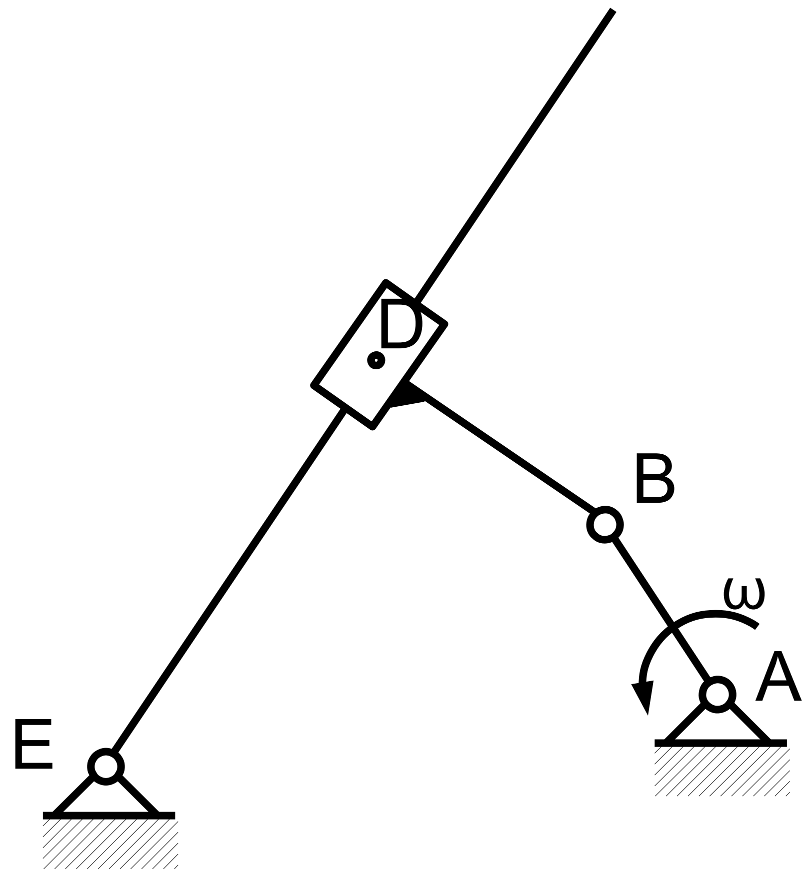
Podstawy automatyki i teorii maszyn

zima 2019/2020

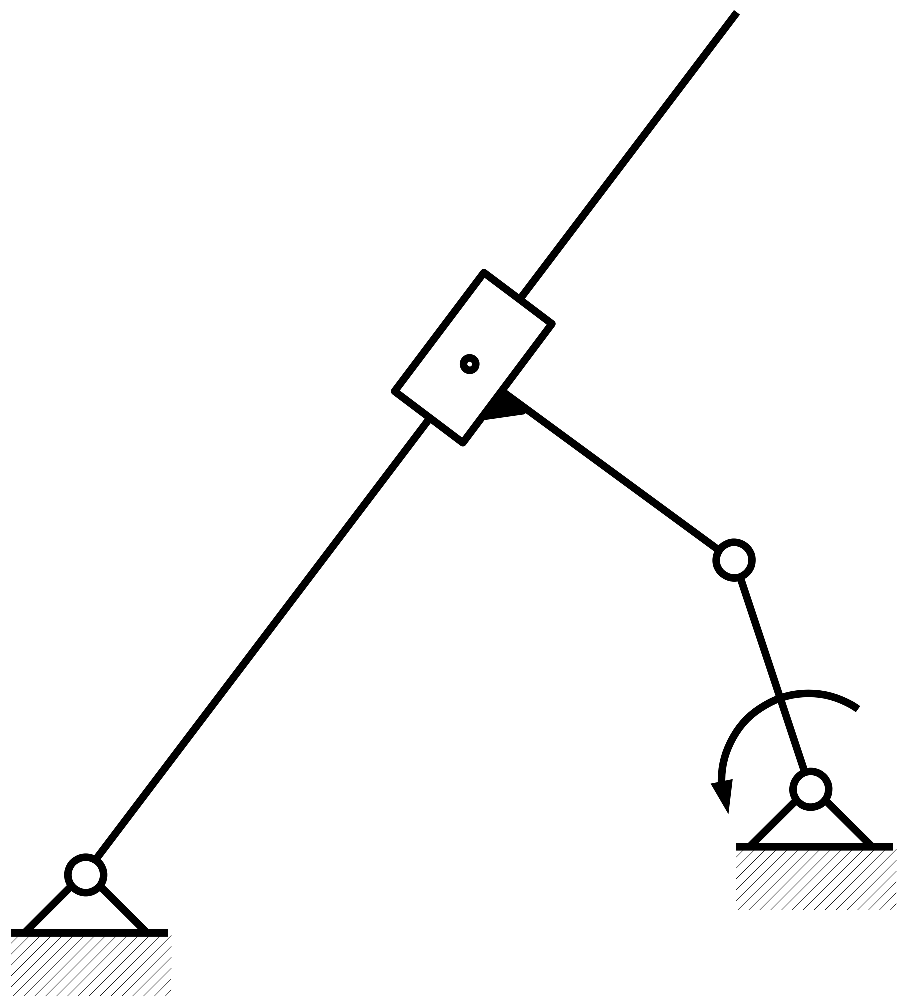
Przykład wyznaczania prędkości i przyspieszeń mechanizmu płaskiego metodą wykreślną – <u>metoda członu rozszerzonego</u>

Dane: geometria mechanizmu (wymiary elementów, ich położenie i orientacja) oraz stała prędkość kątowa ω elementu napędowego

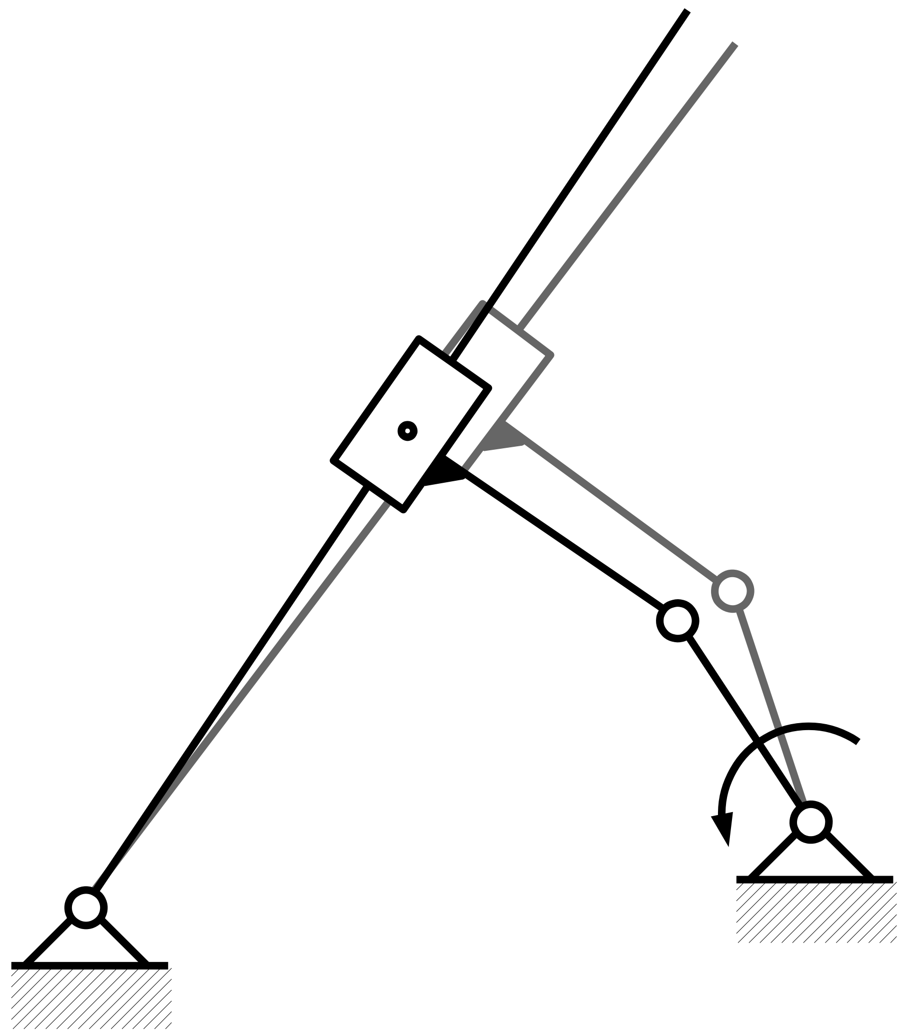


Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych, Politechnika Warszawska,
Instytut Podstaw Budowy Maszyn, Zakład Mechaniki, dr inż. Sebastian Korczak

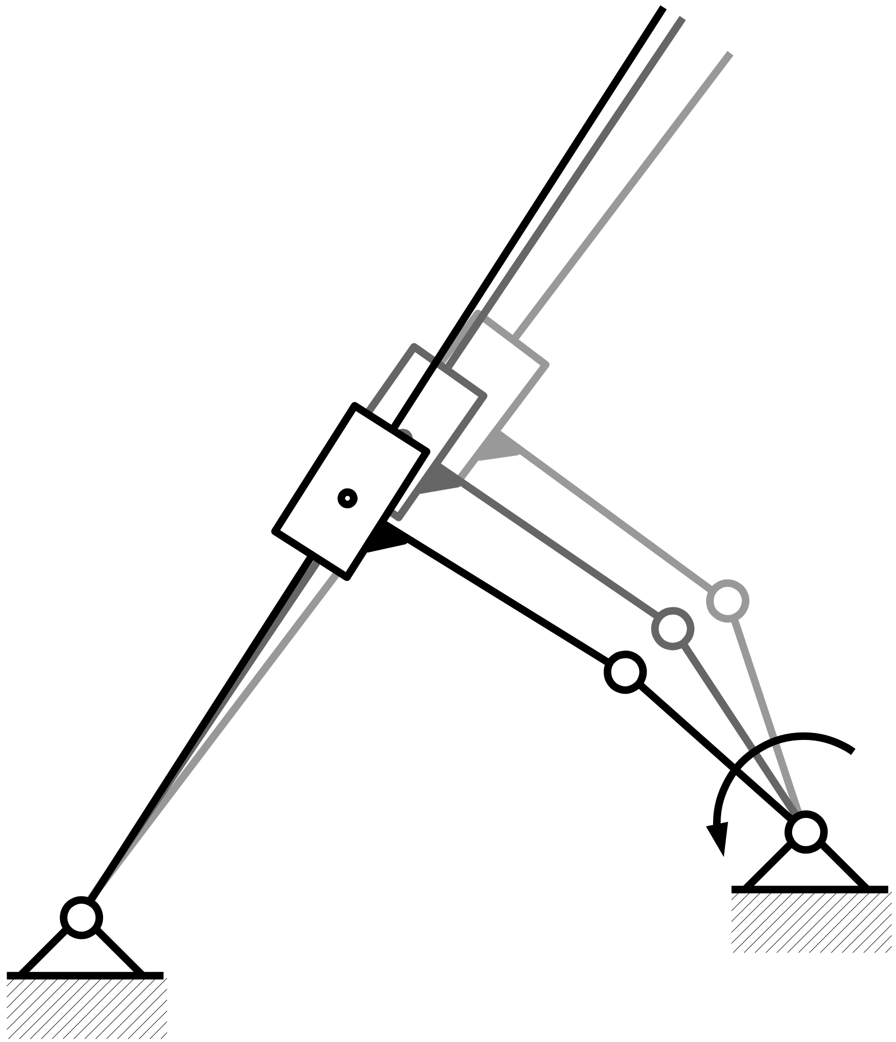
Jak pracuje ten mechanizm?



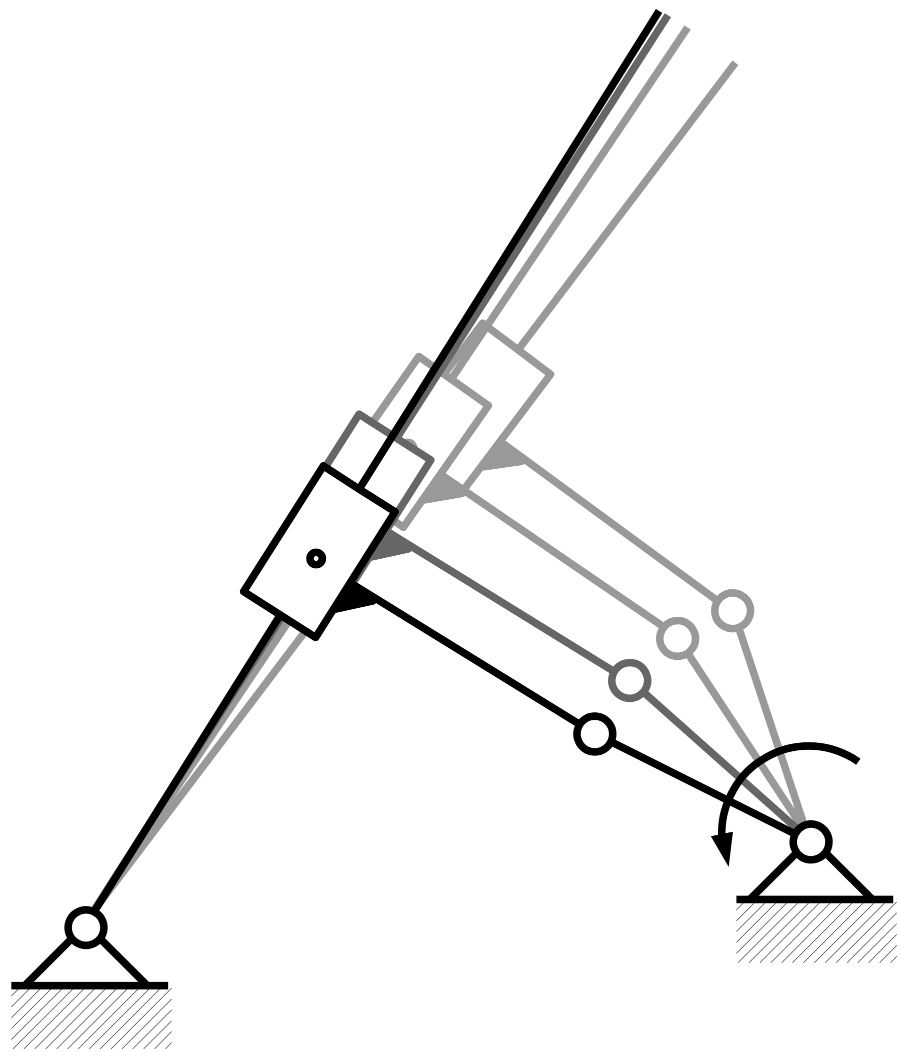
Jak pracuje ten mechanizm?



Jak pracuje ten mechanizm?

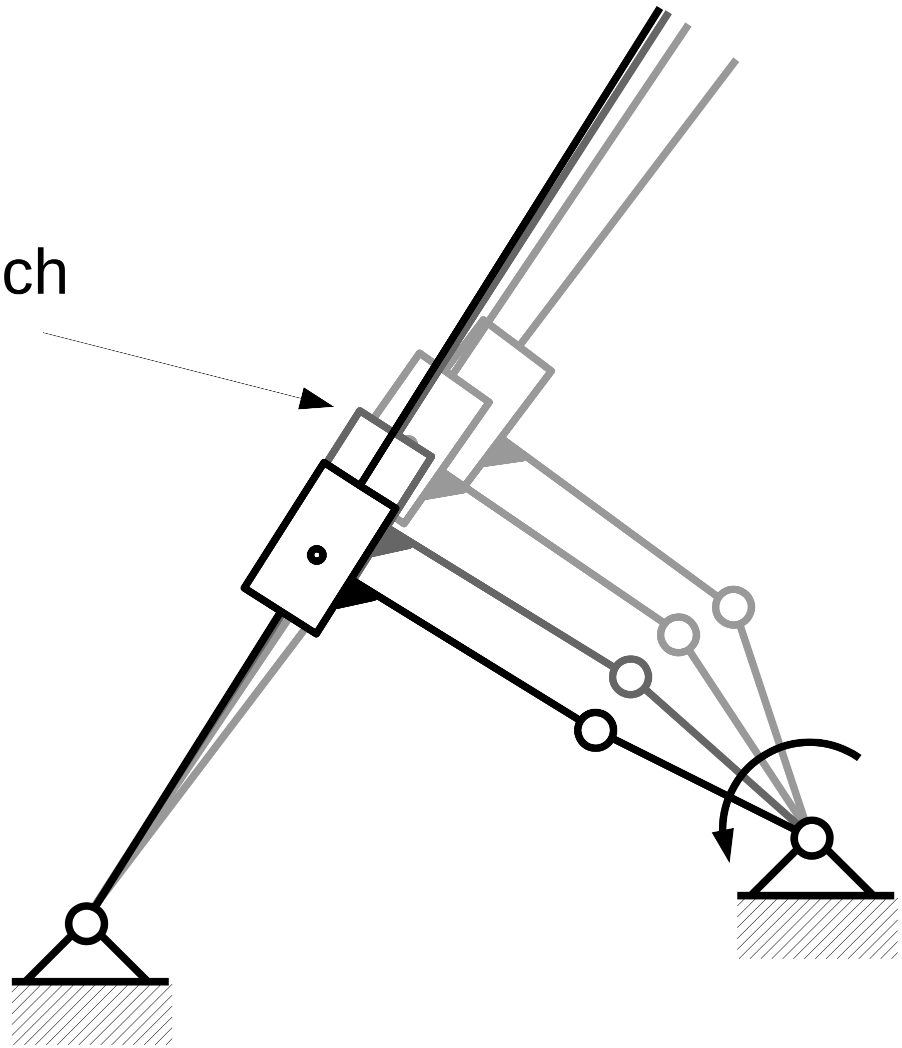


Jak pracuje ten mechanizm?

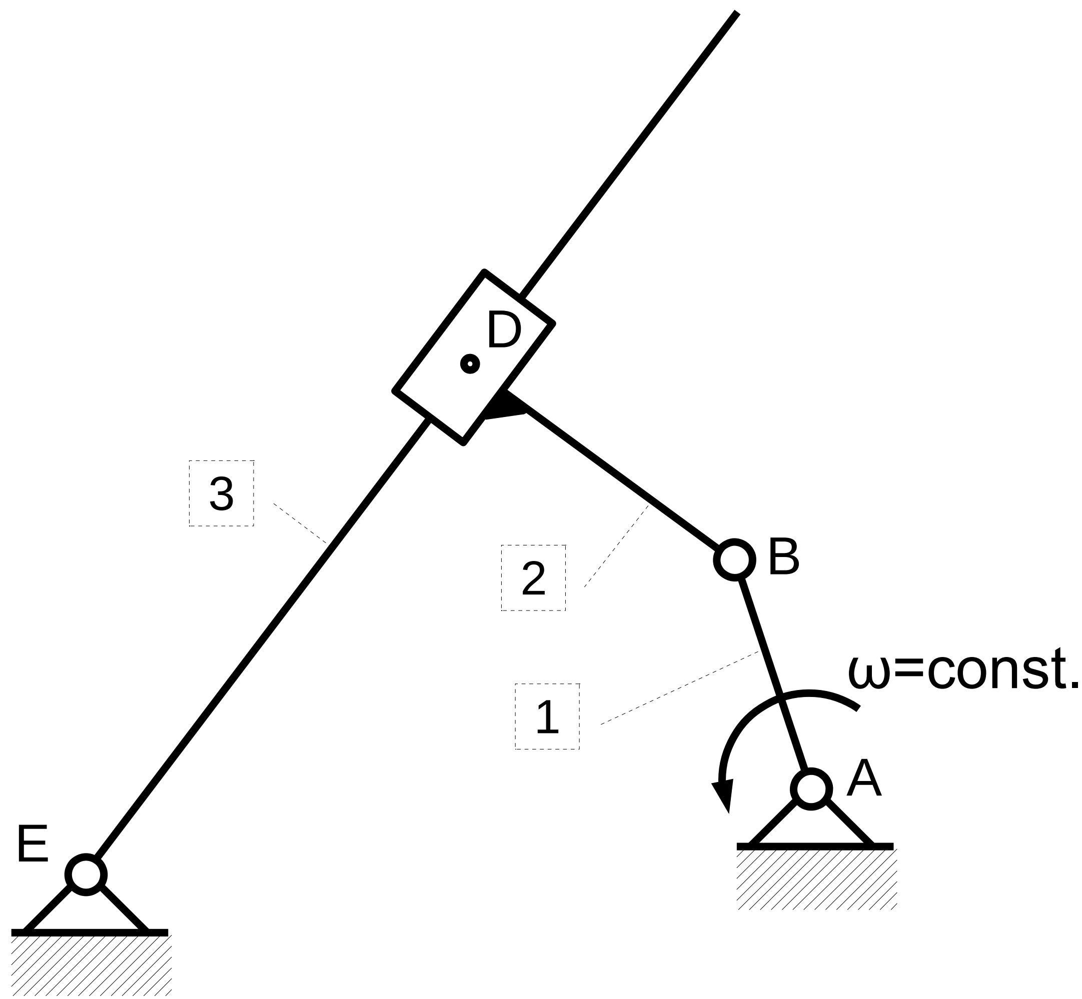


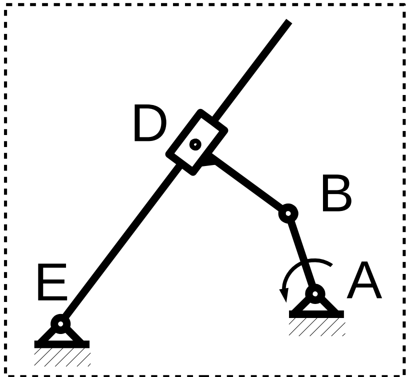
Jak pracuje ten mechanizm?

zauważamy ruch
względny

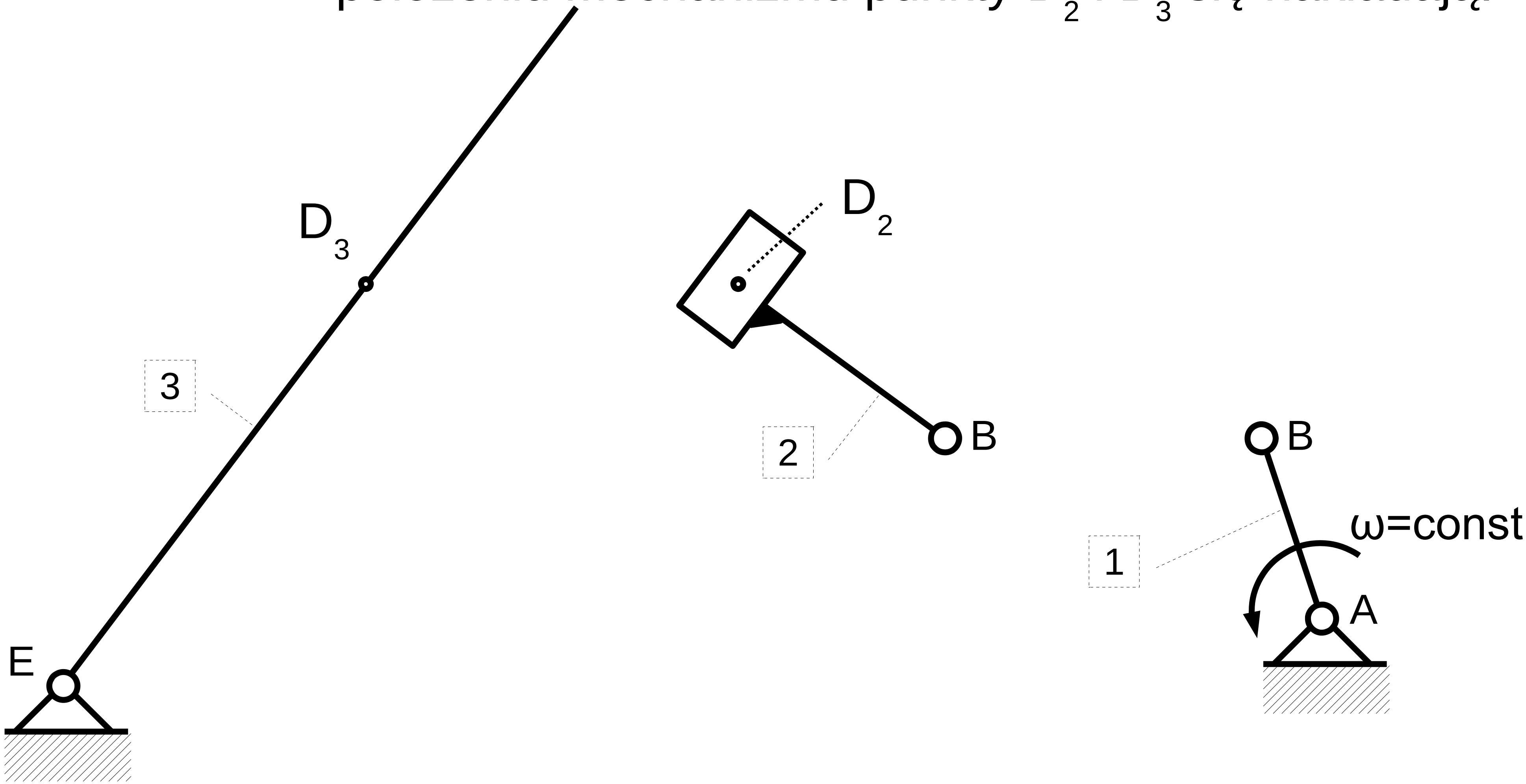


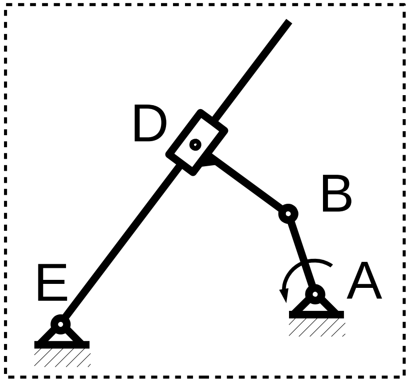
Wracamy do rozważanego położenia mechanizmu, numerujemy człony i nazywamy punkty



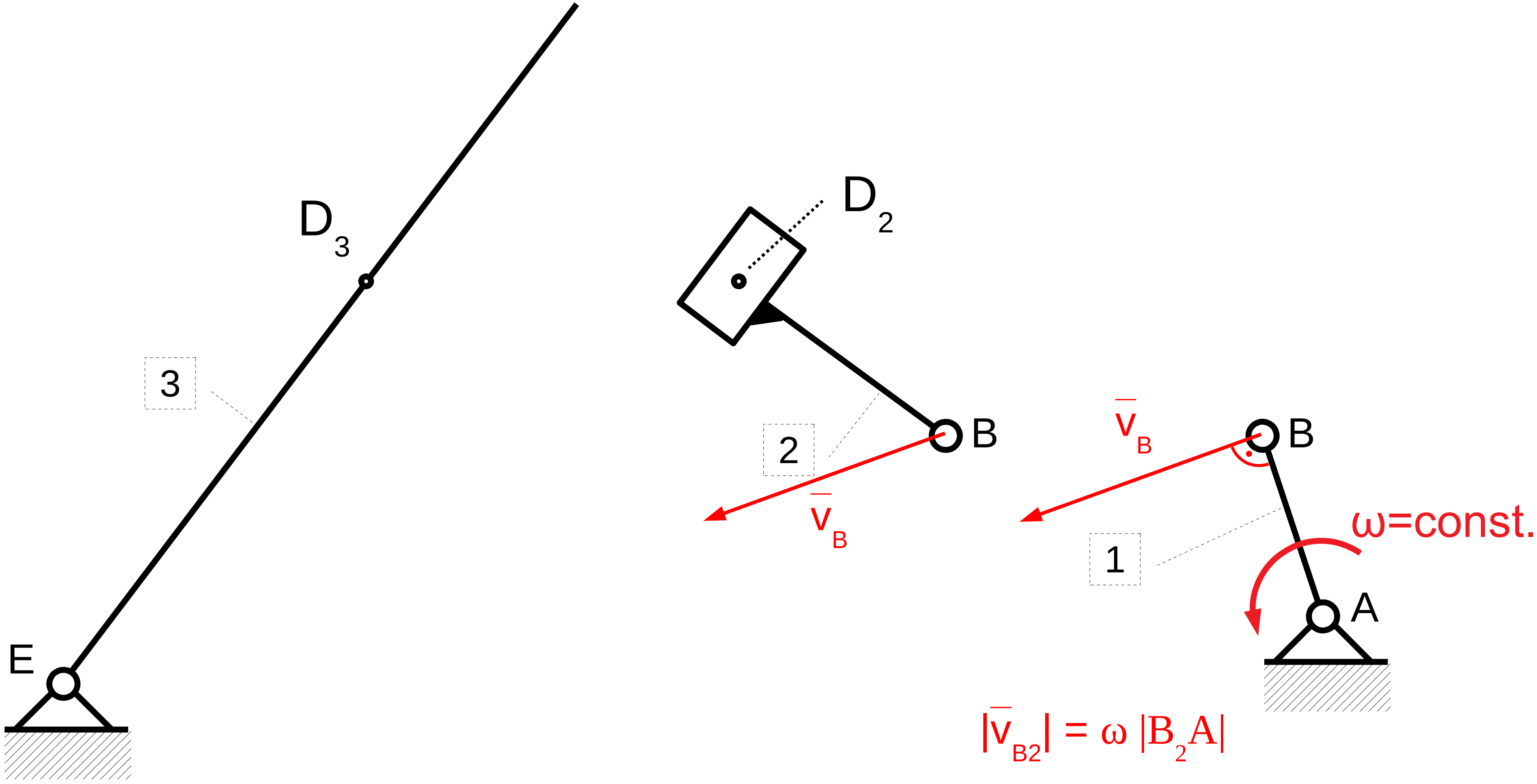


Rozkładamy mechanizm na fragmenty. Z powodu ruchu względnego suwaka (należącego do członu nr 2) po pręcie nr 3, wprowadzamy oznaczenia punktów D_2 i D_3. Punkt D_3 nie przesuwa się po pręcie w czasie ruchu, a punkt D_2 jest ściśle związany z suwakiem. W badanym położeniu mechanizmu punkty D_2 i D_3 się nakładają.

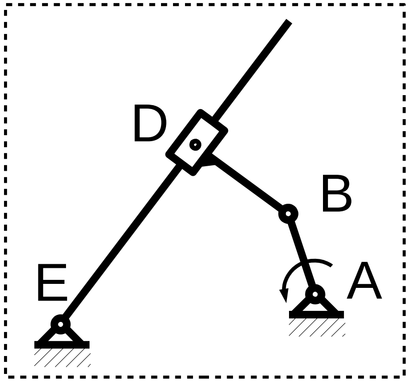




Wyznaczamy prędkość puntu B, czyli prędkość końca członu nr 1 będącego w ruchu obrotowym.
Jest to jednocześnie prędkość końca członu nr 2 ze względu na połączenie członów 1 i 2 w puncie B.

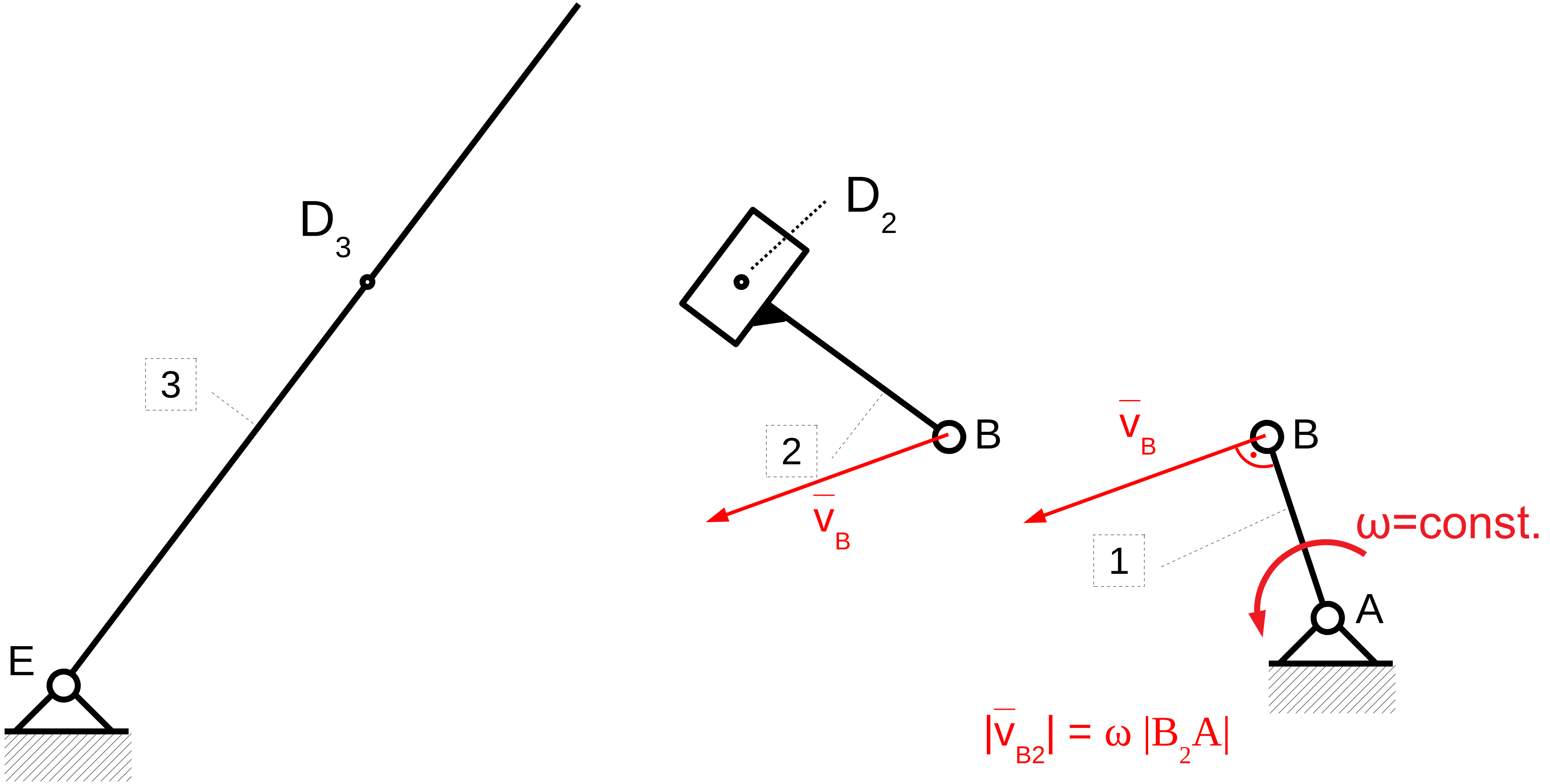


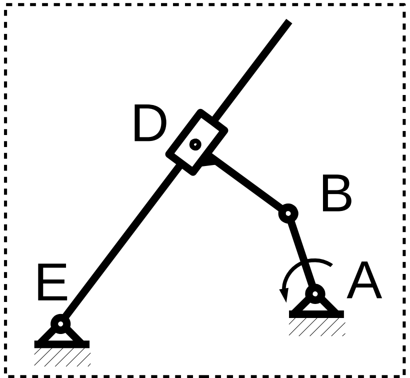
$|\overline{v}_{B2}| = \omega\,|B_2A|$



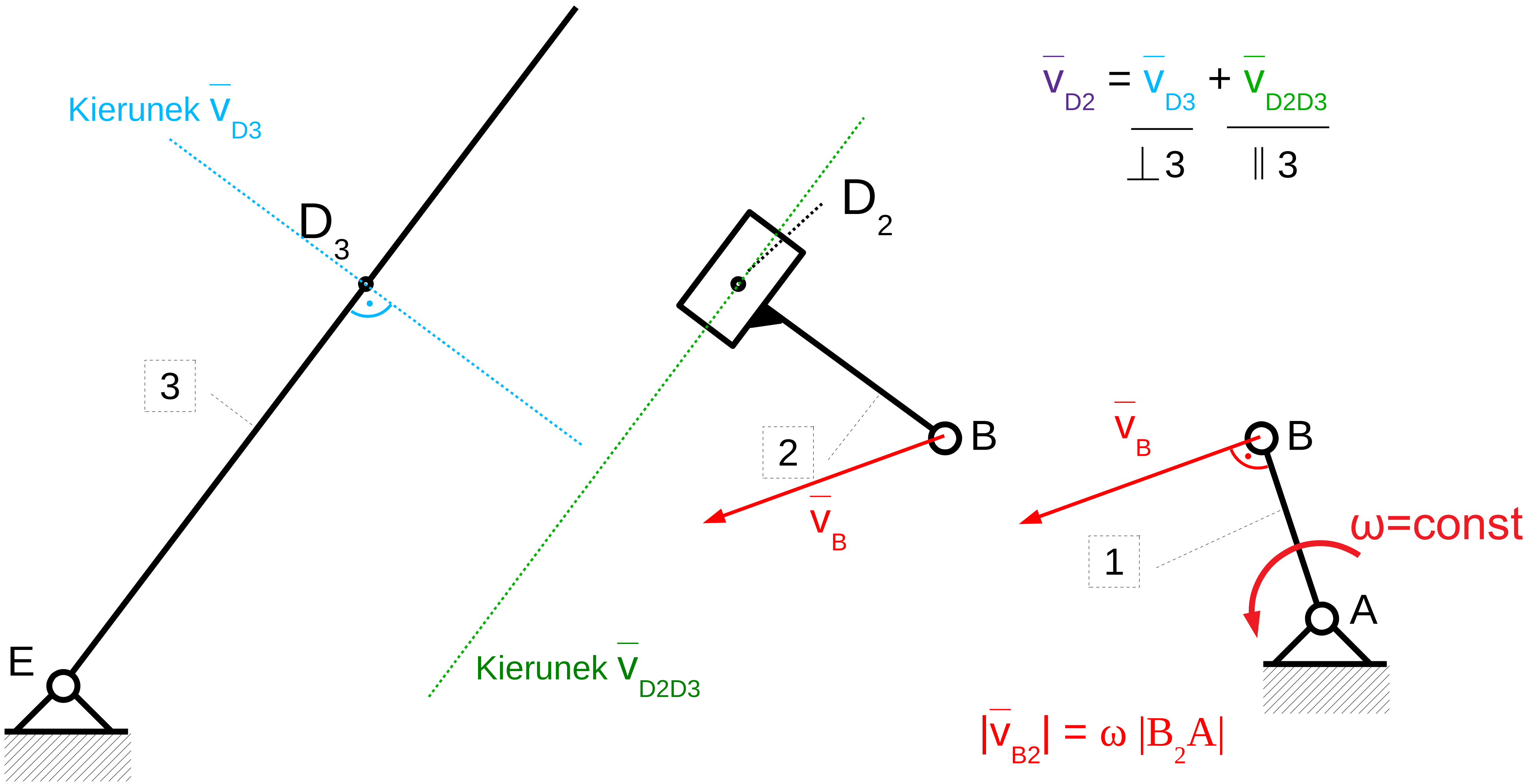
Rozpatrzmy teraz ruch suwaka po pręcie.
Przyjmujemy, że ruchem złożonym porusza się punkt D_2.
Ruchem unoszenia jest zatem ruch pręta 3,
a ruchem względnym - ruch suwaka wzdłuż pręta.
Ruch złożony opisuje równanie:

$$\overline{v}_{D2} = \overline{v}_{D3} + \overline{v}_{D2D3}$$

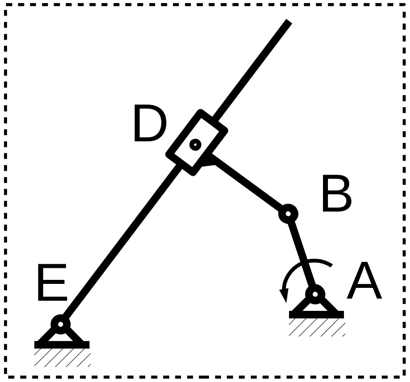




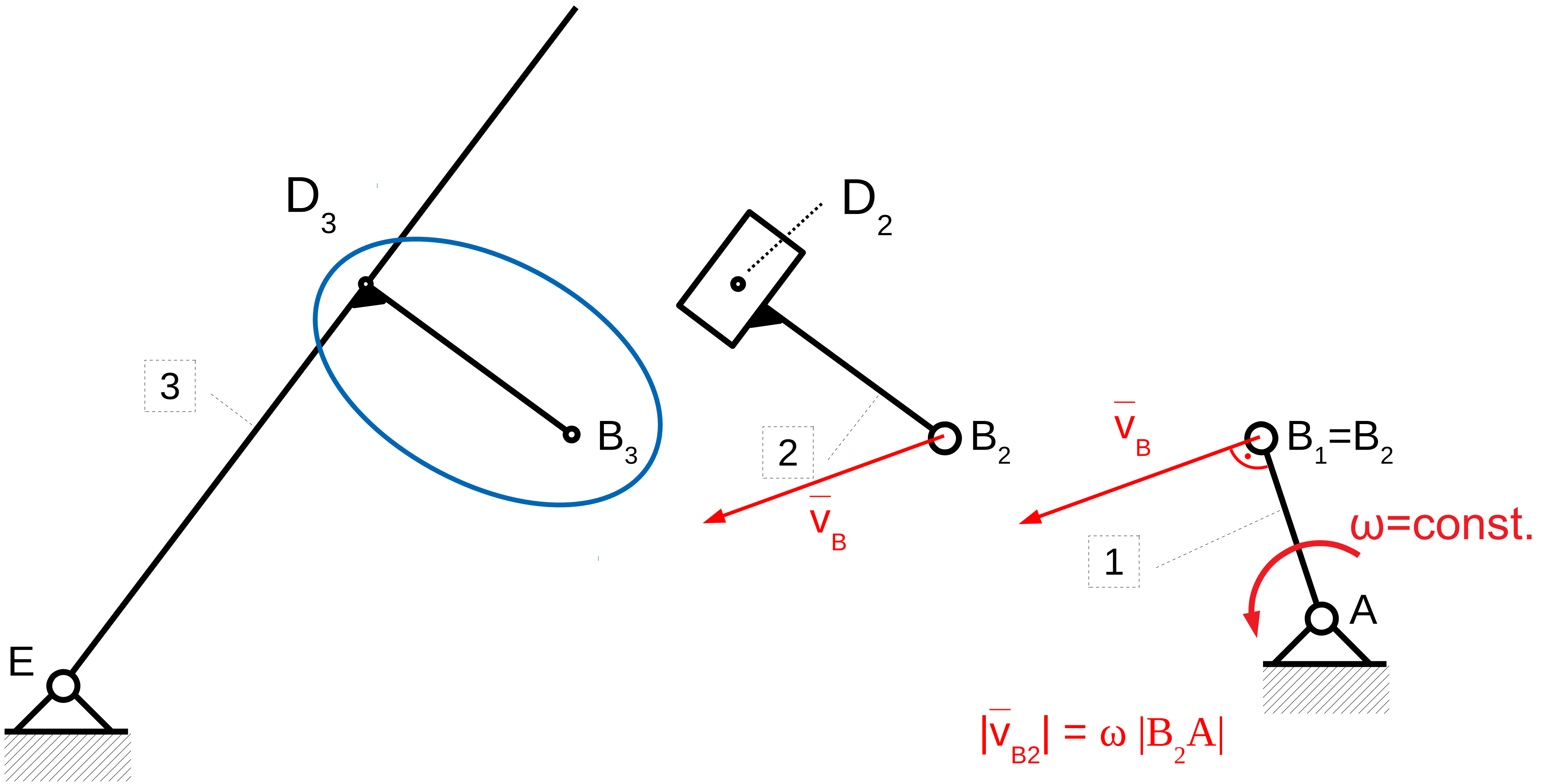
W równaniu tym znamy tylko kierunek prędkości punktu D_3 oraz kierunek prędkości względnej (ruch suwaka wzdłuż pręta). Nie mamy żadnej informacji o prędkości punktu D_2 i z tego powodu nie możemy dalej wyznaczać prędkości (za dużo niewiadomych w równaniu wektorowym). Musimy użyć innej metody...

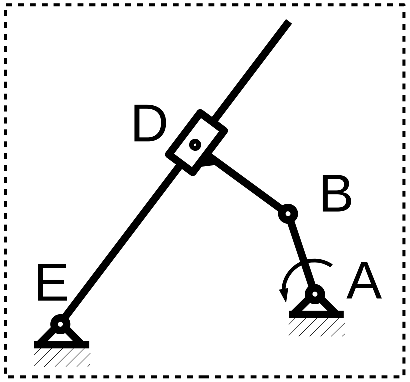


METODA CZŁONU ROZSZERZONEGO



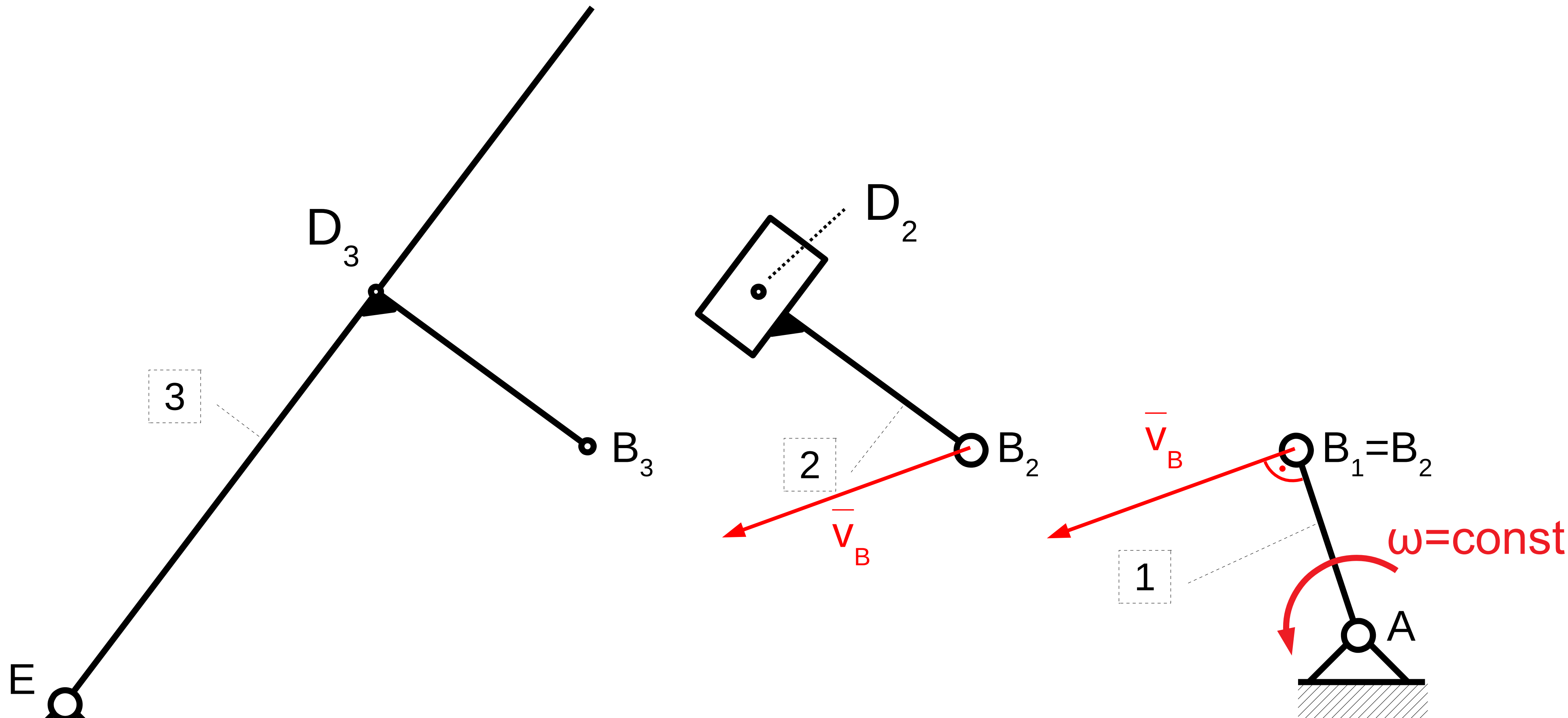
Dokonajmy rozszerzenia członu nr 3 o dodatkowy punkt, który w analizowanym położeniu mechanizmu pokrywa się z punktem B. Dodamy w punktach B indeksy od numerów członów aby je od siebie odróżnić.



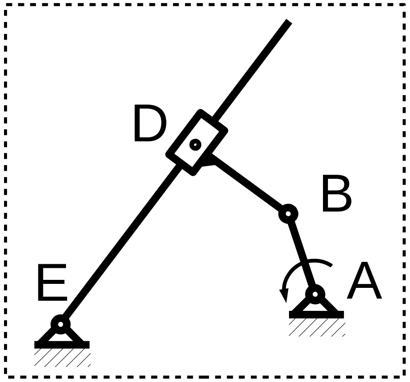


Ruch złożony punktu B2 opisuje równanie:

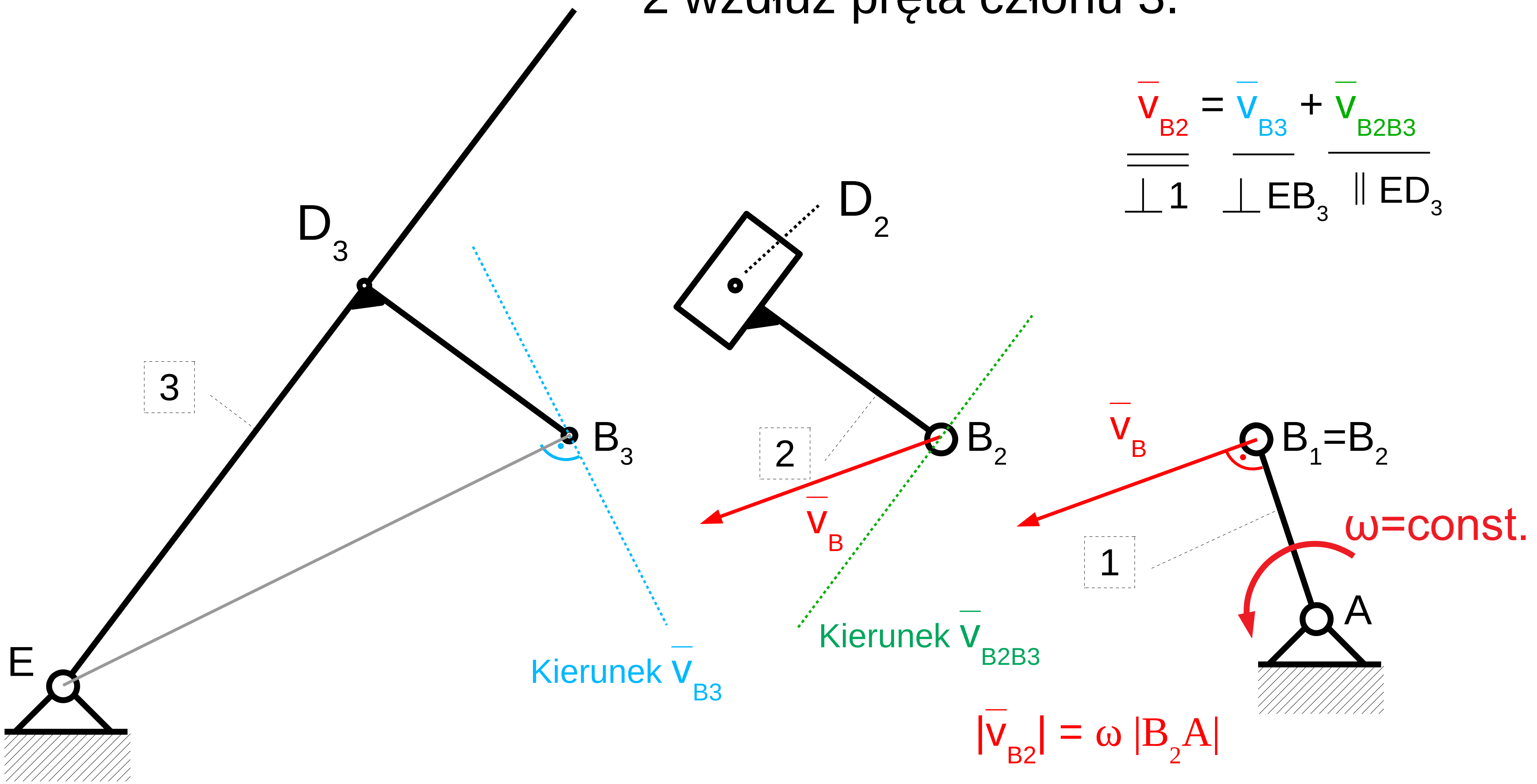
$$\bar{v}_{B2} = \bar{v}_{B3} + \bar{v}_{B2B3}$$



$$|\bar{v}_{B2}| = \omega\ |B_2A|$$



W równaniu znamy prędkość punktu B_2, stwierdzamy również, że prędkość punktu B_3 będzie prostopadła do odcinka EB_3 (co wynika z ruchu obrotowego pręta 3). Kierunek prędkości względnej punktów B_2 i B_3 jest równoległy do odcinka ED_3 z uwagi na ruch całego członu 2 wzdłuż pręta członu 3.



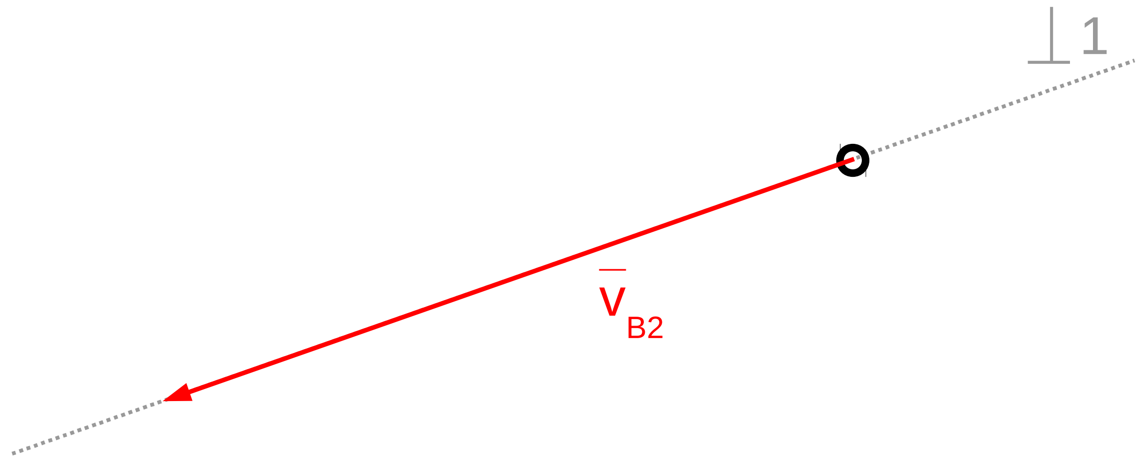
$$\underset{\perp 1}{\underline{\underline{\overline{v}_{B2}}}} = \underset{\perp EB_3}{\underline{\overline{v}_{B3}}} + \underset{\parallel ED_3}{\underline{\overline{v}_{B2B3}}}$$

Rozwiązujemy równanie wektorowe metodą graficzną

$$\underset{\underline{\underline{\perp 1}}}{\bar{v}_{B2}} = \underset{\underline{\perp EB_3}}{\bar{v}_{B3}} + \underset{\underline{\parallel ED_3}}{\bar{v}_{B2B3}}$$

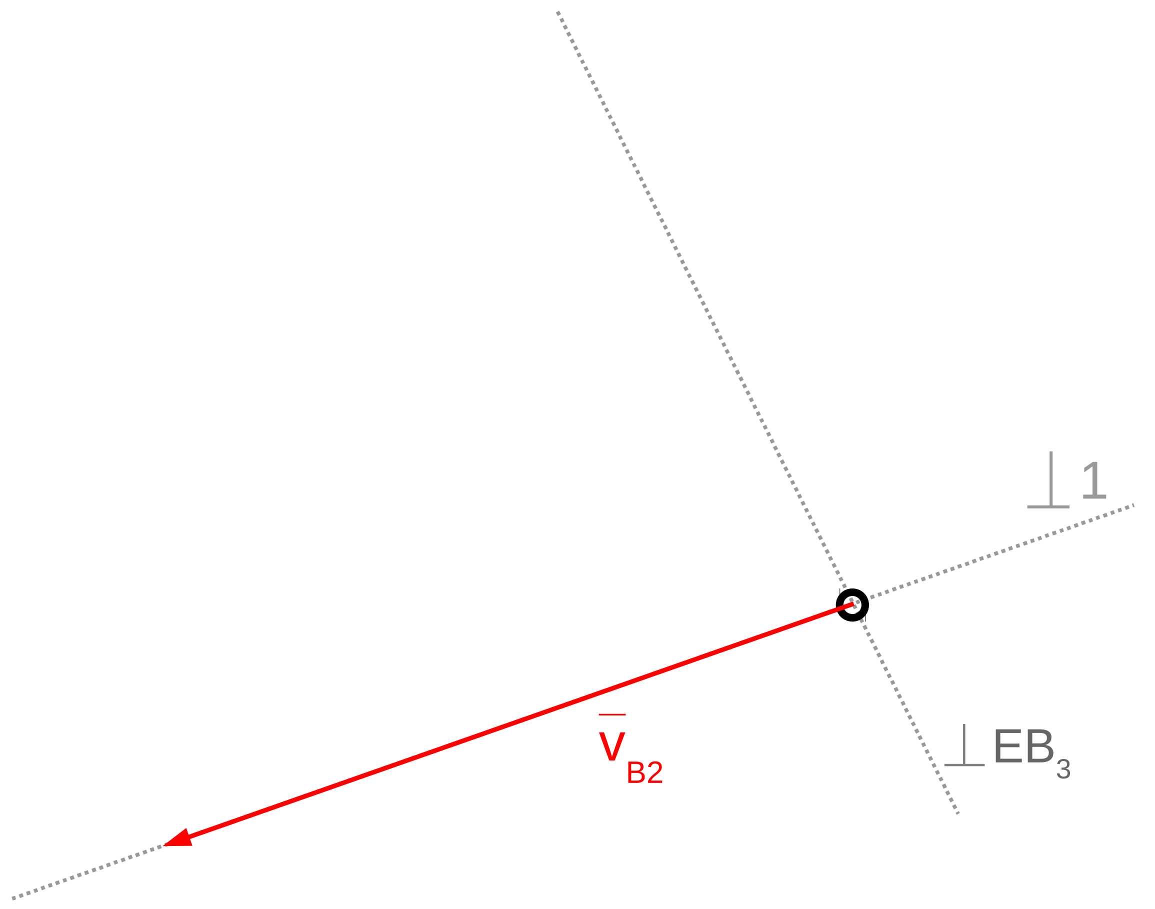
Plan prędkości

$$\underset{\perp 1}{\underline{\underline{\bar{v}_{B2}}}} = \underset{\perp EB_3}{\underline{\bar{v}_{B3}}} + \underset{\parallel ED_3}{\underline{\bar{v}_{B2B3}}}$$



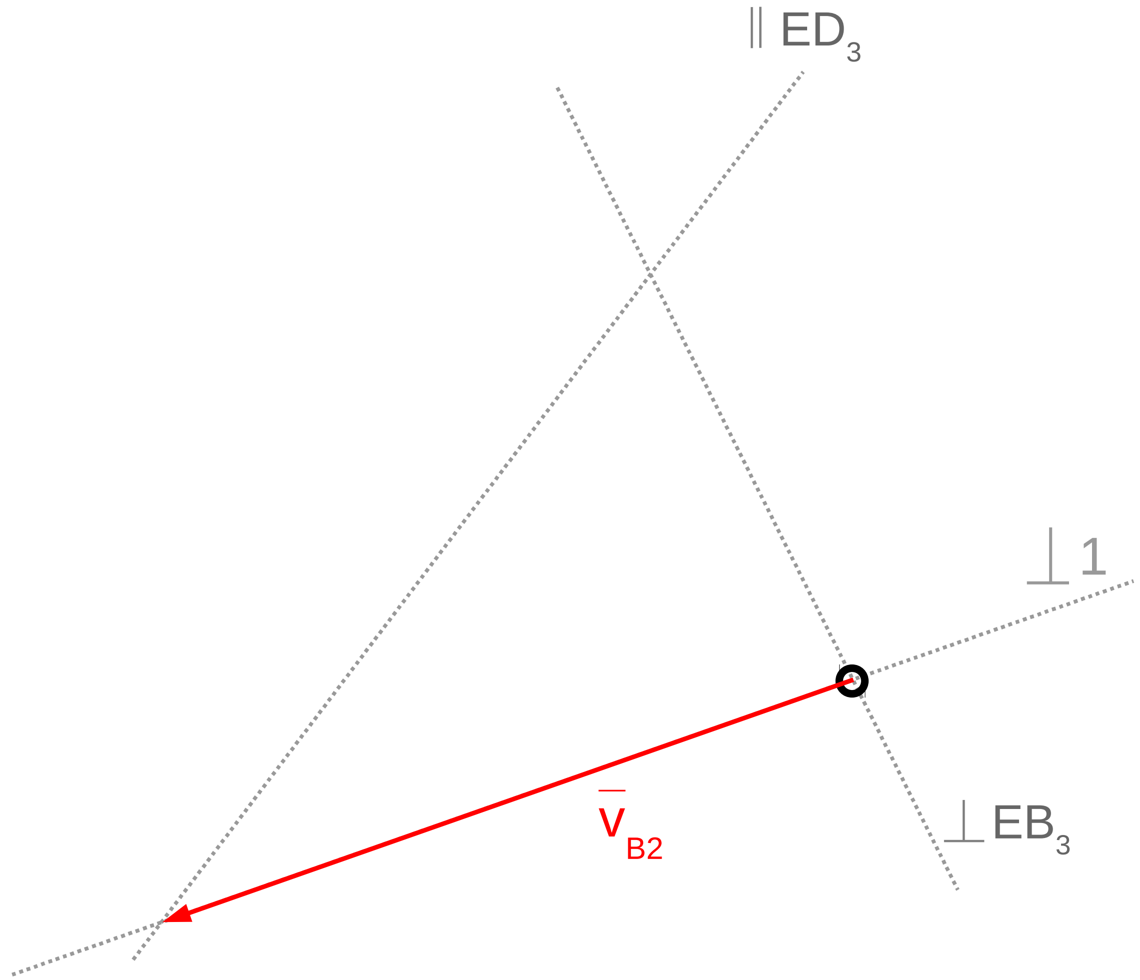
Plan prędkości

$$\underset{\perp 1}{\underline{\underline{\bar{v}_{B2}}}} = \underset{\perp EB_3}{\underline{\bar{v}_{B3}}} + \underset{\parallel ED_3}{\underline{\bar{v}_{B2B3}}}$$



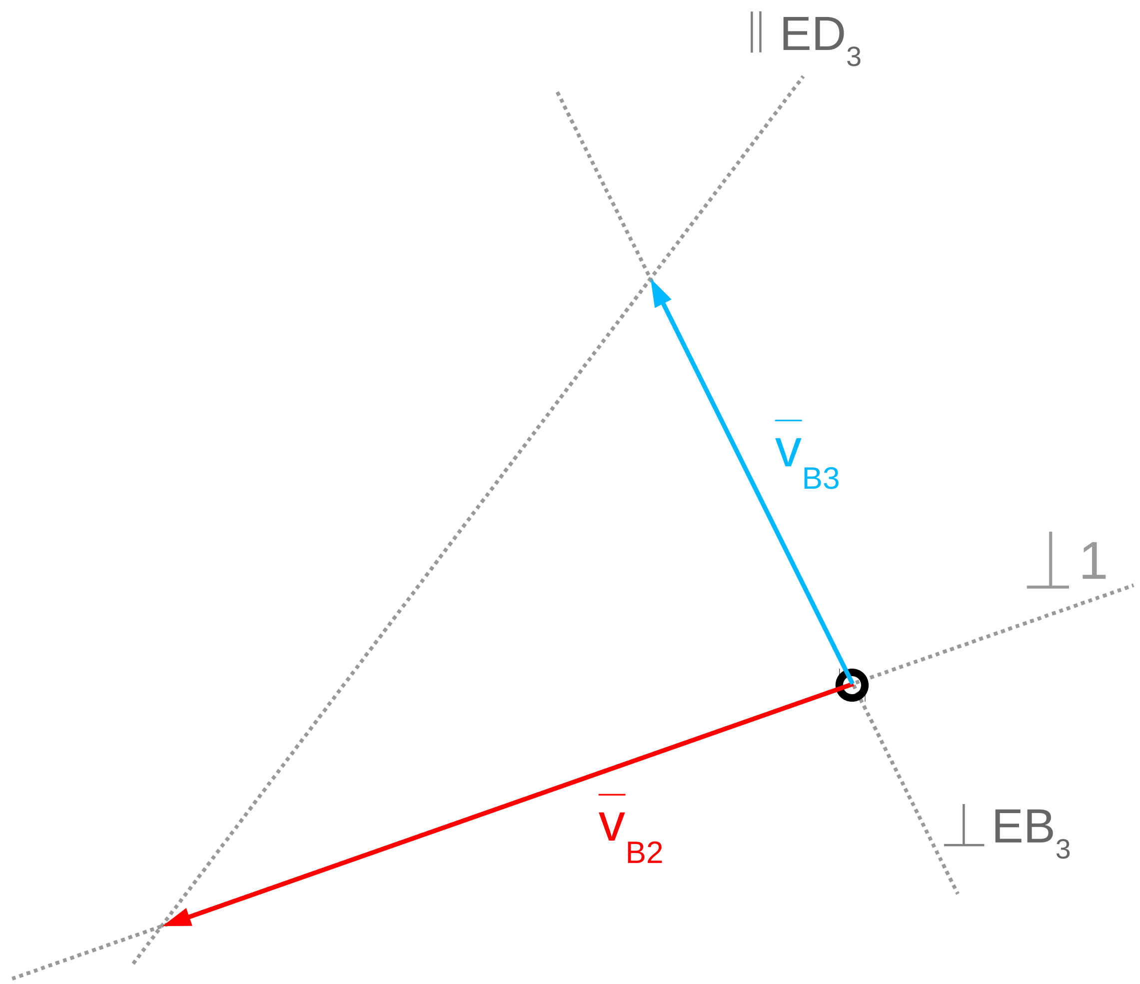
Plan prędkości

$$\underset{\perp 1}{\underline{\underline{\bar{v}_{B2}}}} = \underset{\perp EB_3}{\underline{\bar{v}_{B3}}} + \underset{\parallel ED_3}{\underline{\bar{v}_{B2B3}}}$$



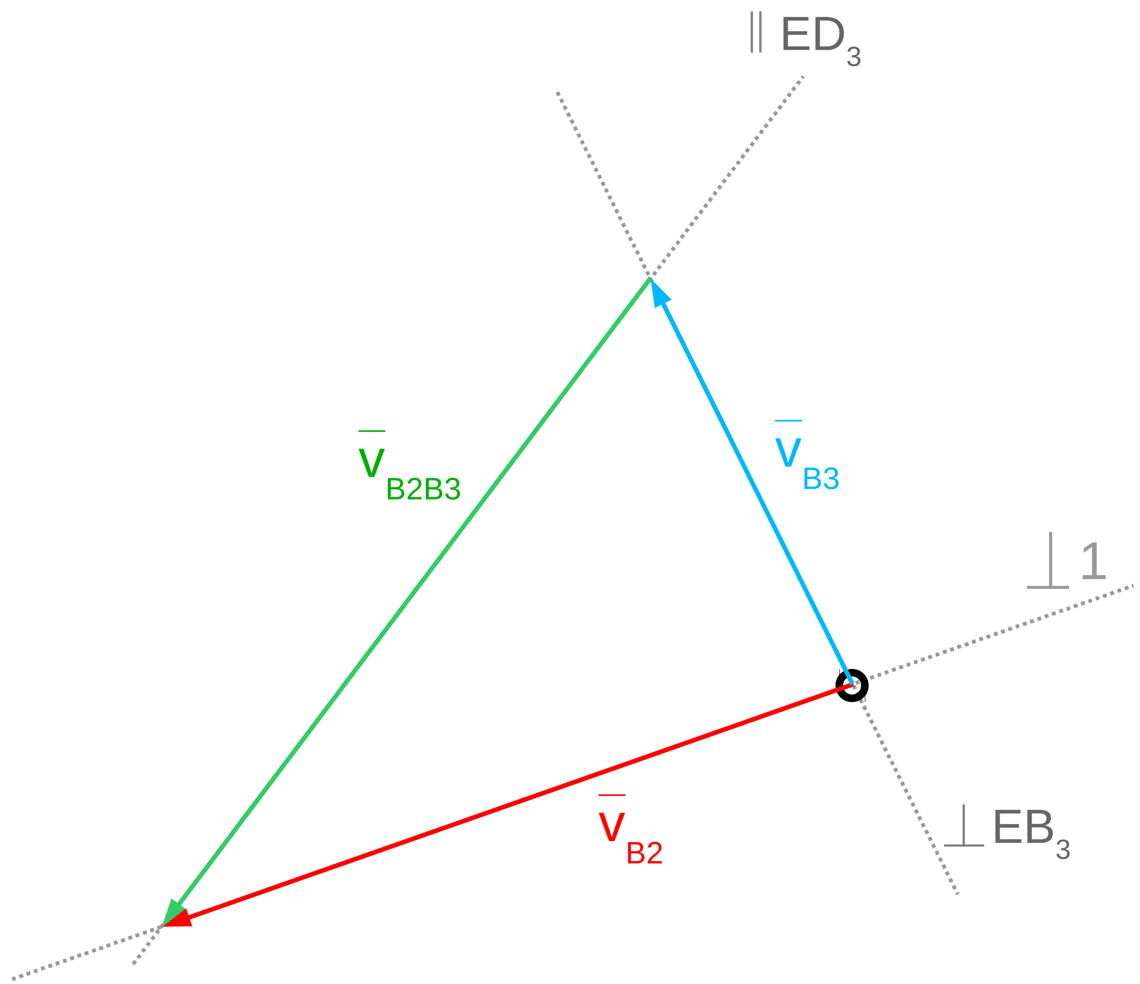
Plan prędkości

$$\underset{\perp 1}{\underline{\overline{v}_{B2}}} = \underset{\perp EB_3}{\underline{\overline{v}_{B3}}} + \underset{\parallel ED_3}{\underline{\overline{v}_{B2B3}}}$$

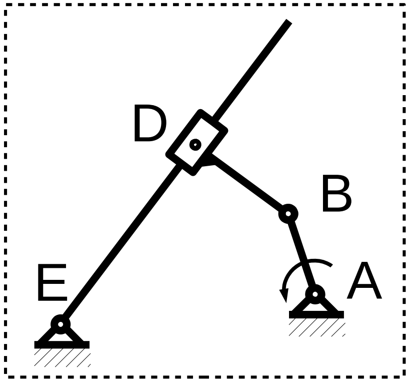


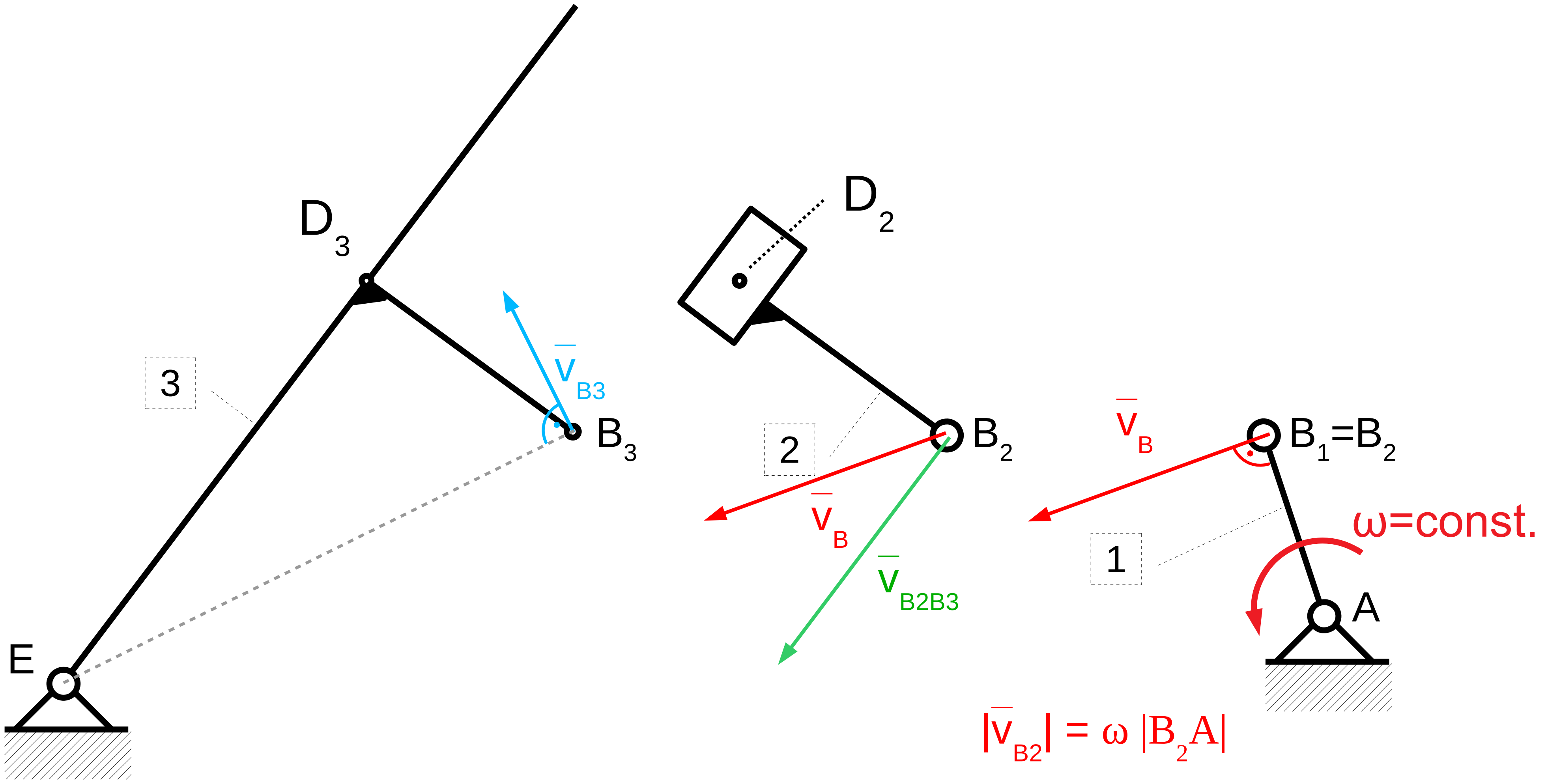
Plan prędkości

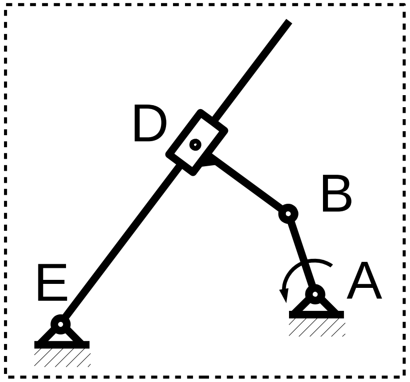
$$\underset{\perp 1}{\underline{\underline{\overline{v}_{B2}}}} = \underset{\perp EB_3}{\underline{\overline{v}_{B3}}} + \underset{\parallel ED_3}{\underline{\overline{v}_{B2B3}}}$$



Wyznaczyliśmy prędkość punktu B_3 oraz prędkość względną ruchu suwaka po pręcie.

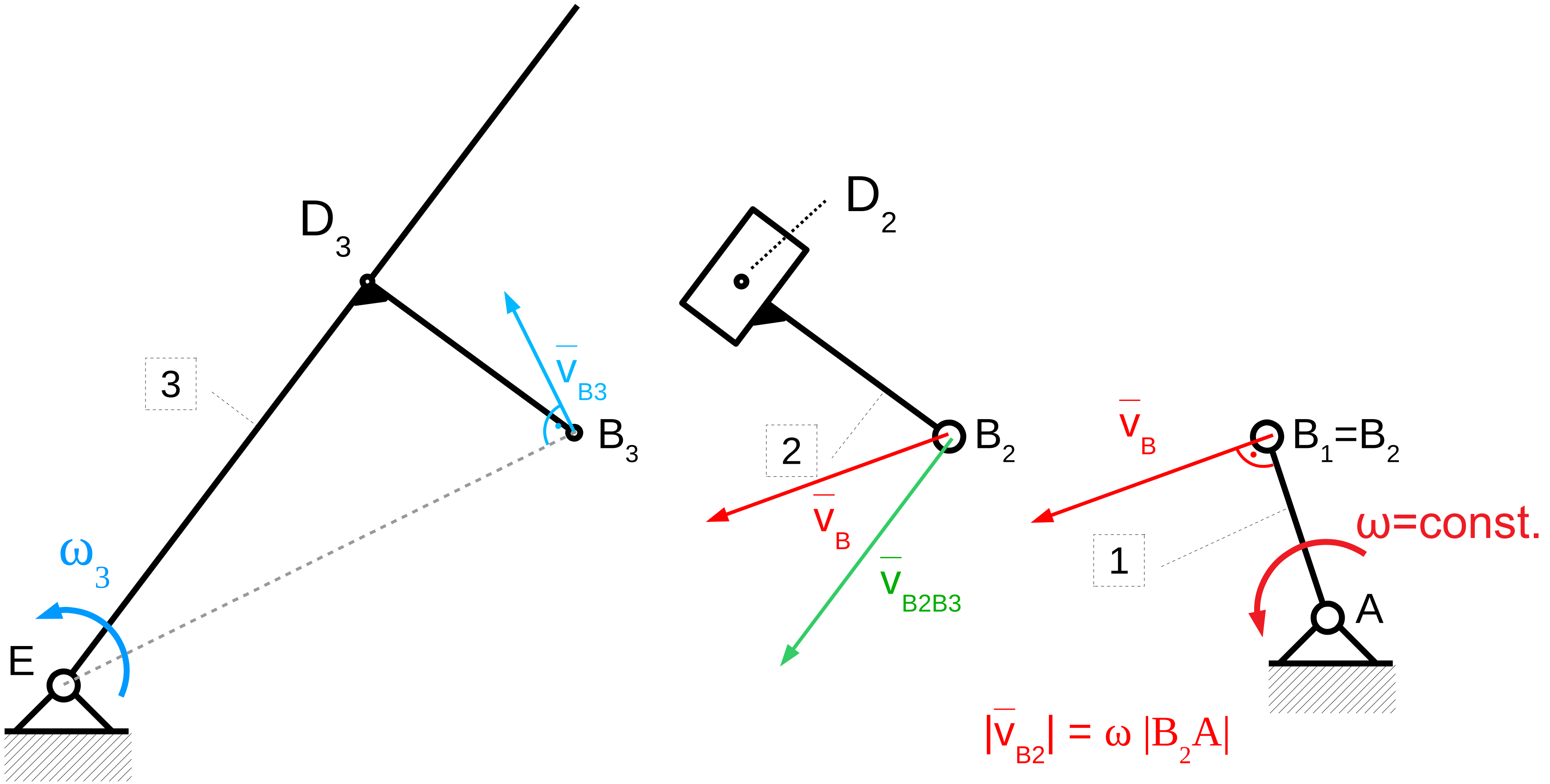


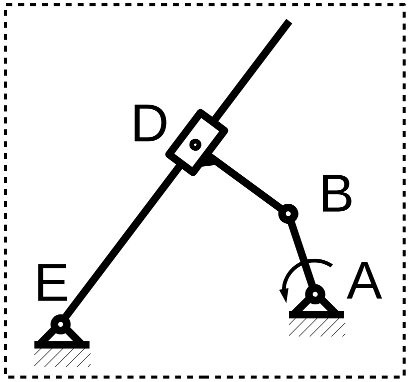




Znajomość prędkość punktu B_3 pozwala określić prędkość kątową członu nr 3:

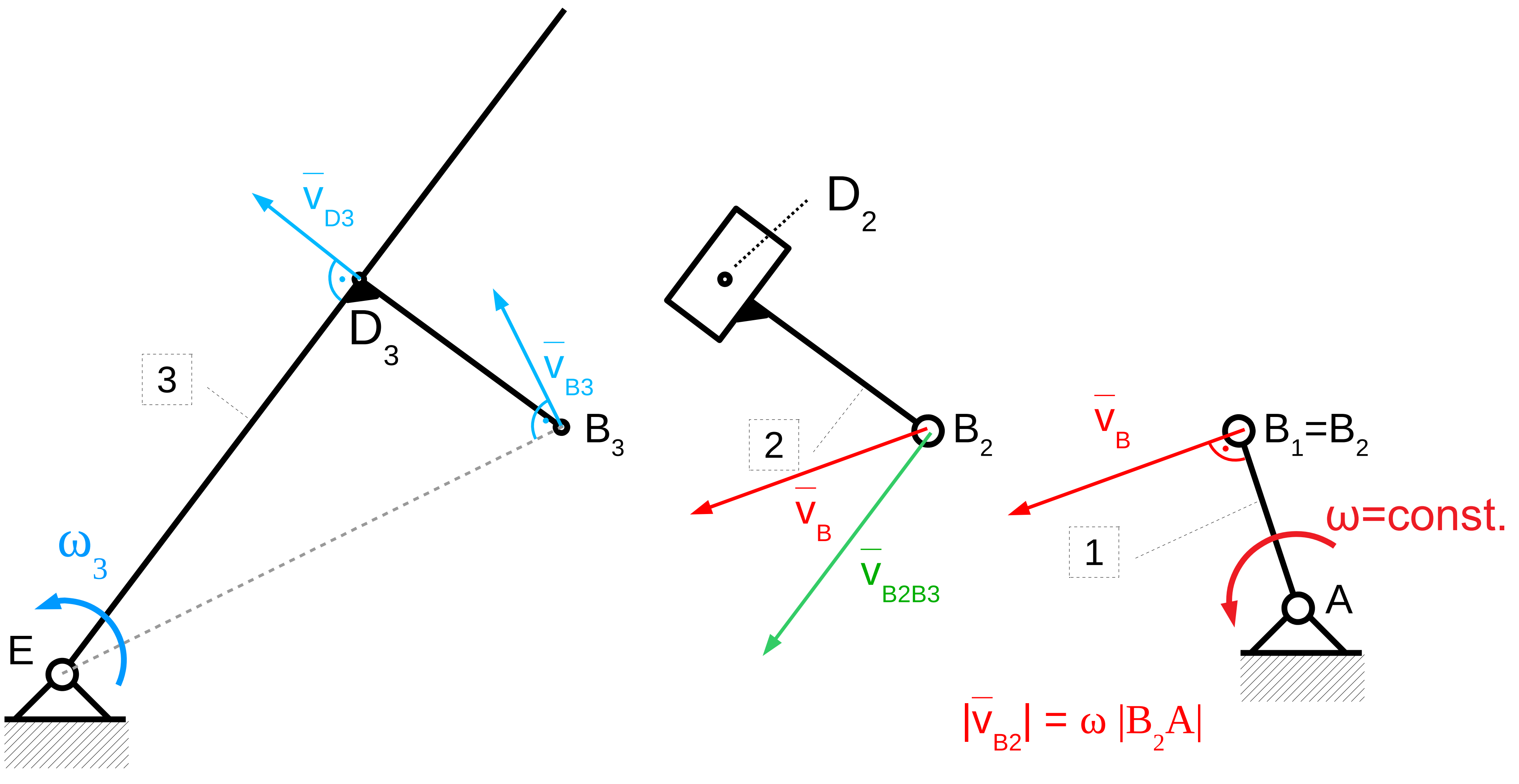
$$\omega_3 = \frac{\overline{V}_{B3}}{|EB_3|}$$



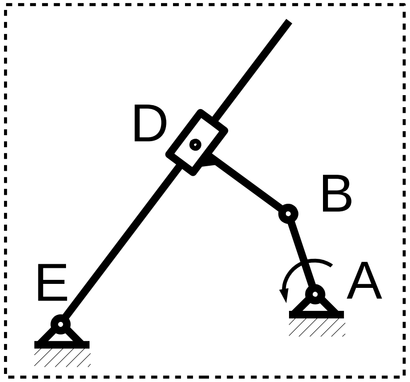


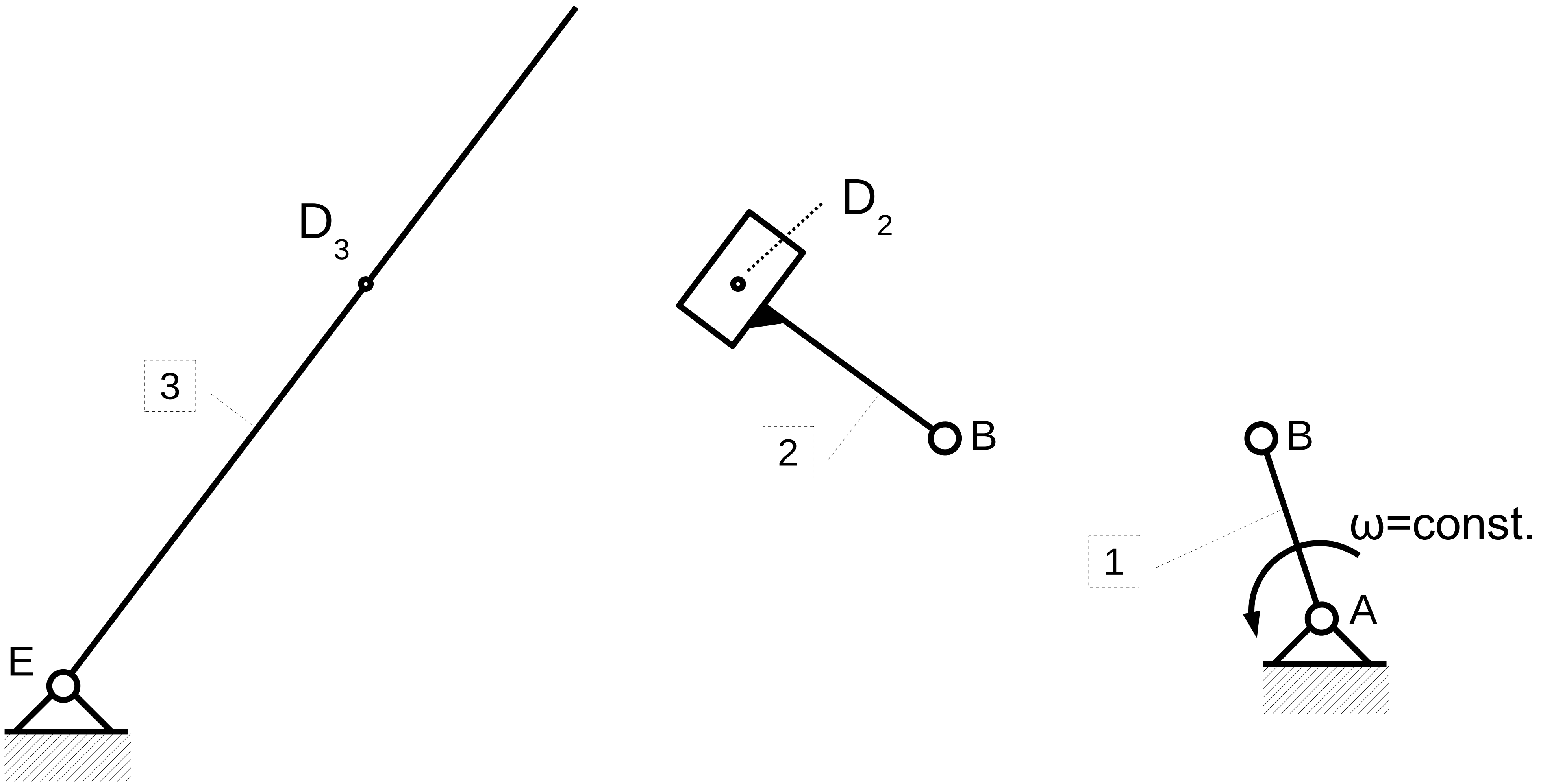
Dzięki wyznaczeniu prędkości kątowej członu 3 znajdziemy teraz prędkość jego dowolnego punktu, np. punktu D_3:

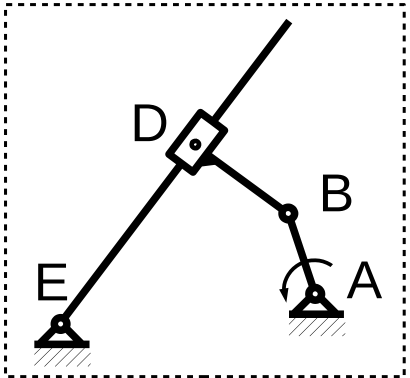
$$|\overline{V}_{D3}| = \omega_3\ |ED_3|$$



Analizę przyspieszeń punktów mechanizmu rozpocznijmy od członu napędowego.





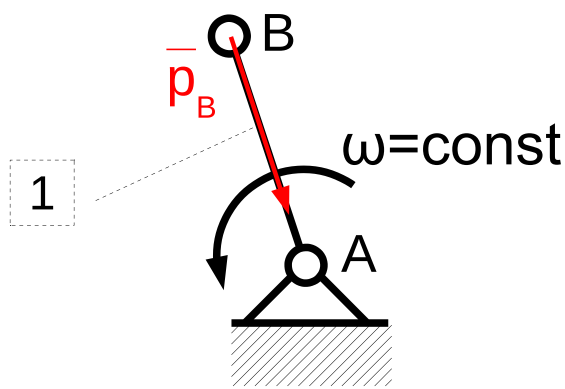


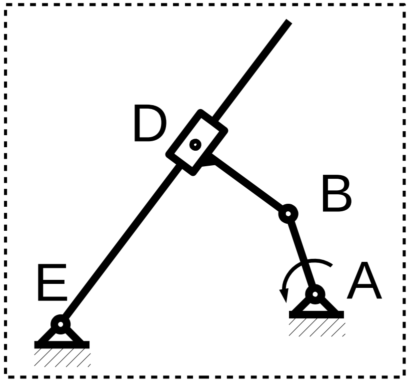
Przyspieszenie punktu B ma tylko składową normalną (przyspieszenie dośrodkowe).

$$\underset{\parallel 1}{\bar{p}_B = \bar{p}^n_{BA}} + \underset{\perp 1}{\bar{p}^t_{BA}}$$

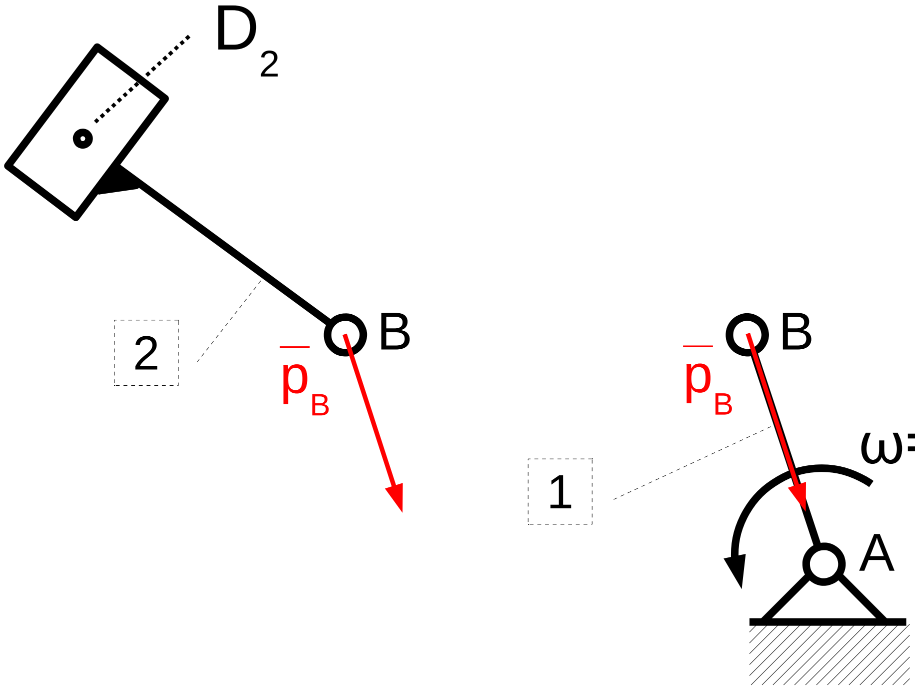
$$|\bar{p}^n_{BA}| = \omega^2\,|BA| \qquad |\bar{p}^t_{BA}| = \varepsilon\,|BA| = 0$$

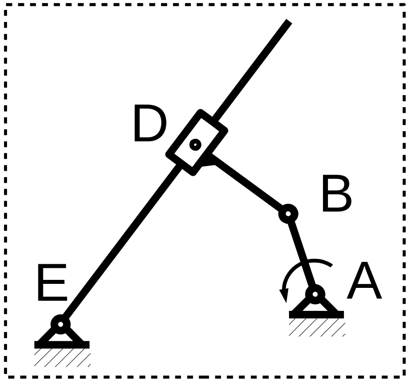
$$\varepsilon = \frac{d\,\omega}{dt} = 0$$





Przyspieszenie punktu B możemy przenieść na człon 2.

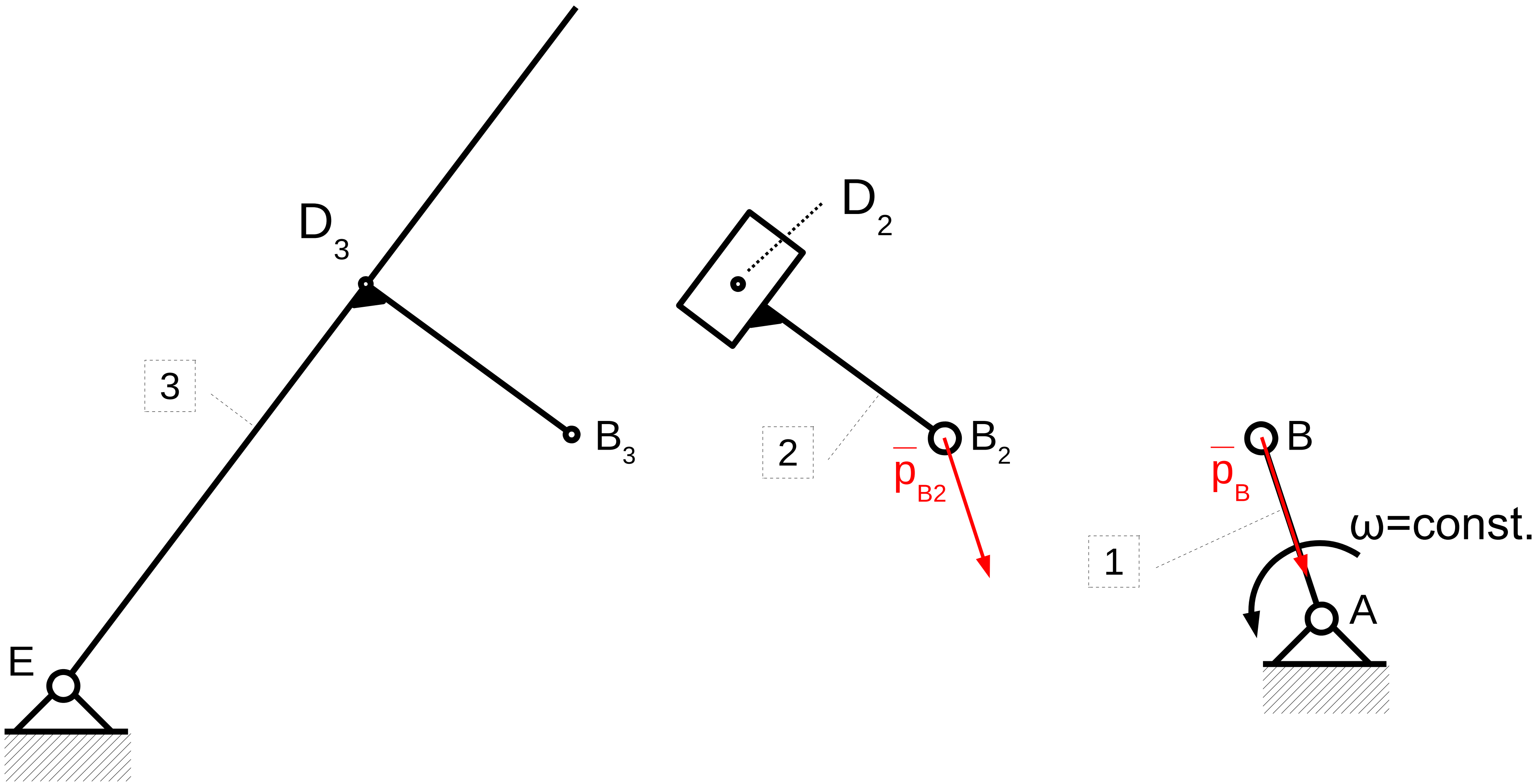


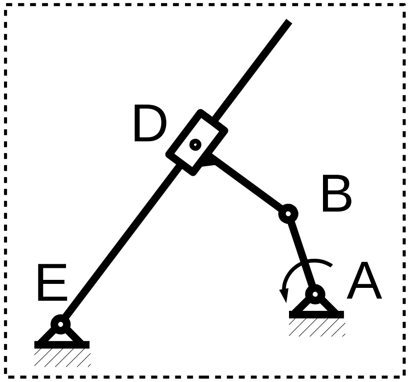


Ruch członu 3 analizujemy z użyciem metody członu rozszerzonego.

Ruch złożony punktu B2 opisuje równanie przyspieszeń:

$$\overline{p}_{B2} = \overline{p}^{Unoszenia} + \overline{p}^{względne} + \overline{p}^{Coriolisa}$$





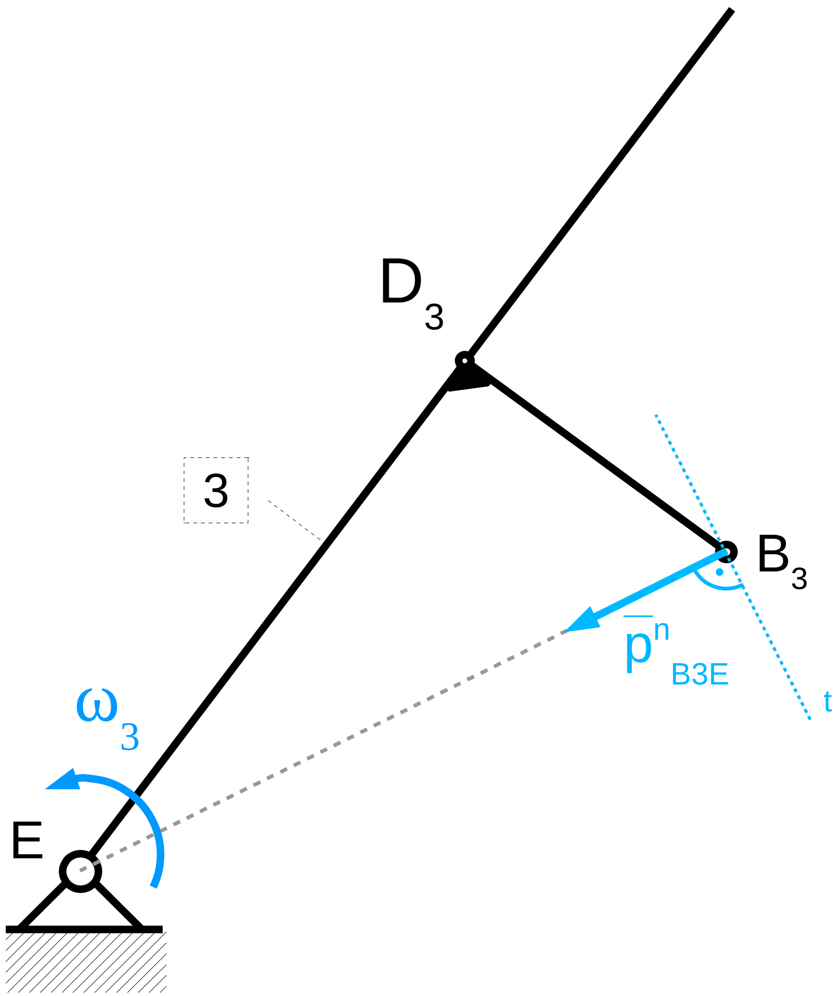
Przeanalizujmy składowe przyspieszeń

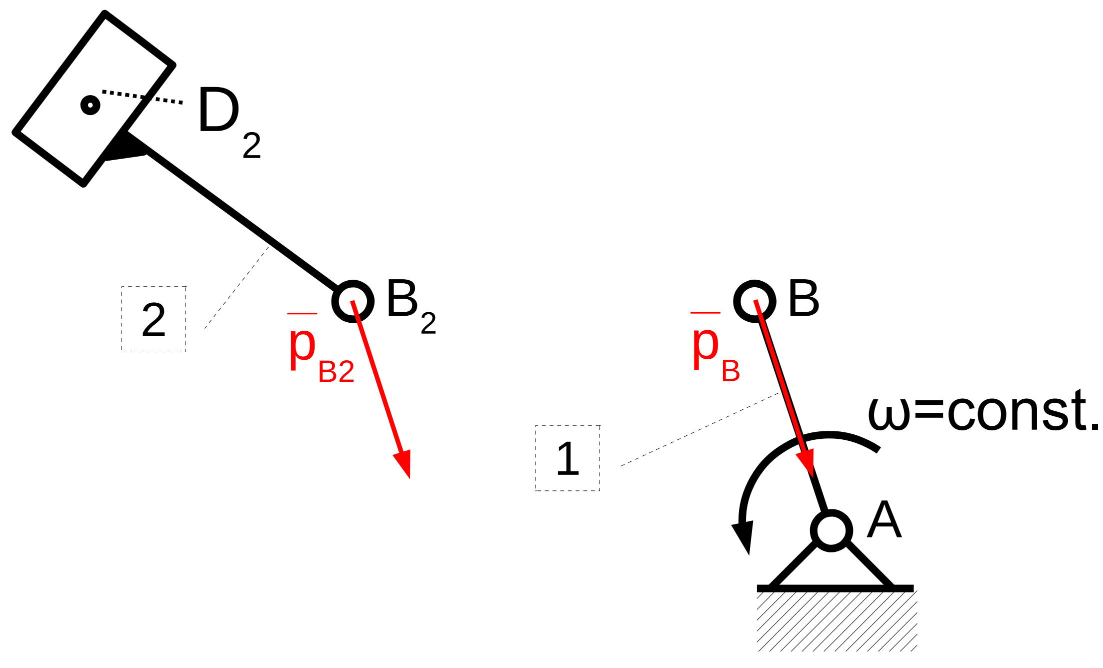
$$\overline{p}_{B2} = \overline{p}^{Unoszenia} + \overline{p}^{względne} + \overline{p}^{Coriolisa}$$

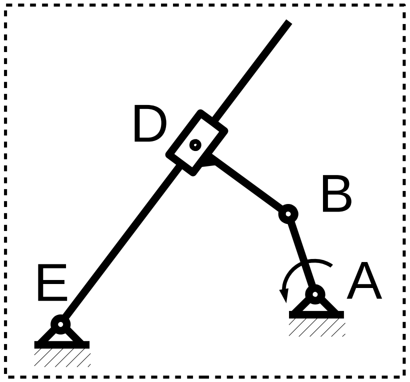
$$\underset{\parallel 1}{\overline{p}_{B2}} = \underset{\parallel B_3E}{\overline{p}^{n}_{B3E}} + \underset{\perp B_3E}{\overline{p}^{t}_{B3E}} + \underset{\parallel D_3E}{\overline{p}_{B2B3}} + \overline{p}^{Cor.}$$

$$|p^{n}_{B3E}| = \omega_3^{\,2}\,|B_3E|$$

z planu prędkości







Przeanalizujmy składowe przyspieszeń

$$\underset{\parallel 1}{\overline{p}_{B2}} = \underset{\parallel B_3E}{\overline{p}^{n}_{B3E}} + \underset{\perp B_3E}{\overline{p}^{t}_{B3E}} + \underset{\parallel D_3E}{\overline{p}_{B2B3}} + \underset{\perp D_3E}{\overline{p}^{Cor.}}$$

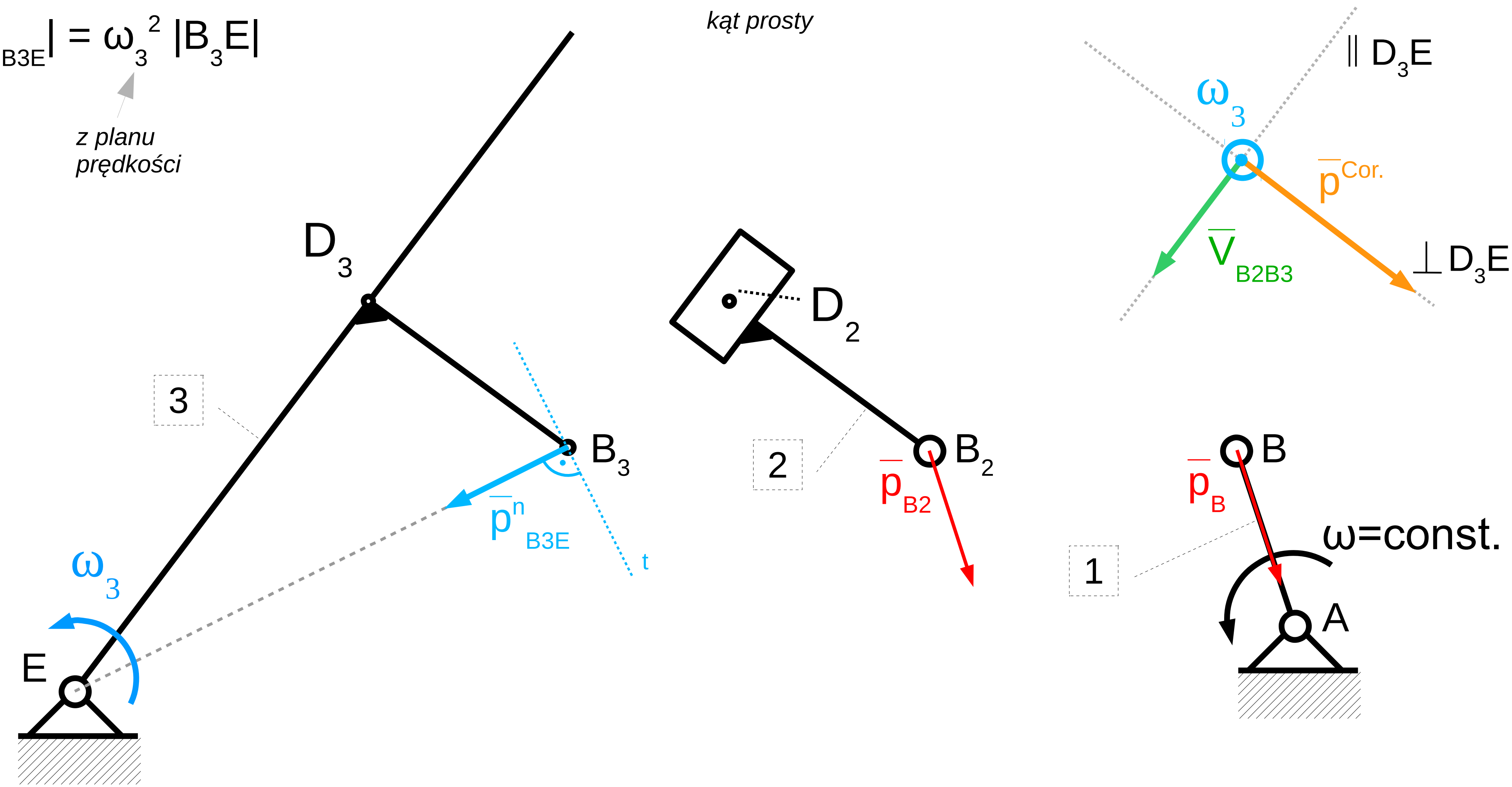
$$\overline{p}^{Cor.} = 2\overline{\omega}_3 \times \overline{V}_{B2B3}$$

$$|\overline{p}^{Cor.}| = 2|\overline{\omega}_3|\,|\overline{V}_{B2B3}|\,\sin(\sphericalangle(\overline{\omega}_3, \overline{V}_{B2B3})) = 2|\overline{\omega}_3|\,|\overline{V}_{B2B3}|$$

kąt prosty

$$|p^{n}_{B3E}| = \omega_3^{\,2}\,|B_3E|$$

z planu prędkości



Rozwiążmy graficznie powstałe równanie wektorowe ruchu względnego

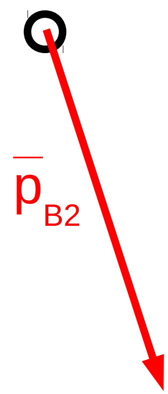
$$\underset{\parallel 1}{\underline{\underline{\bar{p}_{B2}}}} = \underset{\parallel B_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{n}_{B3E}}}} + \underset{\perp B_3E}{\underline{\bar{p}^{t}_{B3E}}} + \underset{\parallel D_3E}{\underline{\bar{p}_{B2B3}}} + \underset{\perp D_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{Cor.}}}}$$

Dla ułatwienia rysowania możemy zmienić kolejność wektorów

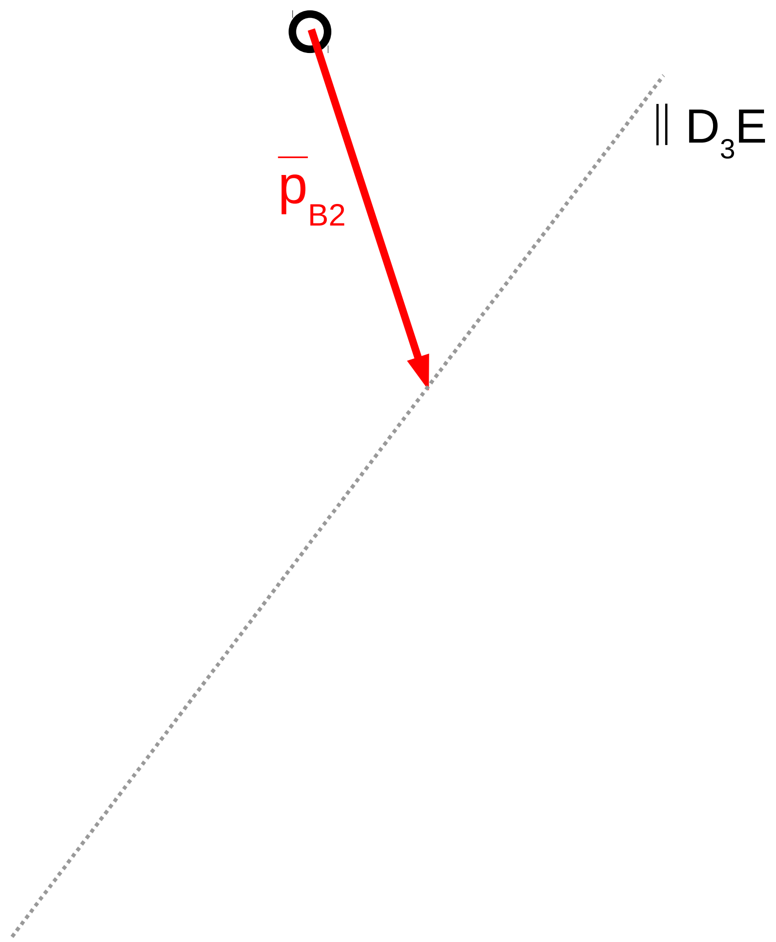
$$\underset{\parallel 1}{\underline{\underline{\bar{p}_{B2}}}} - \underset{\parallel D_3E}{\underline{\bar{p}_{B2B3}}} = \underset{\perp D_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{Cor.}}}} + \underset{\parallel B_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{n}_{B3E}}}} + \underset{\perp B_3E}{\underline{\bar{p}^{t}_{B3E}}}$$

$$\underset{\parallel 1}{\underline{\underline{\overline{P}_{B2}}}} - \underset{\parallel D_3E}{\underline{\overline{p}_{B2B3}}} = \underset{\perp D_3E}{\underline{\underline{\overline{p}^{Cor.}}}} + \underset{\parallel B_3E}{\underline{\underline{\overline{p}^{n}_{B3E}}}} + \underset{\perp B_3E}{\underline{\overline{p}^{t}_{B3E}}}$$

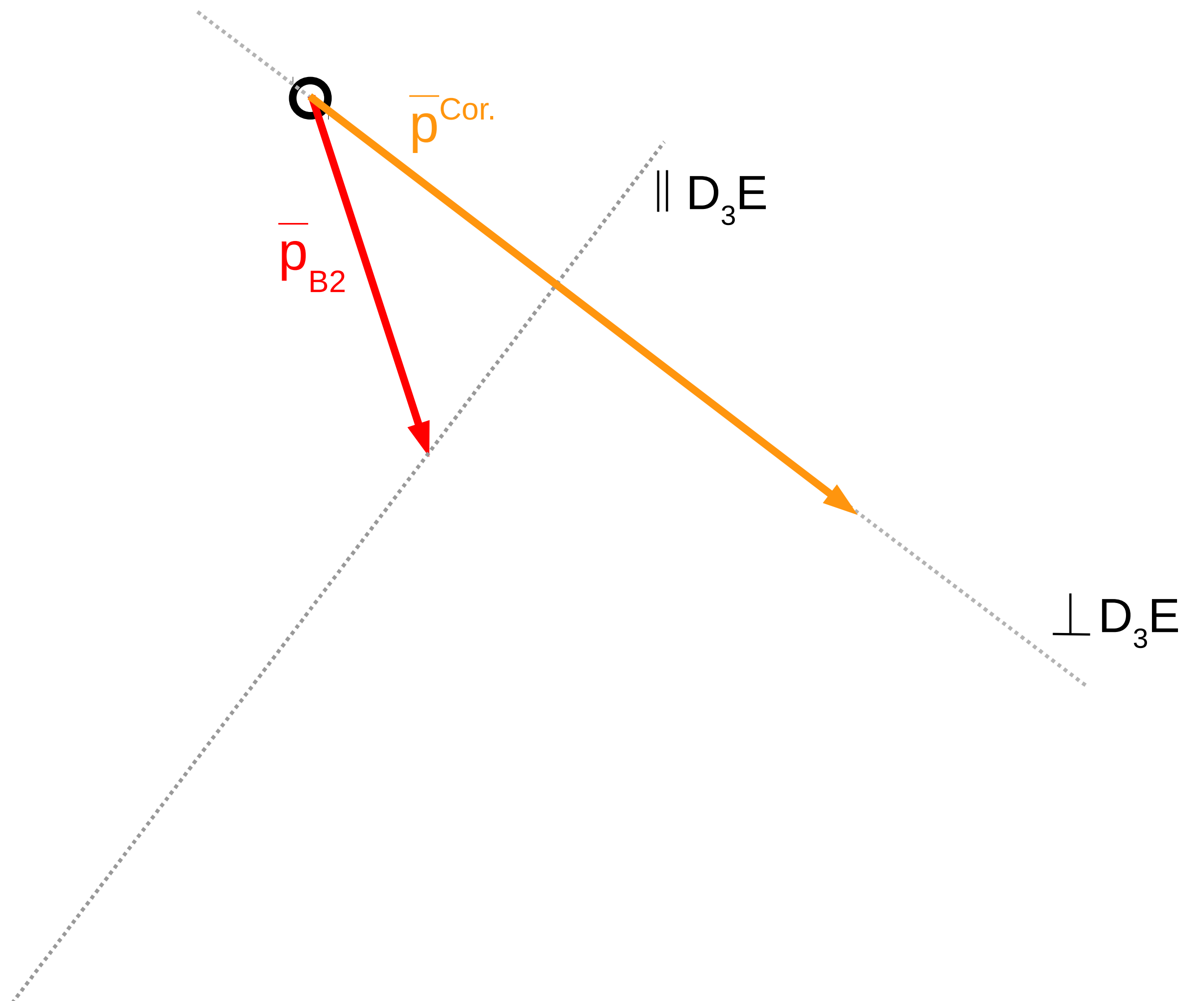
$$\underset{\parallel 1}{\underline{\underline{\overline{P}_{B2}}}} - \underset{\parallel D_3E}{\underline{\overline{p}_{B2B3}}} = \underset{\perp D_3E}{\underline{\underline{\overline{p}^{Cor.}}}} + \underset{\parallel B_3E}{\underline{\underline{\overline{p}^{n}_{B3E}}}} + \underset{\perp B_3E}{\underline{\overline{p}^{t}_{B3E}}}$$



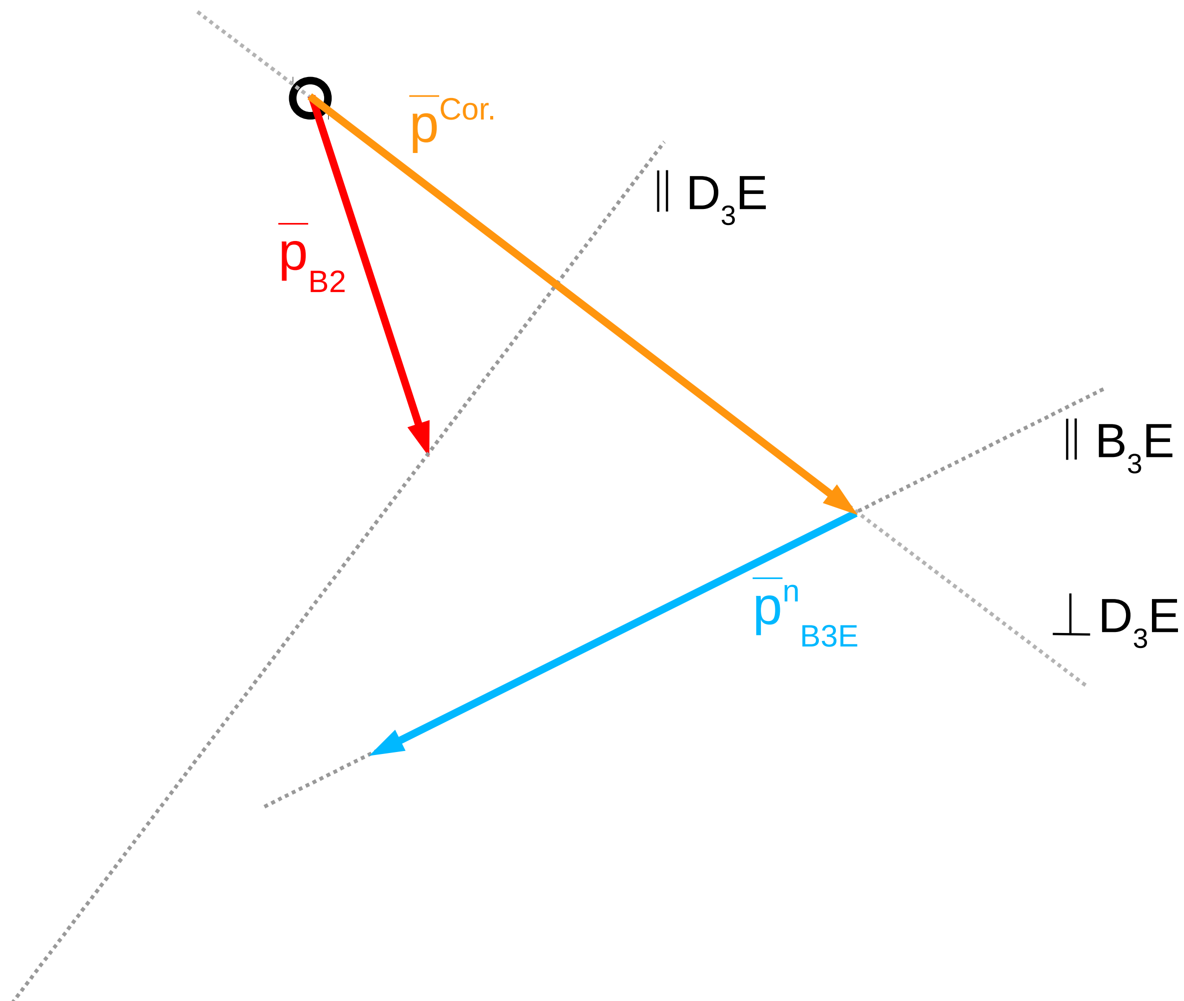
$$\underset{\parallel 1}{\underline{\underline{\bar{P}_{B2}}}} - \underset{\parallel D_3E}{\underline{\bar{p}_{B2B3}}} = \underset{\perp D_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{Cor.}}}} + \underset{\parallel B_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{n}_{B3E}}}} + \underset{\perp B_3E}{\underline{\bar{p}^{t}_{B3E}}}$$



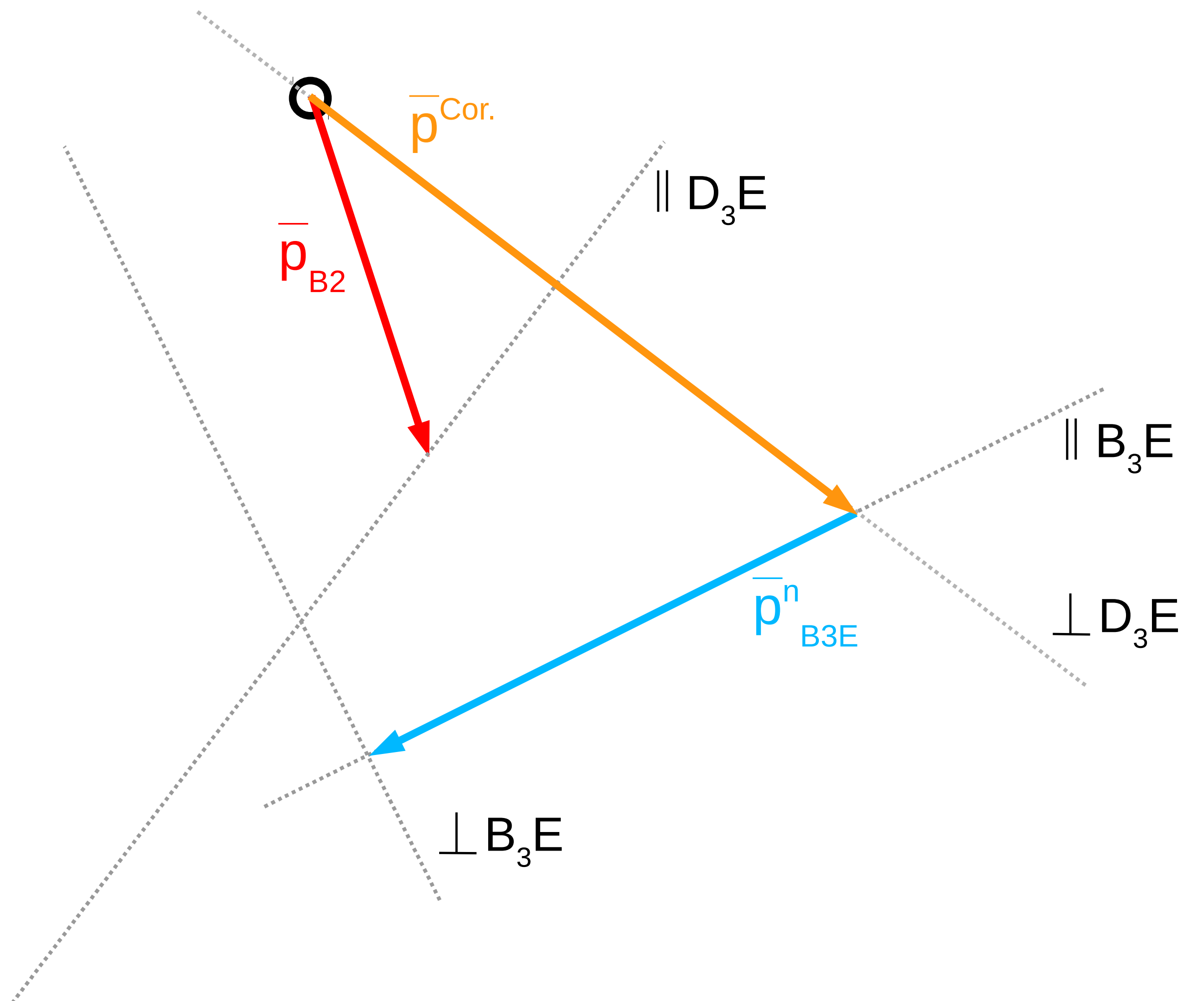
$$\underset{\parallel 1}{\overline{P}_{B2}} - \underset{\parallel D_3E}{\overline{p}_{B2B3}} = \underset{\perp D_3E}{\overline{p}^{Cor.}} + \underset{\parallel B_3E}{\overline{p}^{n}_{B3E}} + \underset{\perp B_3E}{\overline{p}^{t}_{B3E}}$$



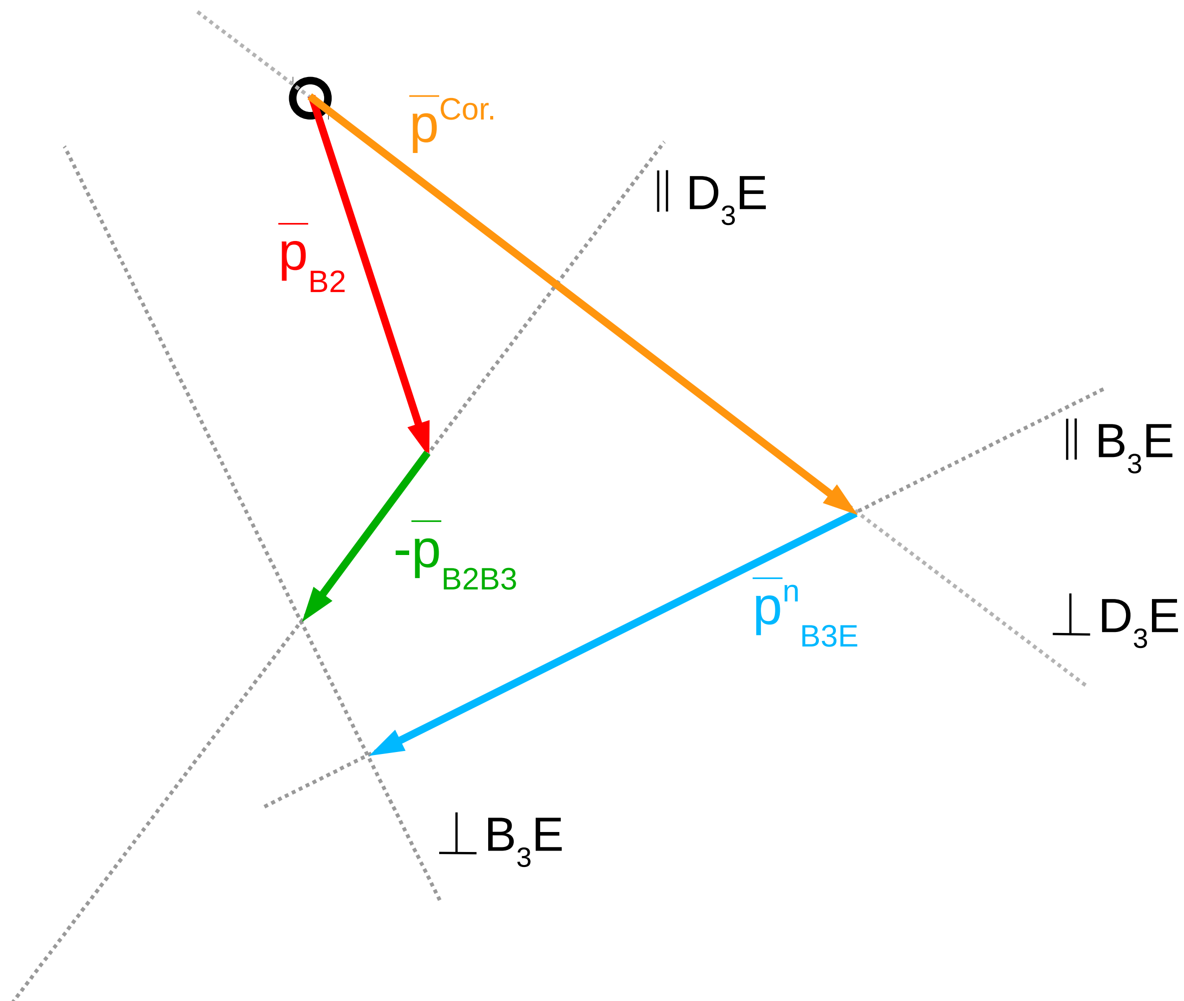
$$\underset{\parallel 1}{\underline{\underline{\overline{P}_{B2}}}} - \underset{\parallel D_3E}{\underline{\overline{p}_{B2B3}}} = \underset{\perp D_3E}{\underline{\underline{\overline{p}^{Cor.}}}} + \underset{\parallel B_3E}{\underline{\underline{\overline{p}^{n}_{B3E}}}} + \underset{\perp B_3E}{\underline{\overline{p}^{t}_{B3E}}}$$



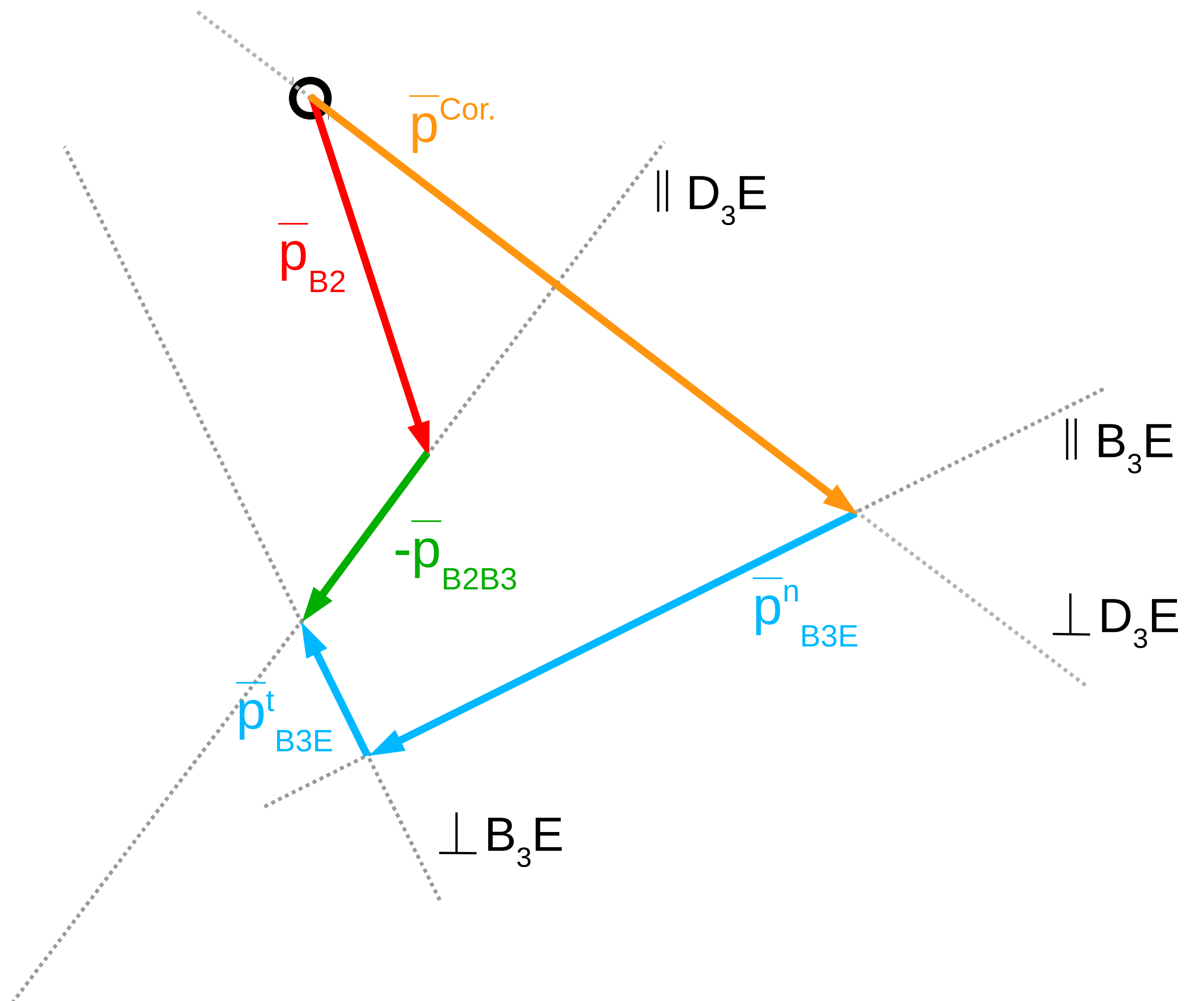
$$\underset{\parallel 1}{\underline{\underline{\bar{P}_{B2}}}} - \underset{\parallel D_3E}{\underline{\bar{p}_{B2B3}}} = \underset{\perp D_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{Cor.}}}} + \underset{\parallel B_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{n}_{B3E}}}} + \underset{\perp B_3E}{\underline{\bar{p}^{t}_{B3E}}}$$

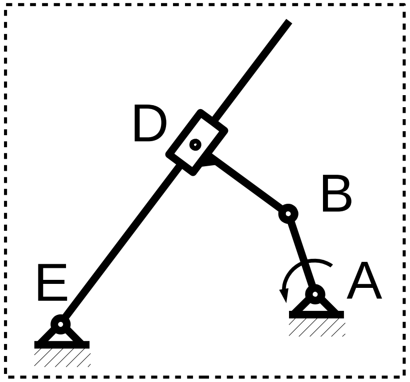


$$\underset{\parallel 1}{\bar{P}_{B2}} - \underset{\parallel D_3E}{\bar{p}_{B2B3}} = \underset{\perp D_3E}{\bar{p}^{Cor.}} + \underset{\parallel B_3E}{\bar{p}^{n}_{B3E}} + \underset{\perp B_3E}{\bar{p}^{t}_{B3E}}$$



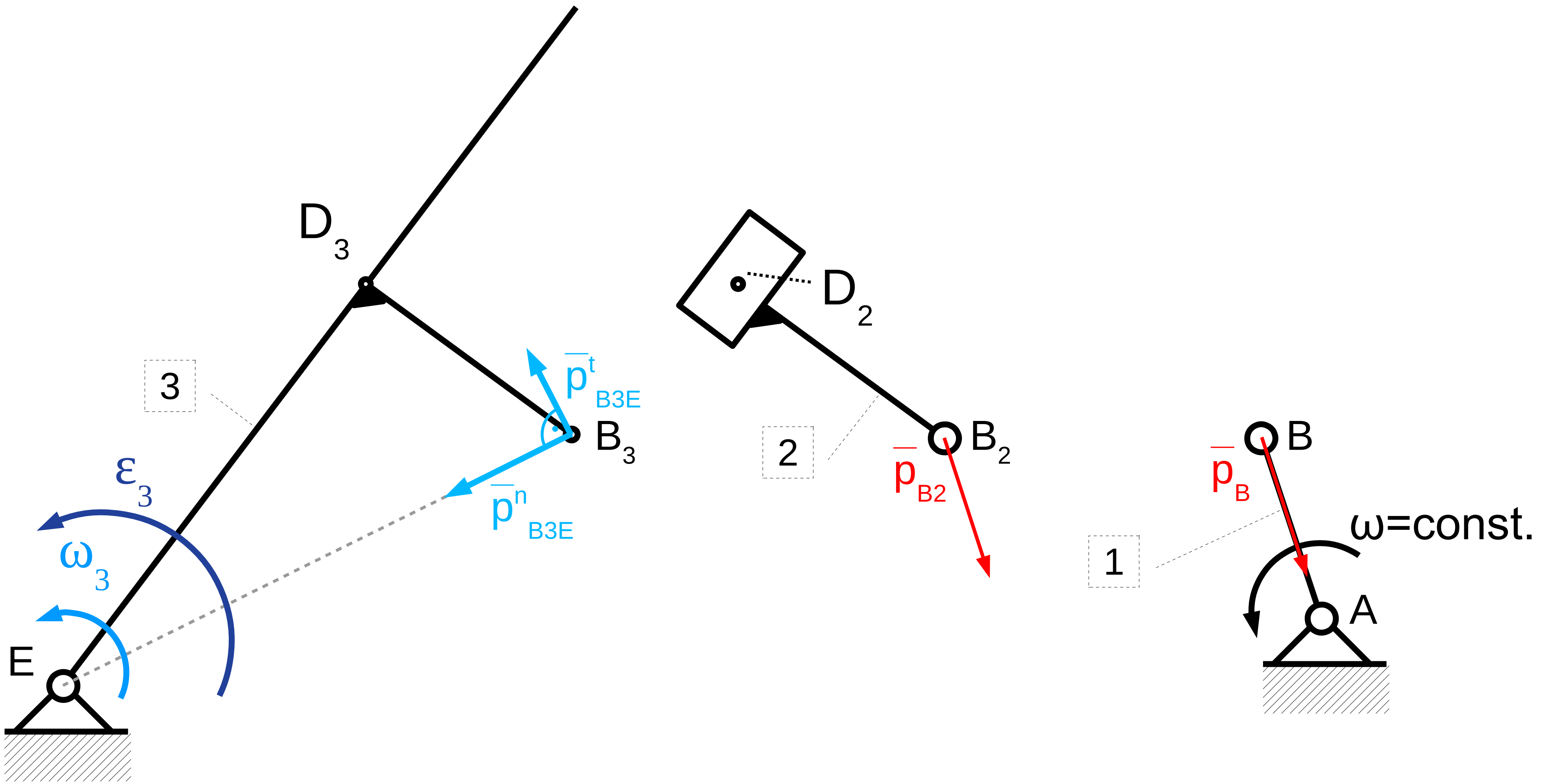
$$\underset{\parallel 1}{\underline{\underline{\overline{P}_{B2}}}} - \underset{\parallel D_3E}{\underline{\overline{p}_{B2B3}}} = \underset{\perp D_3E}{\underline{\underline{\overline{p}^{Cor.}}}} + \underset{\parallel B_3E}{\underline{\underline{\overline{p}^{n}_{B3E}}}} + \underset{\perp B_3E}{\underline{\overline{p}^{t}_{B3E}}}$$

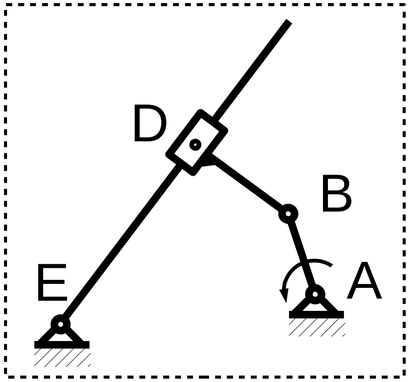




Po wyznaczeniu przyspieszenia stycznego punktu B3 możemy określić przyspieszenie kątowe członu 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{\overline{p}^t_{B3E}}{|B_3E|}$$

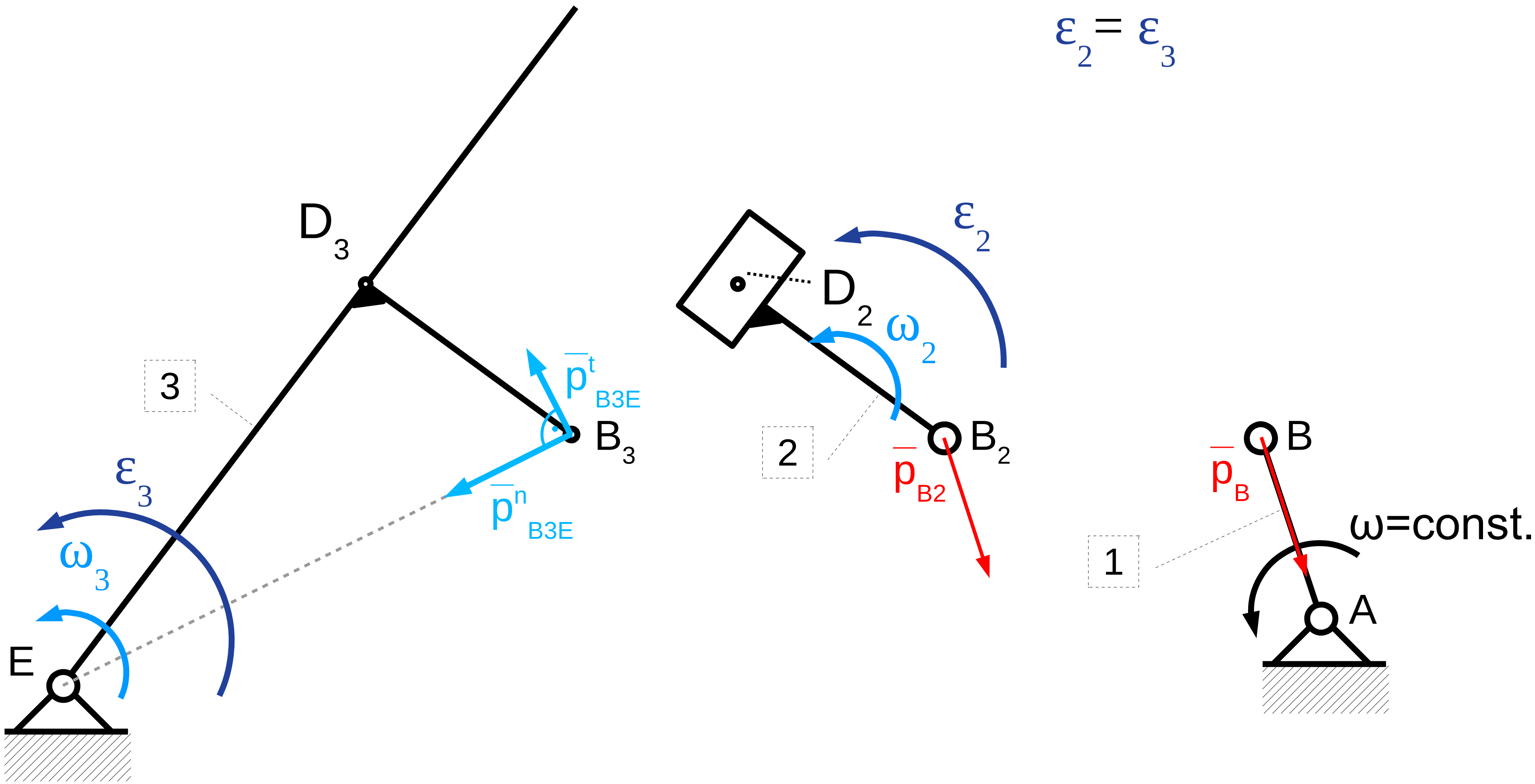


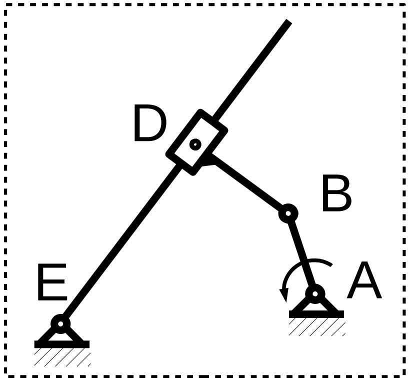


Ponieważ elementy nr 2 i 3 są w czasie ruchu ułożone zawsze pod stałym kątem względem siebie (sztywne mocowanie pręta B_2D_2 do suwaka) to zarówno prędkości jak i przyspieszenia tych członów będą sobie równe.

$$\omega_2=\omega_3$$

$$\varepsilon_2=\varepsilon_3$$



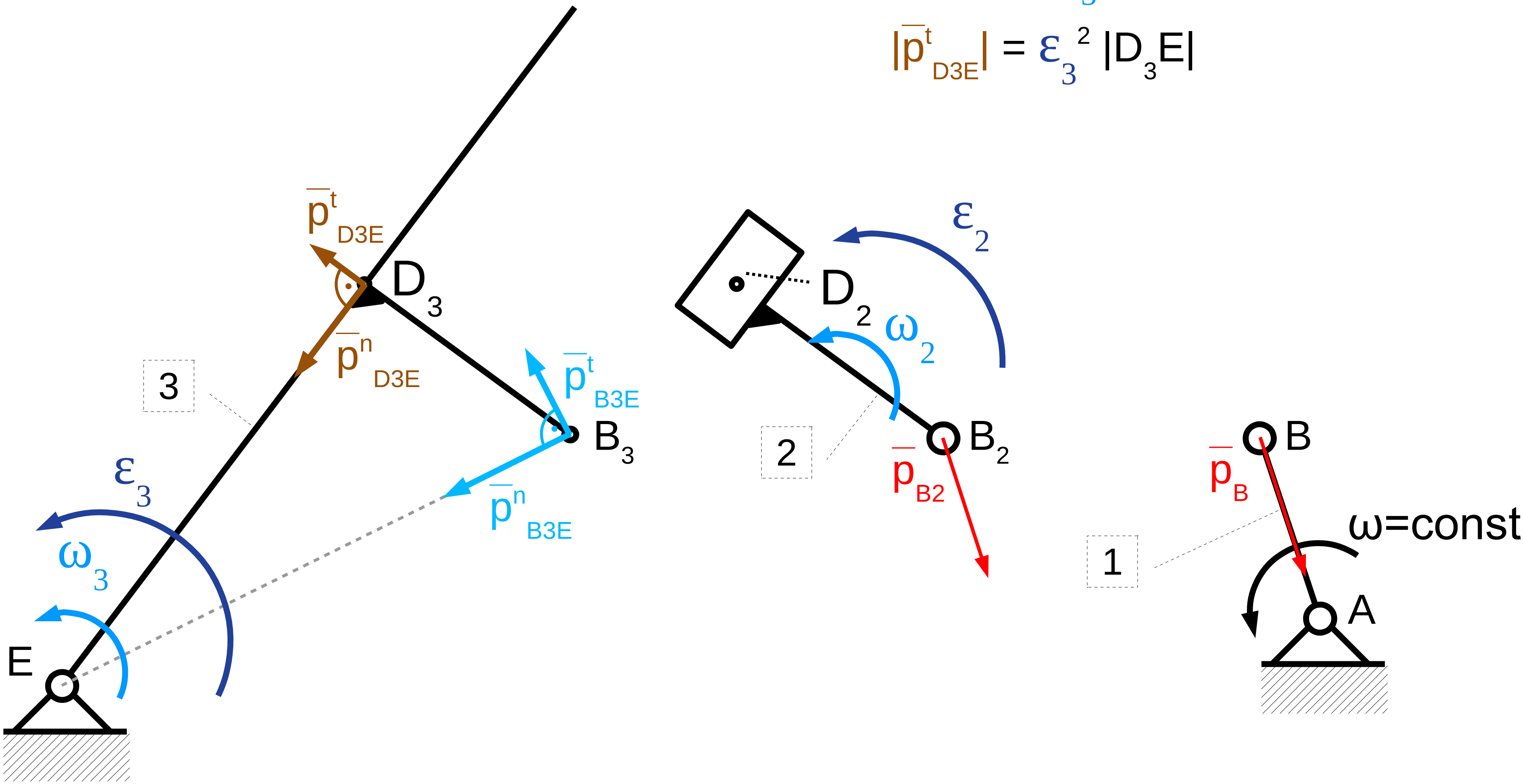


Przyspieszenie punktu D_3 wyliczamy jako:

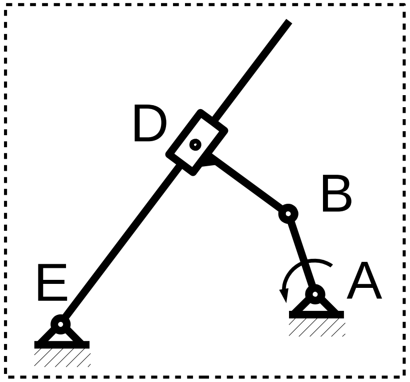
$$\bar{p}_{D3} = \underset{\parallel D_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{n}_{D3E}}}} + \underset{\perp D_3E}{\underline{\underline{\bar{p}^{t}_{D3E}}}}$$

$$|\bar{p}^{n}_{D3E}| = \omega_3^{\,2}\, |D_3E|$$

$$|\bar{p}^{t}_{D3E}| = \varepsilon_3^{\,2}\, |D_3E|$$



Przyspieszenie punktu D_2 najłatwiej będzie obliczyć jako:



$$\underset{\parallel BA}{\overline{p}_{D2}} = \overline{p}_{B2} + \underset{\parallel D_2B_2}{\overline{p}^{n}_{D2B2}} + \underset{\perp D_2B_2}{\overline{p}^{t}_{D2B2}}$$

$$|\overline{p}^{n}_{D2B2}| = \omega_2^{\,2}\,|D_2B_2|$$

$$|\overline{p}^{t}_{D2B2}| = \varepsilon_2^{\,2}\,|D_2B_2|$$