



Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

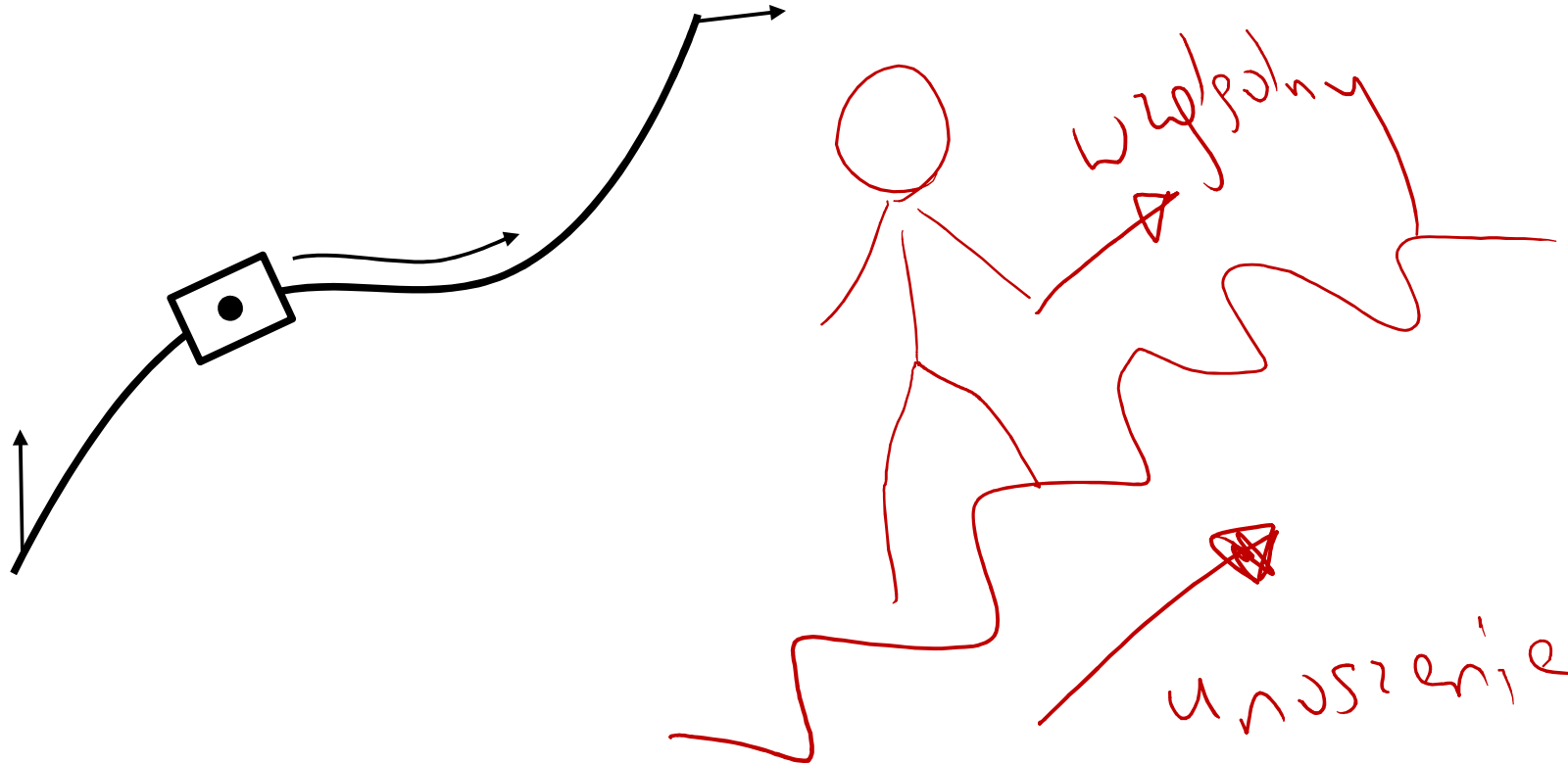
Podstawy automatyki i teorii maszyn
semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

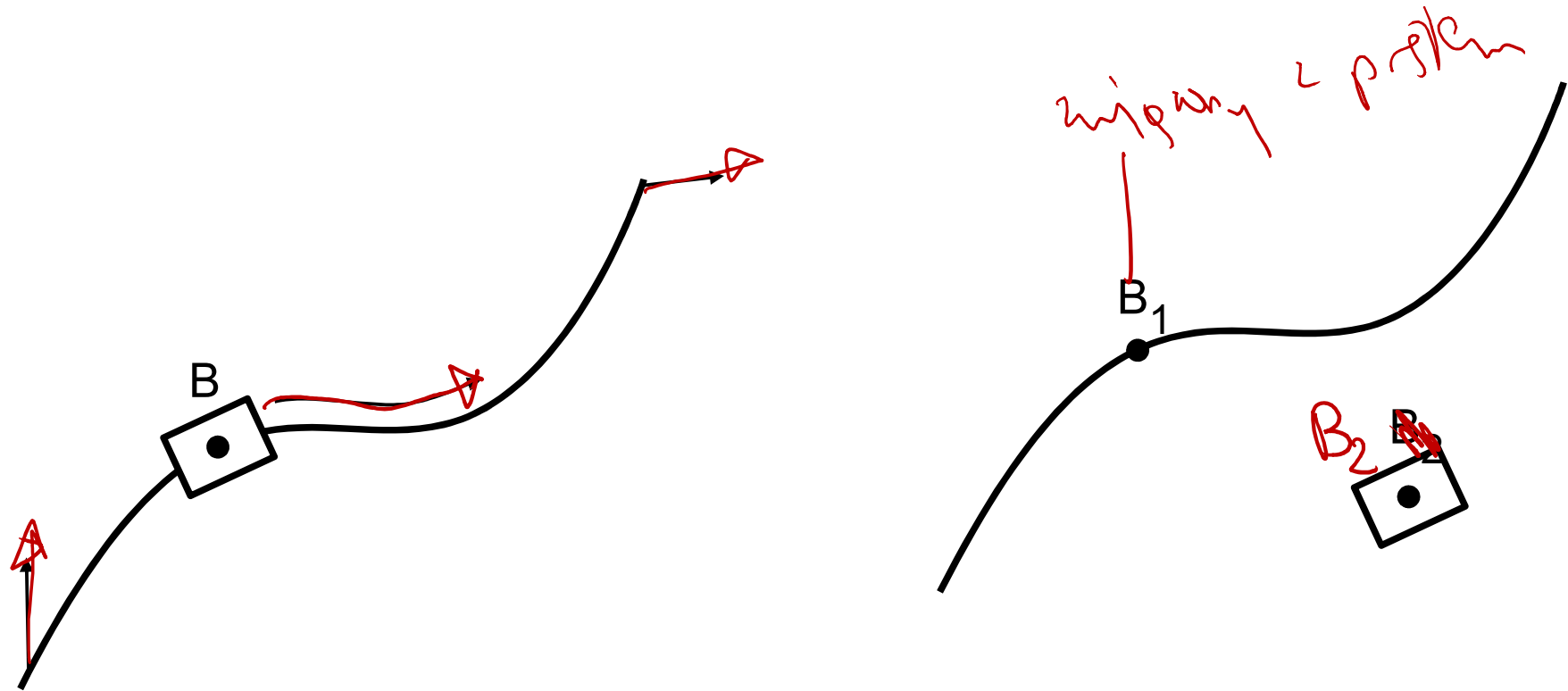
Wykład 4

Ruch złożony.
Analityczna metoda wyznaczania prędkości
i przyspieszeń mechanizmów płaskich.
Mechanizmy krzywkowe.

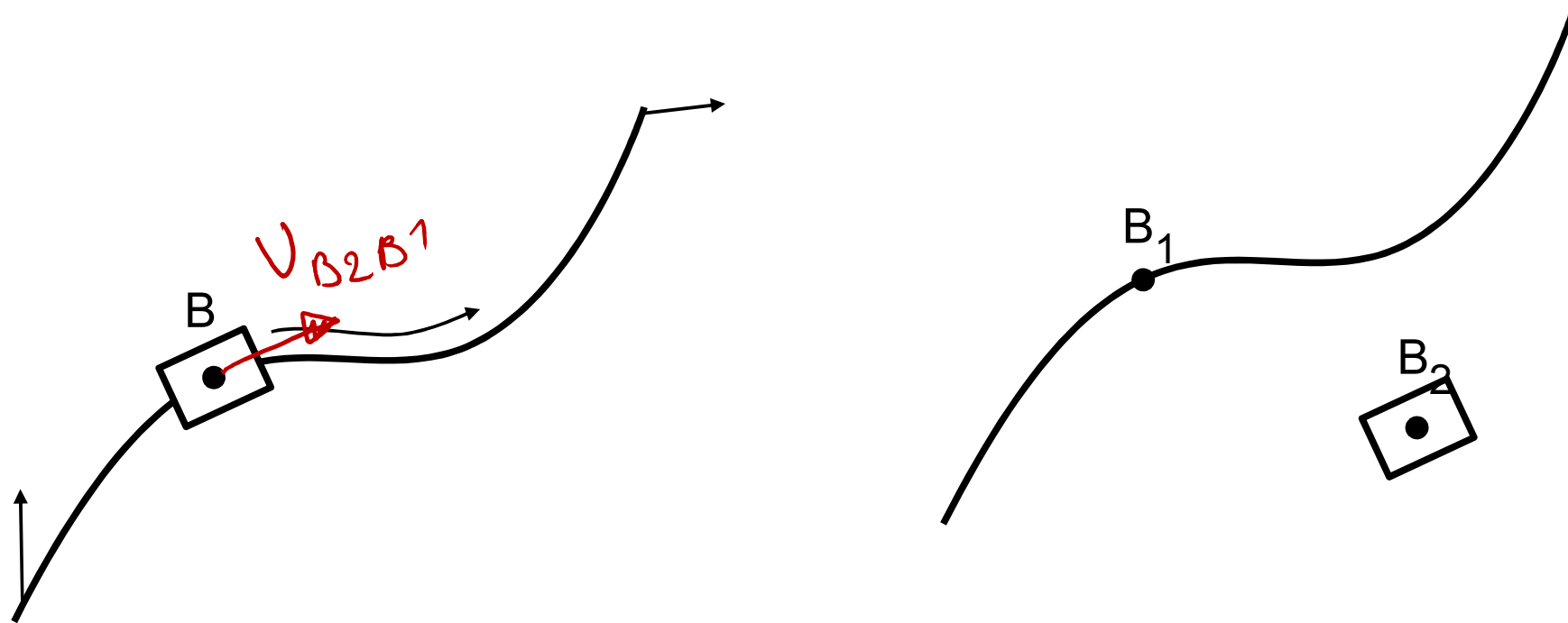
Prędkości w ruchu złożonym



Prędkości w ruchu złożonym



Prędkości w ruchu złożonym



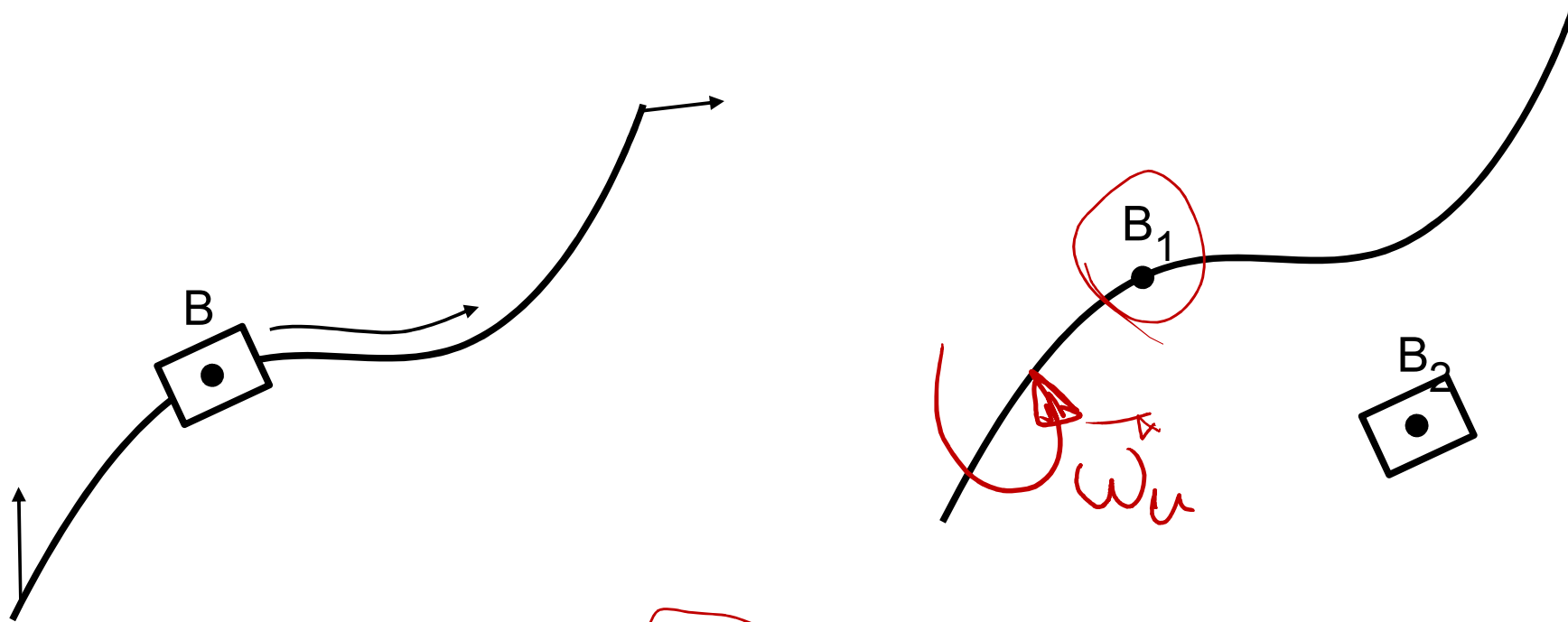
$$\vec{v}_{B_2} = \vec{v}_{B_1} + \vec{v}_{B_2B_1}$$

Prędkość bezwzględna punktu B_2

Prędkość unoszenia (prędkość bezwzględna punktu B_1)

Prędkość względna

Przyspieszenia w ruchu złożonym



$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B1}^u + \vec{a}_{B2B1}^w + \vec{a}^c$$

Bezwzględne przyspieszenie punktu B2

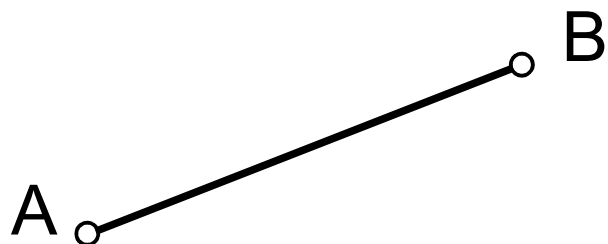
Przyspieszenie unoszenia (bezwzględne przyspieszenie punktu B1)

Przyspieszenie względne

Przyspieszenie Coriolisa

$$\vec{a}^c = 2 \vec{\omega}_u \times \vec{v}_{B2B1}$$

Metody rozkładu ruchu płaskiego



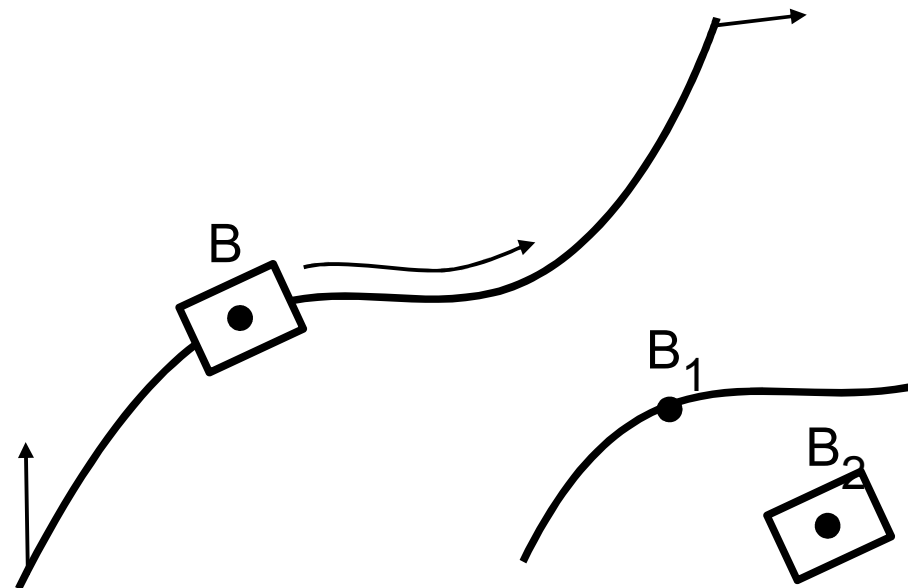
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

\downarrow AB

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$$

\nearrow $n+t$

Ruch złożony



$$\vec{v}_{B2} = \vec{v}_{B1} + \vec{v}_{B2B1}$$

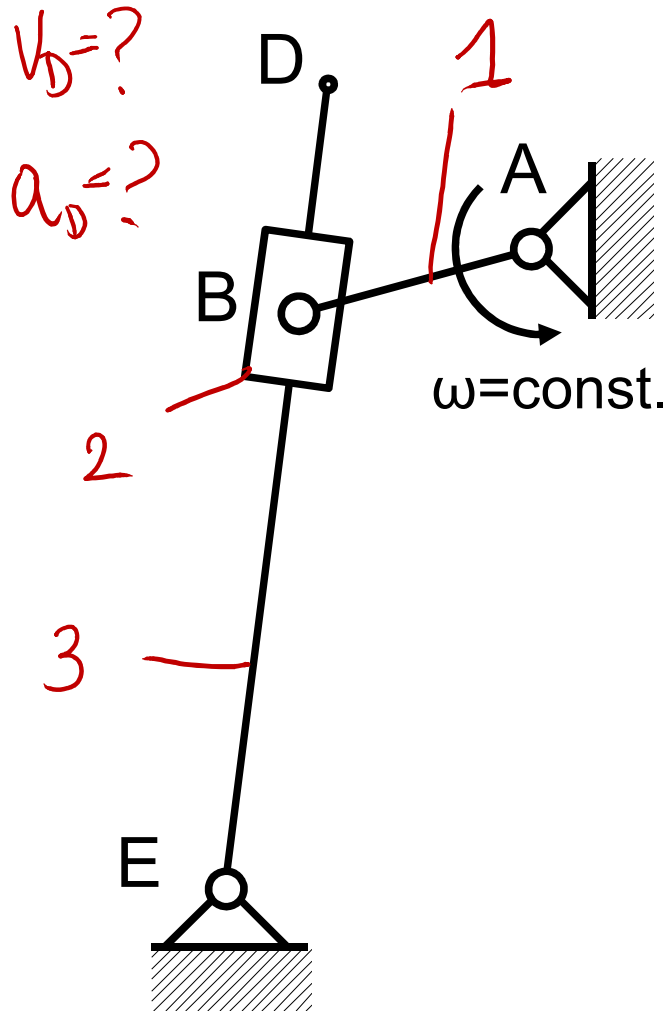
styczna

$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B1}^u + \vec{a}_{B2B1}^w + \vec{a}^c$$

Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

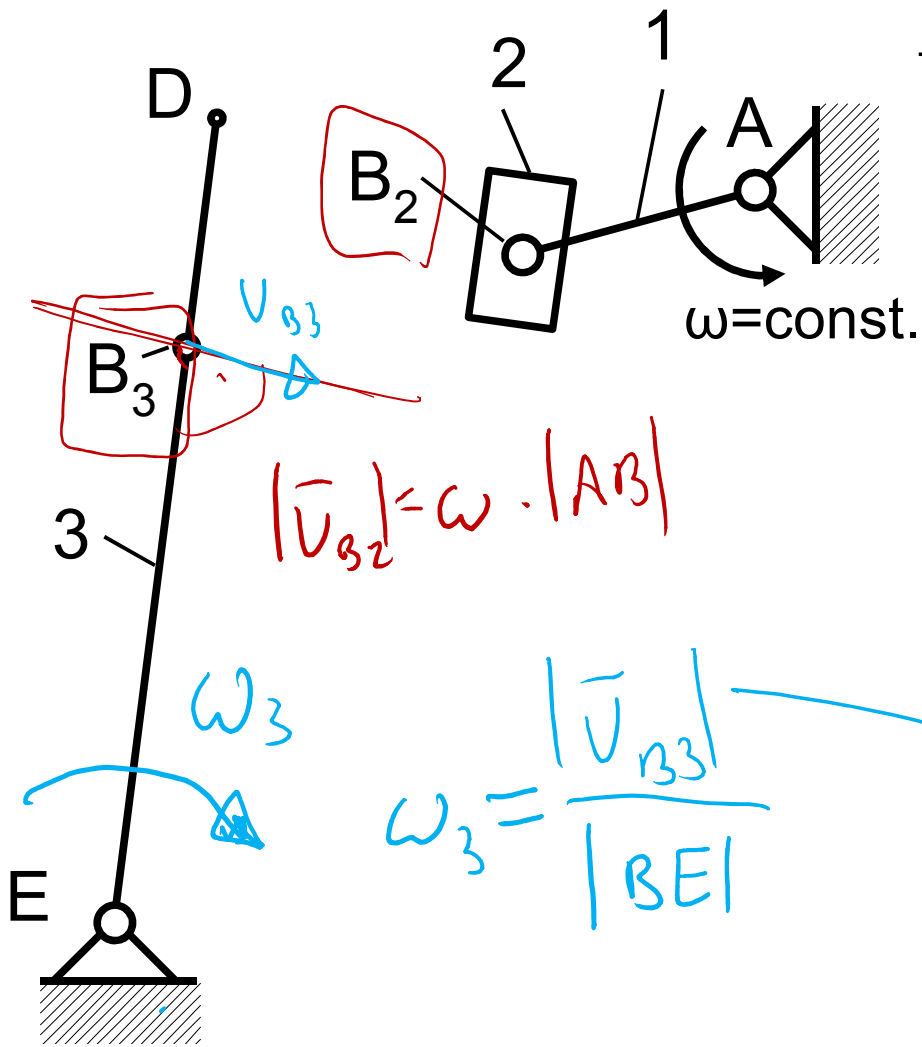
Przykład

Dane: geometria, prędkość
kątowna członu napędowego



Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

Przykład

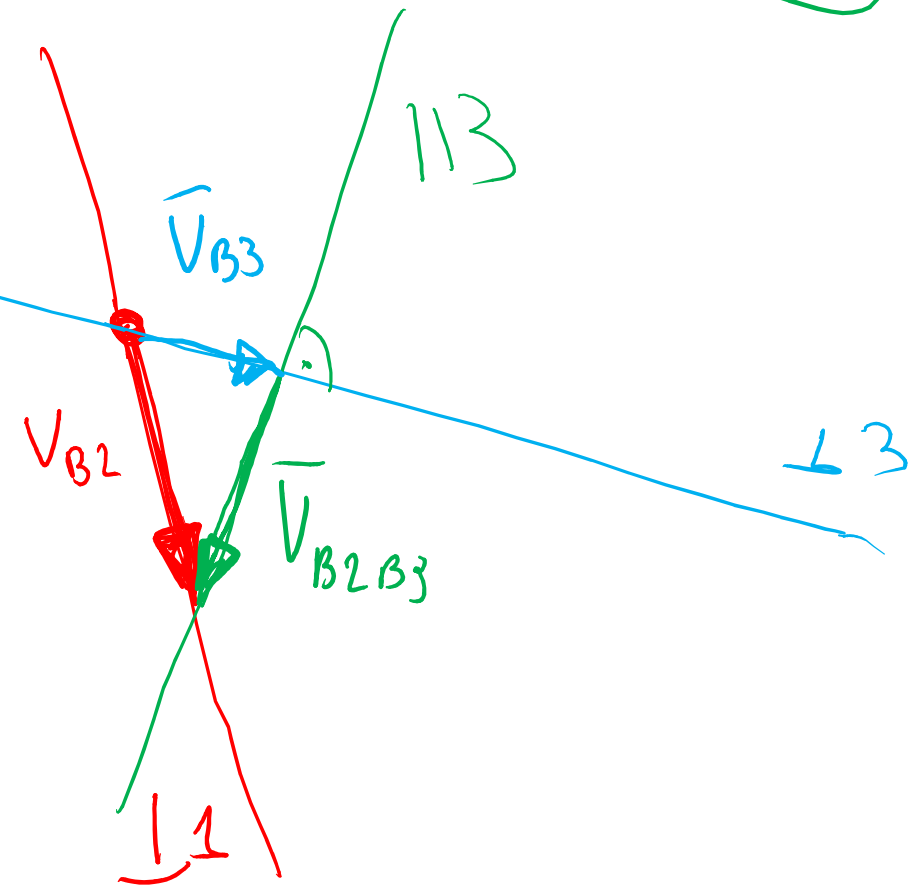


$$\frac{v_{B2}}{L1} = \frac{v_{B3}^u}{L3} = \frac{v_{B2B3}}{l13}$$

$$|\bar{v}_{B2}| = \omega \cdot |AB|$$

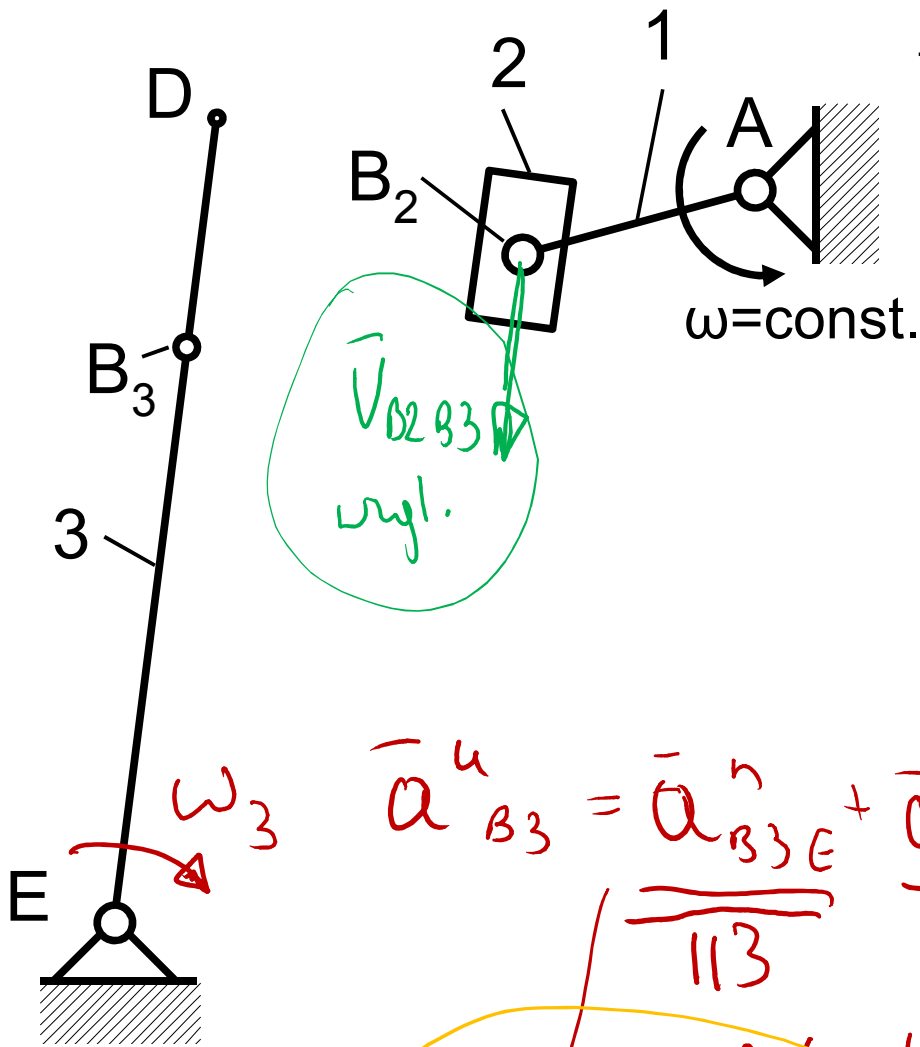
$$\omega_3 = \frac{|\bar{v}_{B3}|}{|BE|}$$

$$|\bar{v}_D| = \omega_3 \cdot |DE|$$



Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

Przykład



\vec{V}_{B2B3}
wzgl.

$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B3}^u + \frac{\vec{a}_{B2B3}^w}{||3} + \underline{\underline{\vec{a}^c}}$$

$$\vec{a}_{B2} = \frac{\vec{a}_{B2A}^n}{||1} + \frac{\vec{a}_{B2A}^t}{||1}$$

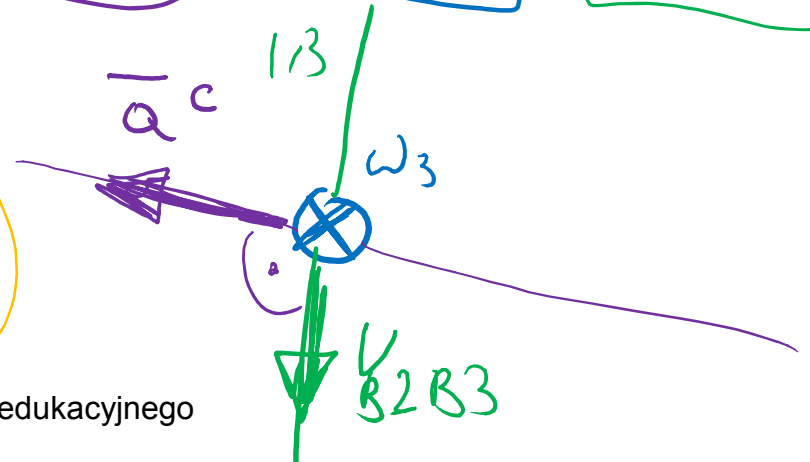
$\vec{a}_{B2A}^n = \omega^2 |AB|$ $\vec{a}_{B2A}^t = \epsilon |AB| = 0$ bo $\omega = \text{const!}$

$$\vec{a}_{B3}^u = \frac{\vec{a}_{B3E}^n}{||3} + \frac{\vec{a}_{B3E}^t}{\perp 3}$$

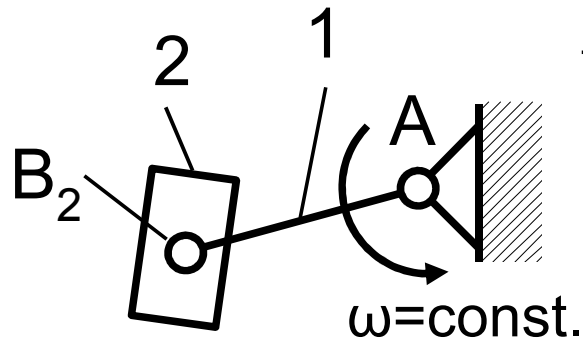
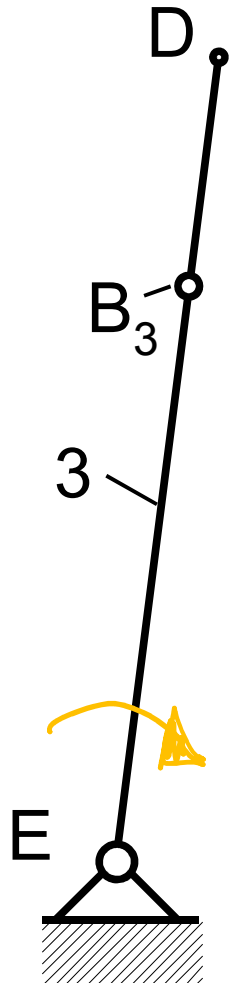
$$\vec{a}^c = 2 \omega_3 \times \vec{V}_{B2B3}$$

$\omega_3^2 |BE|$

$$\underline{\underline{\vec{a}_{B2A}^n}} = \underline{\underline{\vec{a}_{B3E}^n}} + \underline{\underline{\vec{a}_{B3E}^t}} + \underline{\underline{\vec{a}_{B2B3}^w}} + \underline{\underline{\vec{a}^c}}$$

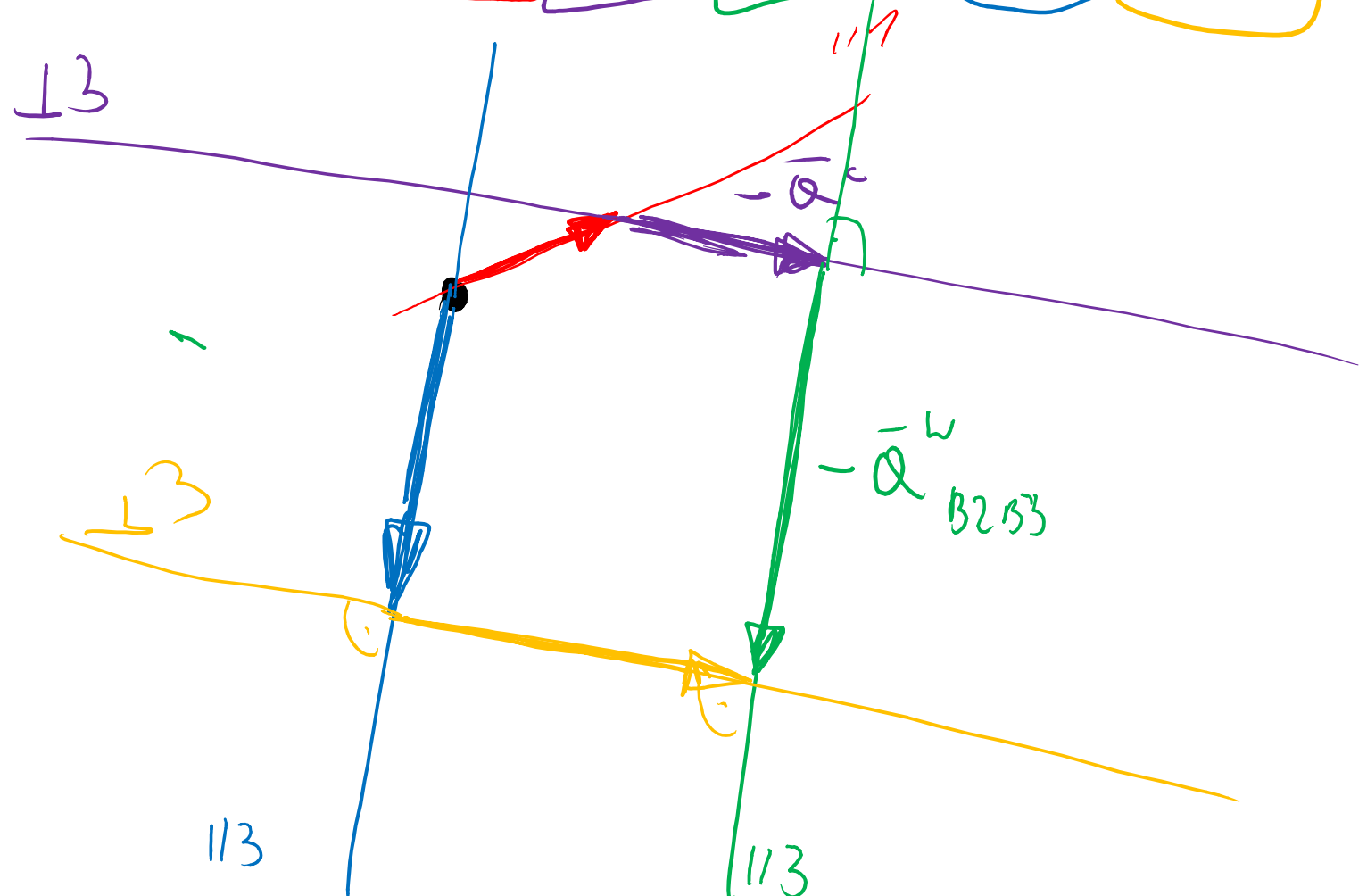


Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym



Przykład

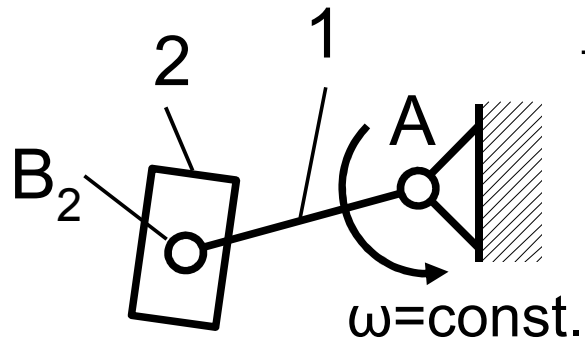
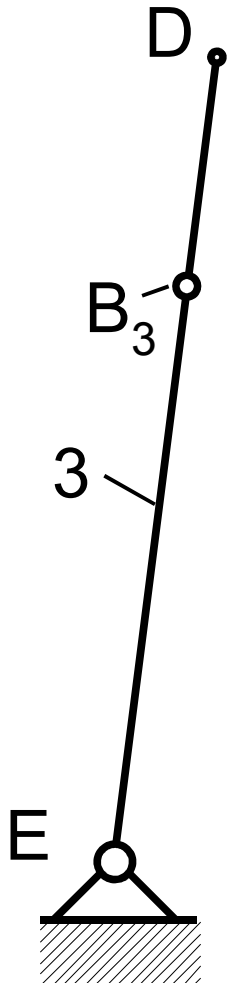
$$\underbrace{\frac{\overline{\omega}_{B_2A}^n}{l_1}}_{\parallel 1} \underbrace{- \overline{\omega}^c}_{\perp 3} \underbrace{- \overline{a}_{B_2B_3}^w}_{\parallel 3} = \underbrace{\overline{\omega}_{B_3E}^n}_{\parallel 3} \underbrace{+ \overline{\omega}_{B_3E}^t}_{\perp 3}$$



$$a_3 = \frac{|\overline{\omega}_{B_3E}^t|}{|B_3E|}$$

Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

Przykład

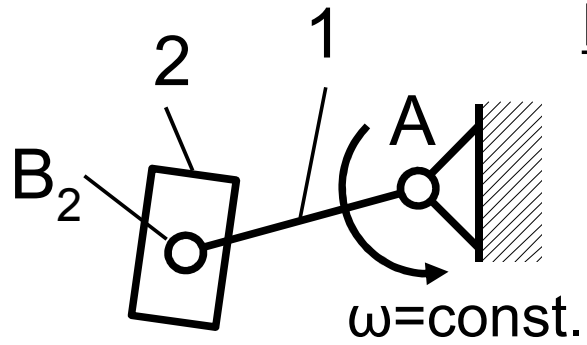
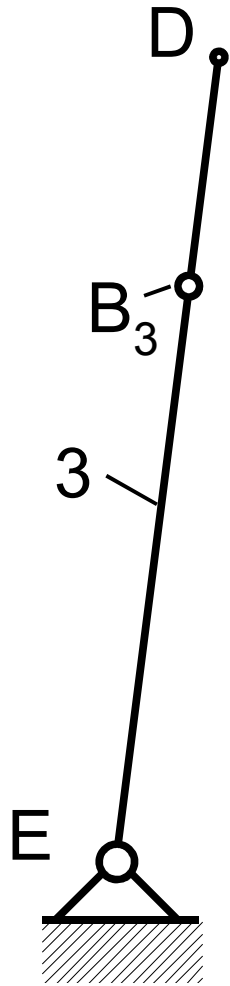


$$\bar{a}_D = \bar{a}_{DE}^n + \bar{a}_{DE}^t$$

$$\hookrightarrow \omega_3^2 |DE| \quad \hookrightarrow \epsilon_3 |DE|$$

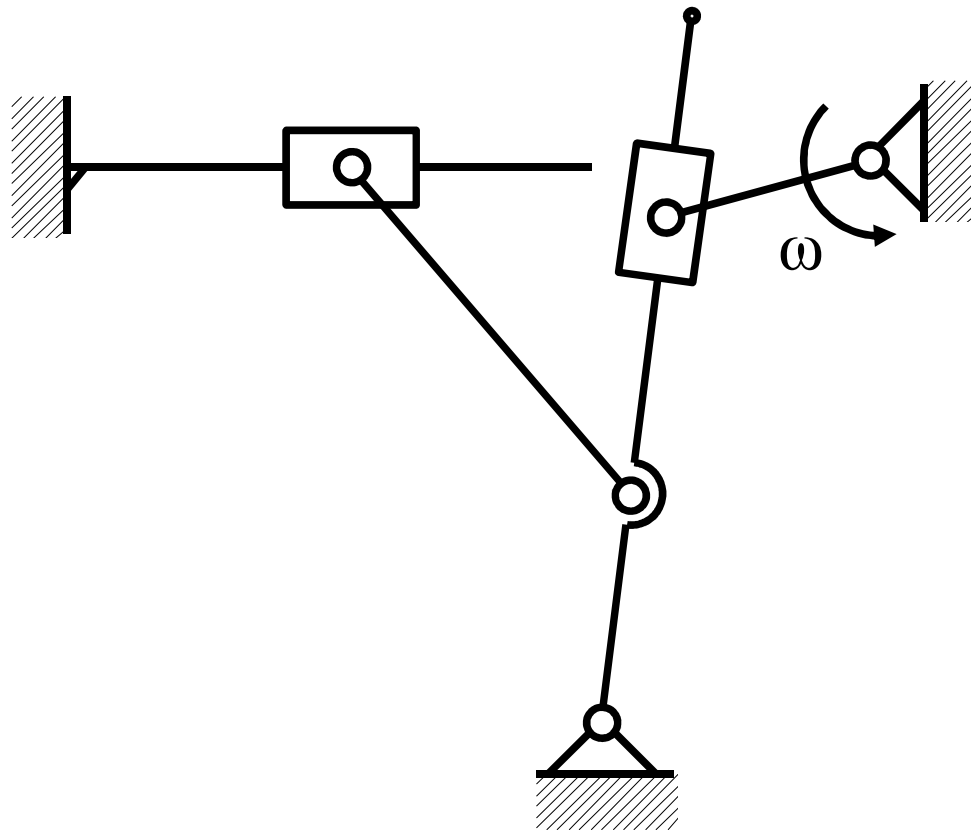
Prędkości i przyspieszenia w ruchu złożonym

Przykład



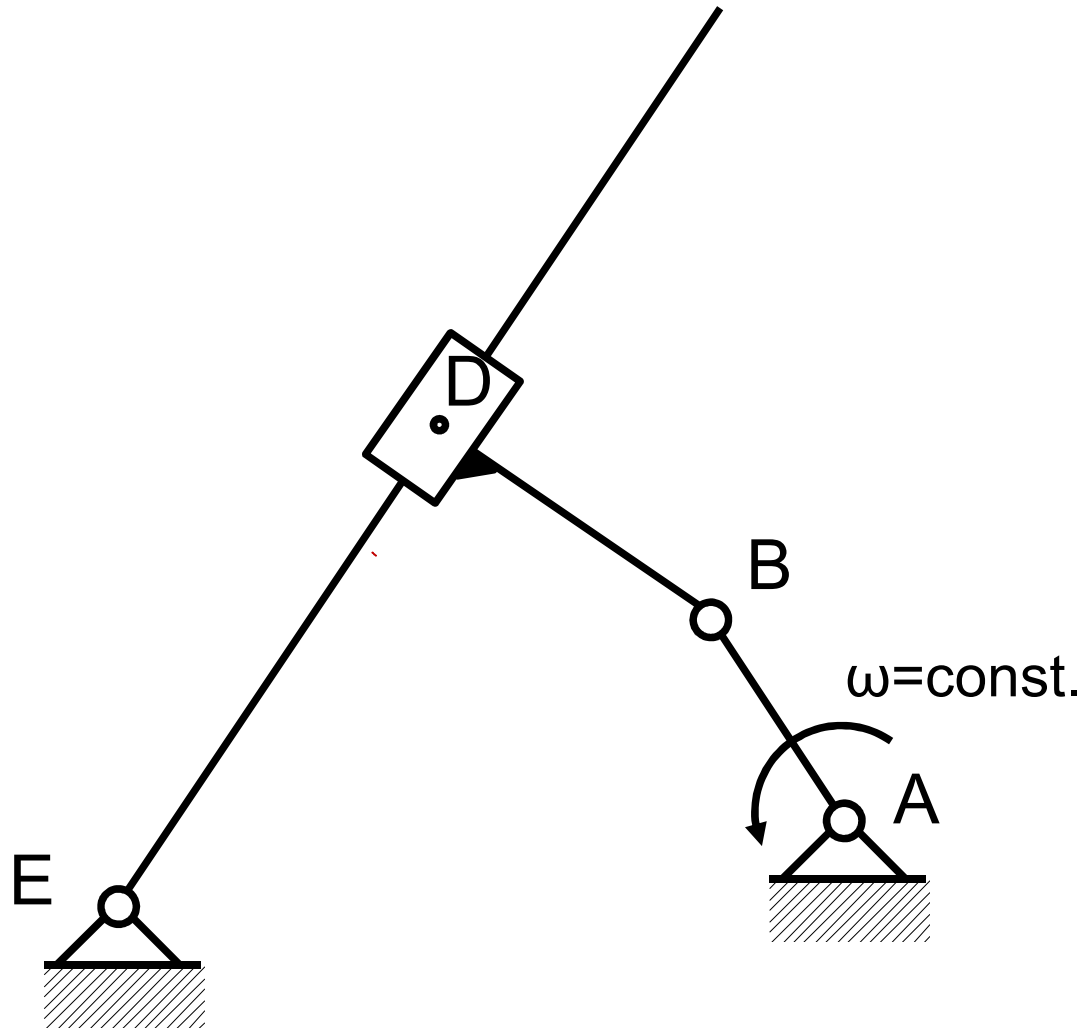
Prędkości i przyspieszenia

Przykład do projektów – rozwiązany w dodatku 1 do wykładu 3



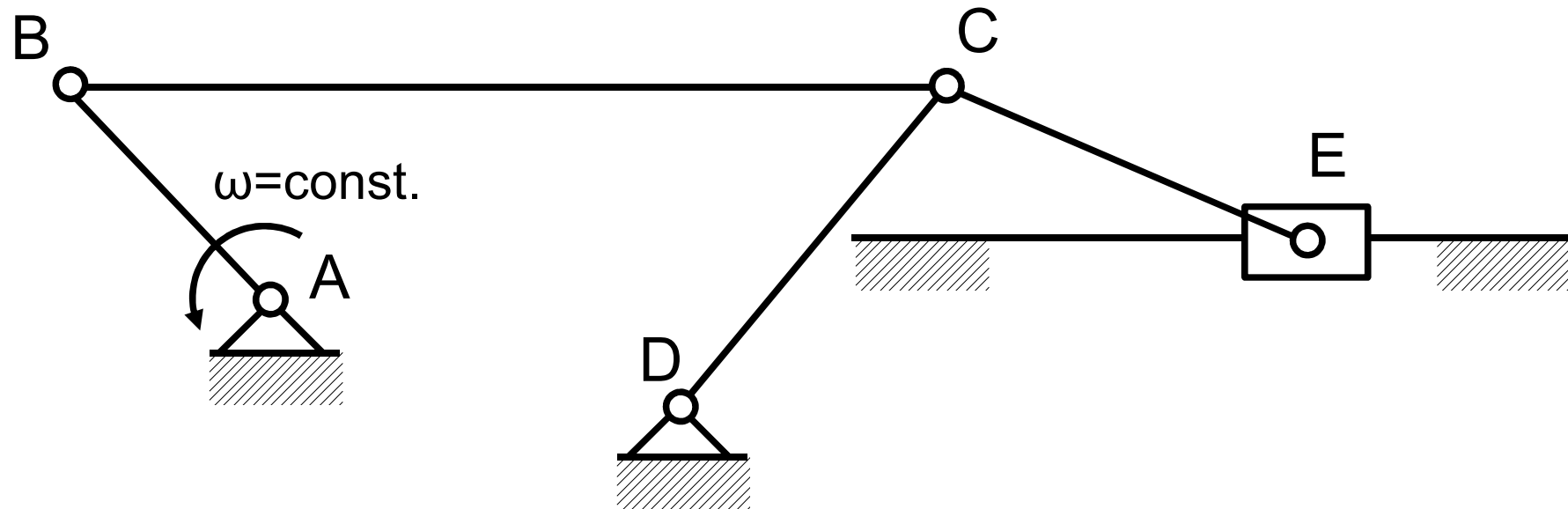
Metoda rozszerzania członu

Przykład do projektów – rozwiązany w dodatku 2 do wykładu 3



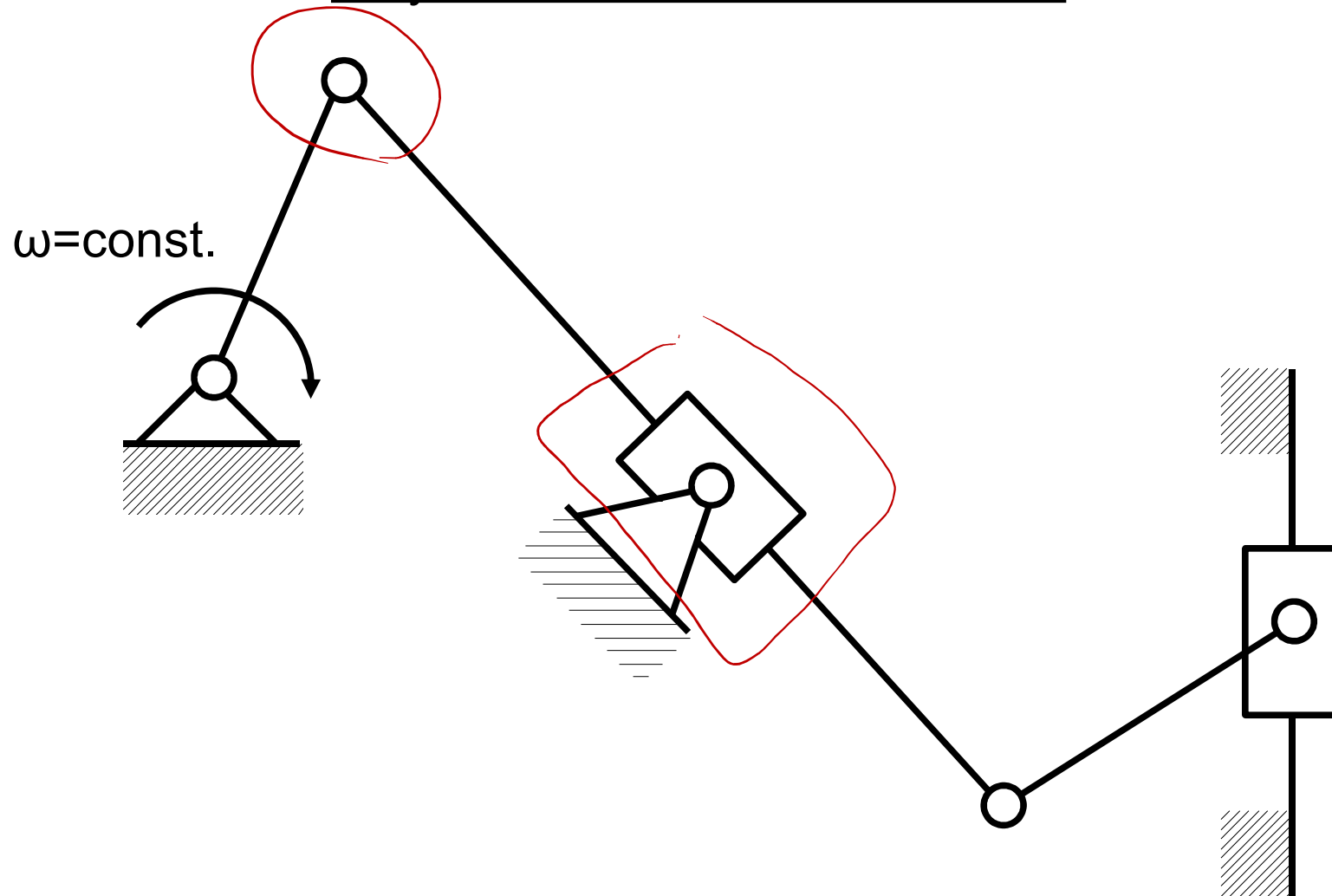
Prędkości i przyspieszenia

Przykład – do ćwiczenia w domu



Prędkości i przyspieszenia

Przykład – do ćwiczenia w domu



Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

1. Wprowadzić kartezjański układ współrzędnych O_{xy} .

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

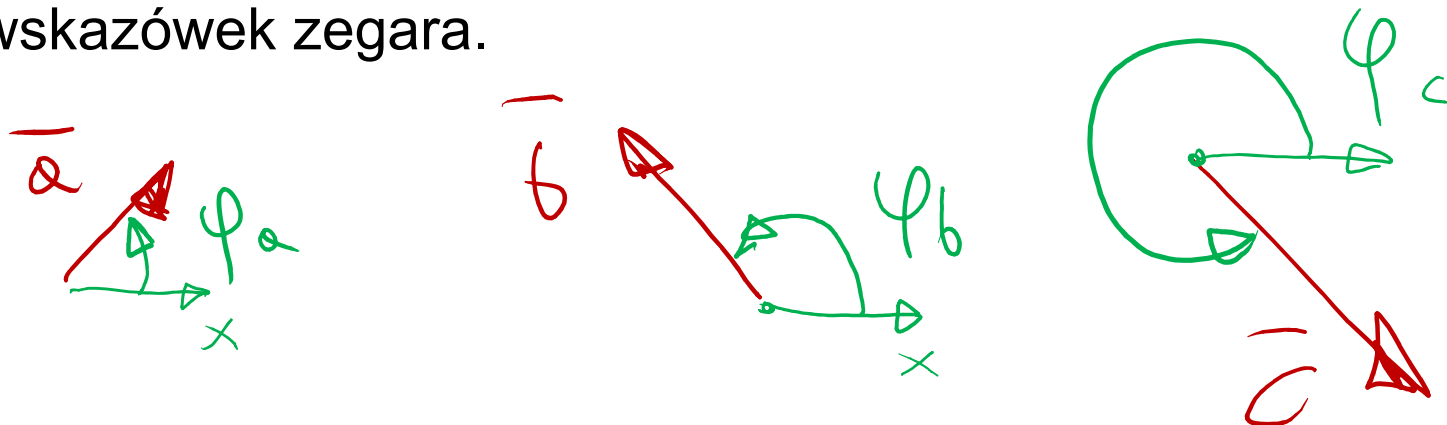
1. Wprowadzić kartezjański układ współrzędnych O_{xy} .
2. Człony mechanizmu zastąpić układem wektorów, które mogą w czasie ruchu mechanizmu zmieniać swoją długość, położenie i orientację.

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

1. Wprowadzić kartezjański układ współrzędnych O_{xy} .
2. Człony mechanizmu zastąpić układem wektorów, które mogą w czasie ruchu mechanizmu zmieniać swoją długość, położenie i orientację.
3. Wprowadzone wektory muszą tworzyć zamknięte wieloboki, często występując w obrębie grup strukturalnych mechanizmu.

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

1. Wprowadzić kartezjański układ współrzędnych O_{xy} .
2. Człony mechanizmu zastąpić układem wektorów, które mogą w czasie ruchu mechanizmu zmieniać swoją długość, położenie i orientację.
3. Wprowadzone wektory muszą tworzyć zamknięte wieloboki, często występując w obrębie grup strukturalnych mechanizmu.
4. Dla wszystkich wektorów wprowadzić jednakowo określone kąty ich orientacji względem wybranej osi (tzw. kąty skierowane). Przyjmijmy, że będą to kąty między dodatnią półosią osi x układu współrzędnych a dodatnim kierunkiem wektora, mierzone z dodatnim znakiem przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

4. Dla wszystkich wektorów wprowadzić jednakowo określone kąty ich orientacji względem wybranej osi (tzw. kąty skierowane). Przyjmijmy, że będą to kąty między dodatnią półosią osi x układu współrzędnych a dodatnim kierunkiem wektora, mierzone z dodatnim znakiem przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

1. Wprowadzić kartezjański układ współrzędnych O_{xy} .
2. Człony mechanizmu zastąpić układem wektorów, które mogą w czasie ruchu mechanizmu zmieniać swoją długość, położenie i orientację.
3. Wprowadzone wektory muszą tworzyć zamknięte wieloboki, często występując w obrębie grup strukturalnych mechanizmu.
4. Dla wszystkich wektorów wprowadzić jednakowo określone kąty ich orientacji względem wybranej osi (tzw. kąty skierowane). Przyjmijmy, że będą to kąty między dodatnią półosią osi x układu współrzędnych a dodatnim kierunkiem wektora, mierzone z dodatnim znakiem przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.
5. Dla każdego z wieloboku wektorów zapisać wektorowe równanie ich sumy, np.:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \vec{l}_i = 0$$

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

6. Zrzutować równania wektorowe na osie układu współrzędnych, np.:

$$x: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \cos \varphi_i = 0$$

$$y: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \sin \varphi_i = 0$$

$$|a| \cos \varphi_a + |b| \cos \varphi_b = |c| \cos \varphi_c + |d| \cos \varphi_d$$

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

6. Zrzutować równania wektorowe na osie układu współrzędnych, np.:

$$x: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \cos \varphi_i = 0 \qquad y: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \sin \varphi_i = 0$$

(przyjęcie jednakowej procedury wprowadzania kątów skierowanych pozwala wykonać powyższe rzutowanie bez konieczności rozpatrywania znaków)

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

6. Zrzutować równania wektorowe na osie układu współrzędnych, np.:

$$x: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \cos \varphi_i = 0 \qquad y: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \sin \varphi_i = 0$$

(przyjęcie jednakowej procedury wprowadzania kątów skierowanych pozwala wykonać powyższe rzutowanie bez konieczności rozpatrywania znaków)

Na tym etapie warto oznaczyć, które długości wektorów i kąty skierowania są znane (są stałe bo wynikają z geometrii mechanizmu), a które się zmieniają i są niewiadomymi funkcjami.

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

6. Zrzutować równania wektorowe na osie układu współrzędnych, np.:

$$x: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \cos \varphi_i = 0 \qquad y: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \sin \varphi_i = 0$$

(przyjęcie jednakowej procedury wprowadzania kątów skierowanych pozwala wykonać powyższe rzutowanie bez konieczności rozpatrywania znaków)

Na tym etapie warto oznaczyć, które długości wektorów i kąty skierowania są znane (są stałe bo wynikają z geometrii mechanizmu), a które się zmieniają i są niewiadomymi funkcjami.

W prawidłowo postawionym zadaniu na koniec tego etapu liczba niewiadomych powinna być równa liczbie równań rzutów.

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

6. Zrzutować równania wektorowe na osie układu współrzędnych, np.:

$$x: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \cos \varphi_i = 0 \qquad y: \sum_{i=1}^{i=n} |\vec{l}_i| \sin \varphi_i = 0$$

(przyjęcie jednakowej procedury wprowadzania kątów skierowanych pozwala wykonać powyższe rzutowanie bez konieczności rozpatrywania znaków)

Na tym etapie warto oznaczyć, które długości wektorów i kąty skierowania są znane (są stałe bo wynikają z geometrii mechanizmu), a które się zmieniają i są niewiadomymi funkcjami.

W prawidłowo postawionym zadaniu na koniec tego etapu liczba niewiadomych powinna być równa liczbie równań rzutów.

7. Rozwiązać równania rzutów wyznaczając niewiadome funkcje. Otrzymujemy na tym etapie funkcyjny opis ruchu mechanizmu.

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

8. Zróżniczkować wyznaczone w pkt. 7 funkcje aby uzyskać prędkości zmian długości wektorów i ich prędkości kątowe.

Dokonać kolejnego różniczkowania w celu uzyskania przyspieszeń zmian długości wektorów i przyspieszeń kątowych.

Procedura postępowania w metodzie analitycznej wyznaczania prędkości i przyspieszeń punktów mechanizmów płaskich

8. Zróżniczkować wyznaczone w pkt. 7 funkcje aby uzyskać prędkości zmian długości wektorów i ich prędkości kątowe.

Dokonać kolejnego różniczkowania w celu uzyskania przyspieszeń zmian długości wektorów i przyspieszeń kątowych.

9. Jeśli w pkt. 8 nie uzyskano pożądaných informacji należy zróżniczkować równania rzutów z pkt. 6. i wyznaczyć prędkości. Po kolejnym różniczkowaniu można wyznaczyć przyspieszenia. Bardzo pomocnicze może okazać się na tym etapie obrócenie układu współrzędnych o pewien kąt, co upraszcza niektóre składniki w równaniach rzutów.

Metoda analityczna – przykład: mechanizm korbowo-wodzikowy

Dane:

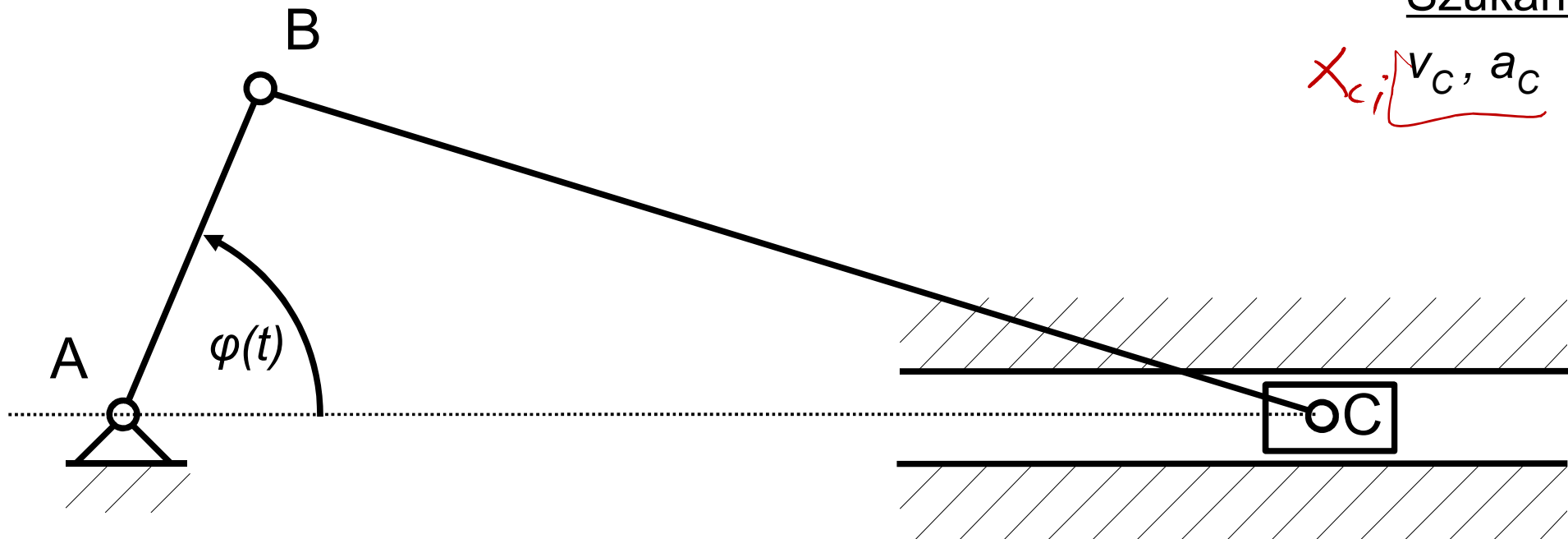
$$|AB| = r$$

$$|BC| = l$$

$$\varphi(t)$$

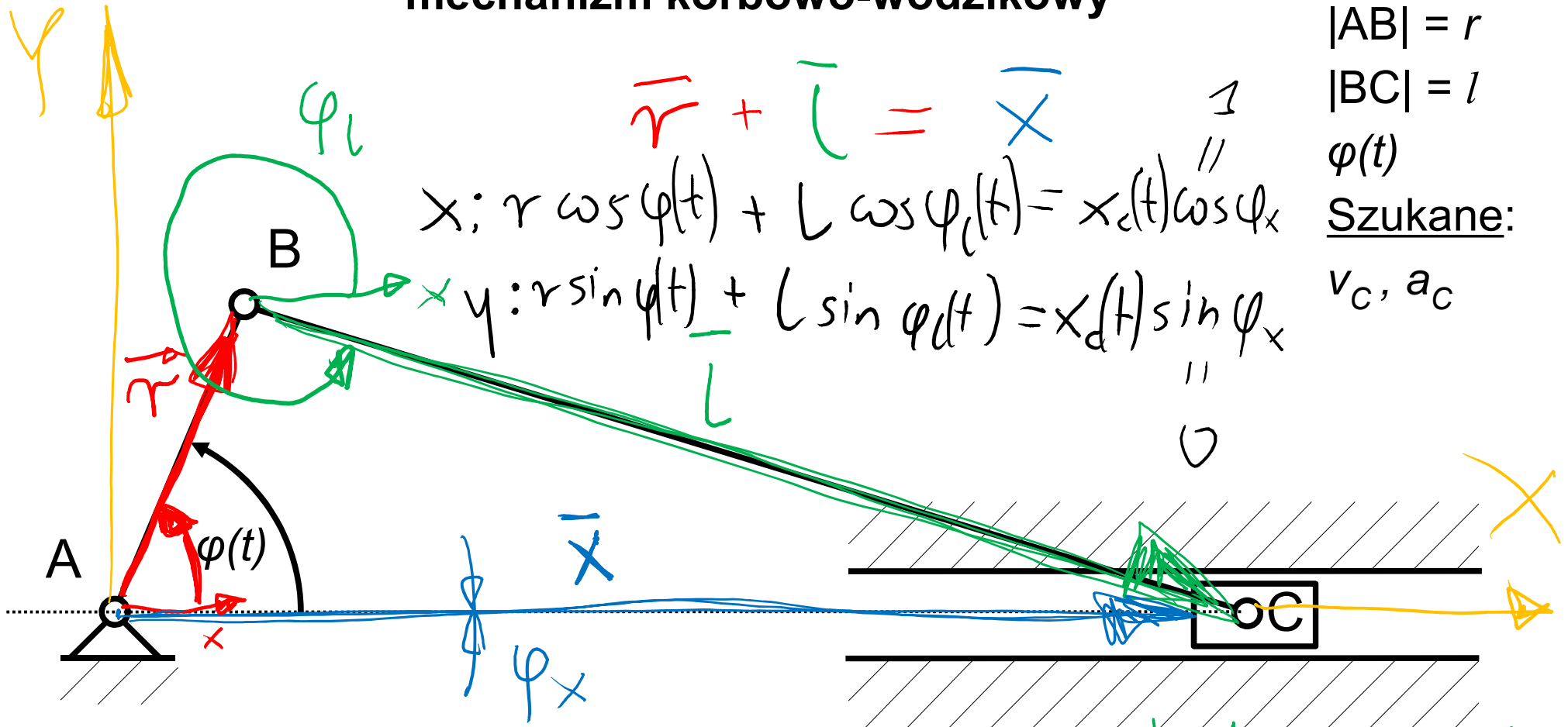
Szukane:

$$x_c, v_c, a_c$$



Metoda analityczna – przykład: mechanizm korbowo-wodzikowy

Dane:
 $|AB| = r$
 $|BC| = l$
 $\varphi(t)$
Szukane:
 v_c, a_c



$$\vec{r} + \vec{l} = \vec{x}_c \quad \text{1}$$

$$x: r \cos \varphi(t) + l \cos \varphi_c(t) = x_c(t) \cos \varphi_x \quad \text{''}$$

$$y: r \sin \varphi(t) + l \sin \varphi_c(t) = x_c(t) \sin \varphi_x \quad \text{''}$$

$|\vec{x}| = x_c(t)$ - niewiadoma
 $\varphi_x = 0$

$|\vec{r}| = r = \text{const.}$
 $\varphi(t)$ - zadane

$|\vec{l}| = l = \text{const.}$
 $\varphi_c(t)$ - niewiadoma

Metoda analityczna – przykład: mechanizm korbowo-wodzikowy

$$\lambda = \frac{r}{L}$$

$$r \cos \varphi(t) + l \cos \varphi_c(t) = x_c(t) \cos 0$$

$$r \sin \varphi(t) + l \sin \varphi_c(t) = x_c(t) \sin 0$$

2 niewiadome

$$\sin \varphi_c(t) = -r \sin \varphi(t) / l = -\lambda \sin \varphi(t)$$

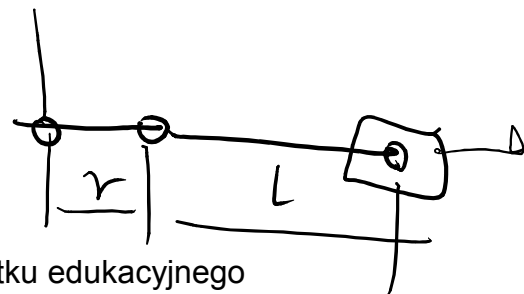
$$\varphi_c(t) = \arcsin(-\lambda \sin \varphi(t)) = -\arcsin(\lambda \sin \varphi(t))$$

$$\sin^2 \varphi_c + \cos^2 \varphi_c = 1 \rightarrow \cos \varphi_c(t) = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_c(t)}$$

$$\cos \varphi_c(t) = \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi(t)}$$

$$r \cos \varphi(t) \pm l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi(t)} = x_c(t)$$

$$\text{dla } \varphi(t) = 0 \rightarrow x_c(t) = r \pm l$$



Metoda analityczna – przykład: mechanizm korbowo-wodzikowy

ruch wozzika

$$x_C(t) = r \cos \varphi(t) + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi(t)}$$

$$v_C(t) = \frac{dc(t)}{dt} = \left[r \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) - \frac{2l\lambda^2 \dot{\varphi}(t) \sin \varphi(t) \cos \varphi(t)}{2 \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi(t)}} \right]$$

$$a_C(t) = \frac{dv_C(t)}{dt} = \dots$$

Metoda analityczna – przykład: mechanizm korbowo-wodzikowy

obliczenia w programie wxmaxima

```
(%i14) c: r*cos(%phi(t))+l*sqrt(1-%lambda^2*(sin(%phi(t)))^2);
      v: diff(c,t,1);
      a: diff(v,t,1);
```

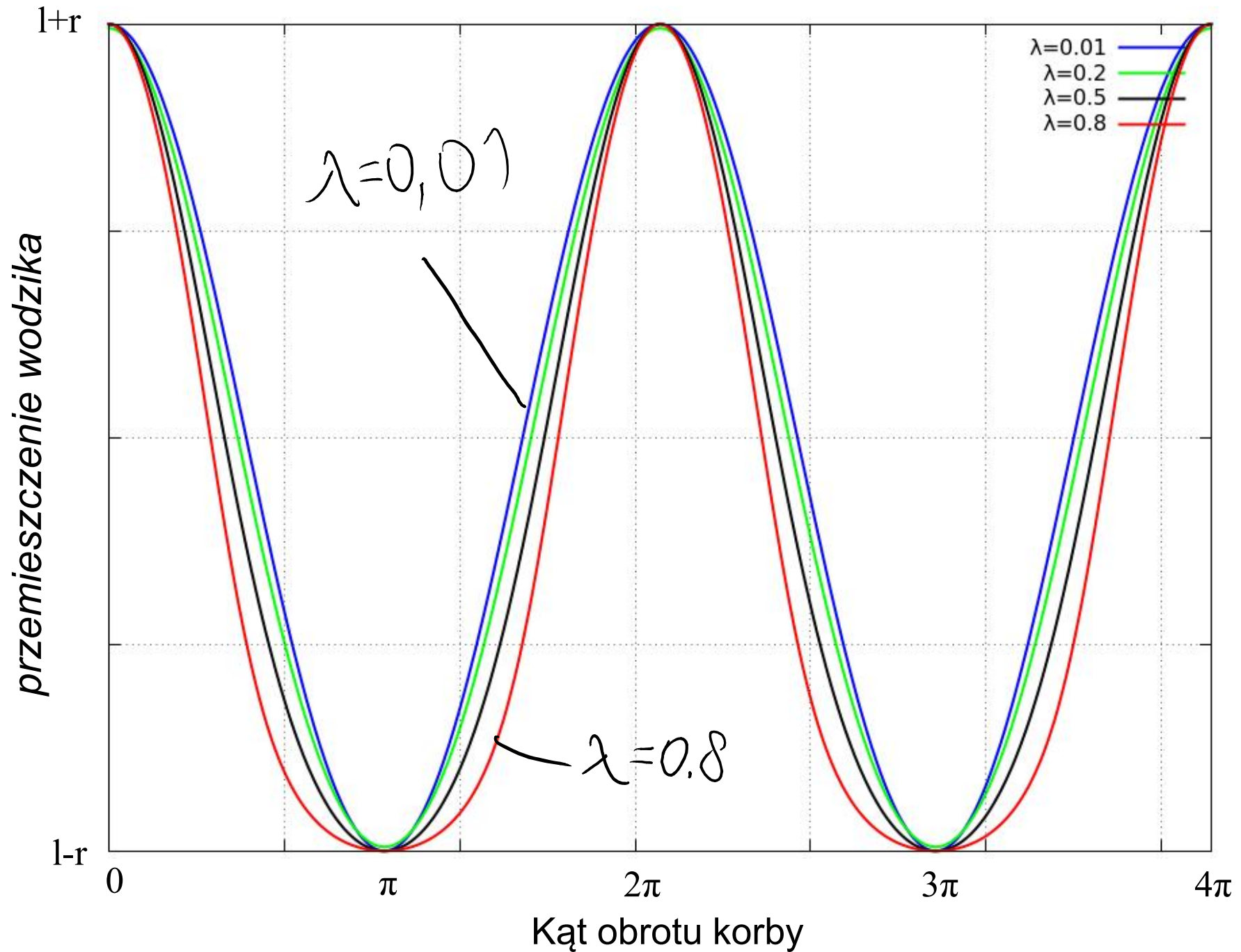
(c) $\rightarrow l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi(t))} + r \cos(\varphi(t))$

(v) $\rightarrow -\frac{\lambda^2 l \cos(\varphi(t)) \sin(\varphi(t)) \left(\frac{d}{dt} \varphi(t)\right)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi(t))}} - r \sin(\varphi(t)) \left(\frac{d}{dt} \varphi(t)\right)$

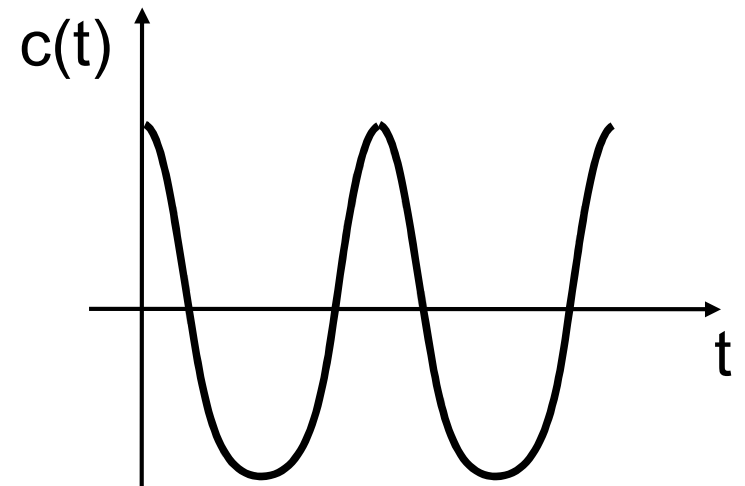
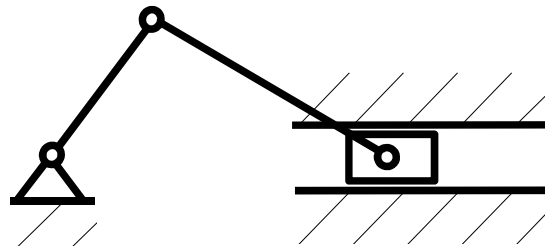
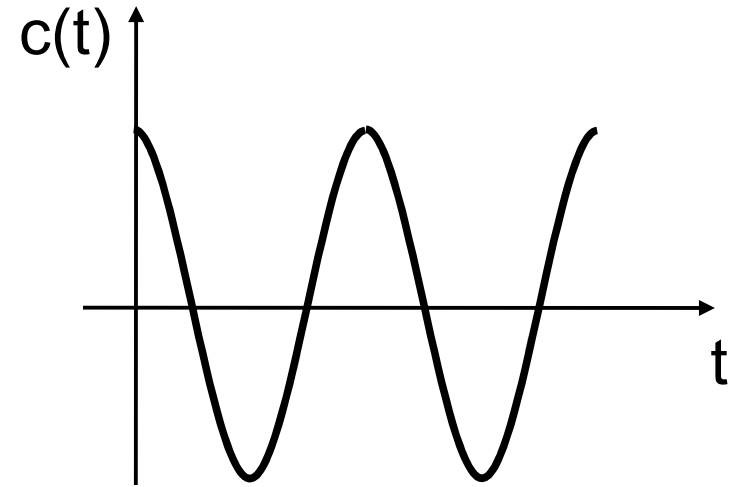
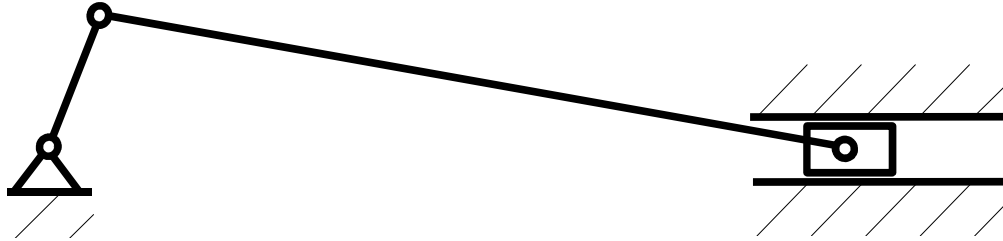
(a) $\rightarrow -\frac{\lambda^2 l \cos(\varphi(t)) \sin(\varphi(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi(t)\right)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi(t))}} - r \sin(\varphi(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi(t)\right) + \frac{\lambda^2 l \sin^2(\varphi(t)) \left(\frac{d}{dt} \varphi(t)\right)^2}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi(t))}}$

$$\frac{\lambda^2 l \cos^2(\varphi(t)) \left(\frac{d}{dt} \varphi(t)\right)^2}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi(t))}} - \frac{\lambda^4 l \cos^2(\varphi(t)) \sin^2(\varphi(t)) \left(\frac{d}{dt} \varphi(t)\right)^2}{(1 - \lambda^2 \sin^2(\varphi(t)))^{3/2}} - r \cos(\varphi(t)) \left(\frac{d}{dt} \varphi(t)\right)^2$$

Metoda analityczna – przykład: mechanizm korbowo-wodzikowy



Metoda analityczna – przykład: mechanizm korbowo-wodzikowy



Polecany artykuł: <http://www.enginebuildermag.com/2016/08/understanding-rod-ratios/> ↗

Metoda analityczna – przykład: mechanizm korbowo-wodzikowy

ruch korbowodu

$$\varphi_k(t) = -\arcsin(\lambda \sin \varphi(t))$$

$$\omega_k(t) = \frac{d\varphi_k(t)}{dt} = \frac{-\lambda \dot{\varphi}(t) \cos \varphi(t)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi(t)}}$$

$$\varepsilon_k(t) = \frac{d\omega_k(t)}{dt} = -\frac{\lambda \cos(\varphi(t)) \left(\frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) \right)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin(\varphi(t))^2}} + \frac{\lambda \sin(\varphi(t)) \left(\frac{d}{dt} \varphi(t) \right)^2}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin(\varphi(t))^2}} - \frac{\lambda^3 \cos(\varphi(t))^2 \sin(\varphi(t)) \left(\frac{d}{dt} \varphi(t) \right)^2}{\left(1 - \lambda^2 \sin(\varphi(t))^2 \right)^{3/2}}$$

]

Metoda analityczna – przykład: mechanizm jarzmowy

Dane:

$$|AB| = r$$

$e, f, \varphi(t)$

Szukane:

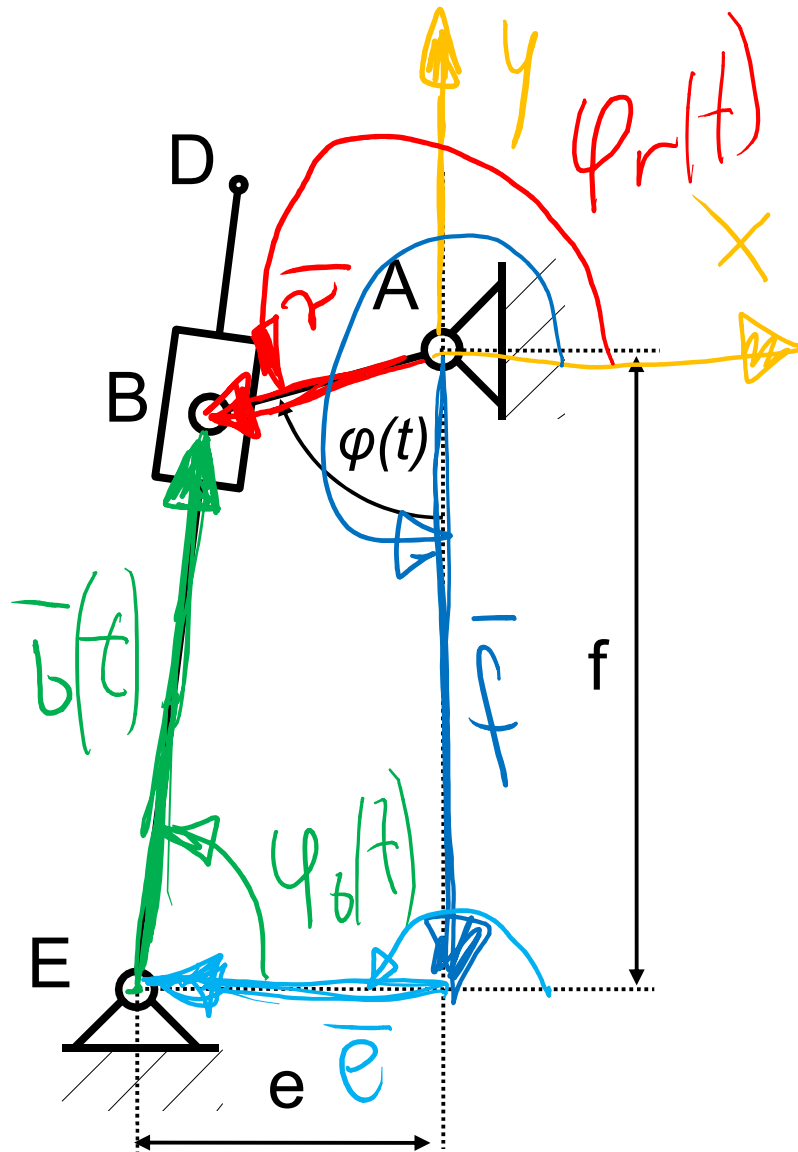
prędkość ω_2

i przyspieszenie

kątowe ε_2

członu ED

$$\vec{r} = \vec{f} + \vec{e} + \vec{b}$$



$$\varphi_r(t) = 270^\circ - \varphi(t)$$

Metoda analityczna – przykład: mechanizm jarzmowy

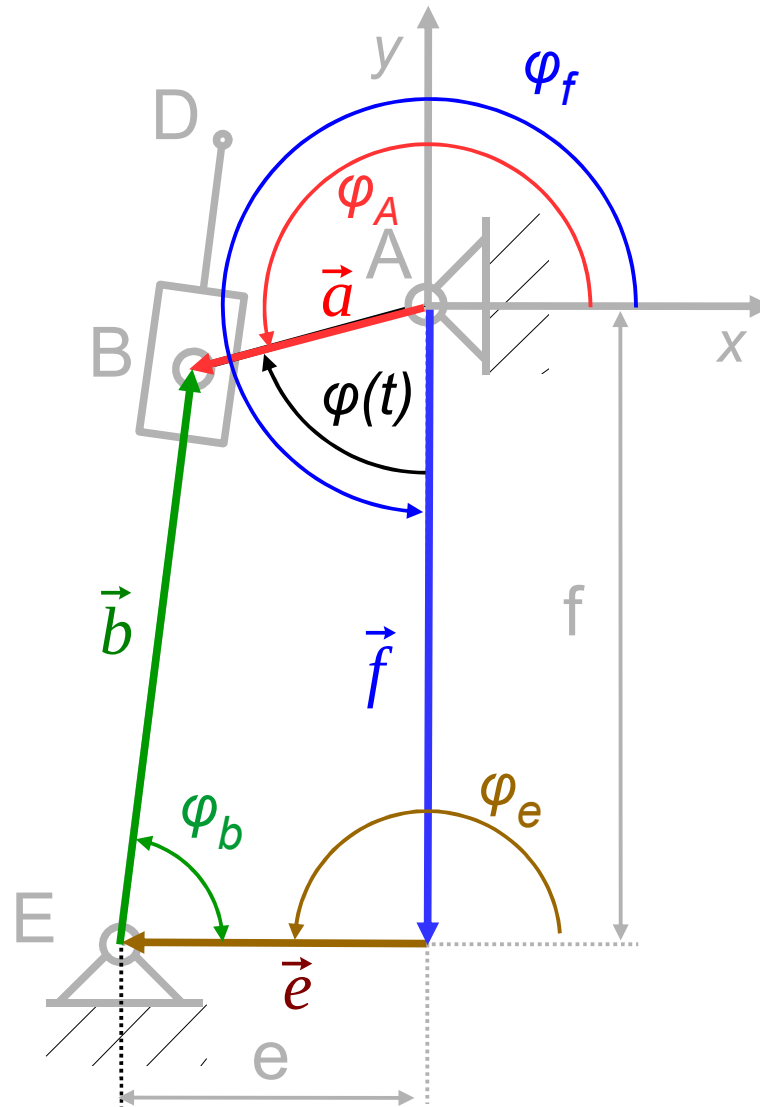
Dane:

$$|AB| = r$$

$e, f, \varphi(t)$

Szukane:

prędkość ω_2
i przyspieszenie
kątowe ε_2
członu ED



$$|\vec{a}| = r$$

$$\varphi_a(t) = 270^\circ - \varphi(t)$$

$$|\vec{b}| = b(t)$$

$$\varphi_b(t)$$

$$|\vec{e}| = e$$

$$\varphi_e = 180^\circ$$

$$|\vec{f}| = f$$

$$\varphi_f = 270^\circ$$

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{e} + \vec{f}$$

Metoda analityczna – przykład: mechanizm jarzmowy

Dane:

$$|AB| = r$$

$e, f, \varphi(t)$

Szukane:

prędkość ω_2

i przyspieszenie

kątowe ε_2

członu ED

$$|\vec{a}| = r$$

$$\varphi_a(t) = 270^\circ - \varphi(t)$$

$$|\vec{b}| = b(t)$$

$$\varphi_b(t)$$

$$|\vec{e}| = e$$

$$\varphi_e = 180^\circ$$

$$|\vec{f}| = f$$

$$\varphi_f = 270^\circ$$

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{e} + \vec{f}$$

$$x: r \cos(270^\circ - \varphi(t)) = b(t) \cos \varphi_b(t) + e \cos 180^\circ + f \cos 270^\circ$$

$$y: r \sin(270^\circ - \varphi(t)) = b(t) \sin \varphi_b(t) + e \sin 180^\circ + f \sin 270^\circ$$

$$x: -r \sin \varphi(t) = b(t) \cos \varphi_b(t) - e$$

$$y: -r \cos \varphi(t) = b(t) \sin \varphi_b(t) - f$$

Metoda analityczna – przykład: mechanizm jarzmowy

$$e - r \sin \varphi(t) = b(t) \cos \varphi_b(t) \quad (1)$$

$$f - r \cos \varphi(t) = b(t) \sin \varphi_b(t) \quad (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \quad \frac{f - r \cos \varphi(t)}{e - r \sin \varphi(t)} = \frac{\cancel{b(t)} \sin \varphi_b(t)}{\cancel{b(t)} \cos \varphi_b(t)} = \operatorname{tg} \varphi_b(t)$$

$$\varphi_b(t) = \operatorname{arctg} \frac{f - r \cos \varphi(t)}{e - r \sin \varphi(t)} \rightarrow \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$$

$$\varphi_b(t) = \operatorname{atan2}(f - r \cos \varphi(t); e - r \sin \varphi(t)) \rightarrow \langle 0; 2\pi \rangle$$