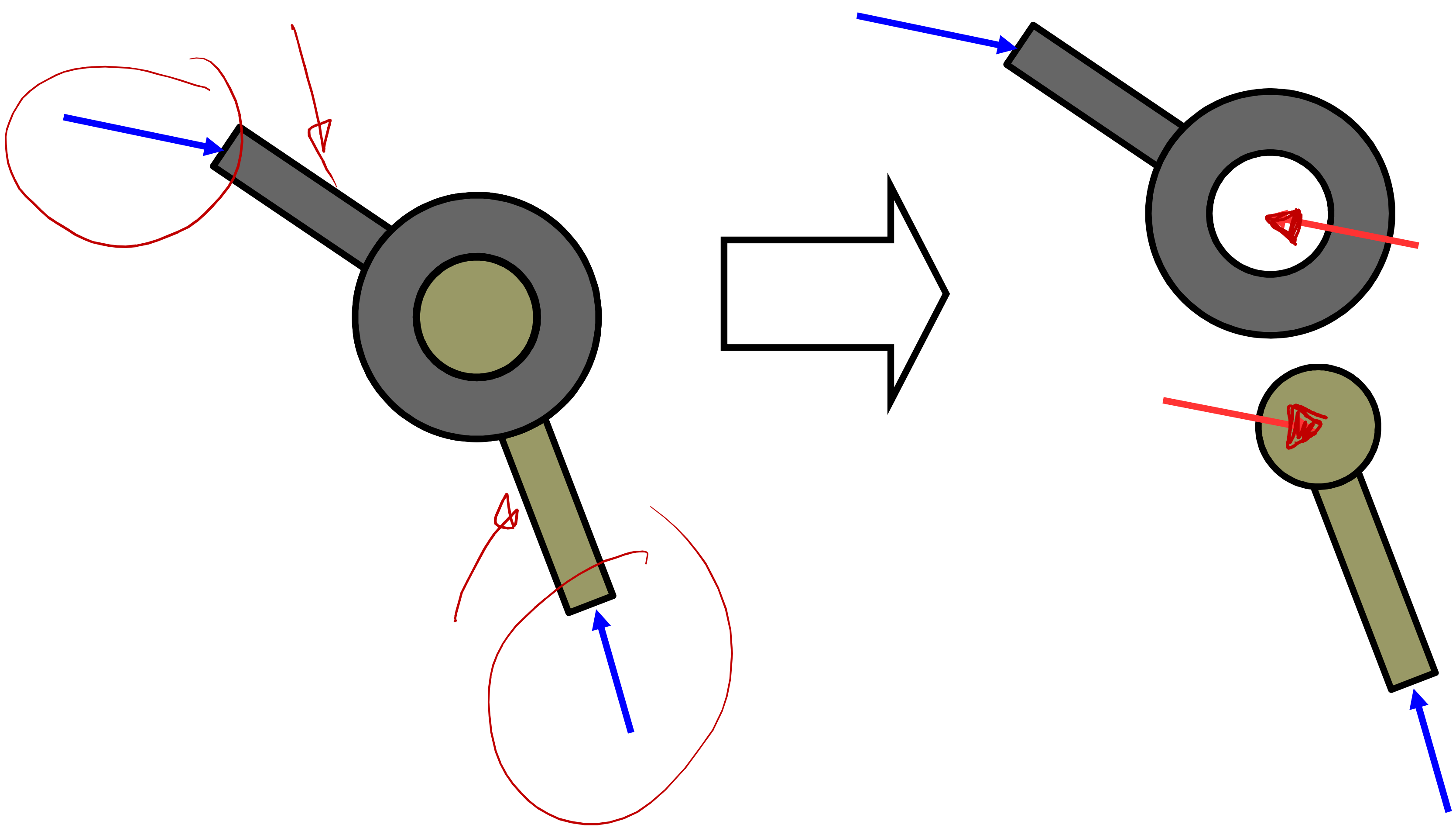
Dynamika mechanizmów

Reakcje w parach kinematycznych (bez tarcia)



Dynamika mechanizmów

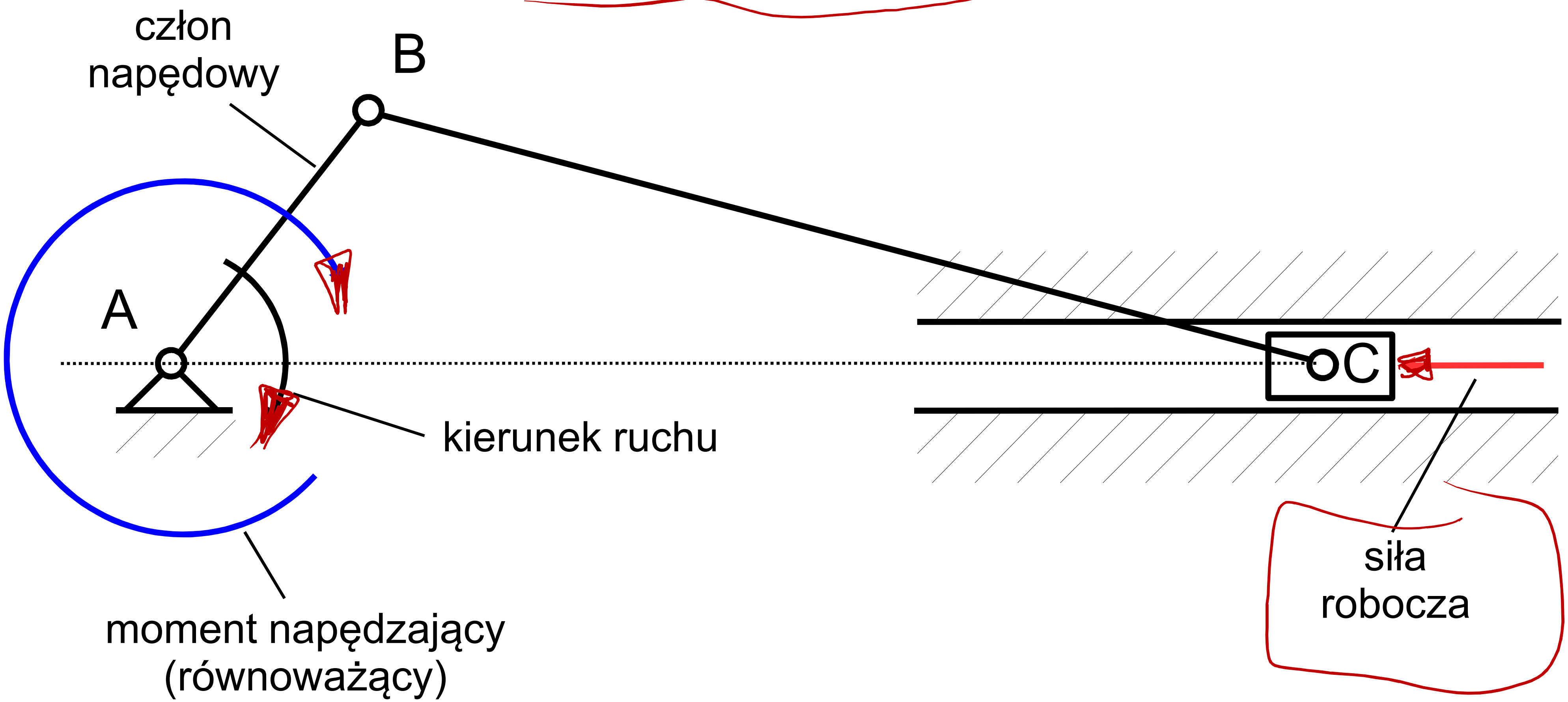
Reakcje w parach kinematycznych (bez tarcia)



Dynamika mechanizmów

Siły napędzające i robocze

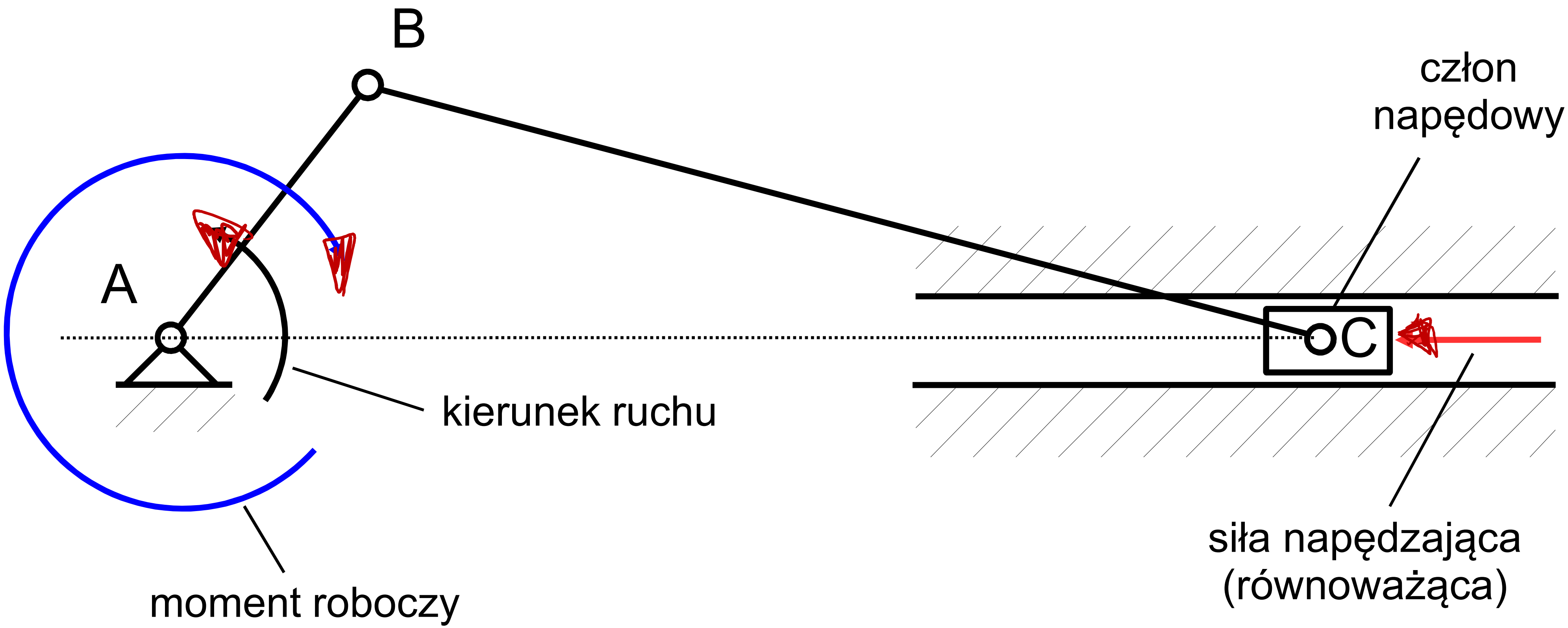
Przykład – sprężarka



Dynamika mechanizmów

Siły napędzające i robocze

Przykład – silnik



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – wyznaczenie sił i momentów sił działających na mechanizm wywołujących zadany ruch mechanizmu.

Drugie zadanie dynamiki – wyznaczenie ruchu mechanizmu pod wpływem sił i momentów zewnętrznych.

Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki

Wyznaczenie sił i momentów sił działających na mechanizm wywołujących zadany ruch mechanizmu – KINETOSTATYKA MECHANIZMÓW.

0. Zaprojektowanie mechanizmu do wykonywania konkretnego zadania. Ustalenie napędu i sprawdzenie zgodności z założeniami przebiegu przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń.

1. W oparciu o wyznaczone przyspieszenia wyznaczyć siły bezwładności działające na człony ruchome mechanizmu w wybranym położeniu mechanizmu.

2. Dokonać rozkładu mechanizmu na podukłady ujawniając reakcje w połączeniach.

3. Zapisać równania d'Alemberta dla podukładów mechanizmu (dla ruchu postępowego i obrotowego).

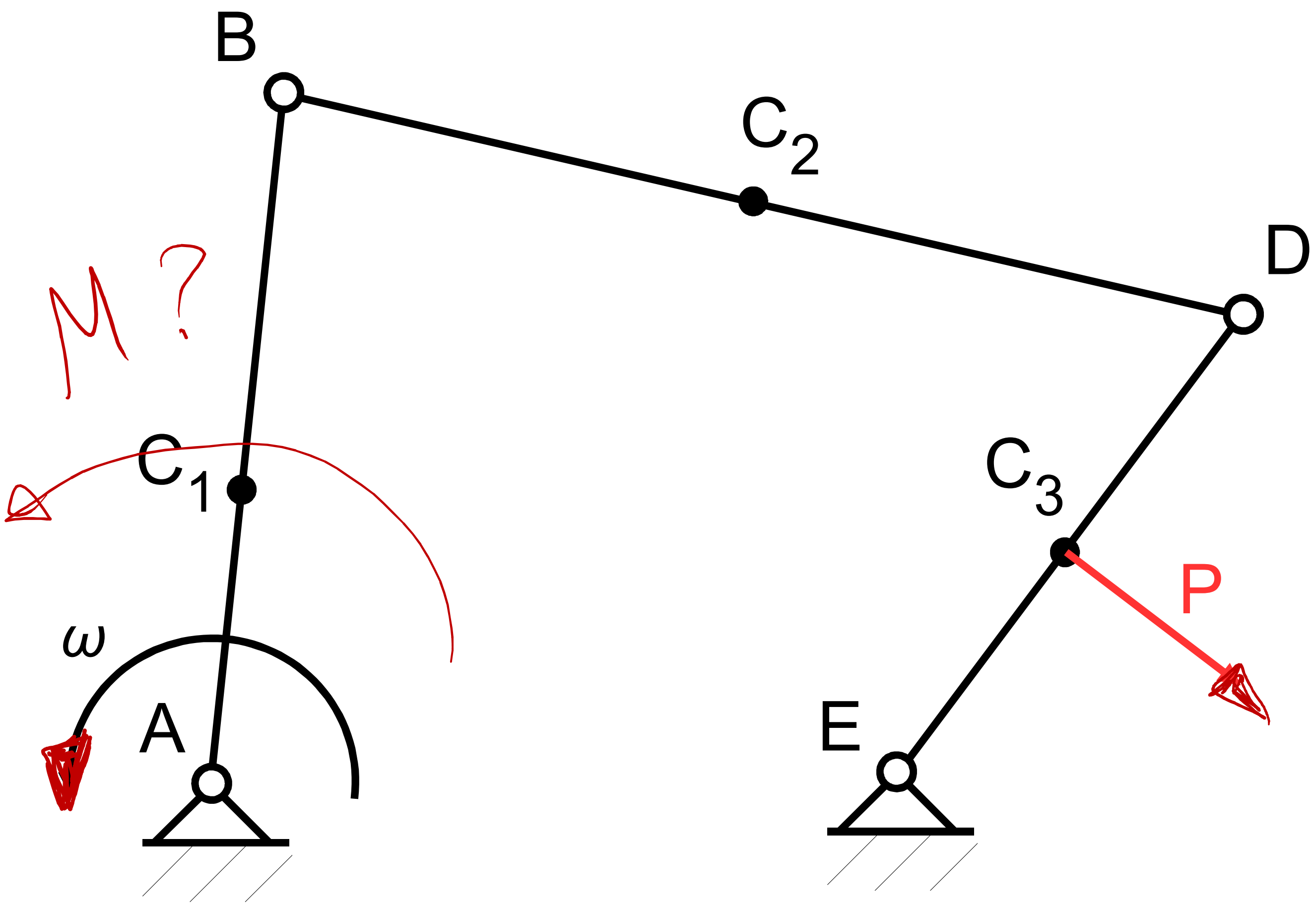
4. Rozwiązać powstałe równania metodą graficzną, analityczną lub mieszaną.

Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

Dane:
Geometria, masy, położenia środków mas i momenty bezwładności członów mechanizmu. Zadana stała prędkość kątowa członu napędowego ω oraz wektor siły roboczej P w danym położeniu mechanizmu.

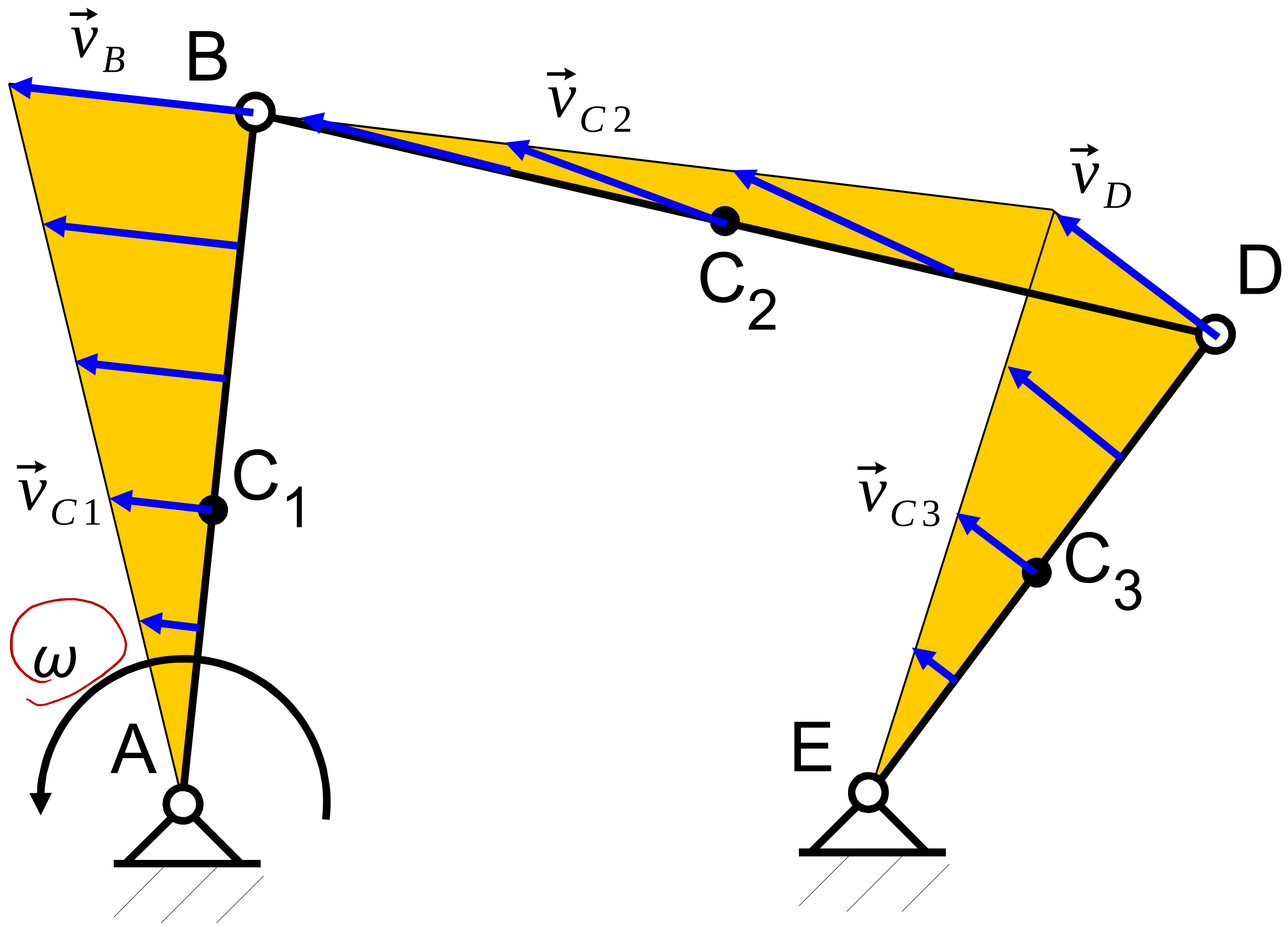
Szukane:
Moment napędowy i siły reakcji w połączeniach.



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

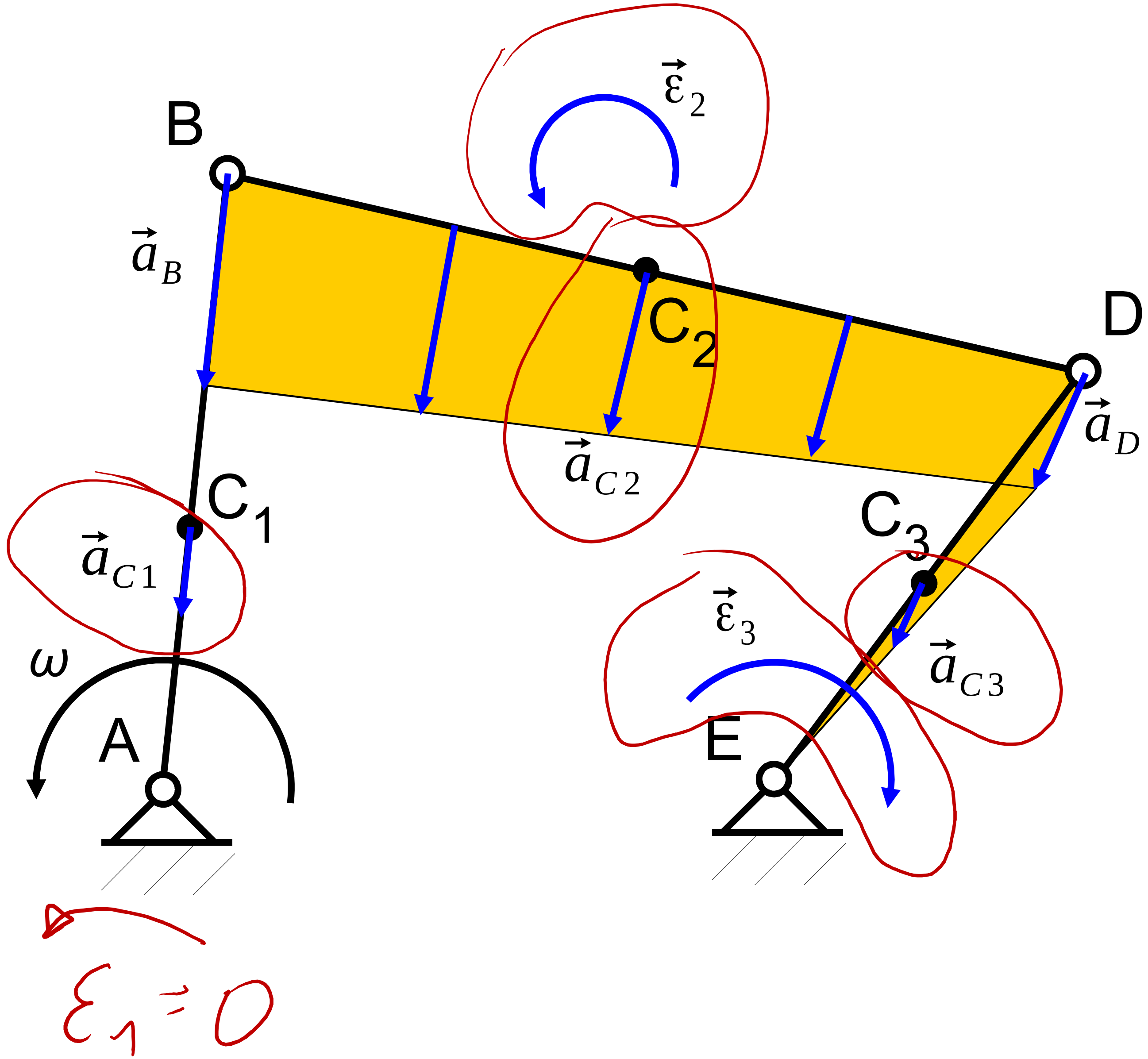
rozkład prędkości



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

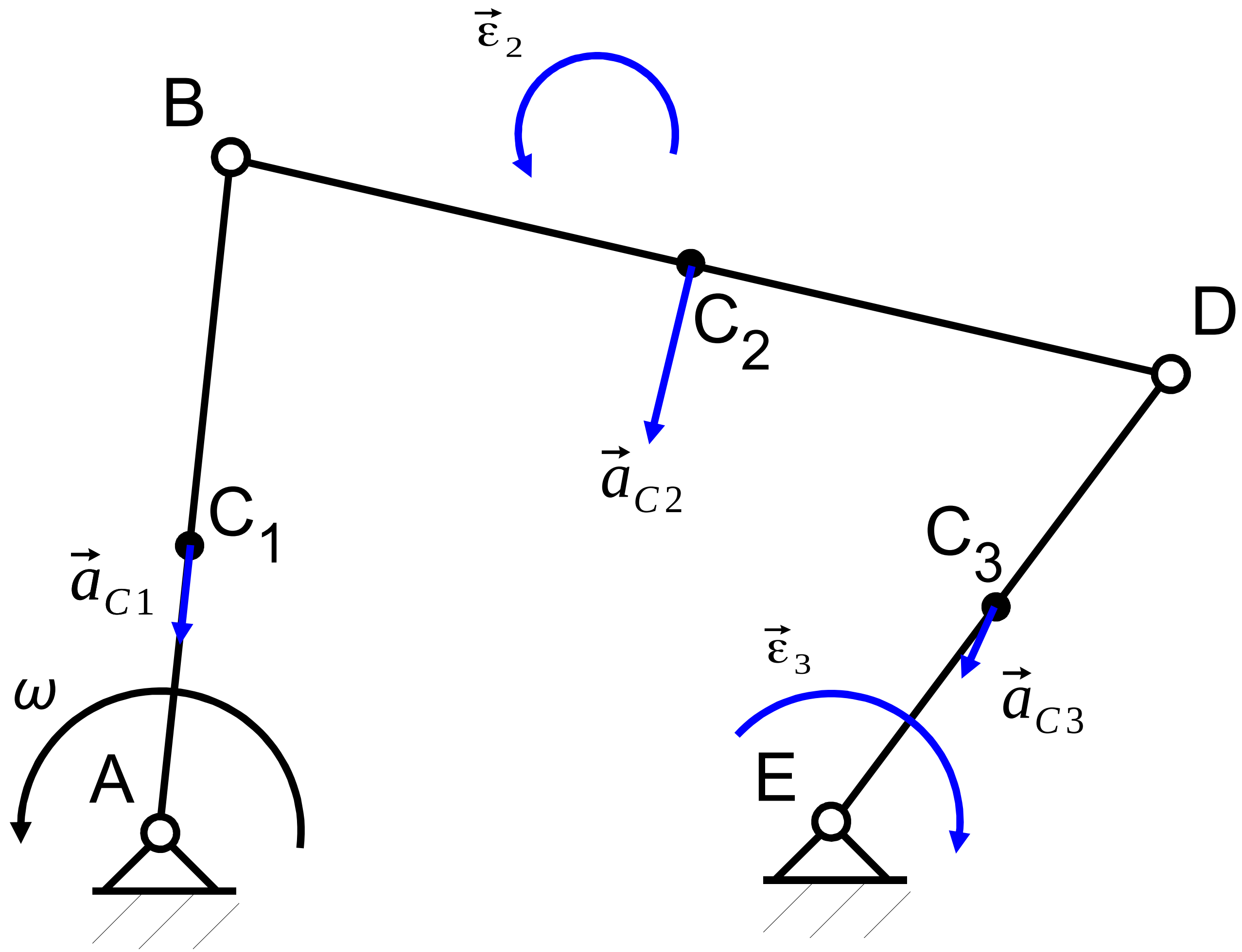
rozkład przyspieszeń



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

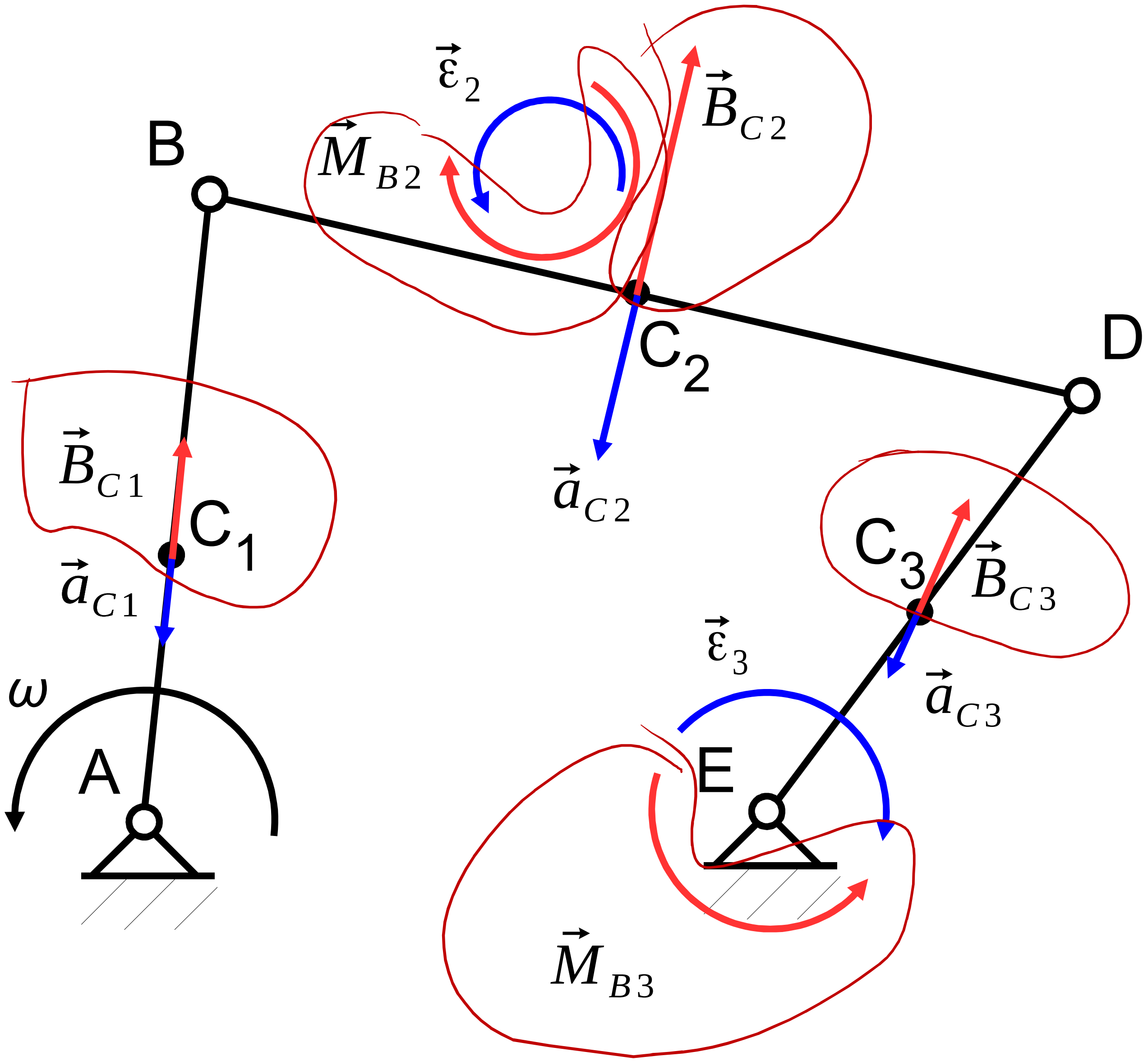
rozkład przyspieszeń



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

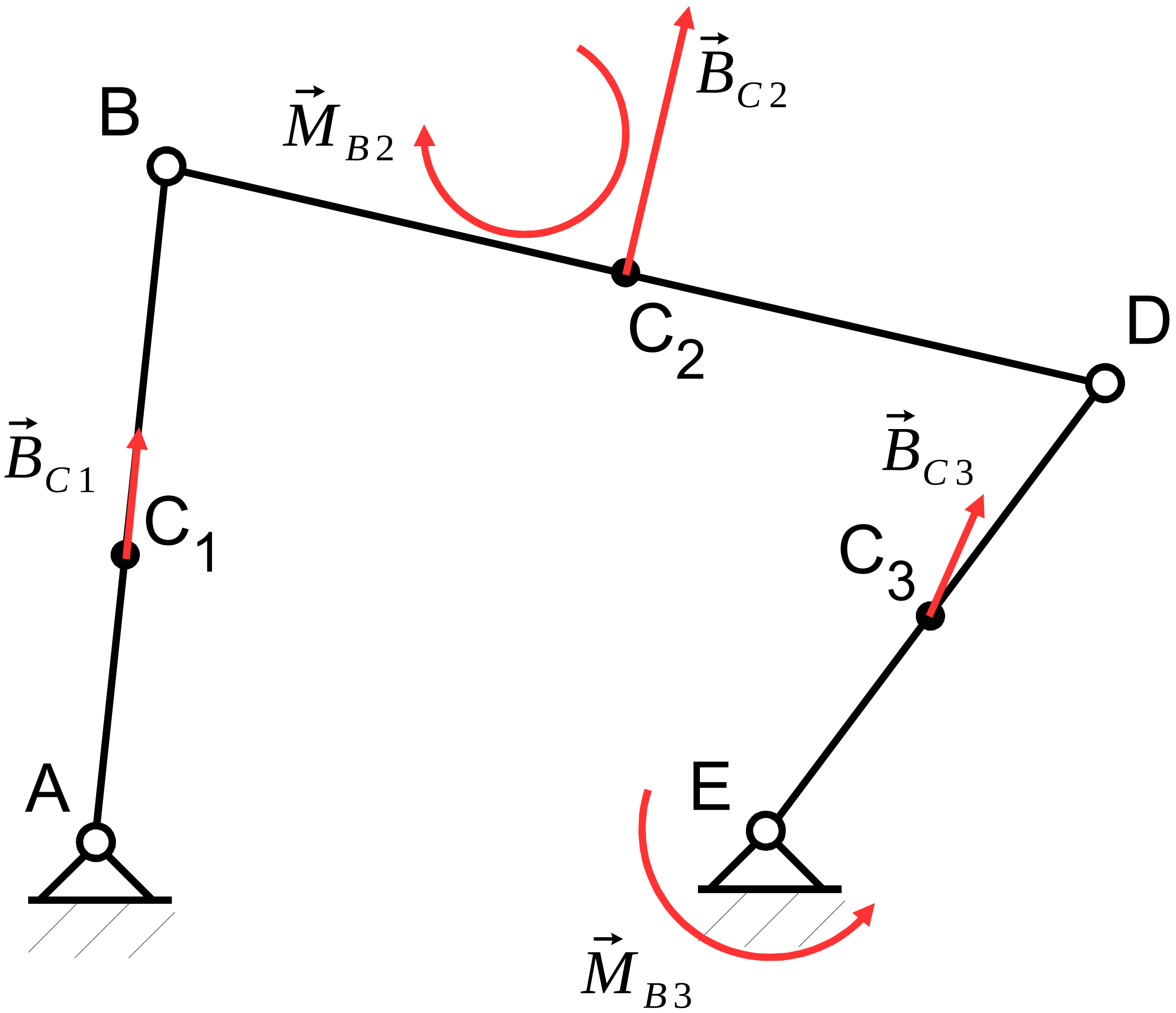
siły bezwładności



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

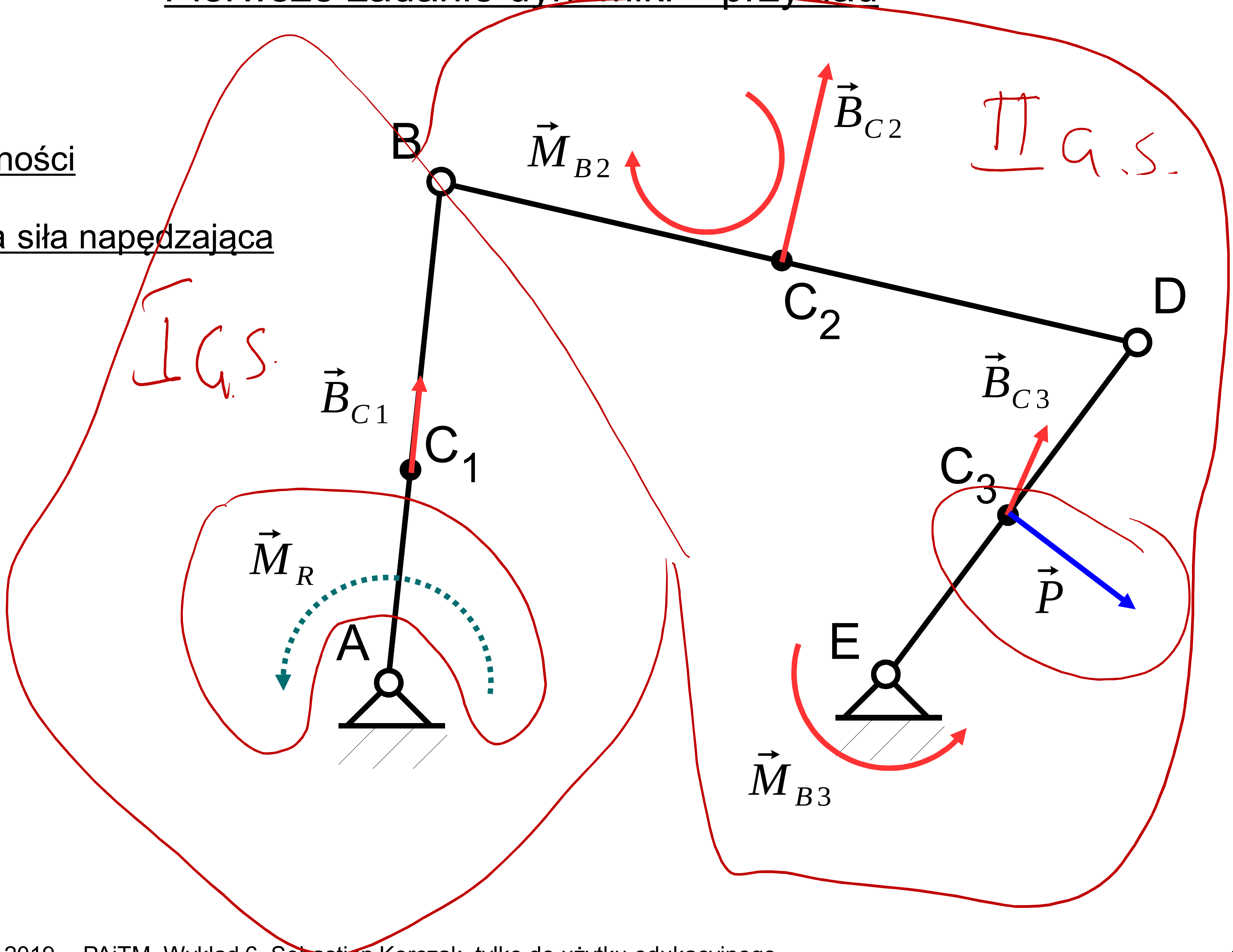
siły bezwładności



Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

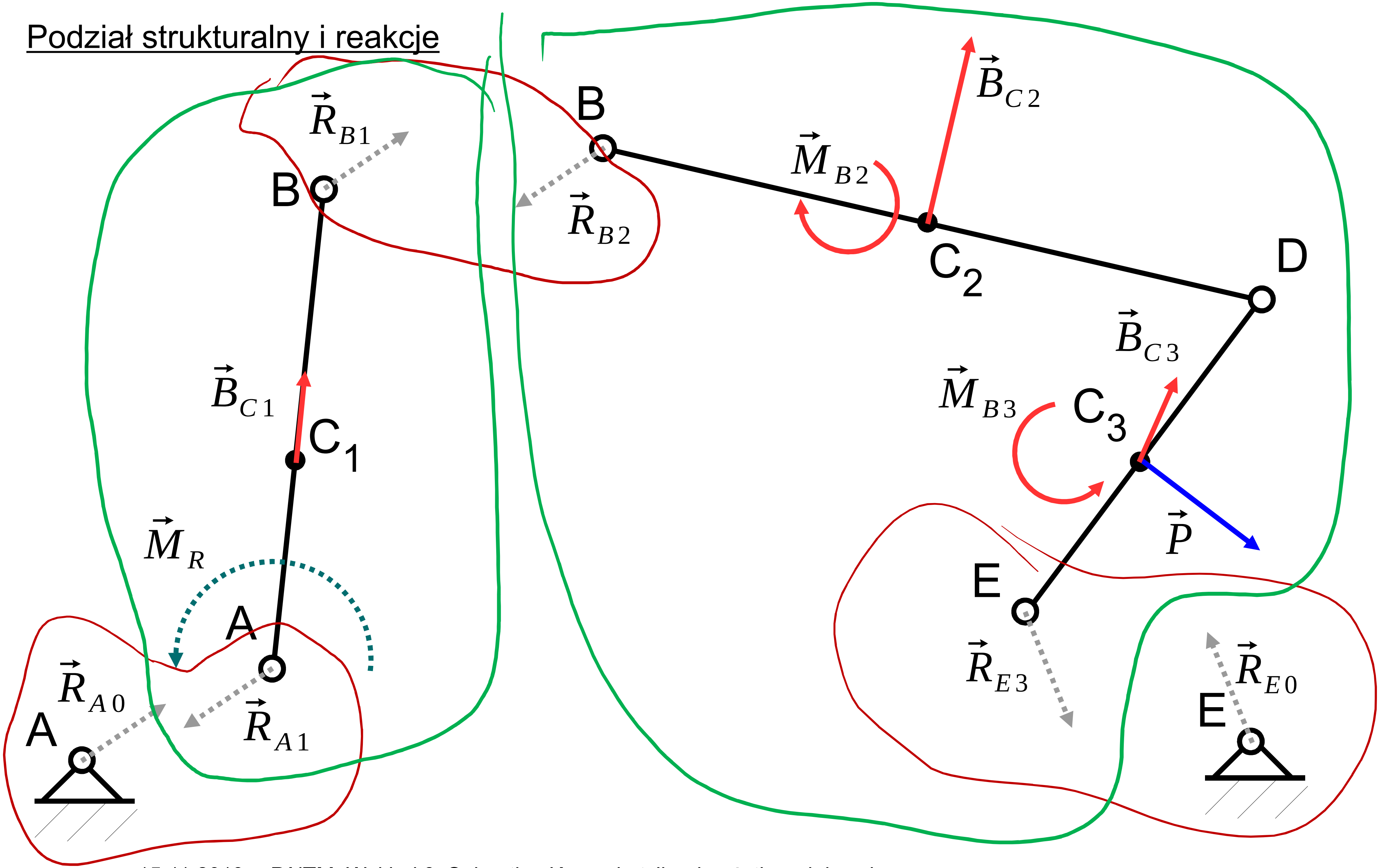
Siły bezwładności
Siła robocza
Poszukiwana siła napędzająca



Dynamika mechanizmów

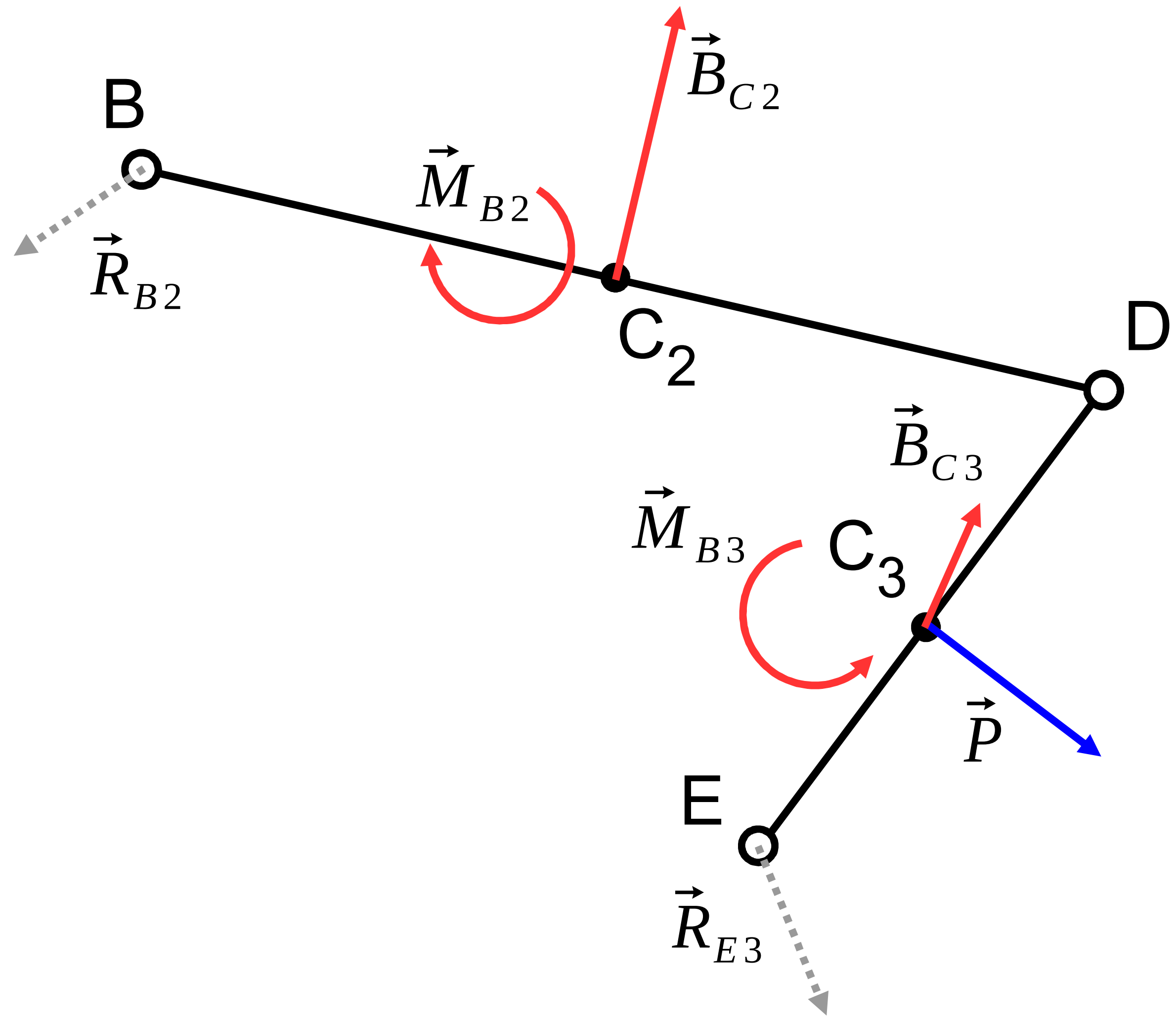
Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

Podział strukturalny i reakcje



Dynamika mechanizmów

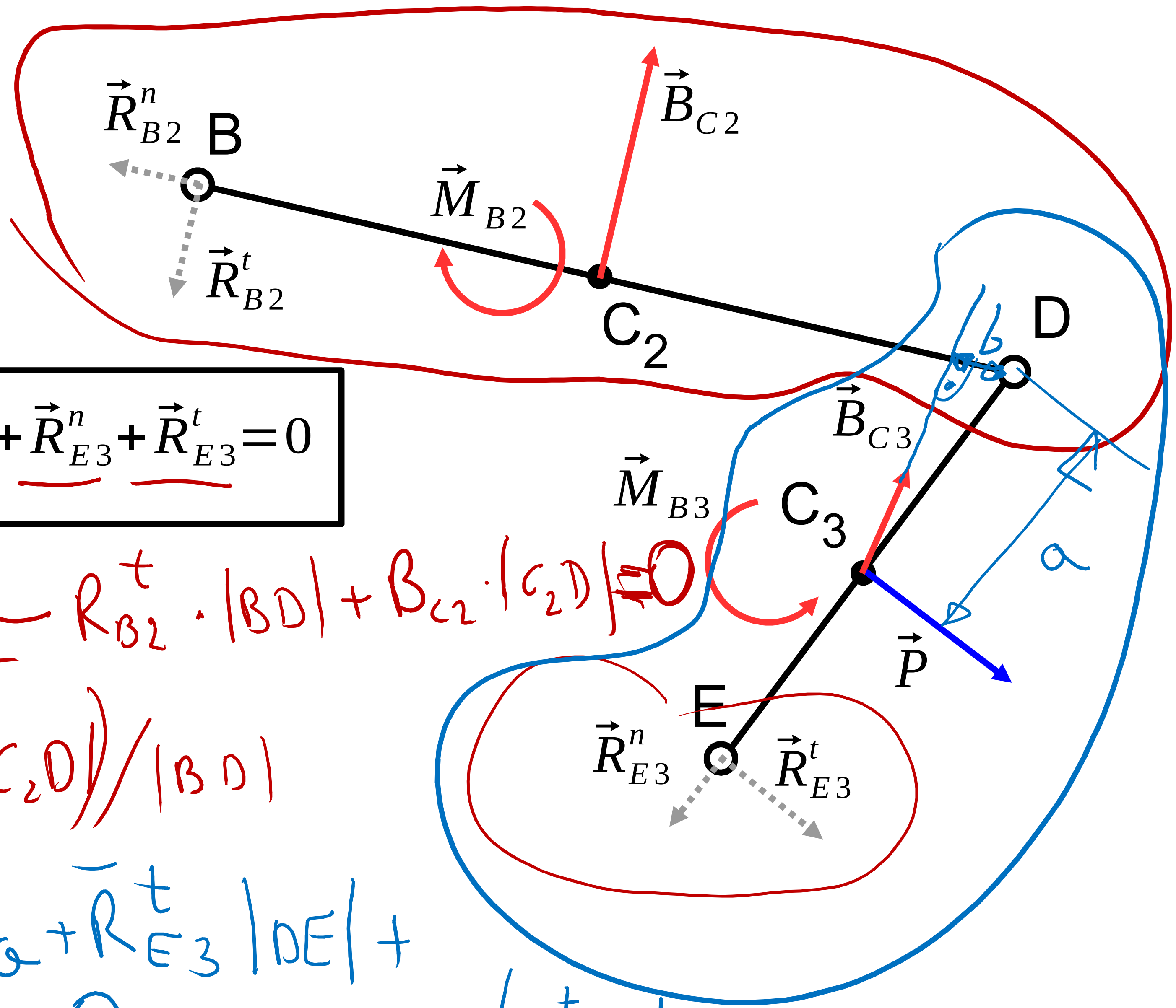
Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



$$\boxed{\underset{?}{\vec{R}_{B2}}+\vec{B}_{C2}+\vec{B}_{C3}+\vec{P}+\underset{?}{\vec{R}_{E3}}=0}$$

Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



$$\boxed{\vec{R}^n_{B2}+\vec{R}^t_{B2}+\vec{B}_{C2}+\vec{B}_{C3}+\vec{P}+\vec{R}^n_{E3}+\vec{R}^t_{E3}=0}$$

$\boxed{BD}$ $\sum_i M_{iD} = M_{B2} - R^t_{B2}\cdot|BD| + B_{C2}\cdot|C_2D| = 0$

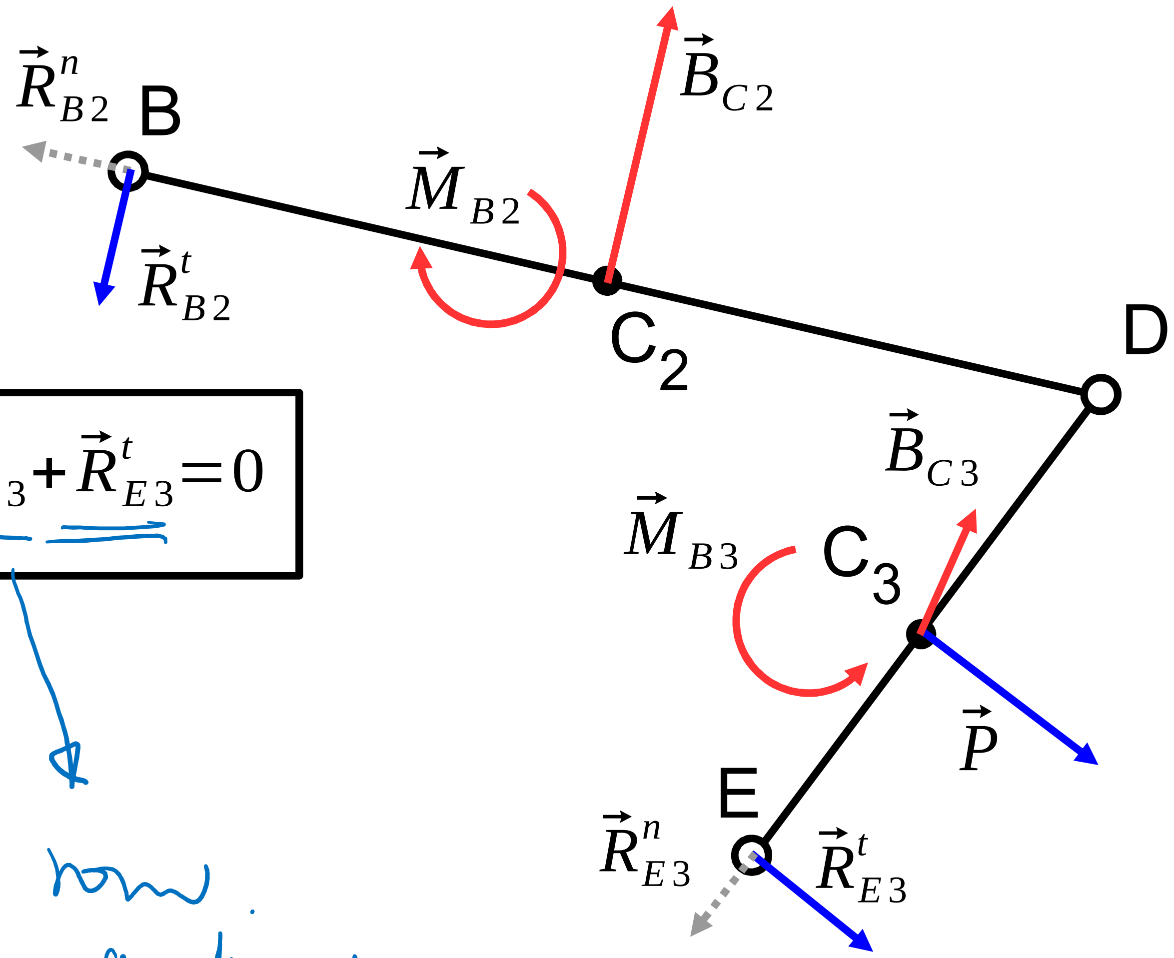
$|R^t_{B2}| = (M_{B2} + B_{C2}\cdot|C_2D|)/|BD|$

$\boxed{DE}$ $\sum_i M_{iD} = M_{B3} + P\cdot a + \bar{R}^t_{E3}|DE| +$

$- B_{C3}\cdot b = 0 \longrightarrow |R^t_{E3}| = \ldots$

Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



$$\boxed{\vec{R}^n_{B2}+\vec{R}^t_{B2}+\vec{B}_{C2}+\vec{B}_{C3}+\vec{P}+\vec{R}^n_{E3}+\vec{R}^t_{E3}=0}$$

człon BD: $\sum_i M_{iD}=0$

$\vec{R}^t_{B2}=\ldots$

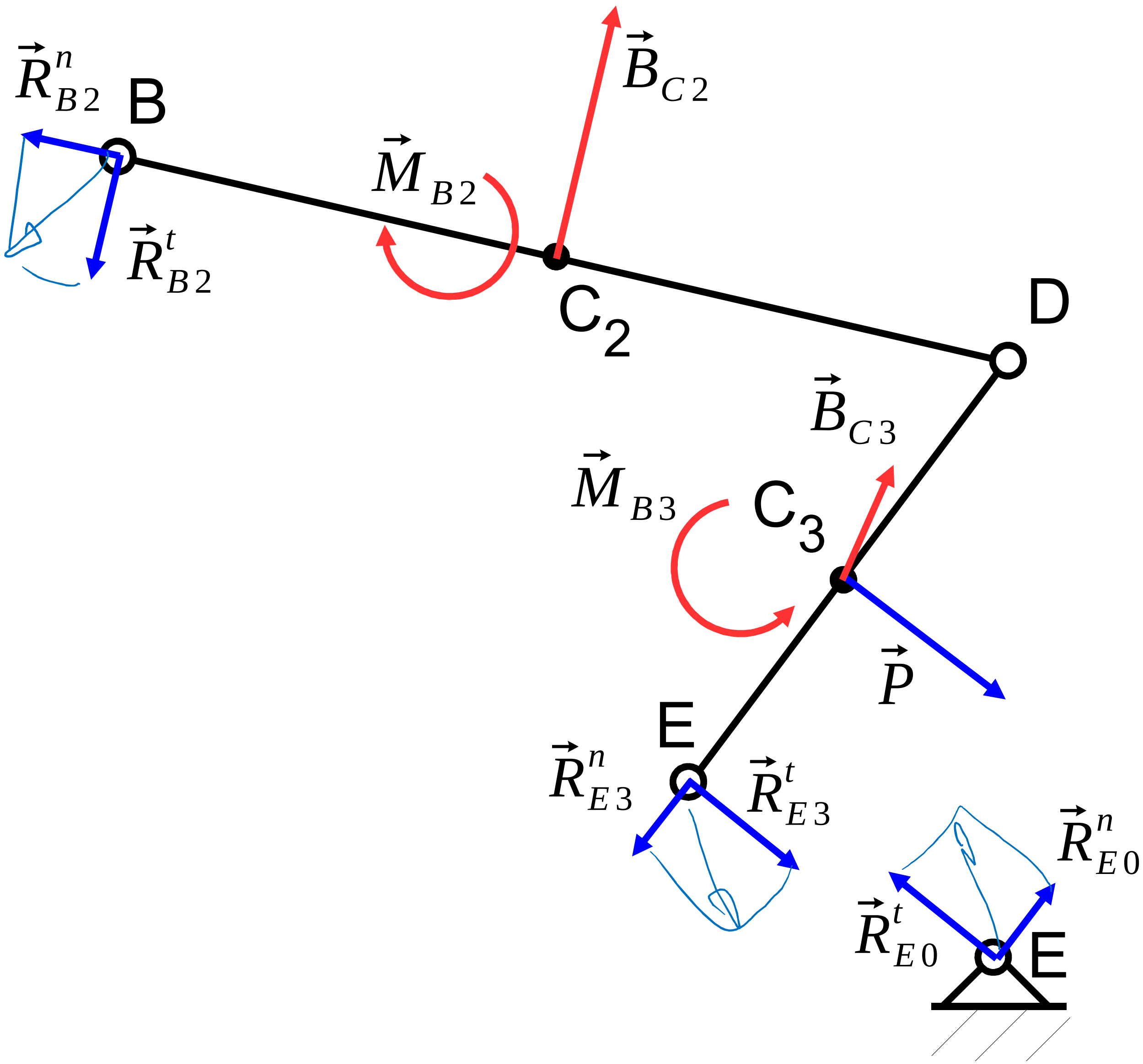
rozw. graficznie

człon ED: $\sum_i M_{iD}=0$

$\vec{R}^t_{E3}=\ldots$

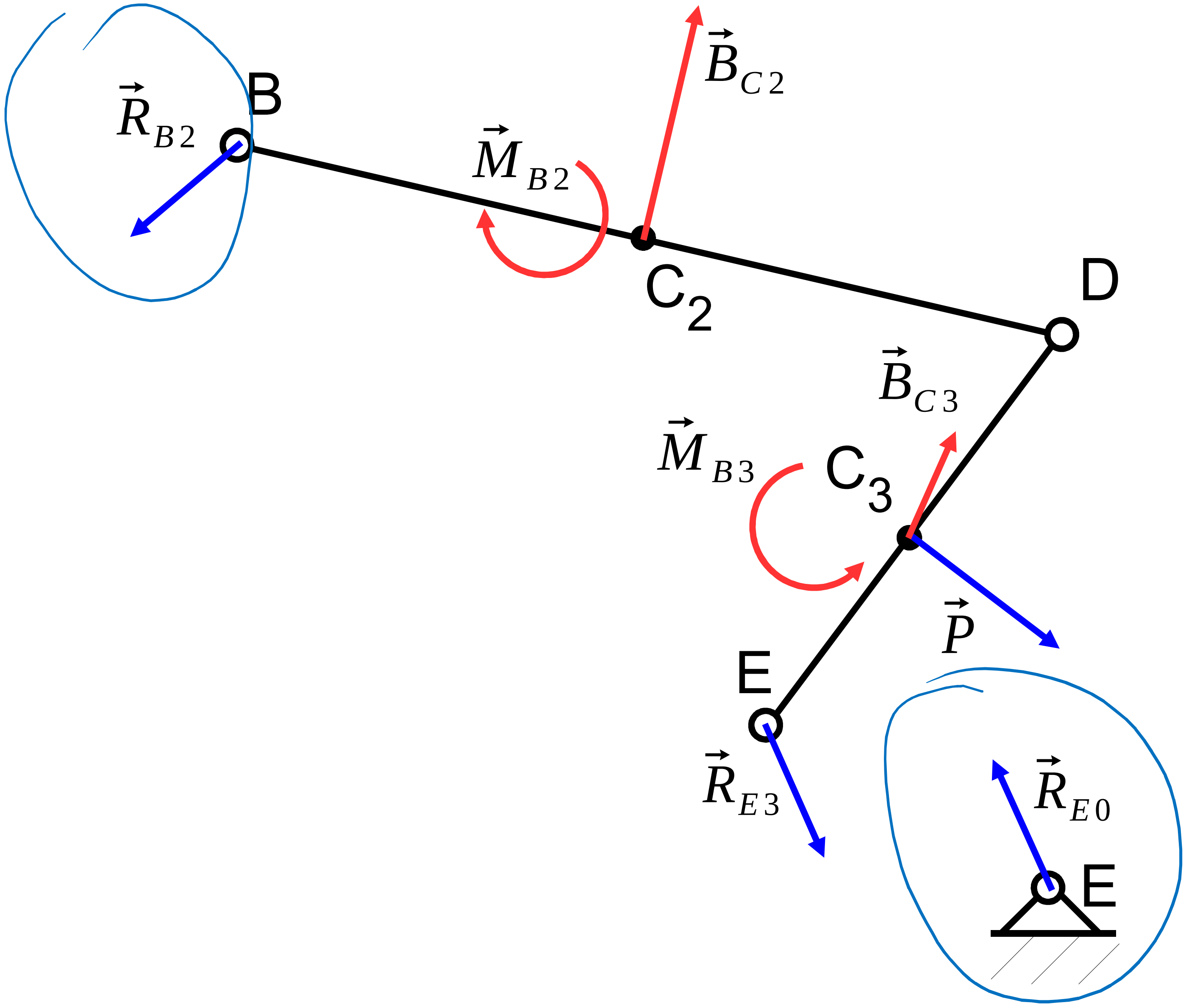
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



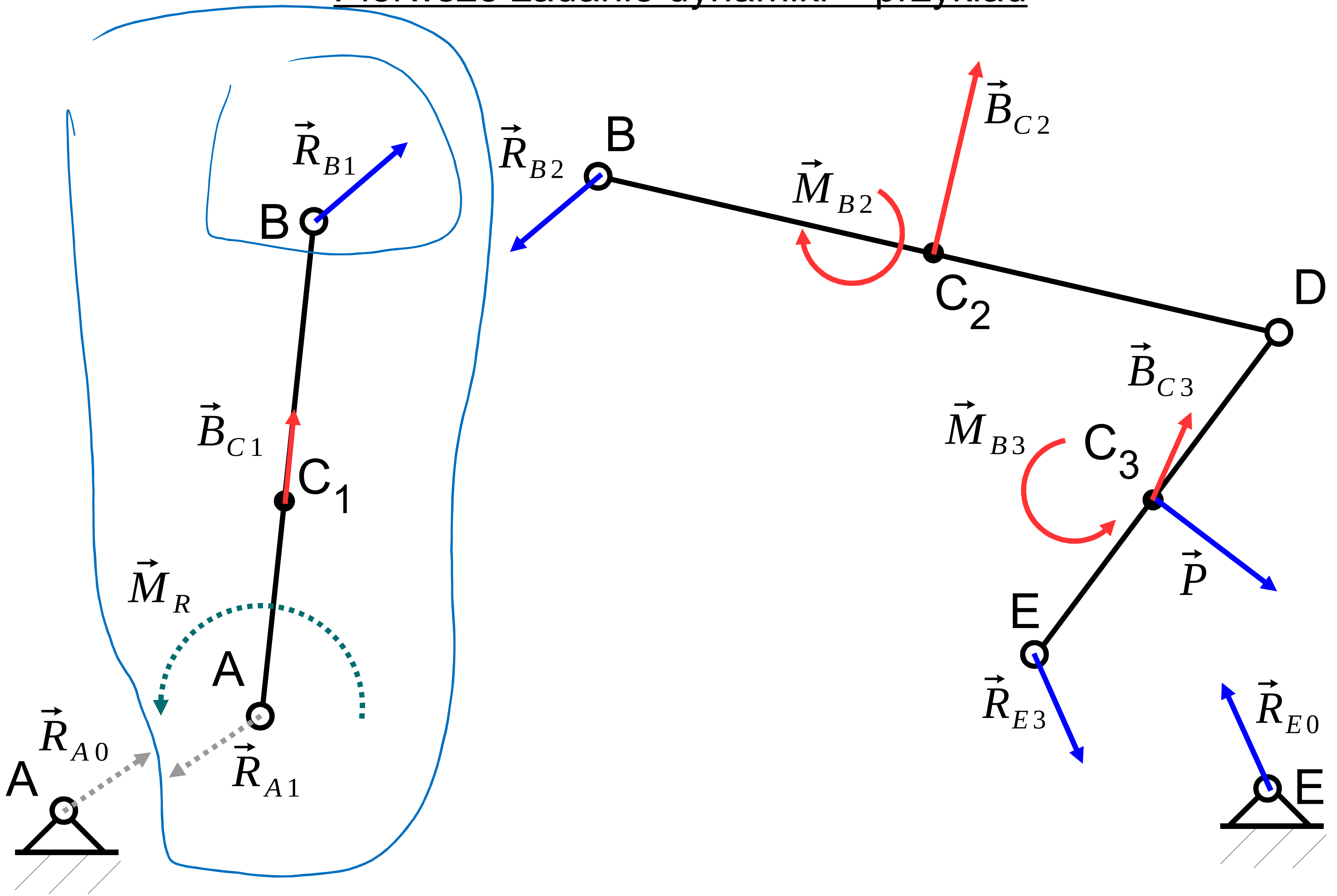
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



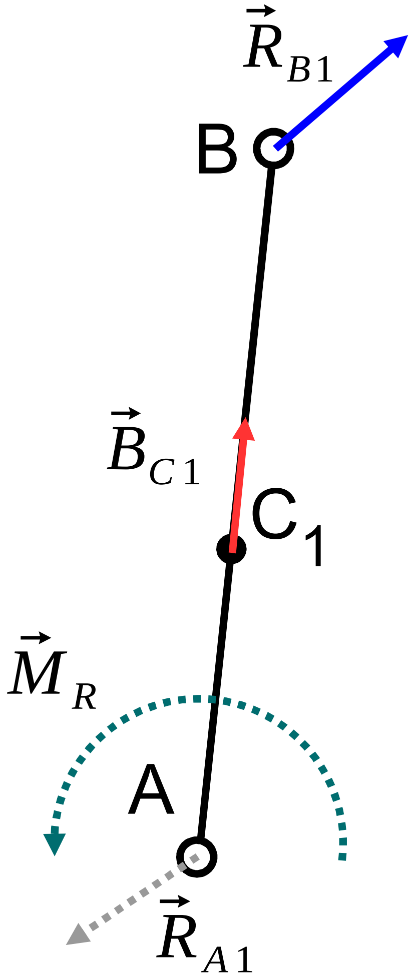
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



Dynamika mechanizmów

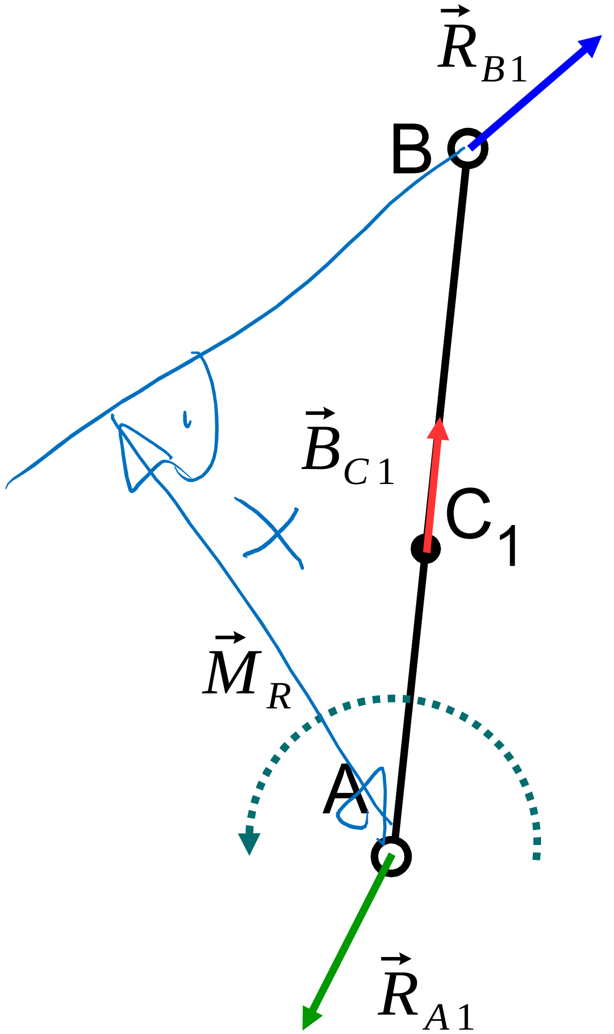
Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



$$\boxed{\vec{R}_{A1}+\underline{\vec{B}_{C1}}+\underline{\vec{R}_{B1}}=0} \rightarrow \text{ww. prof.}$$

Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład

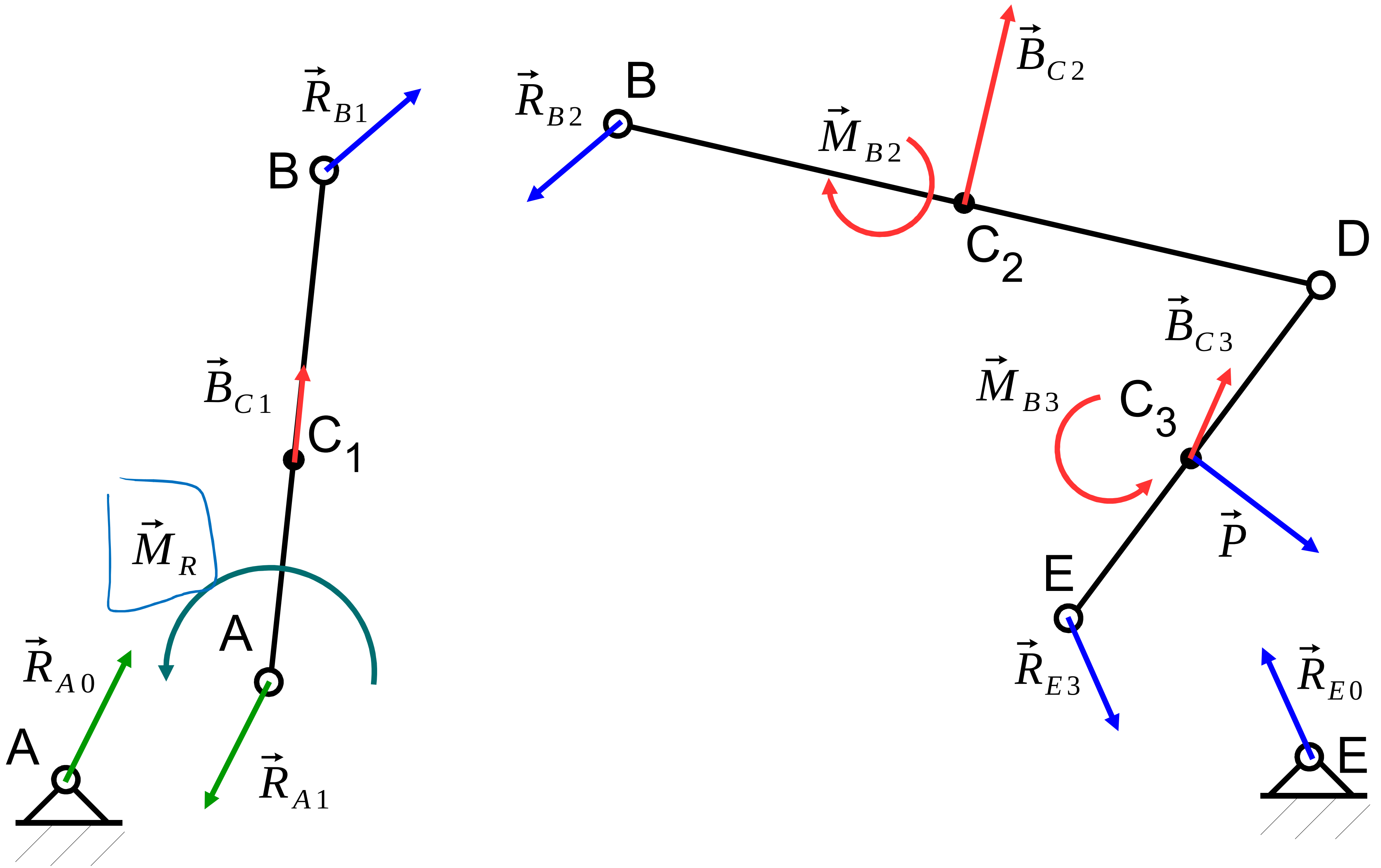


człon AB: $\sum_i M_{iA} = 0$

$|M_R| = \ldots$

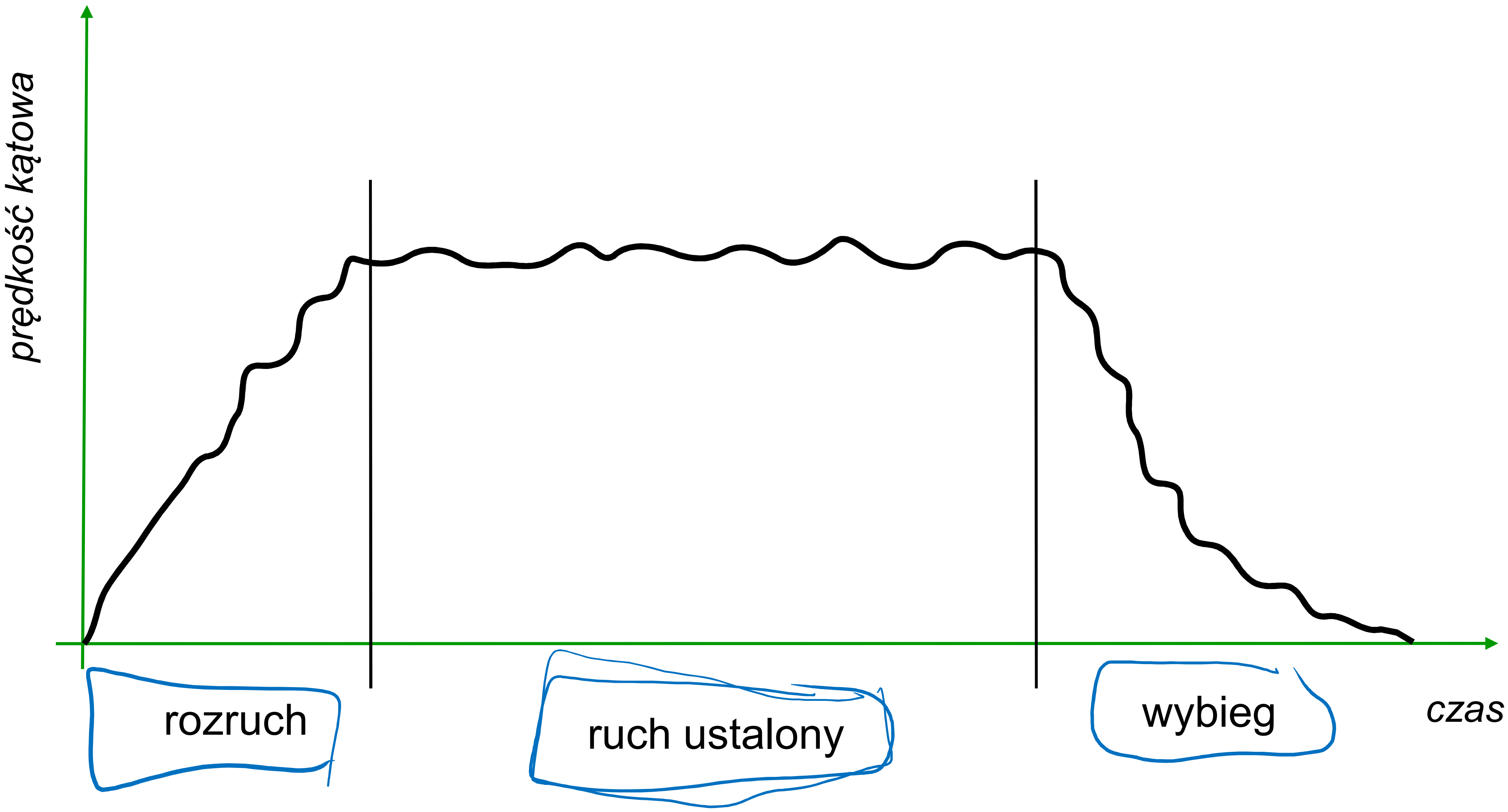
Dynamika mechanizmów

Pierwsze zadanie dynamiki – przykład



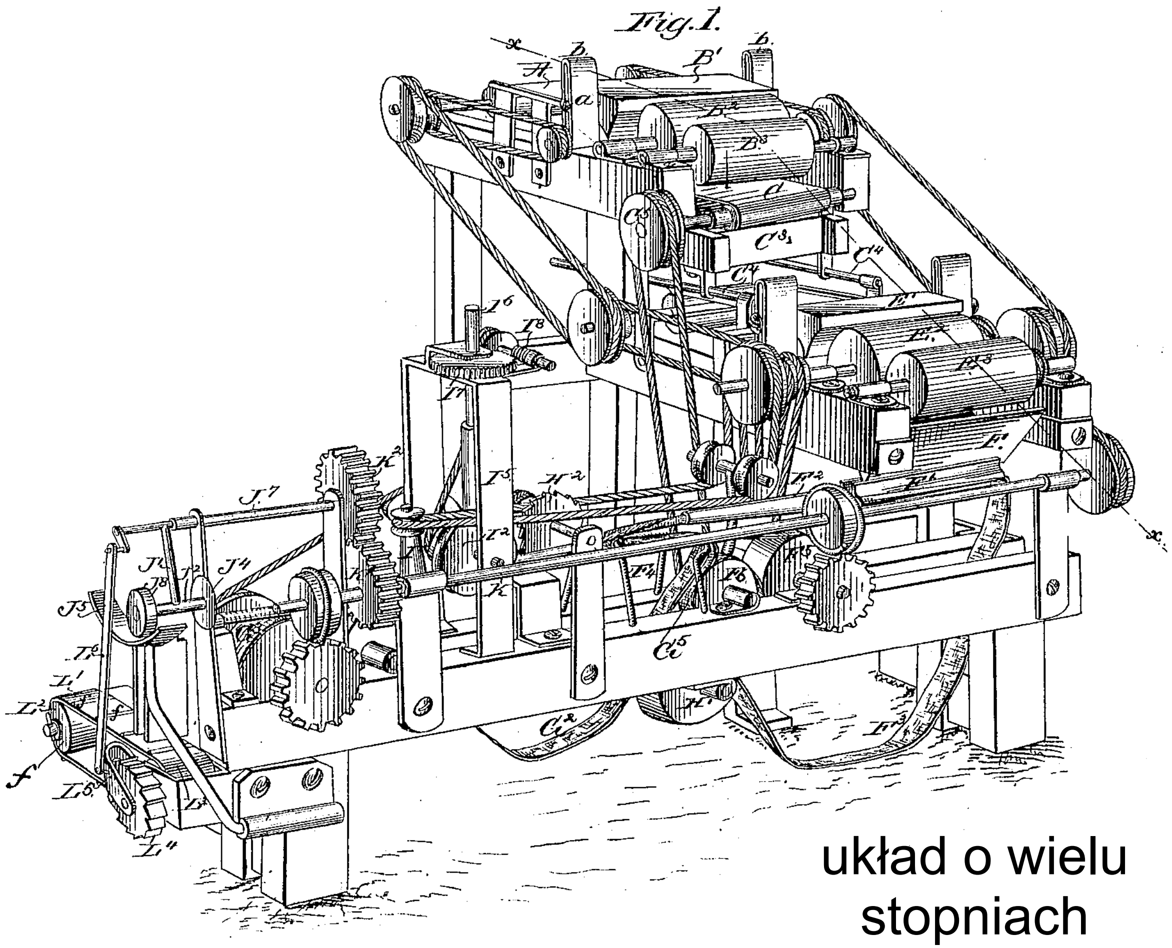
Dynamika maszyn

Etapy pracy maszyny



Redukcja mas i sił

<u>Idea redukcji</u>



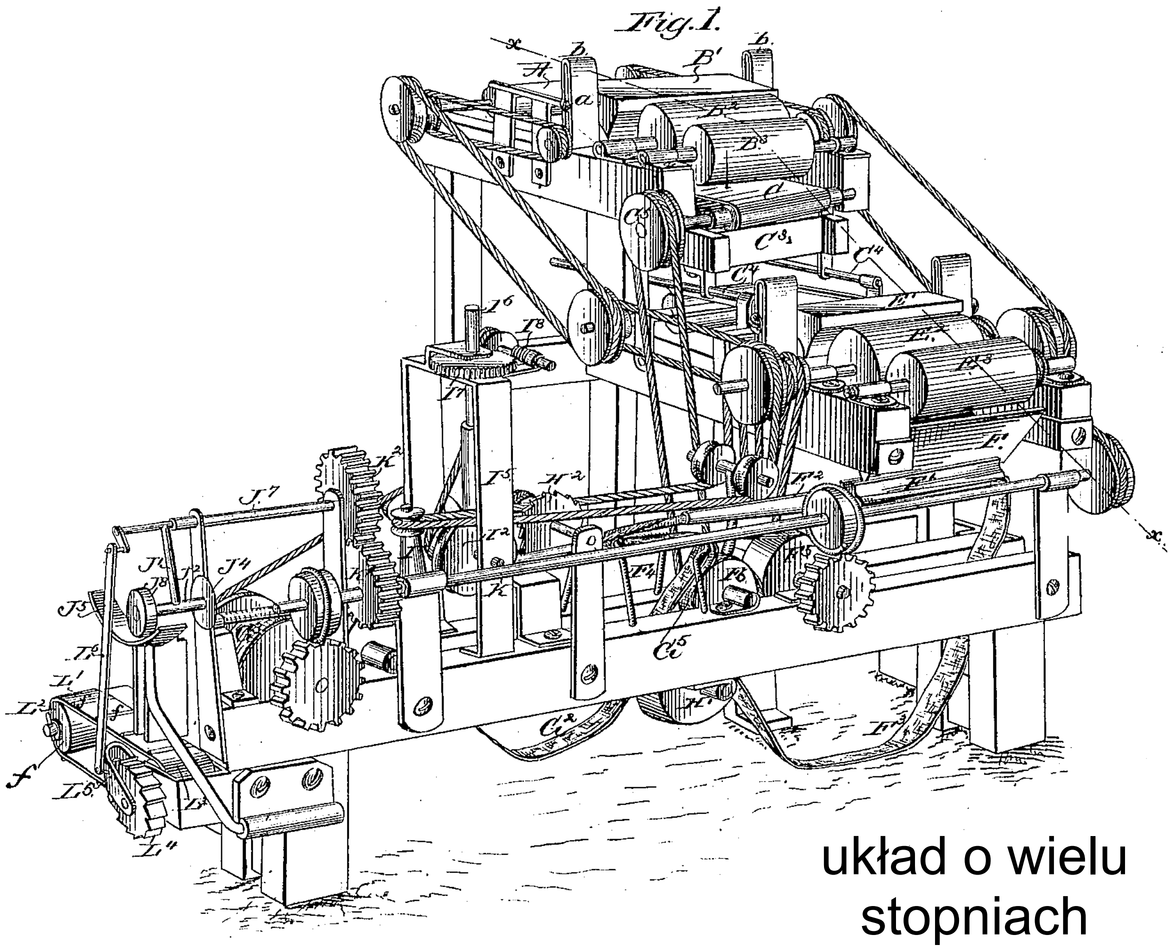
Source: James Albert Bonsack (1859 – 1924) - U.S. patent 238,640 cigarette rolling machine, invented in 1880 and patented in 1881

układ o wielu stopniach swobody

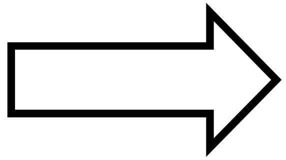
$$
\begin{cases}
\ddot{x}_1(t)=F_1(x_1,x_2,\ldots,t) \\
\ddot{x}_2(t)=F_2(x_1,x_2,\ldots,t) \\
\ldots \\
\ddot{x}_n(t)=F_n(x_1,x_2,\ldots,t) \\
+\text{wiązania} \\
+\text{ ograniczenia}
\end{cases}
$$

Redukcja mas i sił

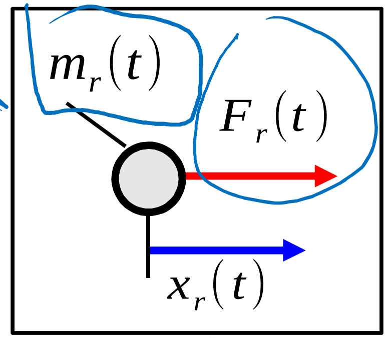
Idea redukcji



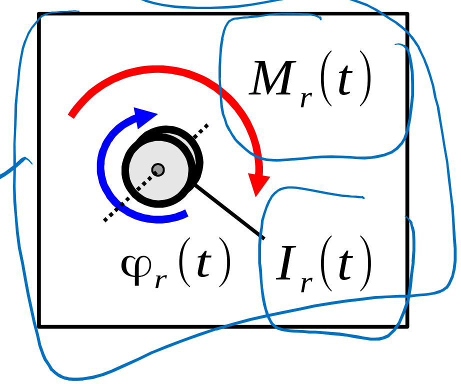
układ o wielu stopniach swobody



układ o jednym stopniu swobody

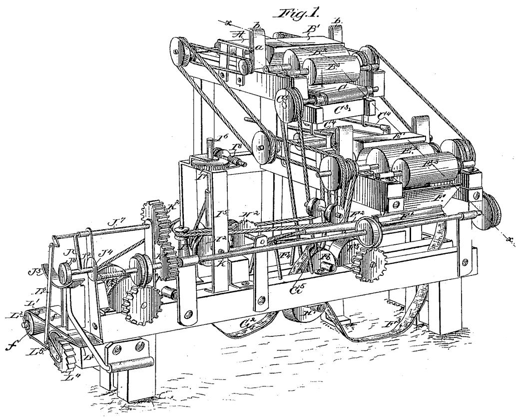


lub



Redukcja mas

Energia kinetyczna

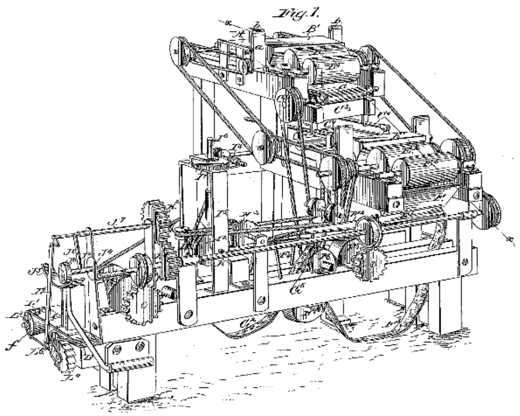


Całkowita energia kinetyczna układu

$$E_k\left(m_i, I_i, v_i, \omega_i\right)$$

Redukcja mas

Energia kinetyczna



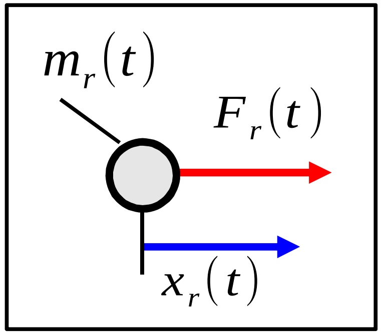
Całkowita energia kinetyczna układu

$$E_k\left(m_i, I_i, v_i, \omega_i\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2} m_r v_r^2$$

masa zredukowana

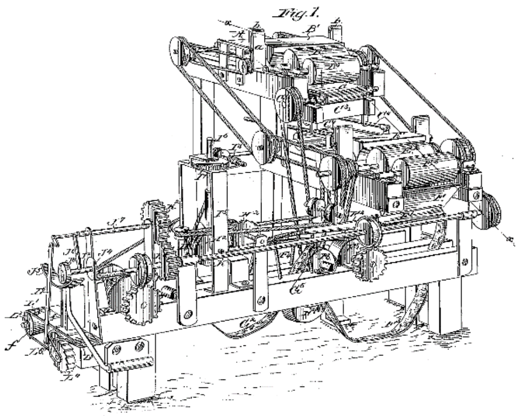
f. czasu



$$v_r = \frac{dx_r(t)}{dt}$$

Redukcja mas

Energia kinetyczna



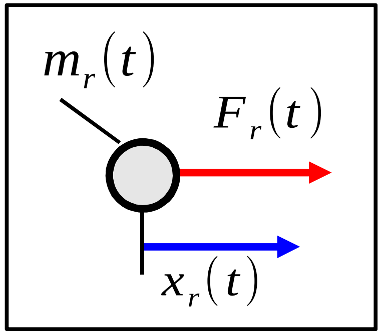
Całkowita energia kinetyczna układu

$$E_k(m_i, I_i, v_i, \omega_i)$$

lub

$$E_k = \frac{1}{2} m_r \, v_r^2$$

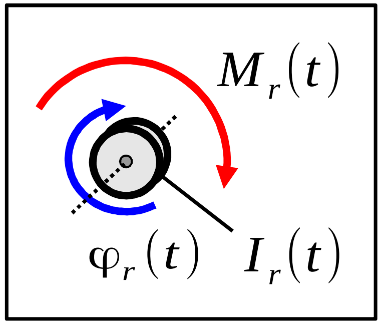
masa zredukowana



$$v_r = \frac{dx_r(t)}{dt}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} I_r \, \omega_r^2}$$

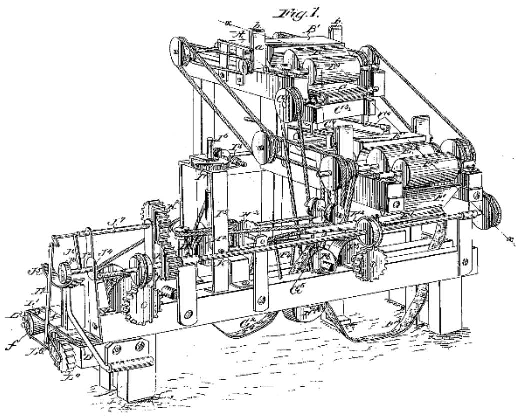
zredukowany moment bezwładności



$$\omega_r = \frac{d\varphi_r(t)}{dt}$$

Redukcja sił

Moc układu

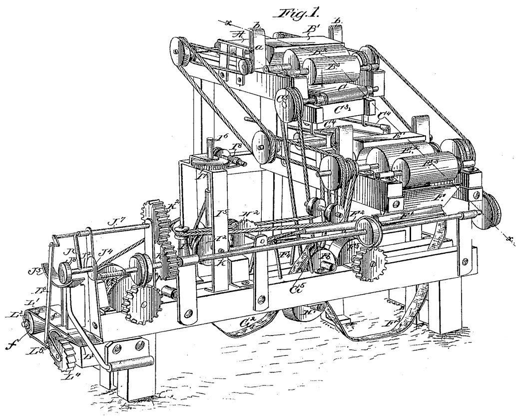


Całkowita moc układu

$$P\left(F_i, M_i, \omega_i, v_i, \ldots\right)$$

Redukcja sił

Moc układu

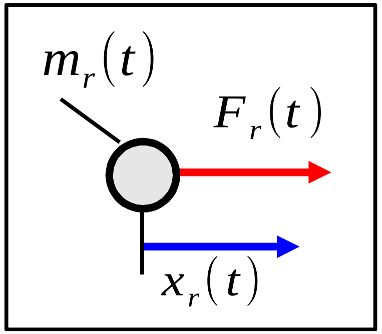


Całkowita moc układu

$$P(F_i, M_i, \omega_i, v_i, \dots)$$

$$P = F_r v_r$$

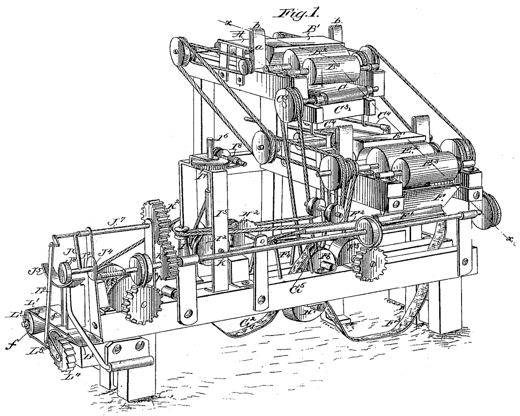
siła zredukowana



$$v_r = \frac{dx_r(t)}{dt}$$

Redukcja sił

Moc układu



Całkowita moc układu

$$P(F_i, M_i, \omega_i, v_i, \ldots)$$

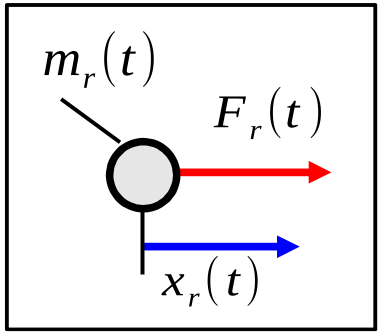
lub

$$P = F_r v_r$$

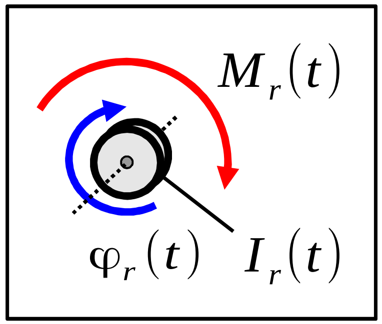
siła zredukowana

$$P = M_r \omega_r$$

moment zredukowany



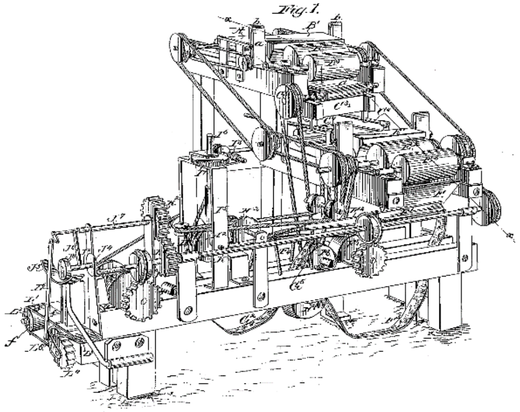
$$v_r = \frac{dx_r(t)}{dt}$$



$$\omega_r = \frac{d\varphi_r(t)}{dt}$$

Redukcja mas

Energia kinetyczna

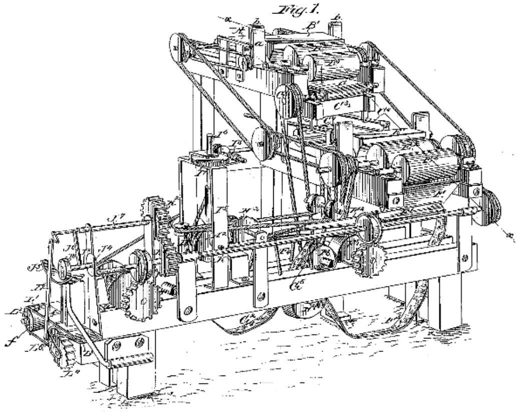


$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

n-elementów w ruchu postępowym
k-elementów w ruchu obrotowym

Redukcja mas

Energia kinetyczna



$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

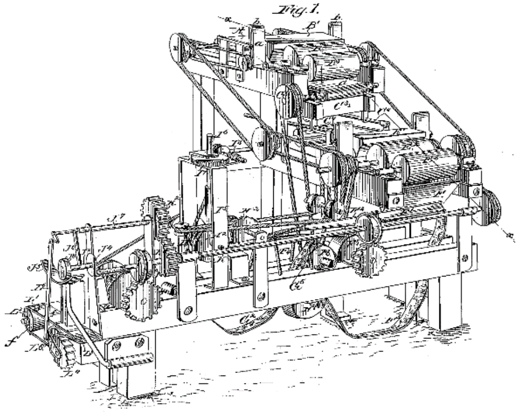
n-elementów w ruchu postępowym
k-elementów w ruchu obrotowym

$$\boxed{\frac{1}{2} m_r v_r^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} I_j \omega_j^2 \quad | \cdot 2 \quad | : v_r^2$$

$$m_r = \sum_i m_i \frac{v_i^2}{v_r^2} + \sum_j I_j \frac{\omega_j^2}{v_r^2}$$

Redukcja mas

Energia kinetyczna



$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

n-elementów w ruchu postępowym
k-elementów w ruchu obrotowym

$$\frac{1}{2} m_r v_r^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

$$\frac{1}{2} I_r \omega_r^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2} I_j \omega_j^2$$

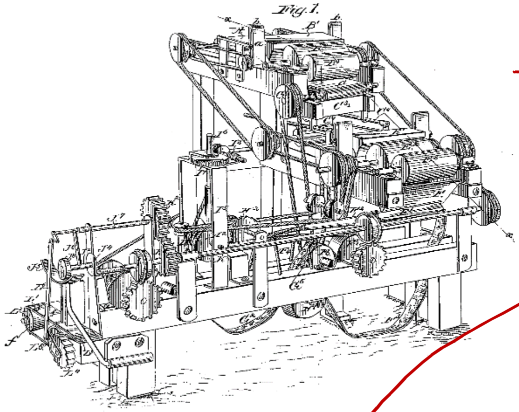
$$m_r = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{v_r^2} + \sum_{j=1}^{k} I_j \frac{\omega_j^2}{v_r^2}$$

$$I_r = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{\omega_r^2} + \sum_{j=1}^{k} I_j \frac{\omega_j^2}{\omega_r^2}$$

$v_r, \ \omega_r$ – dowolnie wybrane

Redukcja sił

Praca sił i momentów



$$\boxed{dW} = \sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

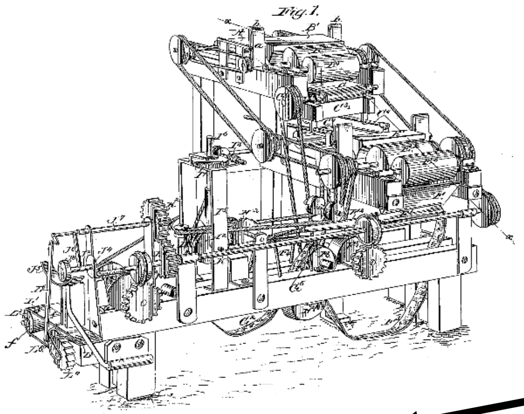
n-elementów w ruchu postępowym
k-elementów w ruchu obrotowym

$\alpha_i = \measuredangle(P_i; ds_i)$

$dW = P_r \cdot ds_r$

Redukcja sił

Praca sił i momentów



$$dW = \sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

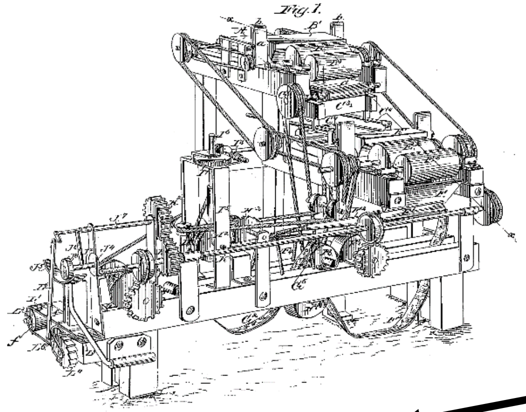
n-elementów w ruchu postępowym
k-elementów w ruchu obrotowym

$$\boxed{P_r ds_r = \sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j}$$

$| : ds_r$

Redukcja sił

Praca sił i momentów



$$dW=\sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

n-elementów w ruchu postępowym
k-elementów w ruchu obrotowym

$$P_r ds_r=\sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

$$P_r=\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{ds_i}{ds_r}\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j \frac{d\varphi_j}{ds_r}$$

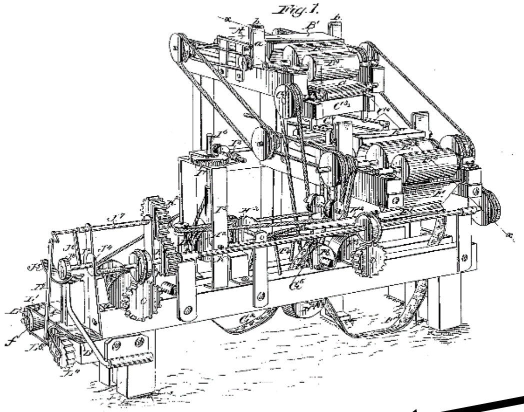
$ds_i = V_i \cdot dt$

$ds_r = V_r \cdot dt$

$d\varphi_j = \omega_j \cdot dt$

Redukcja sił

Praca sił i momentów



$$dW = \sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

n-elementów w ruchu postępowym
k-elementów w ruchu obrotowym

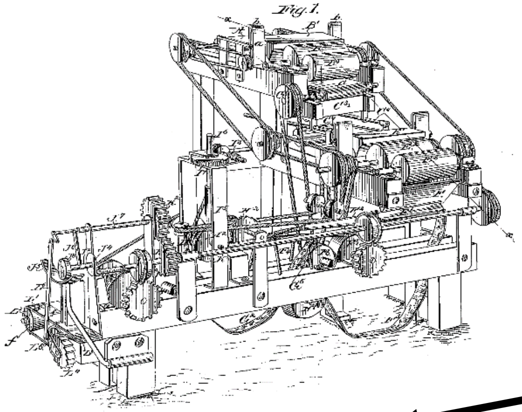
$$P_r ds_r = \sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

$$P_r = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{ds_i}{ds_r} \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j \frac{d\varphi_j}{ds_r}$$

$$P_r = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{v_i \cancel{dt}}{v_r \cancel{dt}} \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j \frac{\omega_j \cancel{dt}}{v_r \cancel{dt}}$$

Redukcja sił

Praca sił i momentów



$$dW = \sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

n-elementów w ruchu postępowym
k-elementów w ruchu obrotowym

$$M_r d\varphi_r = \dots$$

$$P_r ds_r = \sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

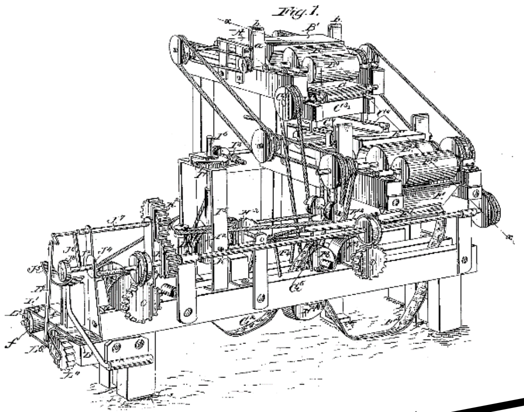
$$P_r = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{ds_i}{ds_r} \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j \frac{d\varphi_j}{ds_r}$$

$$P_r = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{v_i dt}{v_r dt} \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j \frac{\omega_j dt}{v_r dt}$$

$$\boxed{P_r = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{v_i}{v_r} \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j \frac{\omega_j}{v_r}}$$

Redukcja sił

Praca sił i momentów



$$dW=\sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

n-elementów w ruchu postępowym
k-elementów w ruchu obrotowym

$$P_r ds_r=\sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

$$P_r=\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{ds_i}{ds_r}\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j \frac{d\varphi_j}{ds_r}$$

$$P_r=\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{v_i dt}{v_r dt}\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j \frac{\omega_j dt}{v_r dt}$$

$$P_r=\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{v_i}{v_r}\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j \frac{\omega_j}{v_r}$$

$$M_r d\varphi_r=\sum_{i=1}^{n} P_i ds_i \cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j d\varphi_j$$

$$M_r=\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{ds_i}{d\varphi_r}\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j \frac{d\varphi_j}{d\varphi_r}$$

$$M_r=\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{v_i dt}{\omega_r dt}\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j \frac{\omega_j dt}{\omega_r dt}$$

$$M_r=\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{v_i}{\omega_r}\cos\alpha_i+\sum_{j=1}^{k} M_j \frac{\omega_j}{\omega_r}$$

Redukcja mas i momentów bezwładności

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{v_r^2} + \sum_{j=1}^{k} I_j \frac{\omega_j^2}{v_r^2}$$

$$I_r = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{v_i^2}{\omega_r^2} + \sum_{j=1}^{k} I_j \frac{\omega_j^2}{\omega_r^2}$$

Redukcja sił i momentów sił

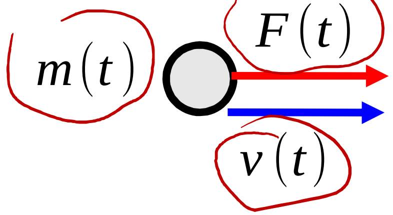
$$P_r = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{v_i}{v_r} \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j \frac{\omega_j}{v_r}$$

$$M_r = \sum_{i=1}^{n} P_i \frac{v_i}{\omega_r} \cos\alpha_i + \sum_{j=1}^{k} M_j \frac{\omega_j}{\omega_r}$$

Równanie ruchu maszyny

dla ruchu postępowego

$(a\cdot b)' = a'b + ab'$



$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$dE_k = dW$$

$$d\left(\frac{1}{2} m(t)\, v^2(t)\right) = F(t)\cdot dx$$

$$\frac{1}{2}\, dm(t)\, v^2(t) + \cancel{\frac{1}{2}} m(t)\, \cancel{2}\, v(t)\, dv(t) = F(t)\, dx$$

$$\frac{1}{2}\, dm(t)\, v(t) \frac{dx}{dt} + m(t) \frac{dv}{dt}\, dv(t) = F(t)\, dx \quad \Big|\, : dx$$

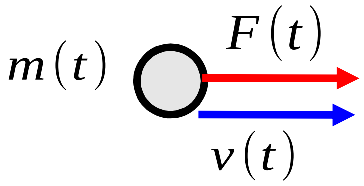
$$\boxed{\frac{dm(t)}{dt}\, \frac{v(t)}{2} + m(t) \frac{dv(t)}{dt} = F(t)}$$

dla $m = \text{const.}$

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

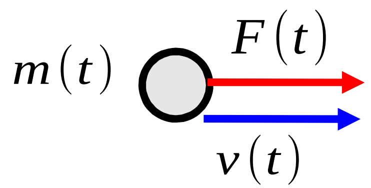
Równanie ruchu maszyny

dla ruchu postępowego



Równanie ruchu maszyny

dla ruchu postępowego



$$dE_k = dW$$

$$d\left(\frac{1}{2} m(t) v(t)^2\right) = F(t)\,dx$$

$$\frac{1}{2} dm(t) v(t)^2 + m(t) v(t) dv(t) = F(t)\,dx$$

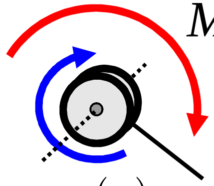
$$\frac{1}{2} dm(t) v(t) \frac{dx(t)}{dt} + m(t) \frac{dx(t)}{dt} dv(t) = F(t)\,dx$$

$$\frac{dm(t)}{dt} \frac{v(t)}{2} + m \frac{dv(t)}{dt} = F(t)$$

$$\boxed{\text{jeżeli } m = const. \Rightarrow m \frac{dv(t)}{dt} = P(t) \quad \text{lub} \quad m\ddot{x}(t) = F(t)}$$

Równanie ruchu maszyny

dla ruchu obrotowego



$$dE_k = dW$$

$$d\left(I\frac{\omega(t)^2}{2}\right) = M(t)\,d\varphi$$

...

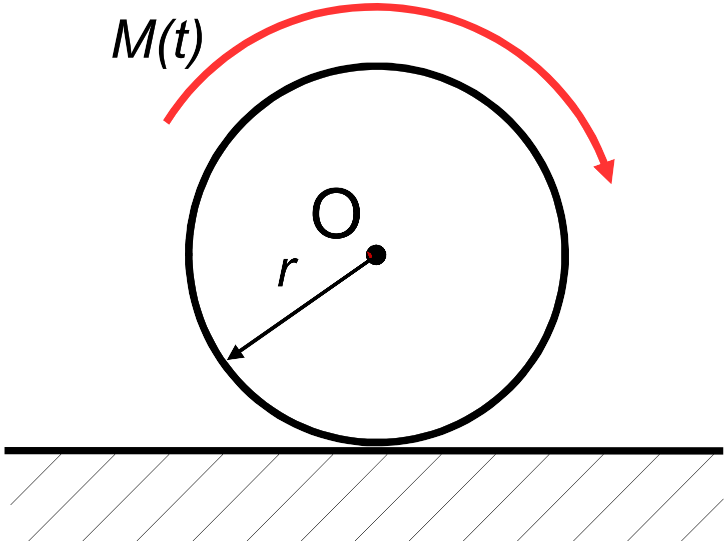
...

$$\frac{dI(t)}{dt}\frac{\omega(t)}{2} + I(t)\frac{d\omega(t)}{dt} = M(t)$$

$$\boxed{\text{jeżeli } I = const. \Rightarrow I\frac{d\omega(t)}{dt} = M(t) \text{ lub } I\ddot{\varphi}(t) = M(t)}$$

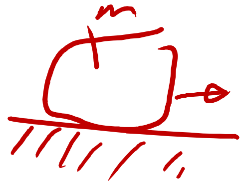
Redukcja mas i sił

Koło toczące się bez poślizgu



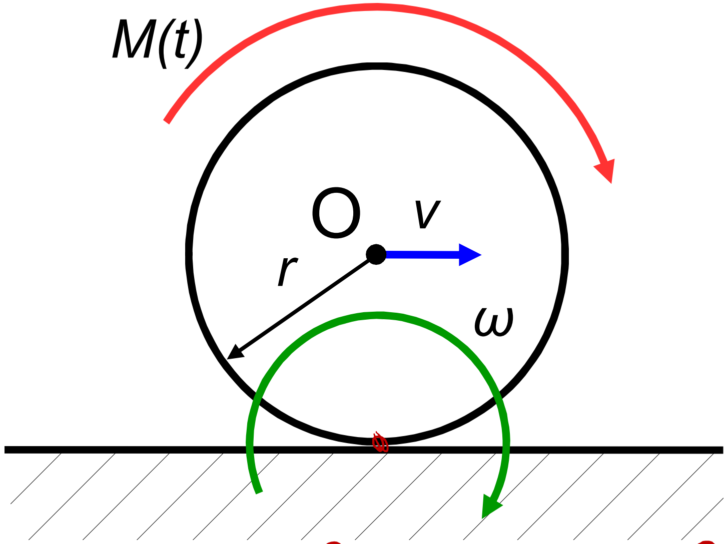
Dane: m – masa koła,
I_O – moment bezwładności względem punktu O,
r – promień koła,
$M(t)$ – moment napędzający.

Redukcja mas i sił



$$m\frac{dv}{dt} = F$$

Koło toczące się bez poślizgu



Dane: m – masa koła,
I_O – moment bezwładności względem punktu O,
r – promień koła,
$M(t)$ – moment napędzający.

$v(t)$ – prędkość liniowa środka koła,
$\omega(t)$ – prędkość kątowa koła.

$$v(t) = \omega(t)\cdot r$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2(t) + \frac{1}{2} I_0 \omega^2(t) - E_k(v,\omega) \rightarrow E_k(v) = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_0 \frac{v^2}{r^2}$$

$$E_k(v) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(m + I_0/r^2\right)}_{m_r = const} v^2$$

$$P = M(t)\cdot\omega(t) = M(t)\cdot\frac{v(t)}{r} = \frac{M(t)}{r}\cdot v(t)$$

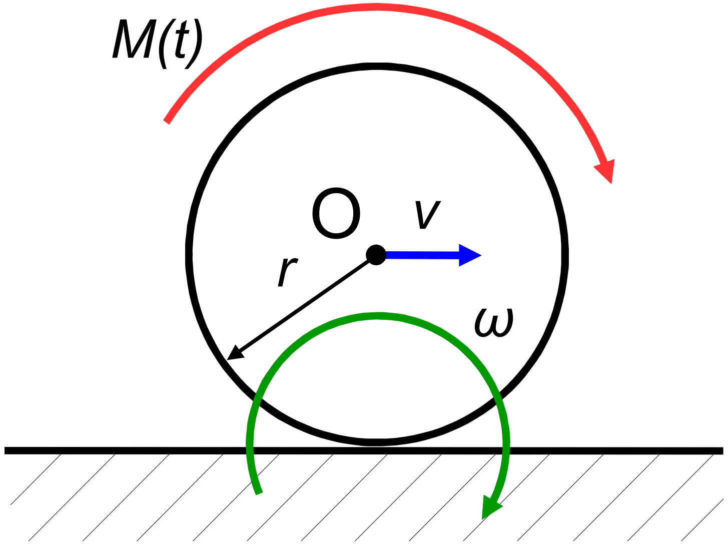
$$\frac{M(t)}{r} \rightarrow F_r$$

$$RRM: \quad m_r \frac{dv(t)}{dt} = F_r(t)$$

$$\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{M(t)}{r}$$

Redukcja mas i sił

Koło toczące się bez poślizgu

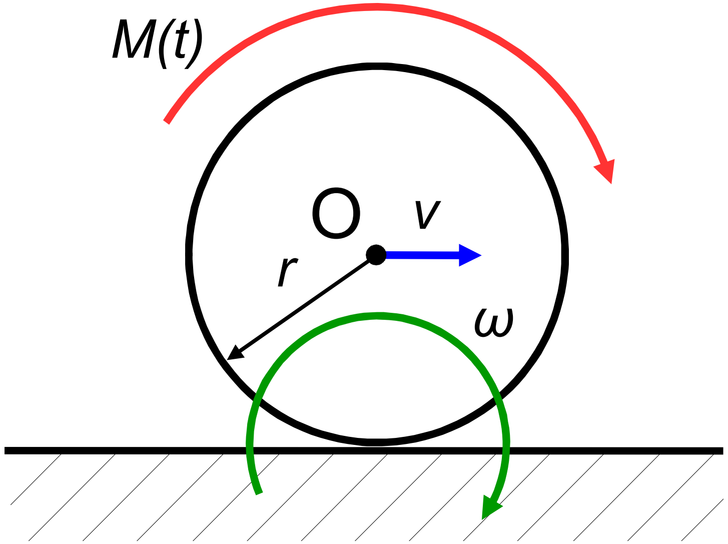


Dane: m – masa koła,
I_O – moment bezwładności względem punktu O,
r – promień koła,
$M(t)$ – moment napędzający.

$v(t)$ – prędkość liniowa środka koła,
$\omega(t)$ – prędkość kątowa koła.

Redukcja mas i sił

Koło toczące się bez poślizgu



Dane: *m* – masa koła,
I_O – moment bezwładności względem punktu O,
r – promień koła,
M(t) – moment napędzający.

v(t) – prędkość liniowa środka koła,
ω(t) – prędkość kątowa koła.

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_O \omega^2 \qquad \text{ale } v = \omega r$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I_O \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_O}{r^2}\right) v^2 = \frac{1}{2} m_r v^2$$

$$m_r = m + \frac{I_O}{r^2} = \text{const.}$$

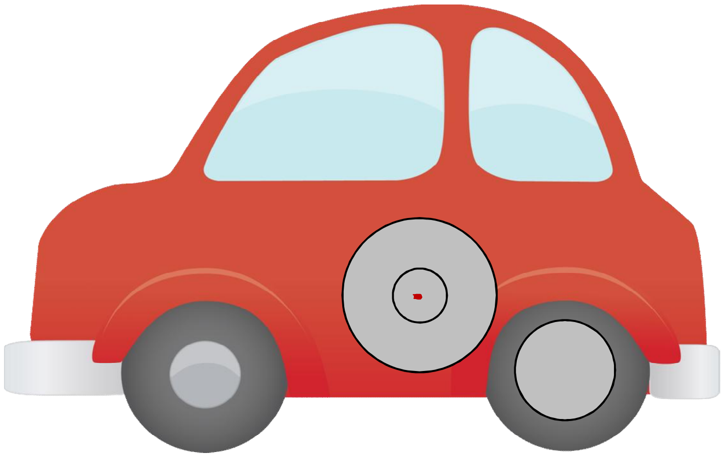
$$P = M \omega$$

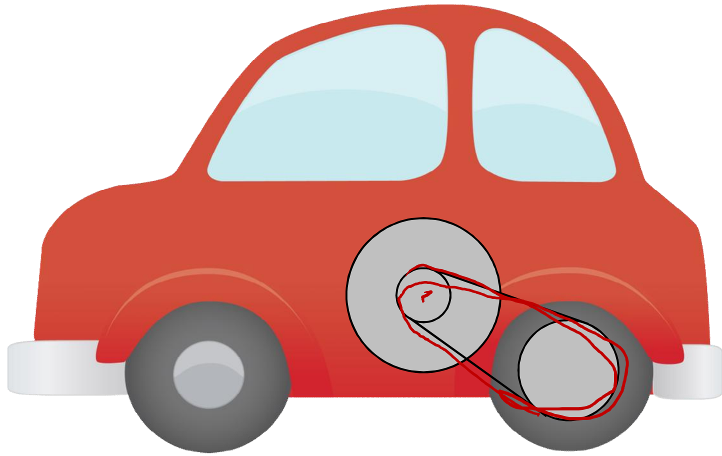
$$P = M \frac{v}{r} = \frac{M}{r} v = F_r v$$

$$F_r = \frac{M}{r}$$

$$m_r \frac{dv}{dt} = F_r \quad \Rightarrow \quad \left(m + \frac{I_o}{r^2}\right) \frac{d v(t)}{dt} = \frac{M(t)}{r}$$

Redukcja mas i sił





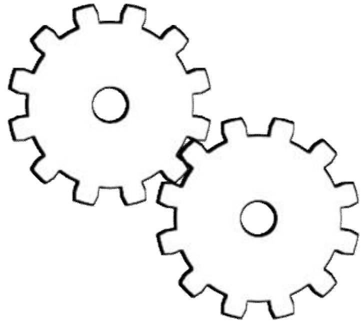
m_1 – masa całkowita
m_{r1} – masa zredukowana

m_2 – masa całkowita
m_{r2} – masa zredukowana

$$m_1 = m_2$$

$$m_{r1} < m_{r2}$$

Przełożenie kinematyczne przekładni



Definicja	Wartości dla reduktora	Wartości dla multiplikatora
$i=\frac{z_{we}}{z_{wy}}=\frac{\omega_{wy}}{\omega_{we}}$	<1	>1
$i=\frac{z_{wy}}{z_{we}}=\frac{\omega_{we}}{\omega_{wy}}$	>1	<1

$z_{we/wy}$ - liczba zębów koła wejściowego/wyjściowego

ω – prędk. kątowe we/wy

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Zbadajmy proces rozruchu wciągarki bębnowej składającej się z:

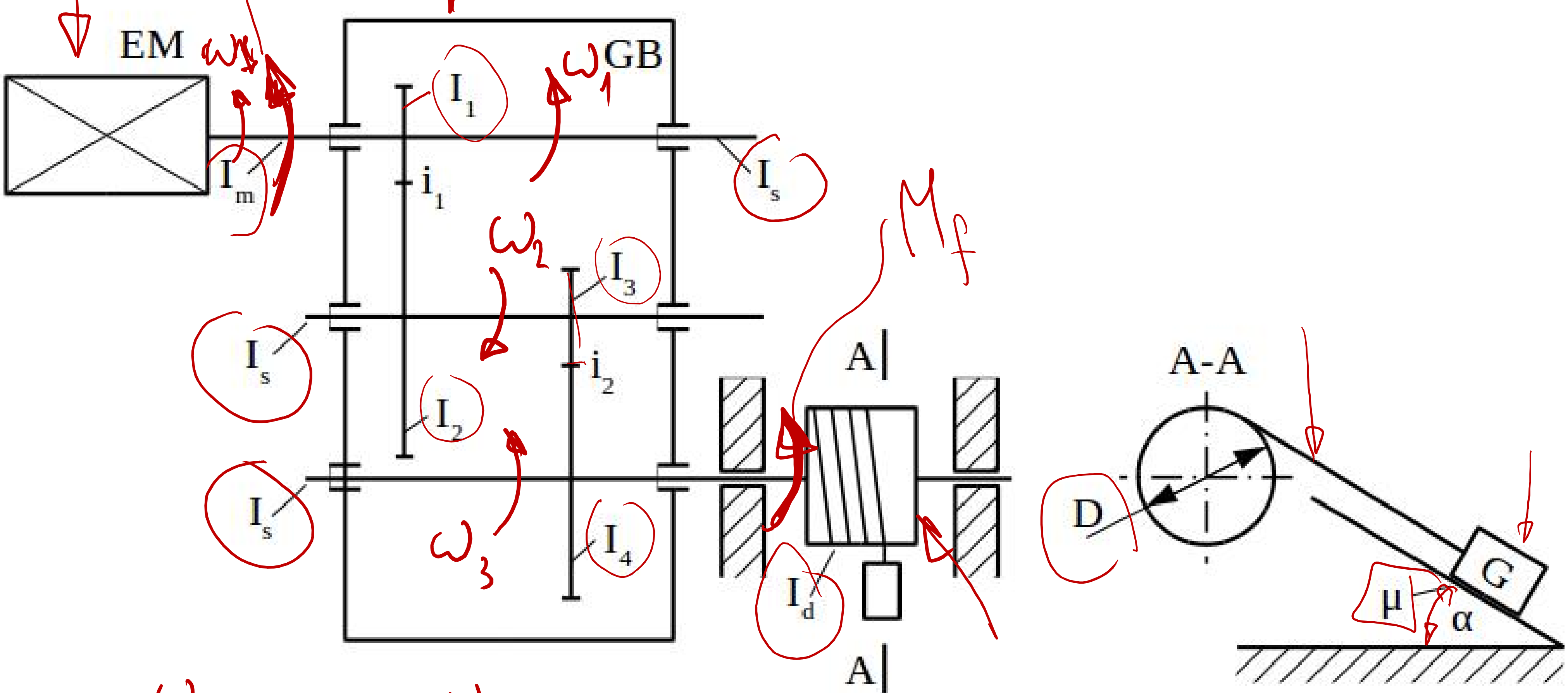
- silnika elektrycznego (EM) generującego moment będący funkcją prędkości kątowej wału silnika *ω według zależności*: *$M=A-B\omega$, gdzie A* i *B są danymi stałymi parametrami*; moment bezwładności wału wyjściowego silnika wynosi I_m;
- przekładni dwustopniowej (reduktora) o zadanych momentach bezwładności kół I_1, I_2, I_3, I_4 i momentach bezwładności wałów wynoszących I_s; przełożenia przekładni zadane są jako $i_1=\omega_2/\omega_1$ oraz $i_2=\omega_3/\omega_2$;
- bębna o średnicy *D* i momencie bezwładności I_d; łożyskowanie bębna generuje stały moment oporów toczenia M_f;
- równi pochyłej o kącie *α* względem poziomu;
- obiektu wciąganego o ciężarze *G;* tarcie między obiektem a równią opisane jest modelem tarcia suchego ze współczynnikiem μ.

$M(t) = A - B\omega_1$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

zredukować do ω_1

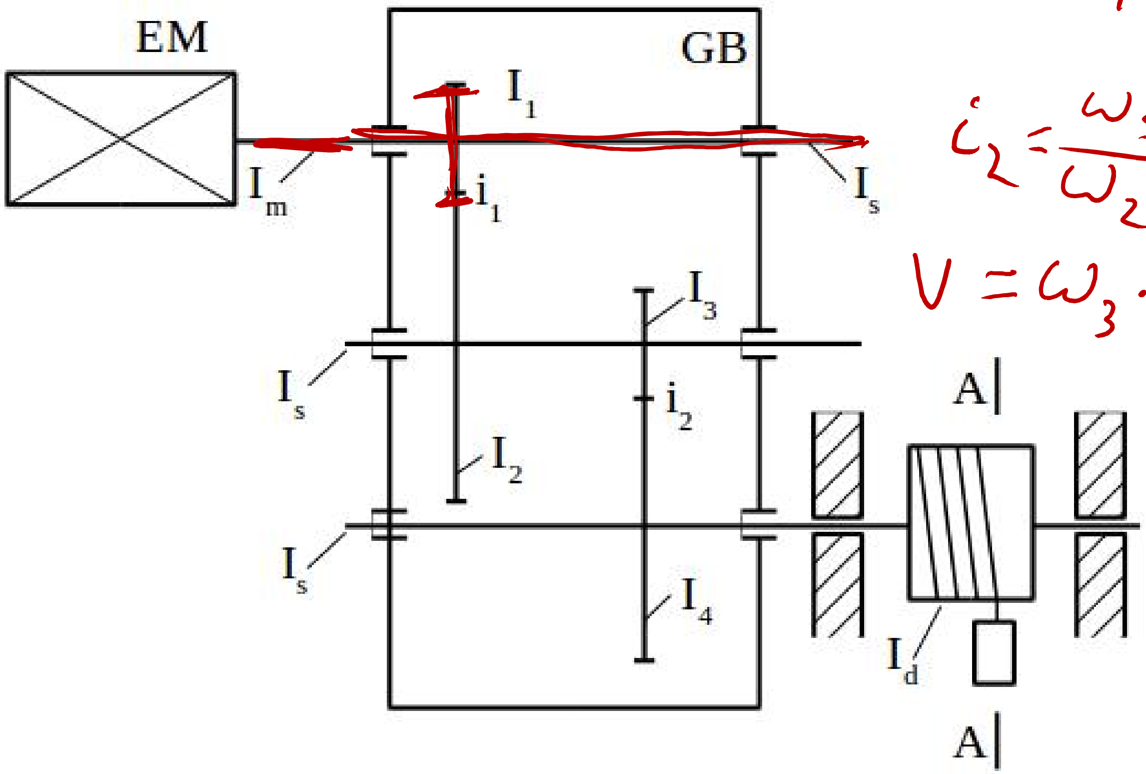


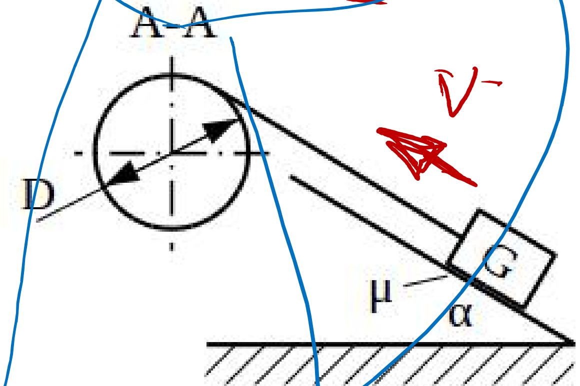
$i_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ $i_2 = \frac{\omega_3}{\omega_2}$

G - ciężar

Redukcja mas i sił

Przykład 1





$$i_1 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \rightarrow \omega_2 = i_1 \omega_1$$

$$i_2 = \frac{\omega_3}{\omega_2} \rightarrow \omega_3 = i_2 \omega_2 = i_2 i_1 \omega_1$$

$$V = \omega_3 \cdot \frac{D}{2} = i_2 i_1 \omega_1 \frac{D}{2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}(I_m + I_s + I_1)\omega_1^2 + \frac{1}{2}(I_s + I_2 + I_3)\omega_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(I_s + I_4 + I_d)\omega_3^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}V^2 \Rightarrow E_k(\omega_1)$$

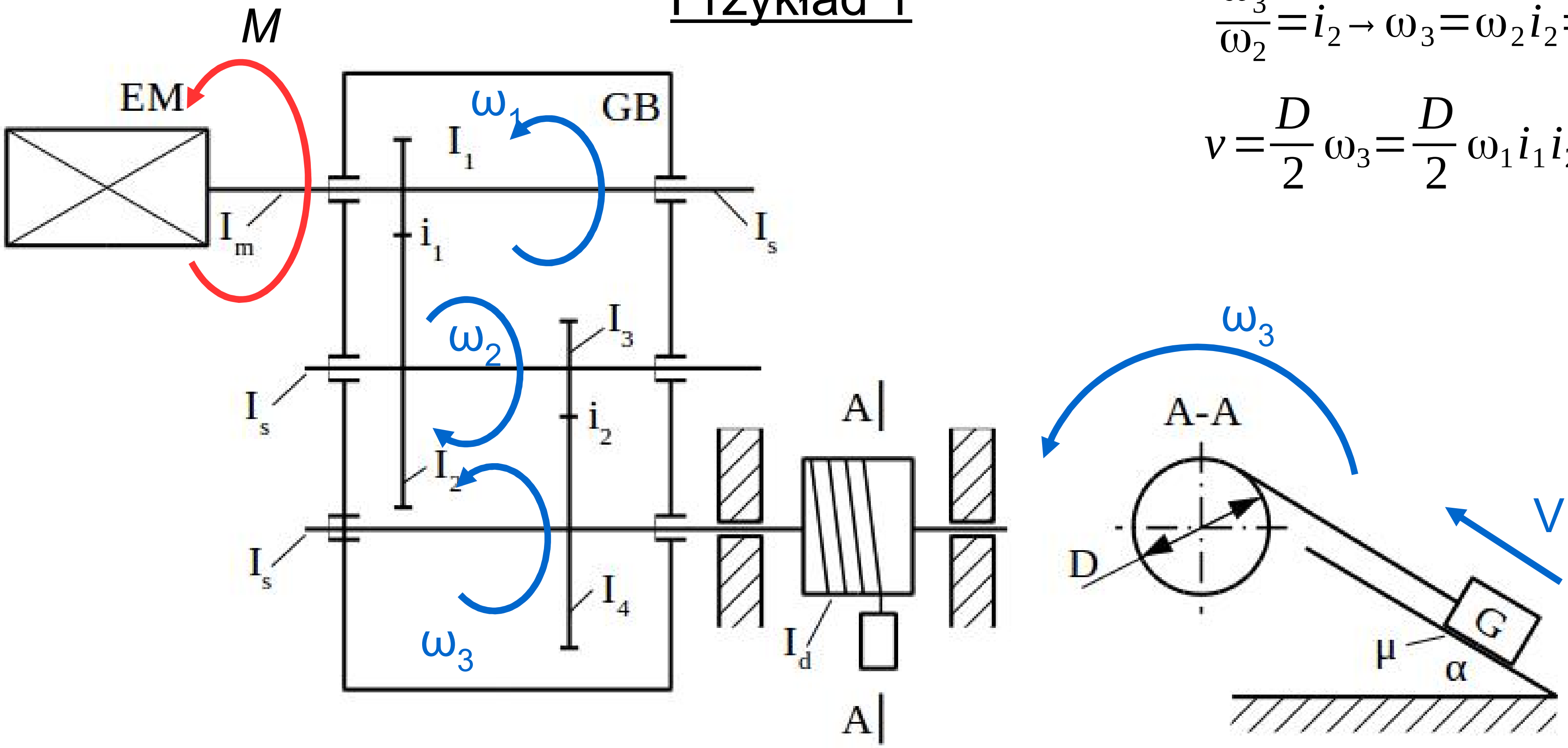
Redukcja mas i sił

Przykład 1

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = i_1 \rightarrow \omega_2 = \omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = i_2 \rightarrow \omega_3 = \omega_2 i_2 = \omega_1 i_1 i_2$$

$$v = \frac{D}{2}\omega_3 = \frac{D}{2}\omega_1 i_1 i_2$$



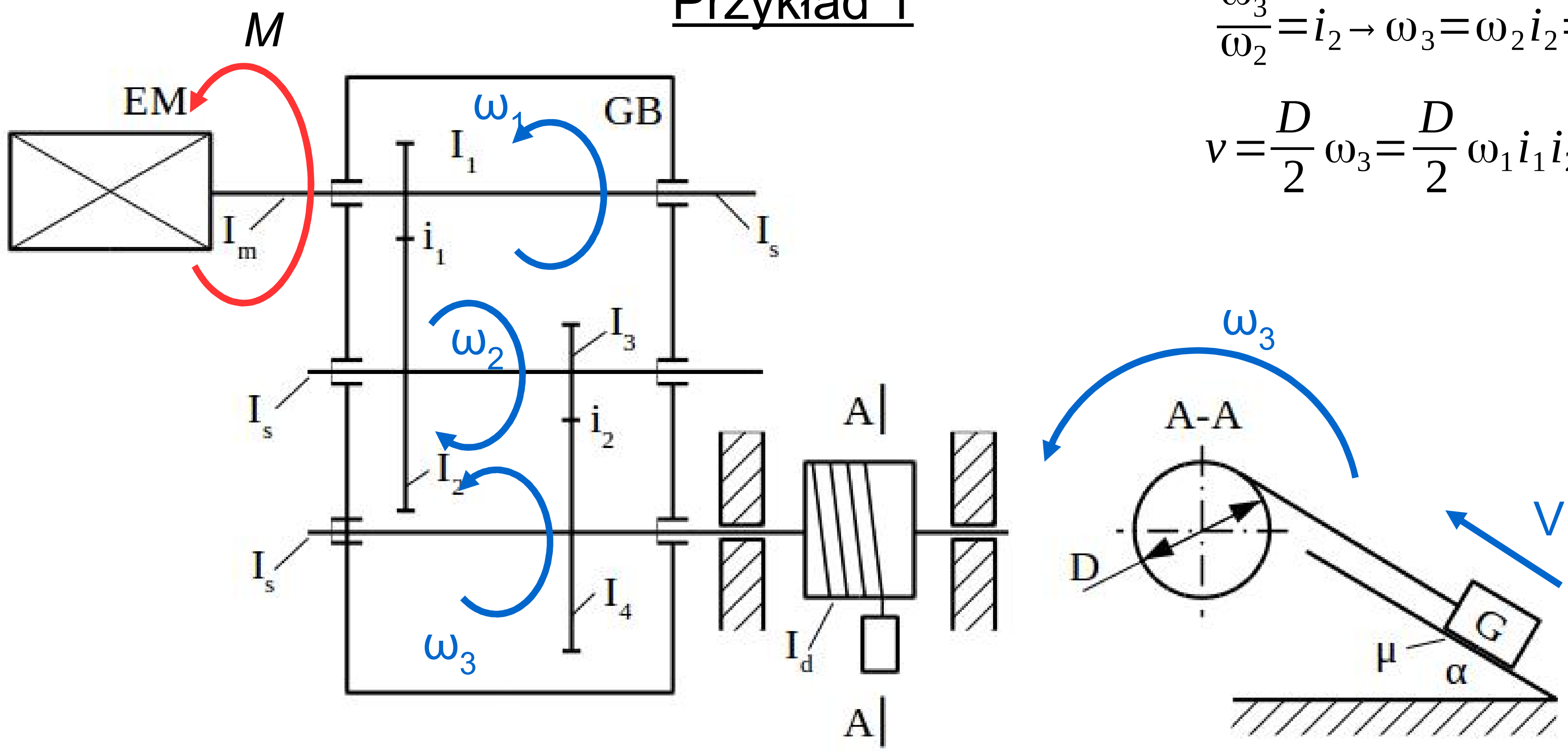
Redukcja mas i sił

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=i_1\rightarrow\omega_2=\omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=i_2\rightarrow\omega_3=\omega_2 i_2=\omega_1 i_1 i_2$$

$$v=\frac{D}{2}\omega_3=\frac{D}{2}\omega_1 i_1 i_2$$

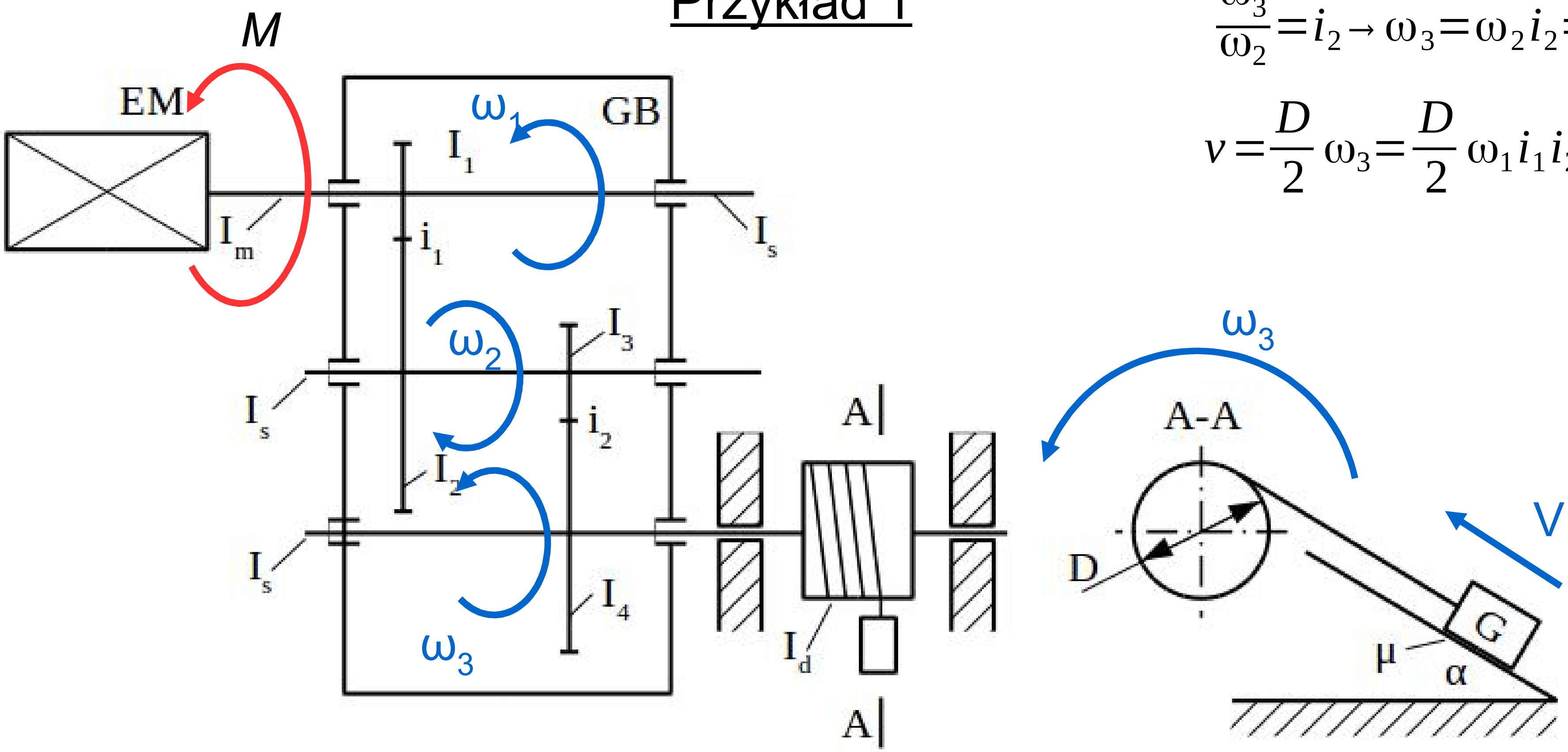
Przykład 1



$$E_K=\frac{1}{2}(I_m+I_1+I_s)\omega_1^2+\frac{1}{2}(I_2+I_3+I_s)\omega_2^2+\frac{1}{2}(I_4+I_s+I_d)\omega_3^2+\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=i_1 \rightarrow \omega_2=\omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=i_2 \rightarrow \omega_3=\omega_2 i_2=\omega_1 i_1 i_2$$

$$v=\frac{D}{2}\omega_3=\frac{D}{2}\omega_1 i_1 i_2$$

$$T=\frac{1}{2}(I_m+I_1+I_s)\omega_1^2+\frac{1}{2}(I_2+I_3+I_s)\omega_2^2+\frac{1}{2}(I_4+I_s+I_d)\omega_3^2+\frac{1}{2}\frac{G}{g}v^2$$

$$T=\frac{1}{2}(I_m+I_1+I_s)\omega_1^2+\frac{1}{2}(I_2+I_3+I_s)\omega_1^2 i_1^2+\frac{1}{2}(I_4+I_d+I_s)\omega_1^2 i_1^2 i_2^2+\frac{1}{2}\frac{G}{g}\frac{D^2}{4}\omega_1^2 i_1^2 i_2^2$$

$$T=\frac{1}{2}\left[(I_m+I_1+I_s)+(I_2+I_3+I_s)i_1^2+(I_4+I_d+I_s)i_1^2 i_2^2+\frac{G}{g}\frac{D^2}{4}i_1^2 i_2^2\right]\omega_1^2$$

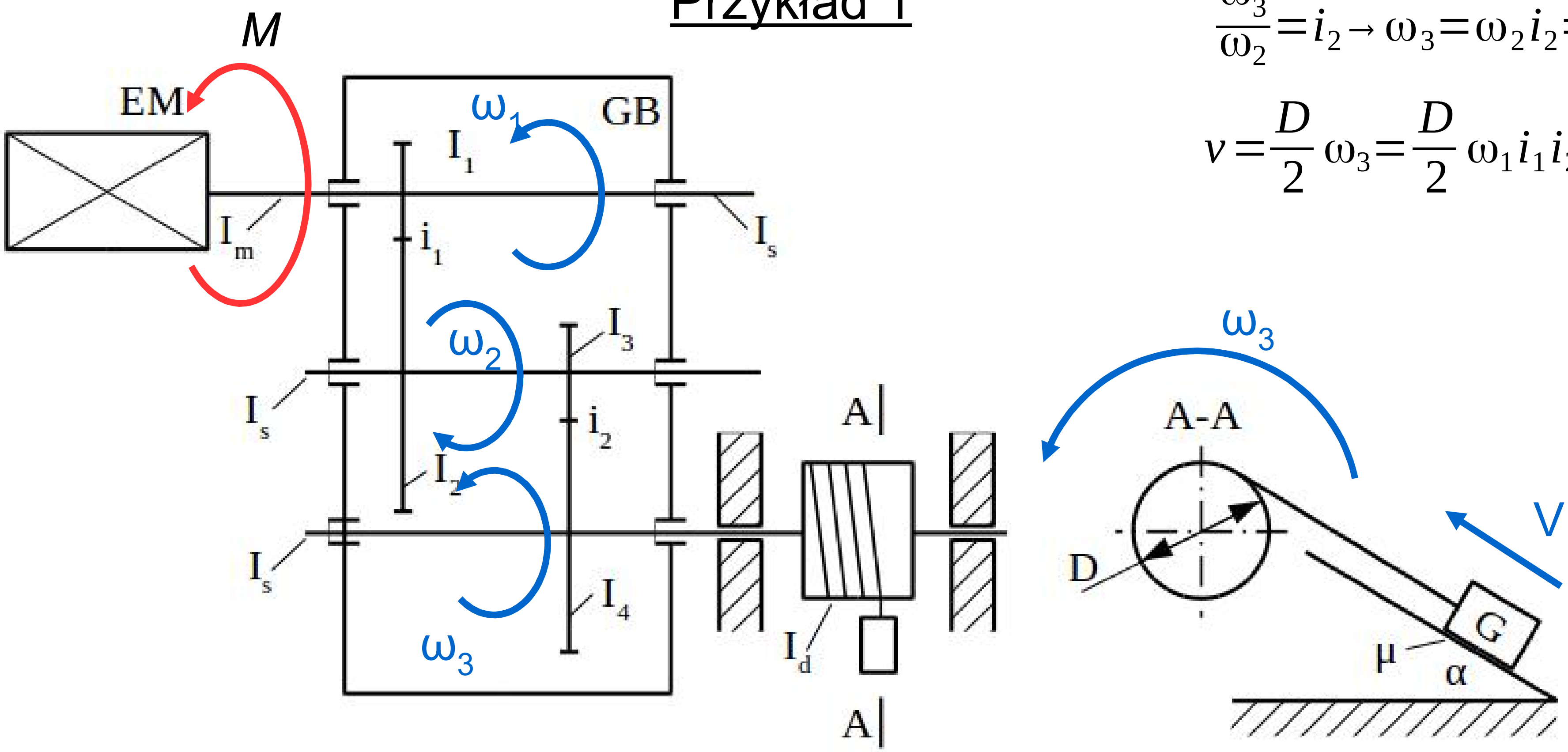
Redukcja mas i sił

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=i_1 \rightarrow \omega_2=\omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=i_2 \rightarrow \omega_3=\omega_2 i_2=\omega_1 i_1 i_2$$

$$v=\frac{D}{2}\omega_3=\frac{D}{2}\omega_1 i_1 i_2$$

Przykład 1



Zredukowany moment bezwładności

$$I_R=I_m+I_1+I_s+(I_2+I_3+I_s)i_1^2+(I_4+I_d+I_s)i_1^2 i_2^2+\frac{G}{g}\frac{D^2}{4}i_1^2 i_2^2$$

Redukcja mas i sił

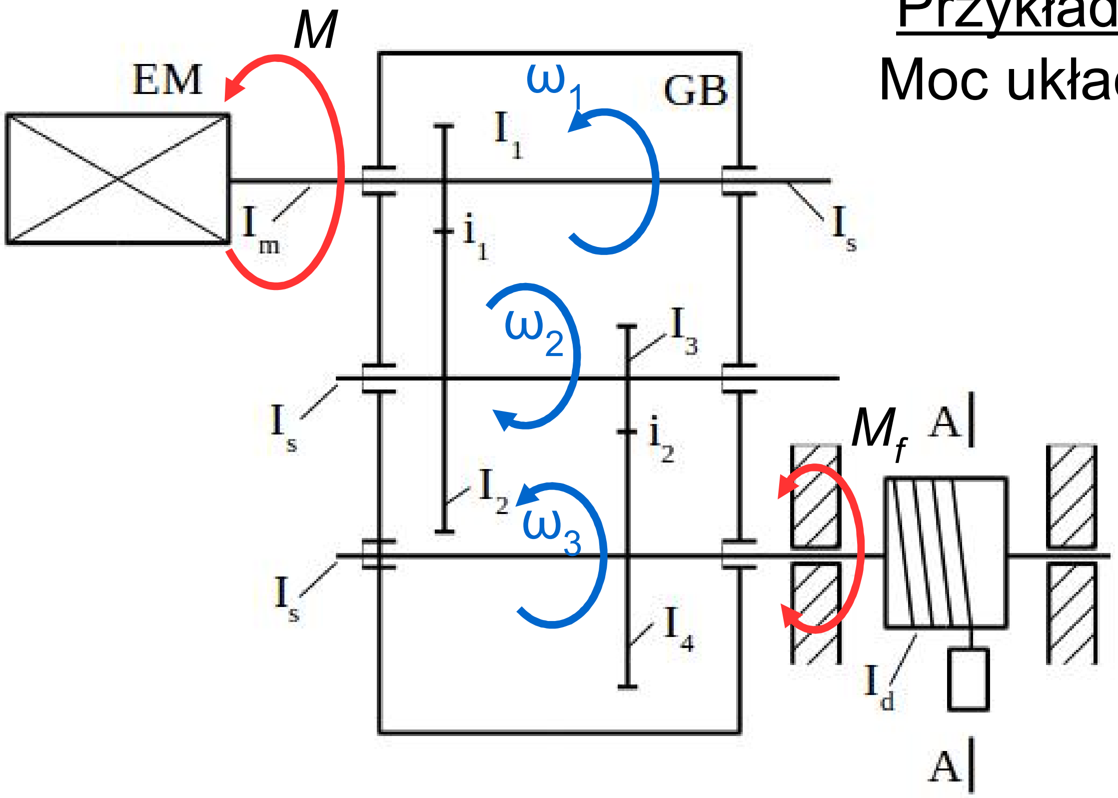
Przykład 1

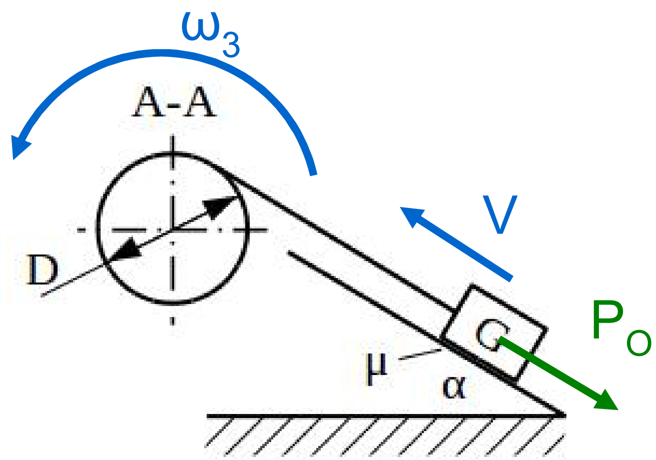
Moc układu

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=i_1 \rightarrow \omega_2=\omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=i_2 \rightarrow \omega_3=\omega_2 i_2=\omega_1 i_1 i_2$$

$$v=\frac{D}{2}\omega_3=\frac{D}{2}\omega_1 i_1 i_2$$





$$P=M\cdot\omega_1-M_f\cdot\omega_3-P_o\cdot V$$

Redukcja mas i sił

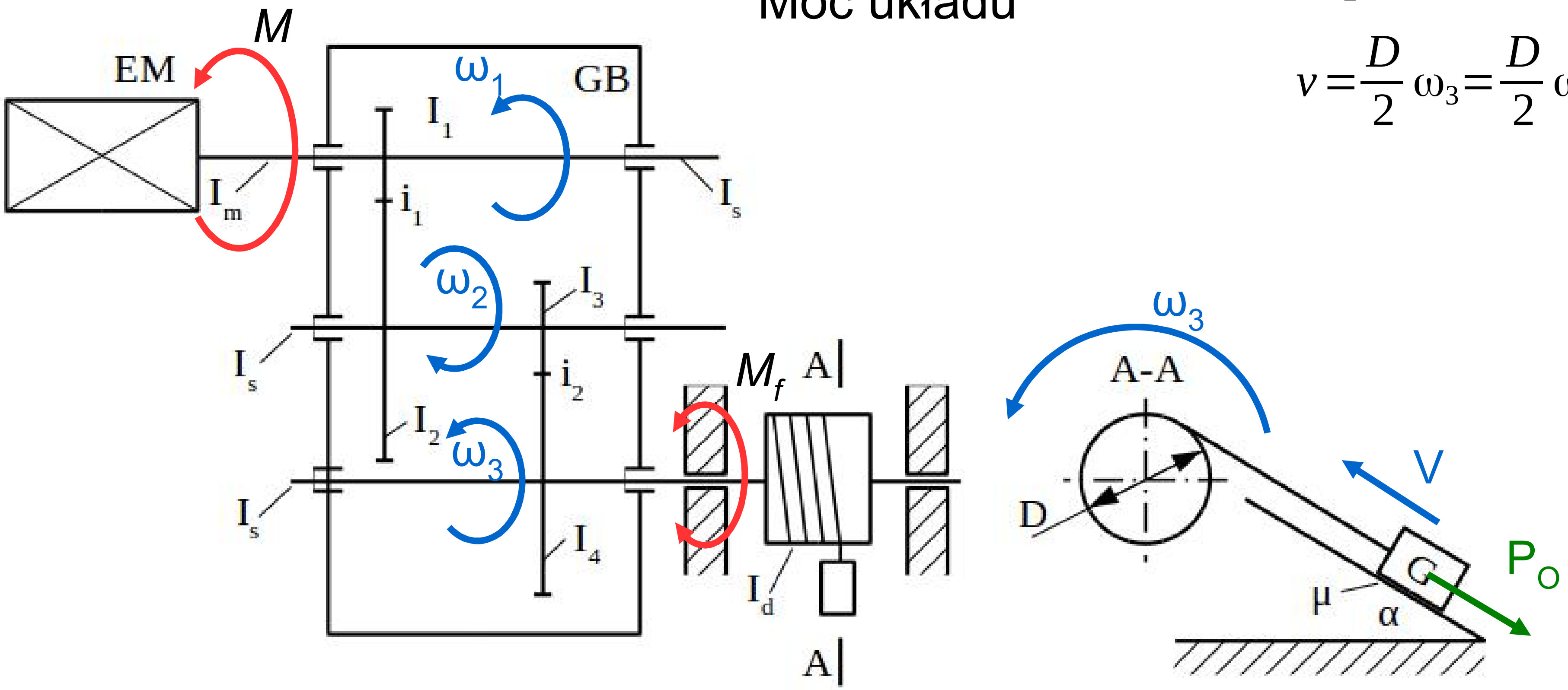
$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=i_1 \rightarrow \omega_2=\omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=i_2 \rightarrow \omega_3=\omega_2 i_2=\omega_1 i_1 i_2$$

$$v=\frac{D}{2}\omega_3=\frac{D}{2}\omega_1 i_1 i_2$$

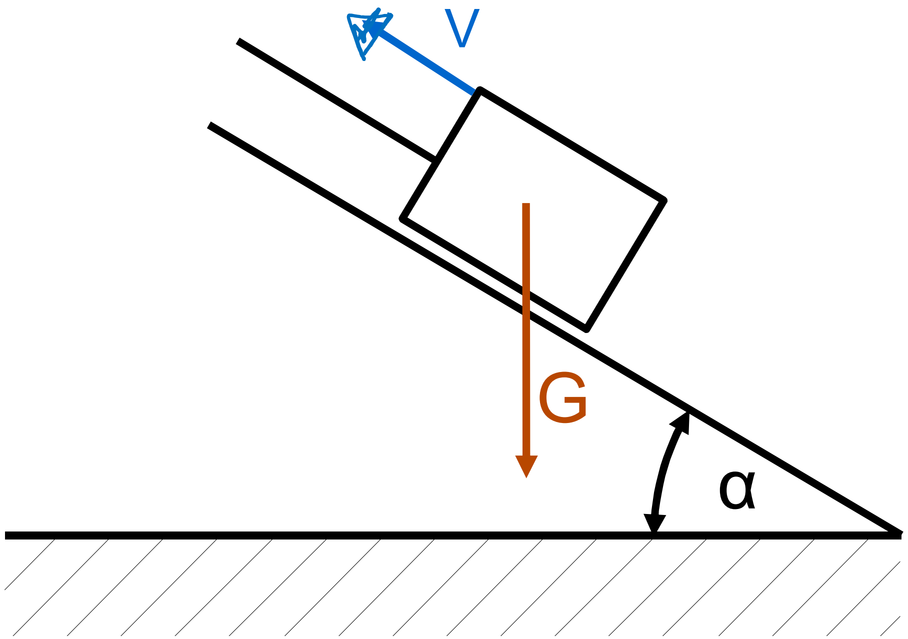
Przykład 1

Moc układu



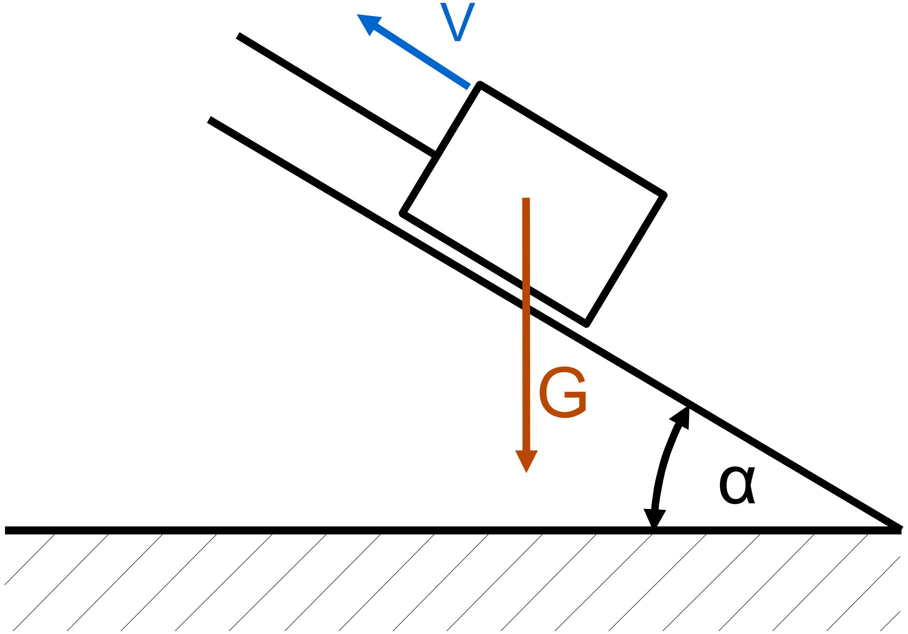
Redukcja mas i sił

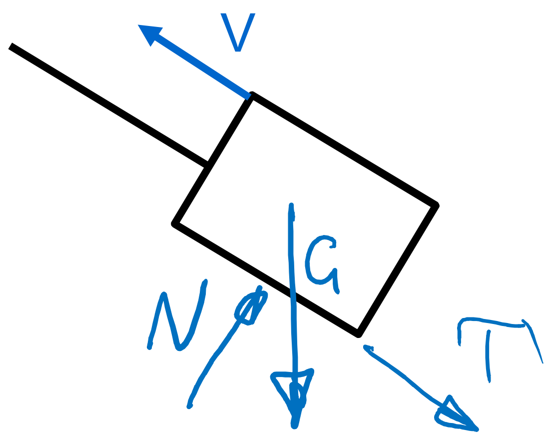
Przykład 1



Redukcja mas i sił

Przykład 1



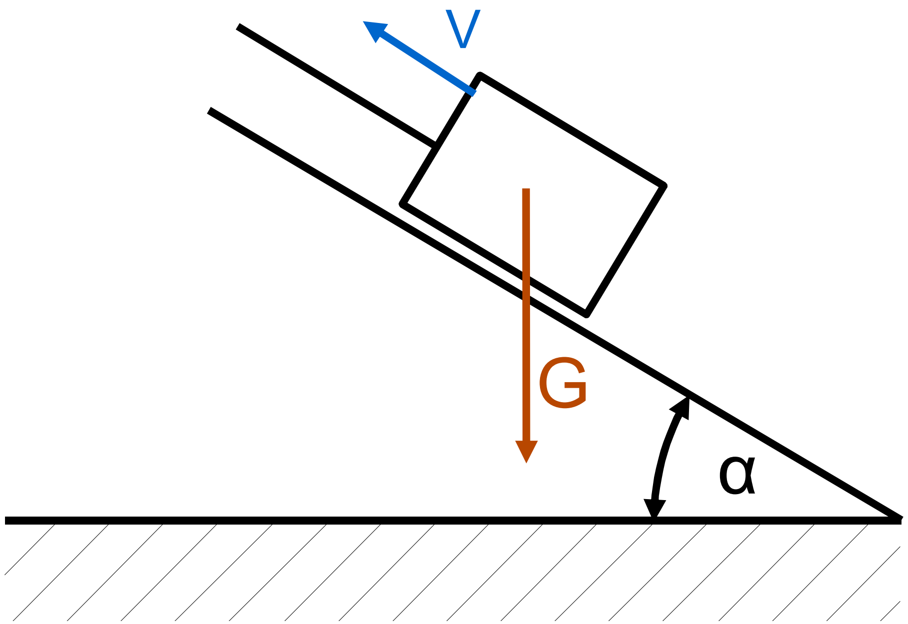


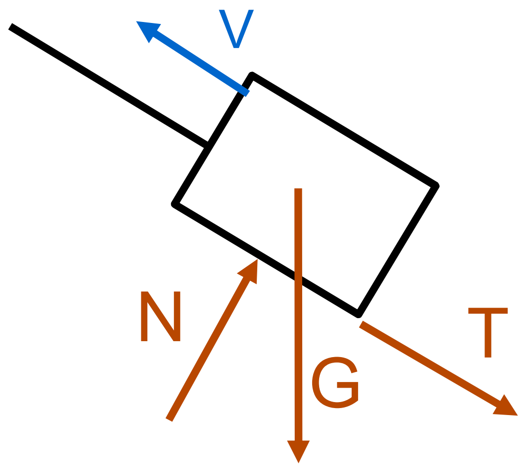
$$P_O = T + G \cdot \sin\alpha = \mu G \cos\alpha + G \sin\alpha$$

$$N\mu; \quad N = G\cos\alpha$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1





$$P_O = T + G\sin\alpha = \mu N + G\sin\alpha = \mu G\cos\alpha + G\sin\alpha$$

Redukcja mas i sił

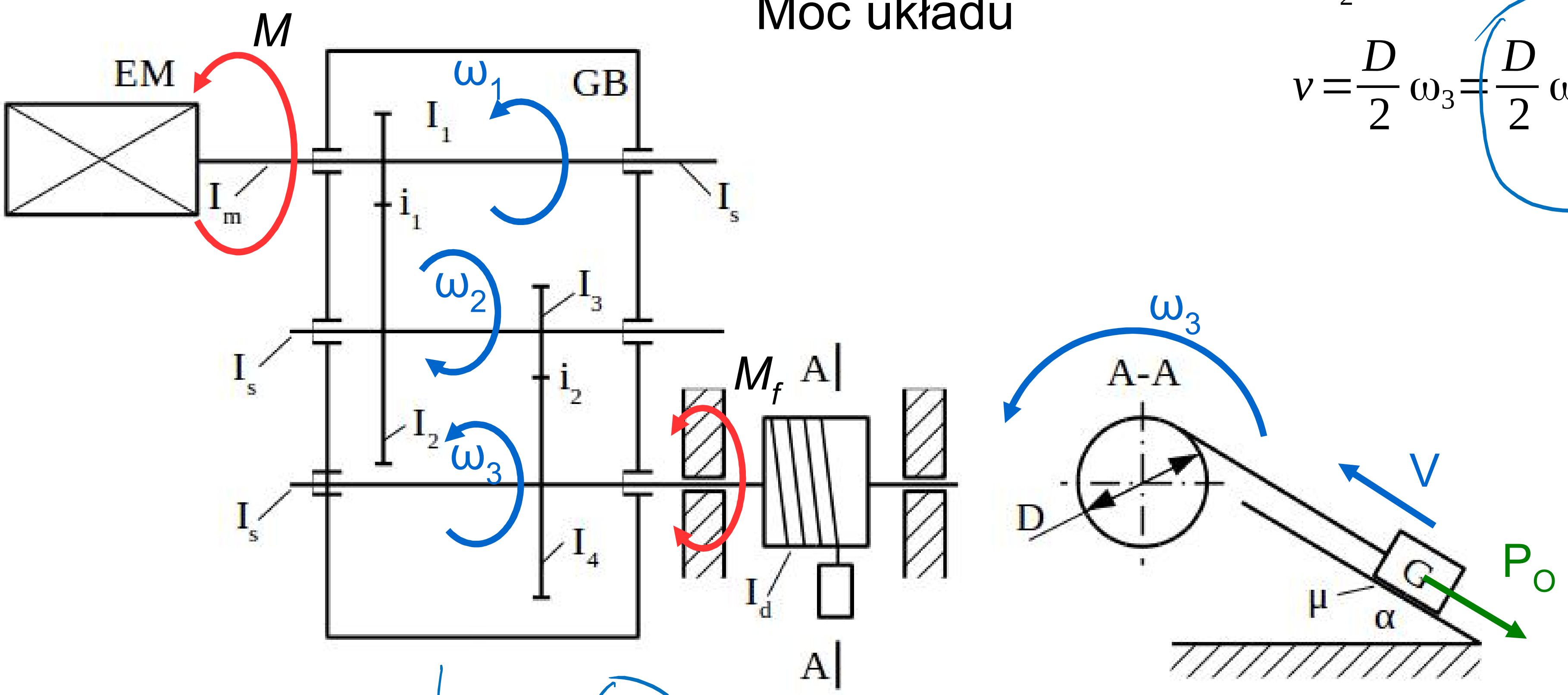
<u>Przykład 1</u>

Moc układu

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=i_1 \rightarrow \omega_2=\omega_1 i_1$$

$$\frac{\omega_3}{\omega_2}=i_2 \rightarrow \omega_3=\omega_2 i_2=\omega_1 i_1 i_2$$

$$v=\frac{D}{2}\omega_3=\frac{D}{2}\omega_1 i_1 i_2$$



$$N=M_s\omega_1-M_f\omega_3-P_O v$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_3 - \left(\mu G \cos\alpha + G \sin\alpha\right) v$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_3 - \left(\mu G \cos\alpha + G \sin\alpha\right) v$$

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_1 i_1 i_2 - \left(\mu G \cos\alpha + G \sin\alpha\right) \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

$$N = M_s\omega_1 - M_f\omega_3 - (\mu G\cos\alpha + G\sin\alpha)v$$

$$N = M_s\omega_1 - M_f\omega_1 i_1 i_2 - (\mu G\cos\alpha + G\sin\alpha)\frac{D}{2}\omega_1 i_1 i_2$$

$$N = \left[\underbrace{M_s - M_f i_1 i_2 - (\mu G\cos\alpha + G\sin\alpha)\frac{D}{2} i_1 i_2}_{\text{Moment zredukowany}}\right]\omega_1$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_3 - \left(\mu G \cos\alpha + G \sin\alpha\right) v$$

$$N = M_s \omega_1 - M_f \omega_1 i_1 i_2 - \left(\mu G \cos\alpha + G \sin\alpha\right) \frac{D}{2} \omega_1 i_1 i_2$$

$$N = \left[M_s - M_f i_1 i_2 - \left(\mu G \cos\alpha + G \sin\alpha\right) \frac{D}{2} i_1 i_2 \right] \omega_1$$

$$M_R = \boxed{M_s} - \underbrace{\left(M_f i_1 i_2 + \left(\mu G \cos\alpha + G \sin\alpha\right) \frac{D}{2} i_1 i_2 \right)}_{\text{zredukowany moment oporów (bierny)}}$$

zredukowany moment napędowy (czynny)

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Moment zredukowany

$$M_R = M_C - M_B$$

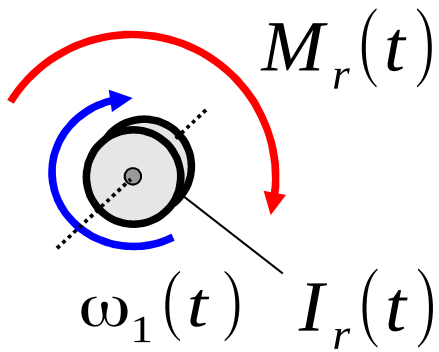
zredukowany moment napędowy (czynny)

zredukowany moment oporów (bierny)

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Rozruch maszyny



$$\boxed{I_R \frac{d\omega_1}{dt} = M_R}$$

$$M_R = A - B\omega_1 - M_B$$

$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = A - B\omega_1 - M_B$$

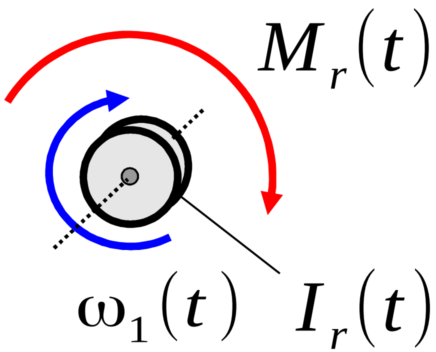
$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} + B\omega_1 = A - M_B$$

$$\frac{d\omega_1(t)}{dt} + \frac{B}{I_R}\omega_1(t) = \frac{A - M_B}{I_R}$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Rozruch maszyny



$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = M_R \qquad M_R = A - B\omega_1 - M_B$$

$$\cancel{\frac{d\omega_1}{dt}} + \frac{B}{I_R}\overset{F}{\omega_1} = \frac{A - M_B}{I_R} \qquad \text{stałe: } A, M_B, B, I_R$$

I rozw. ogólne.

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{B}{I_R}\omega_1 = 0$$

$$\omega_{1og}(t) = E e^{-\frac{B}{I_R}t}$$

II rozw. szczególne

$$\omega_{1sz.}(t) = F$$

↳ podst. do równań $F = \ldots$

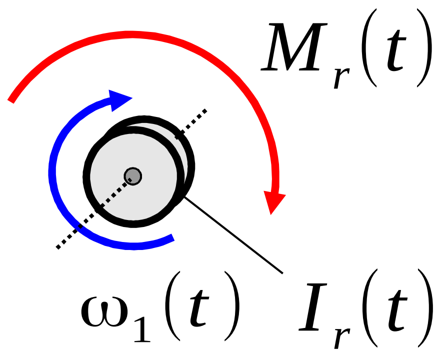
III $\omega(t) = \omega_{1og.}(t) + \omega_{sz.}(t)$

IV WAR. POCZ. $\omega(t=0) = 0$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Rozruch maszyny



$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = M_R$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{B}{I_R}\omega_1 = \frac{A - M_B}{I_R}$$

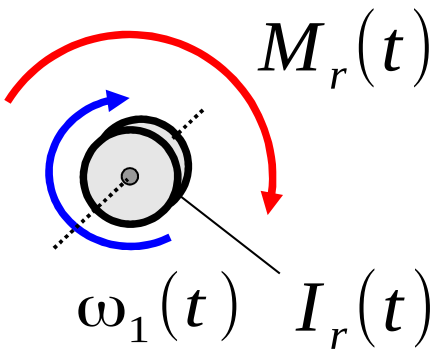
rozwiązanie ogólne

rozwiązanie szczególne

$$\omega_{1og}(t) = E\, e^{-\frac{B}{I_R}t}$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



Rozruch maszyny

$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = M_R$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{B}{I_R}\omega_1 = \frac{A - M_B}{I_R}$$

rozwiązanie ogólne

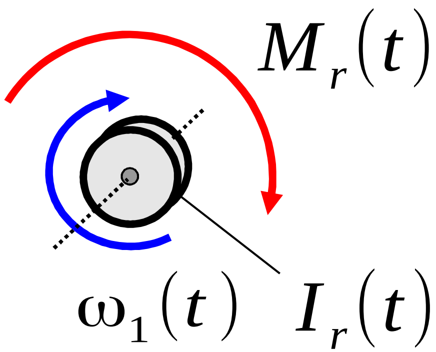
$$\omega_{1og}(t) = E\, e^{-\frac{B}{I_R}t}$$

rozwiązanie szczególne

$$\omega_{1sz}(t) = F$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1



Rozruch maszyny

$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = M_R$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{B}{I_R}\omega_1 = \frac{A - M_B}{I_R}$$

rozwiązanie ogólne

$$\omega_{1og}(t) = E\, e^{-\frac{B}{I_R}t}$$

rozwiązanie szczególne

$$\omega_{1sz}(t) = F$$

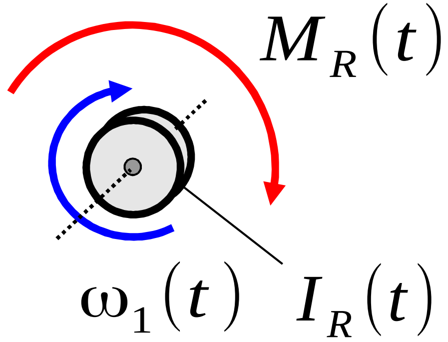
warunek początkowy

$$\omega_1(t=0) = 0$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Rozruch maszyny



$$I_R \frac{d\omega_1}{dt} = M_R$$

$$\frac{d\omega_1}{dt} + \frac{B}{I_R}\omega_1 = \frac{A - M_B}{I_R}$$

rozwiązanie ogólne

$$\omega_{1og}(t) = E\, e^{-\frac{B}{I_R}t}$$

rozwiązanie szczególne

$$\omega_{1sz}(t) = F$$

warunek początkowy

$$\omega_1(t=0) = 0$$

$$\omega_1(t) = \frac{A - M_B}{B}\left(1 - e^{-\frac{B}{I_R}t}\right)$$

Redukcja mas i sił

Przykład 1

Rozruch maszyny

$$\omega_1(t)=\frac{A-M_B}{B}\left(1-e^{-\frac{B}{I_R}t}\right)$$