Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Podstawy automatyki i teorii maszyn

semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 14

Współczesne problemy teorii sterowania.
Opis układów dynamicznych
w przestrzeni stanu.

Współczesna teoria sterowania

Klasyczna teoria sterowania	Współczesna teoria sterowania (od około 1950)
układy o jednym wejściu i jednym wyjściu (SISO)	układy o wielu wejściach i wyjściach
układy liniowe	często układy nieliniowe
układy niezależne od czasu	układy zależne od czasu
opis za pomocą transmitancji	opis równaniami stanu
analiza w dziedzinie czasu i częstości	analiza w dziedzinie czasu
zainteresowanie odpowiedzią układu	zainteresowanie stanem układu

Opis układów w przestrzeni stanu

Opis w przestrzeni stanów to sposób formułowania modelu matematycznego układu o wielu wejściach i wielu wyjściach z użyciem równań różniczkowych pierwszego rzędu.

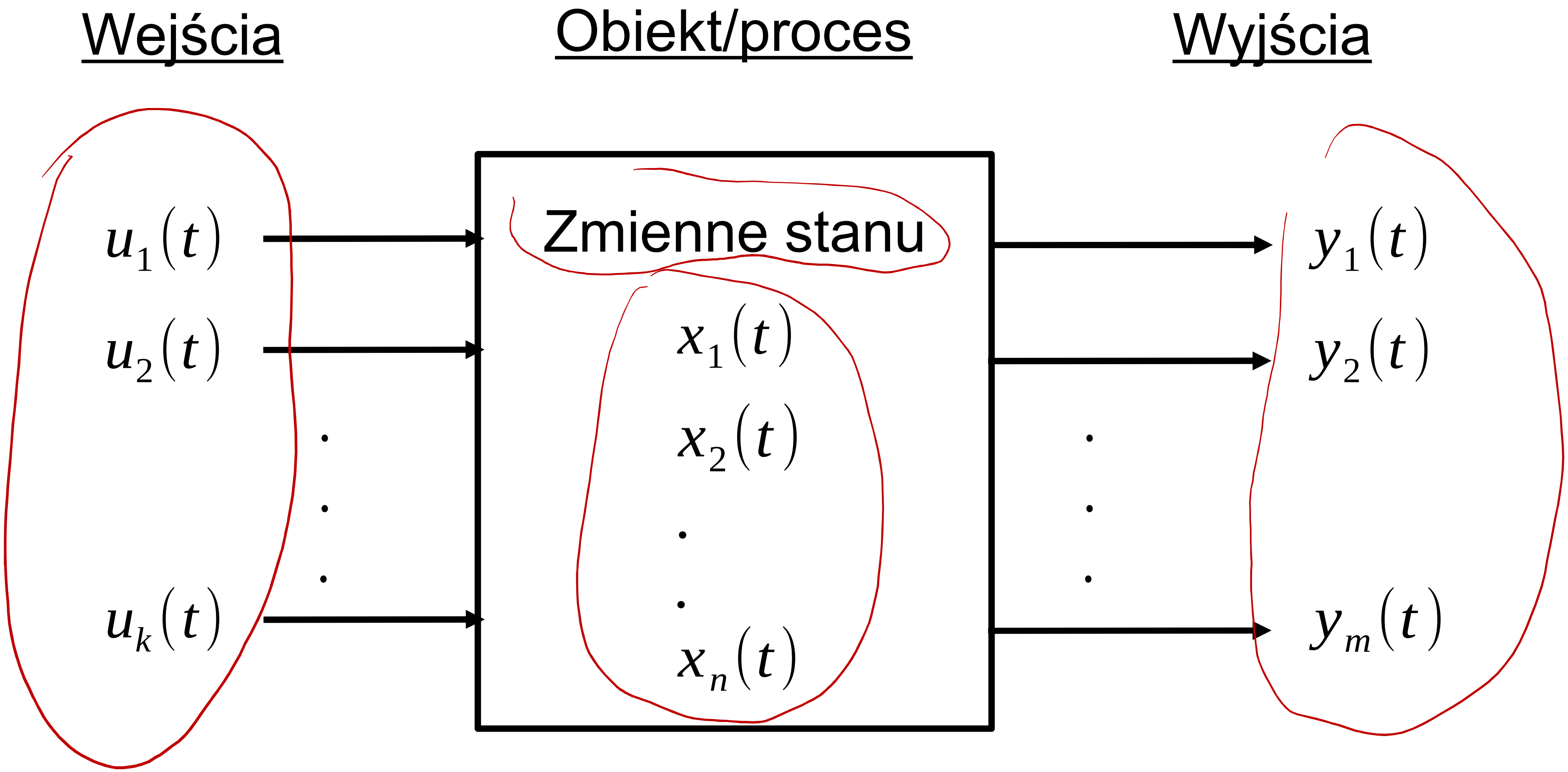
Zmienne stanu – jednoznacznie opisują wewnętrzny stan układu w dowolnej chwili.

Typowe zmienne stanu: położenie, prędkość, temperatura, ciśnienie, przepływ, prąd, napięcie.

Zmiennymi stanu mogą czas być również zmienne nie mające interpretacji fizycznej lub kombinacje różnych zmiennych.

Układ może mieć wiele różnych reprezentacji za pomocą różnych zmiennych stanów, przy czym relacja wejście-wyjście nie zależy od ich wyboru.

Opis układów w przestrzeni stanu



Opis układów w przestrzeni stanu

Dla układu liniowego i niezależnego od czasu

Równanie stanu: $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

$\boldsymbol{x}_{n\,x\,1}(t)$ - macierz zmiennych stanu

$\boldsymbol{A}_{n\,x\,n}$ - macierz układu

$\boldsymbol{B}_{n\,x\,k}$ - macierz wejść

$\boldsymbol{u}_{k\,x\,1}(t)$ - macierz zmiennych wejściowych (wymuszeń)

Równanie wyjścia: $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$

$\boldsymbol{y}_{m\,x\,1}(t)$ - macierz zmiennych wyjściowych

$\boldsymbol{C}_{m\,x\,n}$ - macierz wyjść

$\boldsymbol{D}_{m\,x\,k}$ - macierz transmisyjna

$\boldsymbol{u}_{k\,x\,1}(t)$ - macierz zmiennych wejściowych (wymuszeń)

Opis układów w przestrzeni stanu

Przykład dla n=2, k=4, m=3

Równanie stanu: $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\\ u_4(t)\end{bmatrix}$$

Równanie wyjścia: $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\\ C_{31} & C_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14}\\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\\ u_4(t)\end{bmatrix}$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Przykład dla n=2, k=4, m=3

Równanie stanu: $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14}\\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\\ u_4(t)\end{bmatrix}$$

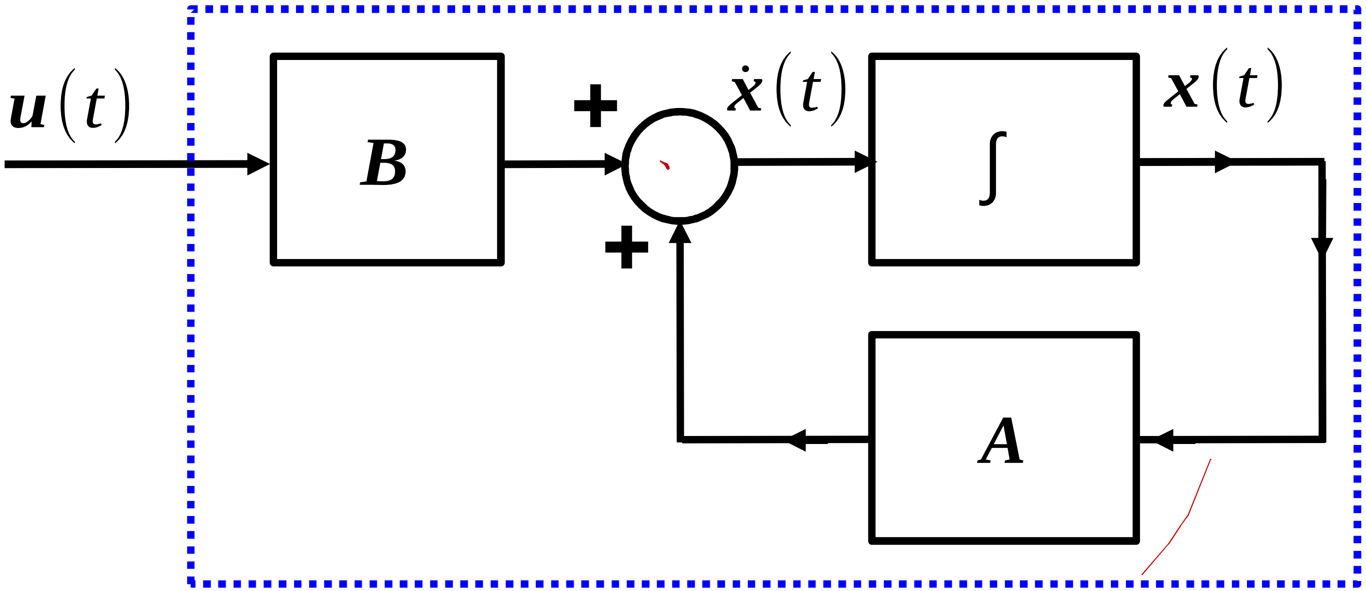
Równanie wyjścia: $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)$

$$\begin{bmatrix}y_1(t)\\ y_2(t)\\ y_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\\ C_{31} & C_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14}\\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24}\\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\\ u_3(t)\\ u_4(t)\end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy nie jest przemienne!

Opis układów w przestrzeni stanu

Schemat blokowy

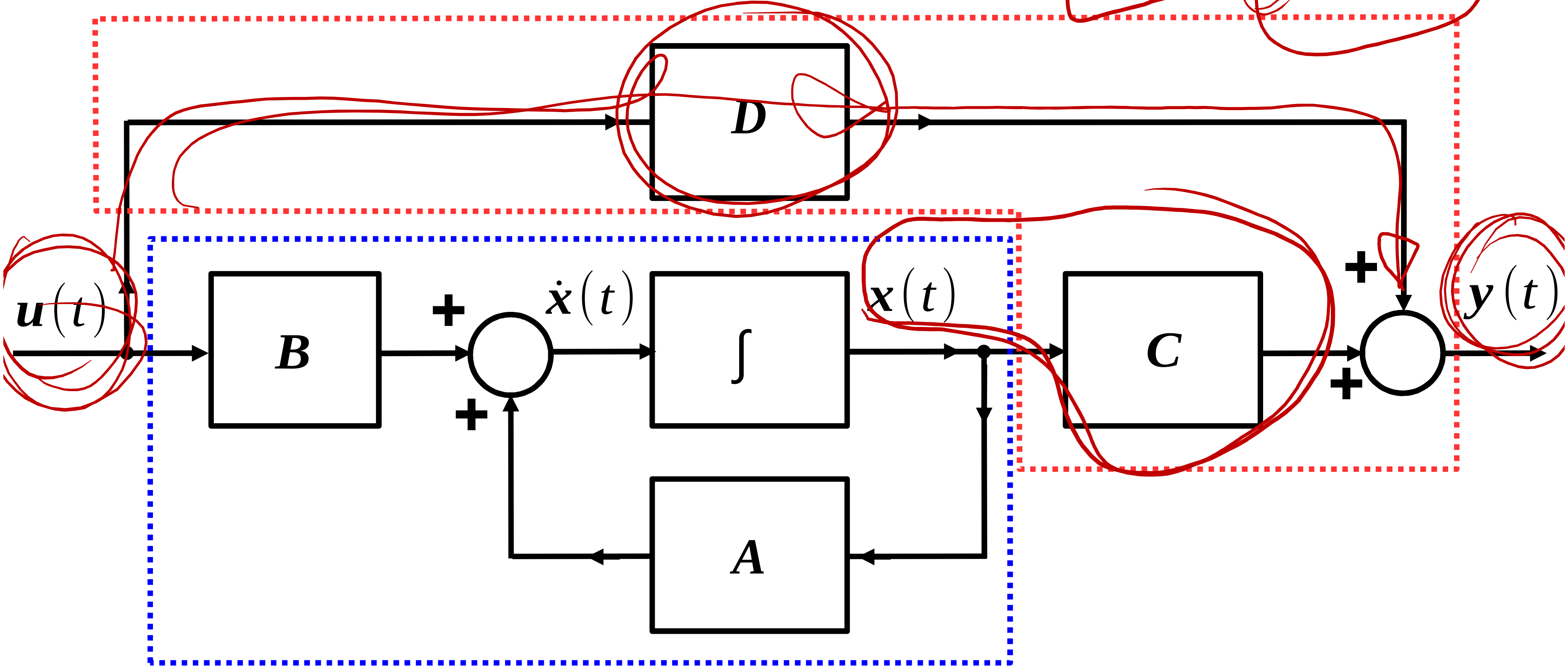


$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Schemat blokowy

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)$$



$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Rozwiązanie

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \text{ warunki początkowe: } \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)\end{cases}$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\underbrace{\boxed{\boldsymbol{C}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0}}_{\text{w.p.}}+\underbrace{\boxed{\boldsymbol{C}\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boxed{\boldsymbol{u}(\tau)}d\tau}}_{\text{Splot}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$

Trudność - obliczenie $e^{\boldsymbol{A}t}$

e^{At}

Opis układów w przestrzeni stanu

Liczenie exp(At)

Przekształcenie macierzy **A** do postaci normalnej Jordan'a

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{S}\,\mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right)\boldsymbol{S}^{-1}, \text{ gdzie:}$$

$\boldsymbol{S}$ - macierz postaci własnych macierzy $\boldsymbol{A}$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_n$ - wartości własne macierzy $\boldsymbol{A}$

$$S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} S^{-1}$$

Rozkład na ułamki proste macierzy *(**I**s - **A**)*$^{-1}$

$$\text{jeżeli } \left(\boldsymbol{I}s - \boldsymbol{A}\right)^{-1} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{n_i} T_{ij}\frac{1}{\left(s-\lambda_i\right)^j}$$

$$\text{to } e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{n_i} T_{ij}\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}e^{\lambda t}$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \qquad \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)}$$

$\mathcal{L}$ + zerowe w.p. $\qquad\qquad$ $\mathcal{L}$ + zerowe w.p.

$$s\cdot X(s)=AX(s)+BU(s)$$

$$sX(s)-AX(s)=BU(s)$$

$$(sI-A)X(s)=BU(s)$$

$$\cancel{(sI-A)^{-1}(sI-A)}X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$X(s)=(sI-A)^{-1}BU(s)$$

$$\det(sI-A)\neq 0$$

$$Y(s)=CX(s)+DU(s)$$

$$Y(s)=C(sI-A)^{-1}BU(s)+DU(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=$$

$$=C(sI-A)^{-1}B+D$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \qquad \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)}$$

$\mathcal{L}$ + zerowe w.p.

$$s\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

dla $\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\neq 0$

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

$\mathcal{L}$ + zerowe w.p.

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{Y}(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{Y}(s)=\left(\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\right)\boldsymbol{U}(s)$$

$$\boxed{\boldsymbol{G}(s)=\frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{U}(s)}=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}}$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia

$$\boldsymbol{G}(s) = \frac{\boldsymbol{Y}(s)}{\boldsymbol{U}(s)} = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}$$

MIMO

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1k}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2k}(s) \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ G_{m1}(s) & G_{m2}(s) & \dots & G_{mk}(s) \end{bmatrix}$$

$G_{32}(s)$

3 wy, 2 we

Opis układów w przestrzeni stanu

2 rw. stanu

3 wyjścia

Otrzymywanie transmitancji z równań stanu i wyjścia - przykład

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & 3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)=s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s-2 & -4\\ +4 & s-2\end{bmatrix}$$

3 wyjścia

$$(sI-A)^{-1}=\frac{(sI-A)^D}{\det(sI-A)}$$

$$\det(sI-A)=(s-2)(s-2)+16$$

$$(sI-A)^{dop}=\begin{bmatrix}s-2 & -4\\ +4 & s-2\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^D=\left((sI-A)^{dop}\right)^T=\begin{bmatrix}s-2 & 4\\ -4 & s-2\end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s-2}{(s-2)^2+16} & \frac{4}{(s-2)^2+16}\\ \frac{-4}{(s-2)^2+16} & \frac{s-2}{(s-2)^2+16}\end{bmatrix}$$

State-space representation to transfer function conversion

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t)$$

Rosenbrock’s system matrix

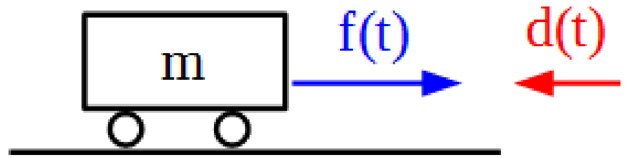
$$\boldsymbol{P}(s)=\begin{bmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix}$$

Transfer function elements for i-th input and j-th output:

$$g_{ij}=\frac{\begin{vmatrix} s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} & -b_i \\ c_j & d_{ij} \end{vmatrix}}{\left|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right|}$$

Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 1

Pojazd na płaskim podłożu, brak poślizgu.
m – masa zredukowana,
f(t) – zredukowana siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
x(t) – przemieszczenie
Wejście: siła napędowa.
Wyjścia: położenie i prędkość.



$$m\ddot{x}(t) = f(t) - c\cdot\dot{x}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ m\dot{v}(t) = f(t) - c\,v(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = \frac{1}{m}f(t) - \frac{c}{m}v(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} [f(t)]$$

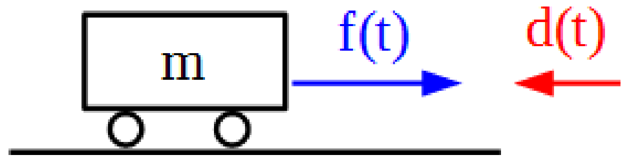
$$\boxed{\dot{X} = A\cdot X + B\cdot u}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (f(t))$$

$$Y = C\cdot X + D\cdot u$$

Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 1

Pojazd na płaskim podłożu, brak poślizgu.
m – masa zredukowana,
f(t) – zredukowana siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
x(t) – przemieszczenie
Wejście: siła napędowa.
Wyjścia: położenie i prędkość.



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B+D$$

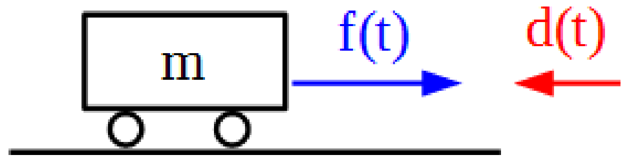
$$G(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{ms\left(s+\frac{c}{m}\right)}\\ \frac{1}{m\left(s+\frac{c}{m}\right)}\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y_1}{U}=\frac{X(s)}{F(s)}$$

$$\frac{Y_2}{U}=\frac{V(s)}{F(s)}$$

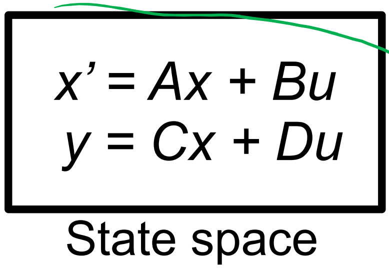
Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 1

Pojazd na płaskim podłożu, brak poślizgu.
m – masa zredukowana,
f(t) – zredukowana siła napędowa,
d(t)=c*v(t) – opór powietrza,
x(t) – przemieszczenie
Wejście: siła napędowa.
Wyjścia: położenie i prędkość.



Opis układów w przestrzeni stanu – oprogramowanie

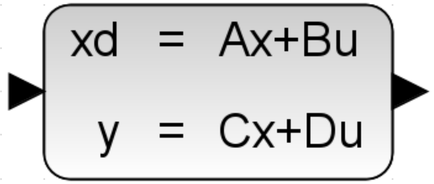
MATLAB & Simulink



Zamiana równań stanu na transmitancję:

[num,den] = ss2tf(A,B,C,D,iu)

Scilab & Xcos

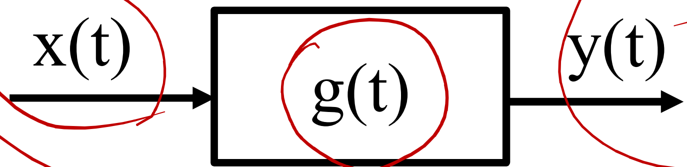


Zamiana równań stanu na transmitancję:

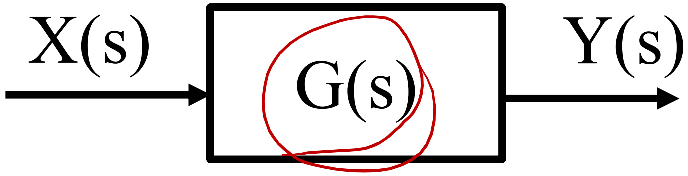
[h] = ss2tf(sl)

Opis układów w przestrzeni stanu – schematy blokowe

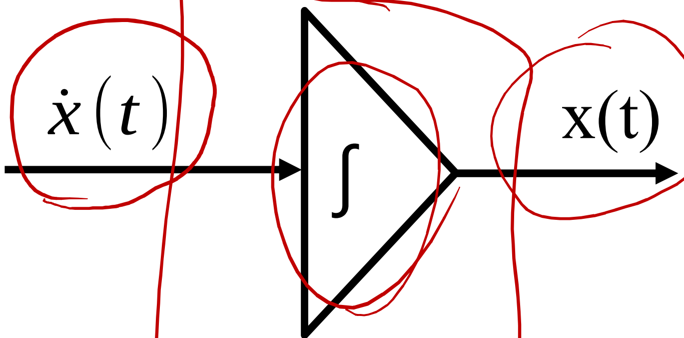
Odpowiedź impulsowa



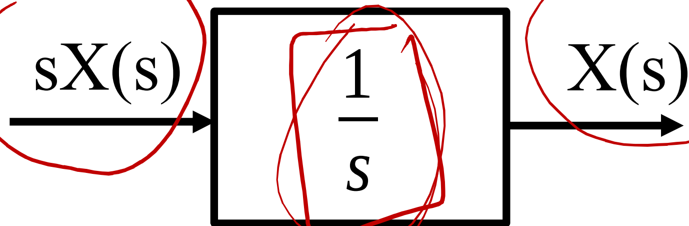
Transmitancja operatorowa



Całkowanie w dziedzinie czasu

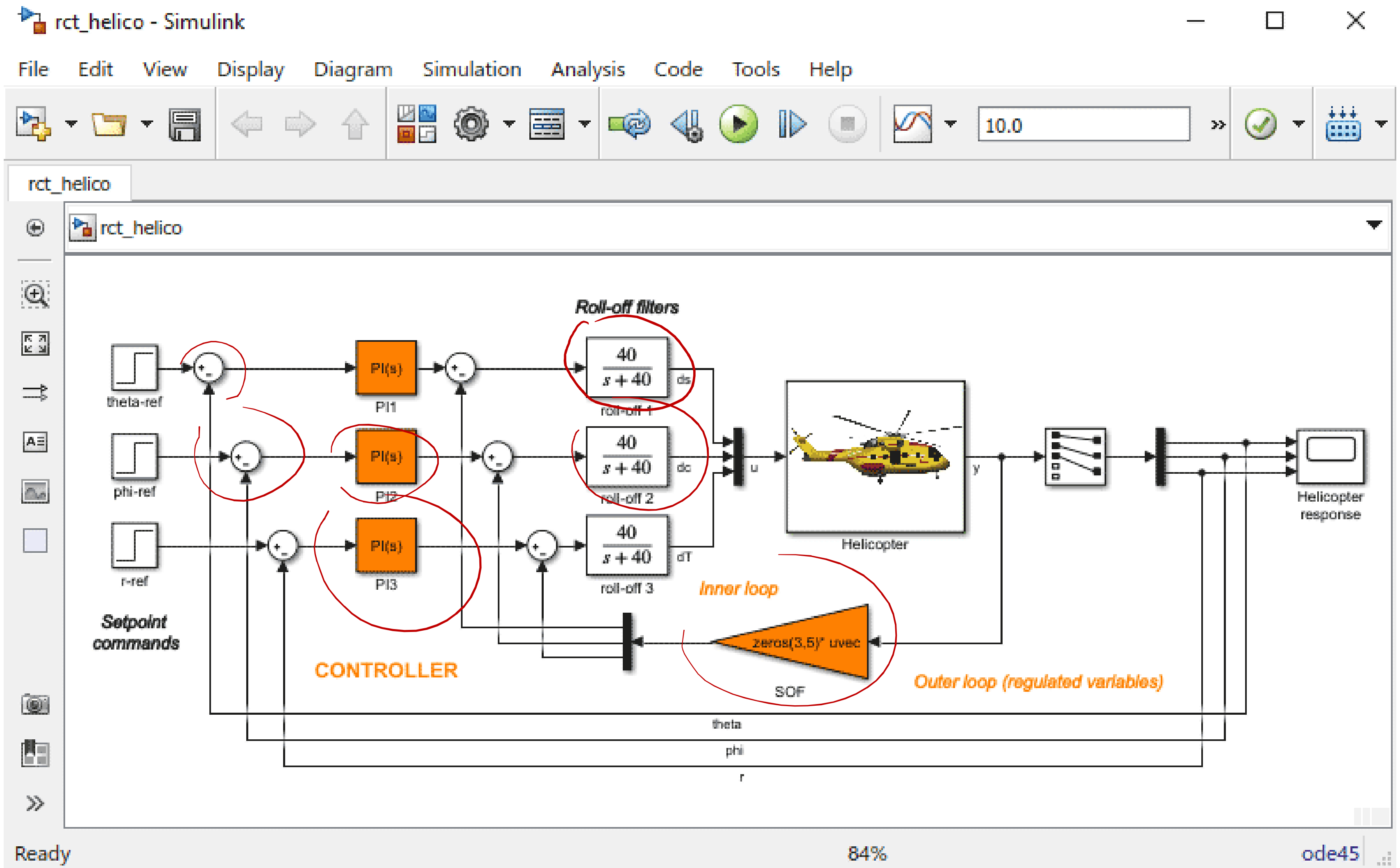


Całkowanie w dziedzinie Laplace'a



Symulacje numeryczne – oprogramowanie

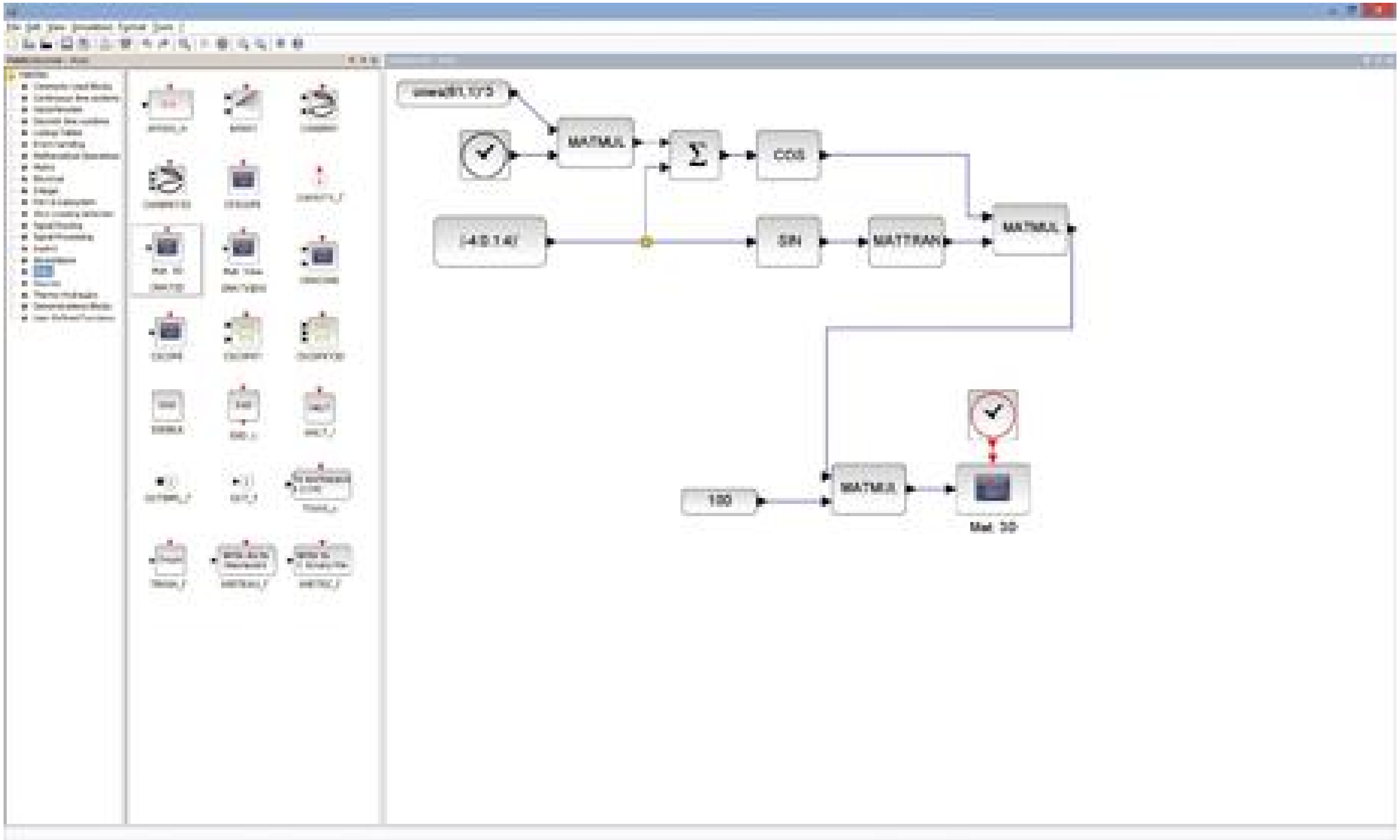
Matlab® / Simulink®



source: *https://www.mathworks.com*

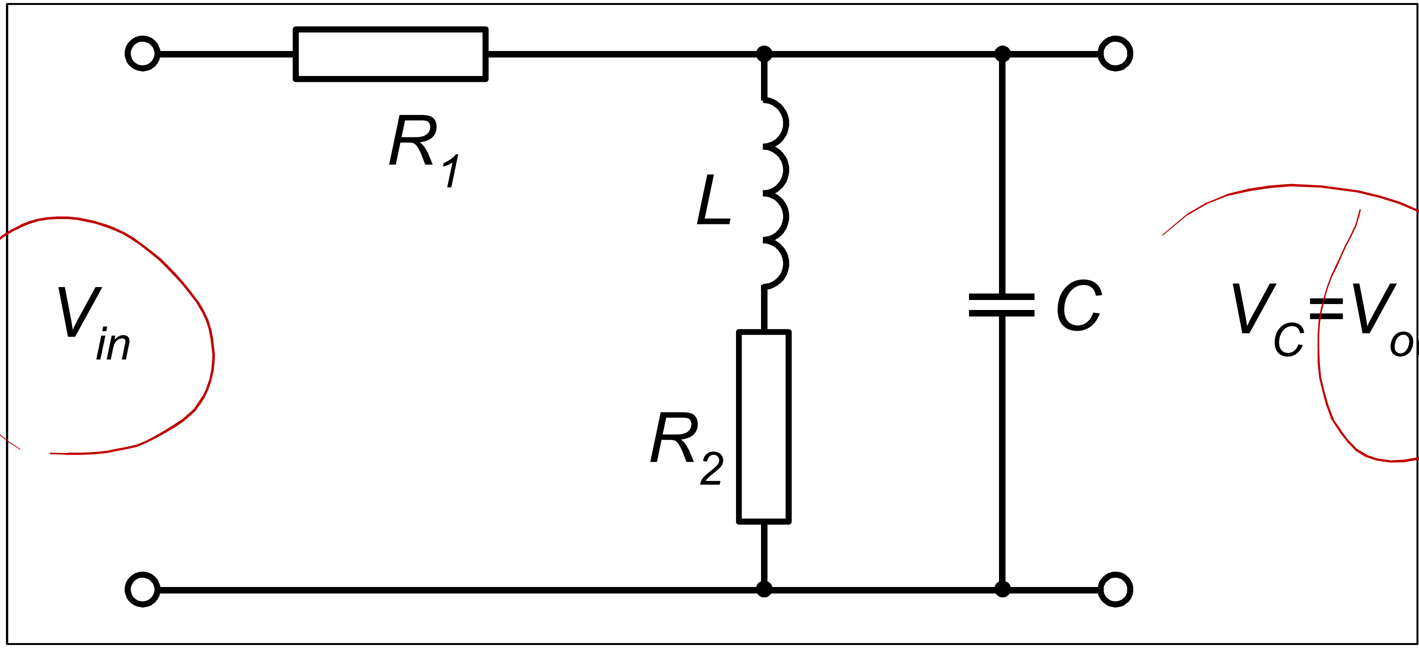
Symulacje numeryczne – oprogramowanie

Scilab / Xcos



source: https://scilab.org/scilab/features/xcos

Opis układów w przestrzeni stanu – przykład 2



$$\begin{cases} V_{\text{in}}(t)=i_1(t)R_1+L\dfrac{d\,i_2(t)}{dt}+i_2(t)R_2 \\ V_{\text{in}}(t)=i_1(t)R_1+V_C(t) \\ C\dfrac{dV_C(t)}{dt}=i_3(t) \\ i_1(t)=i_2(t)+i_3(t) \end{cases}$$

Opis układów w przestrzeni stanu

Tworzenie równań stanu i wyjścia z transmitancji operatorowej

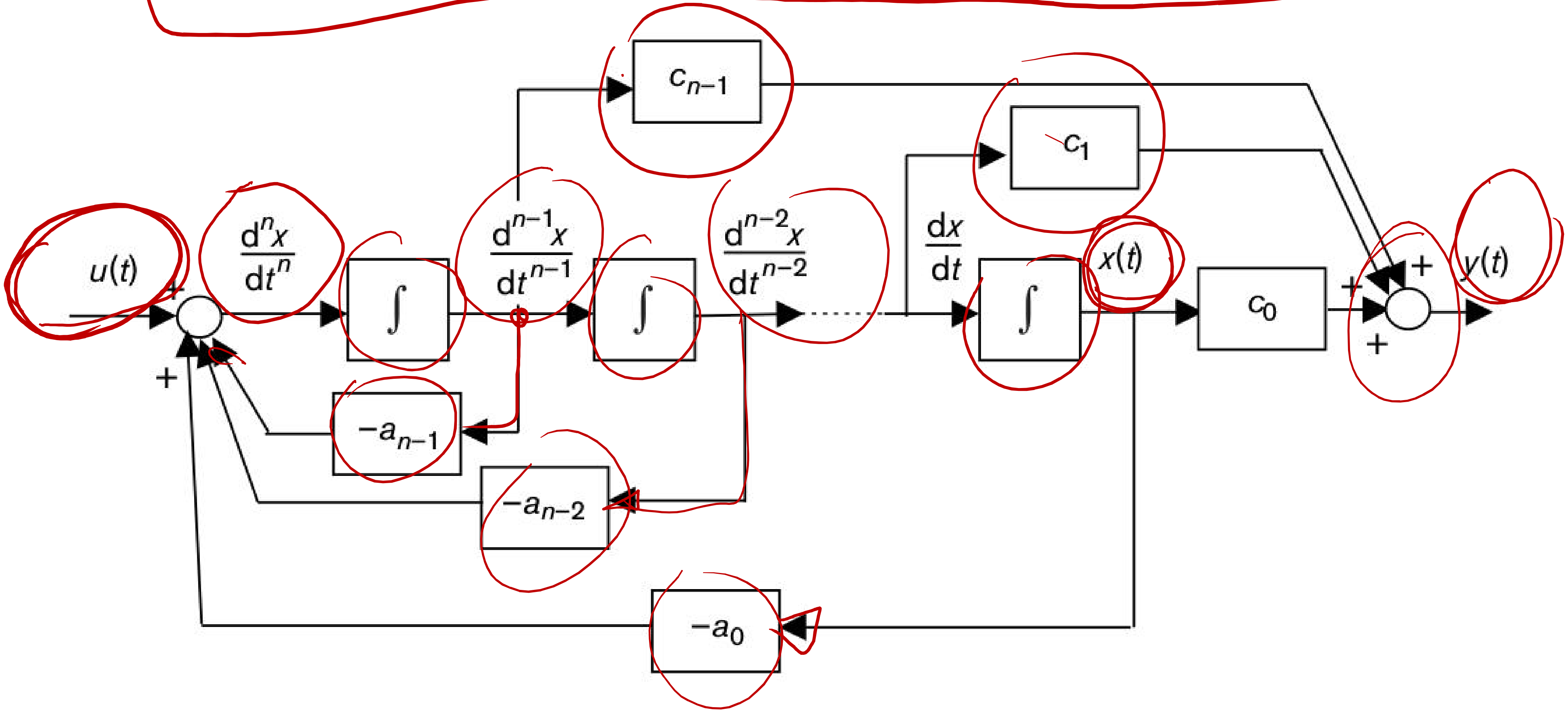
Metoda bezpośrednia (kanoniczna forma sterowania) – na podstawie współczynników wielomianów transmitancji tworzy się schemat blokowy według ustalonej reguły. Ze schematu blokowego bezpośrednio odczytuje się równania stanu i wyjścia.

Metoda równoległa (kanoniczna forma modalna) – transmitancję układu przedstawić należy w formie sumy ułamków prostych i stworzyć schemat blokowy według ustalonej reguły. Ze schematu blokowego odczytuje się równanie stanu i wyjścia. Macierz A będzie diagonalna.

Metoda iteracyjna – transmitancję przedstawiamy w postaci iloczynowej (widoczne bieguny i zera). Tworzymy schemat blokowy według ustalonej reguły operując na biegunach i zerach.

Metoda bezpośrednia

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_m s^m + c_{m-1} s^{m-1} + \ldots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$



picture source: Jacqueline Wilkie, Michael Johnson, Reza Katebi, Control engineering - An introductory course, 2002

Metoda bezpośrednia

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{c_m s^m + c_{m-1}s^{m-1}+\ldots+c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1 s + a_0} \quad \text{for } n>m$$

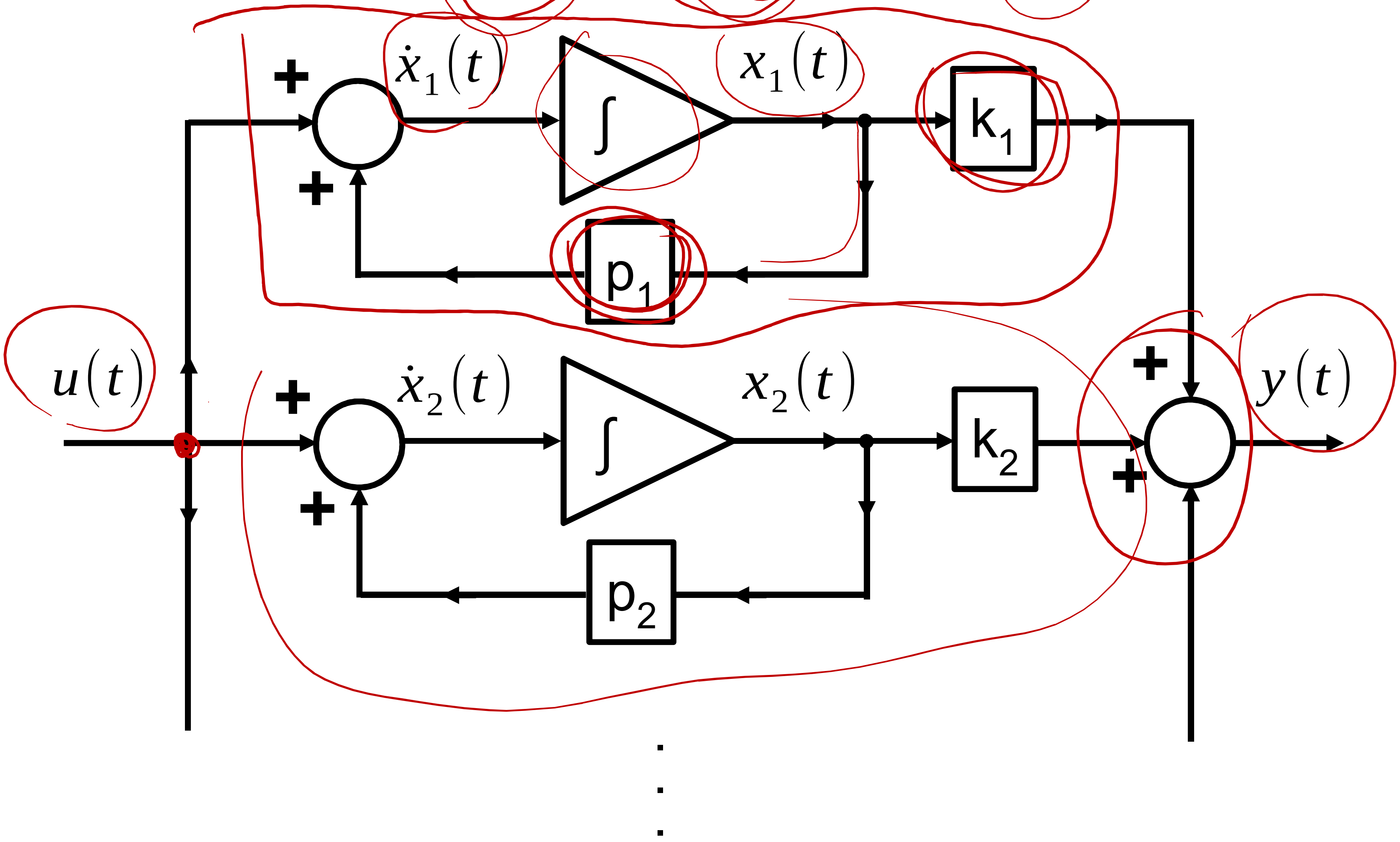
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}_{\text{nxn}} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\text{nxk}}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} & c_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{\text{mxn}}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{\text{mxk}}$$

Metoda równoległa

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{k_n}{s-p_n}\quad \text{for } n>m$$



Metoda równoległa

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k_1}{s-p_1}+\frac{k_2}{s-p_2}+\ldots+\frac{k_n}{s-p_n} \quad \text{for } n>m$$

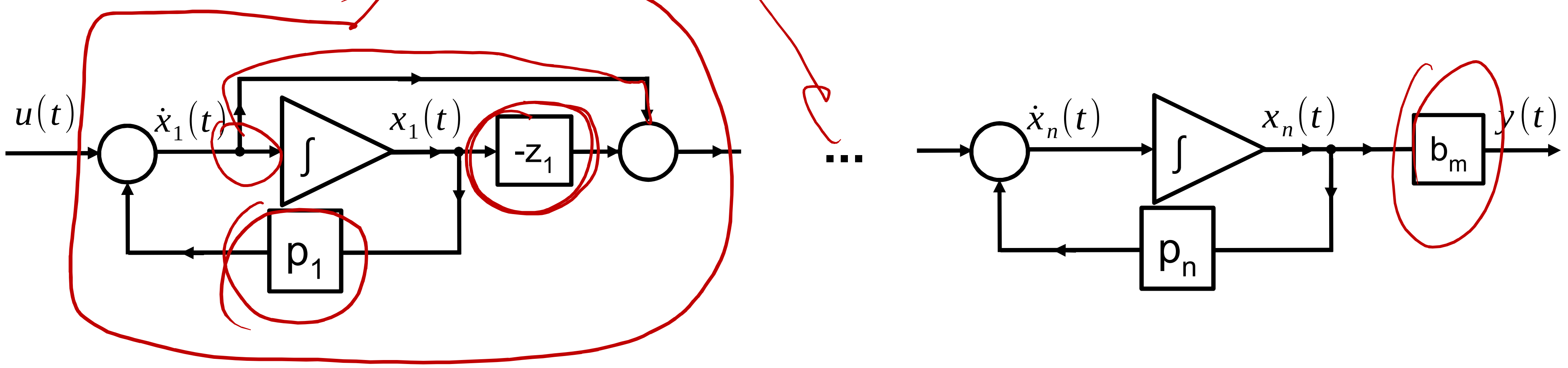
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{nx1}}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_{n-1} & k_n \end{bmatrix}_{\mathrm{nx1}}$$

$$\boldsymbol{D}=0$$

Iterative method for SISO system

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=b_m\frac{s-z_1}{s-p_1}\frac{s-z_2}{s-p_2}\frac{s-z_3}{s-p_3}\cdots\frac{s-z_m}{s-p_m}\frac{1}{s-p_{m+1}}\cdots\frac{1}{s-p_n}$$



Iterative method for SISO system

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=b_m\frac{s-z_1}{s-p_1}\frac{s-z_2}{s-p_2}\frac{s-z_3}{s-p_3}\cdots\frac{s-z_m}{s-p_m}\frac{1}{s-p_{m+1}}\cdots\frac{1}{s-p_n}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1-z_1 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ p_1-z_1 & p_2-z_2 & p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1-z_1 & p_2-z_2 & p_3-z_3 & \cdots & 0 \\ p_1-z_1 & p_2-z_2 & p_3-z_3 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathrm{nx1}}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m \end{bmatrix}_{\mathrm{nx1}}$$

$$\boldsymbol{D}=0 \text{ , if } n>m$$

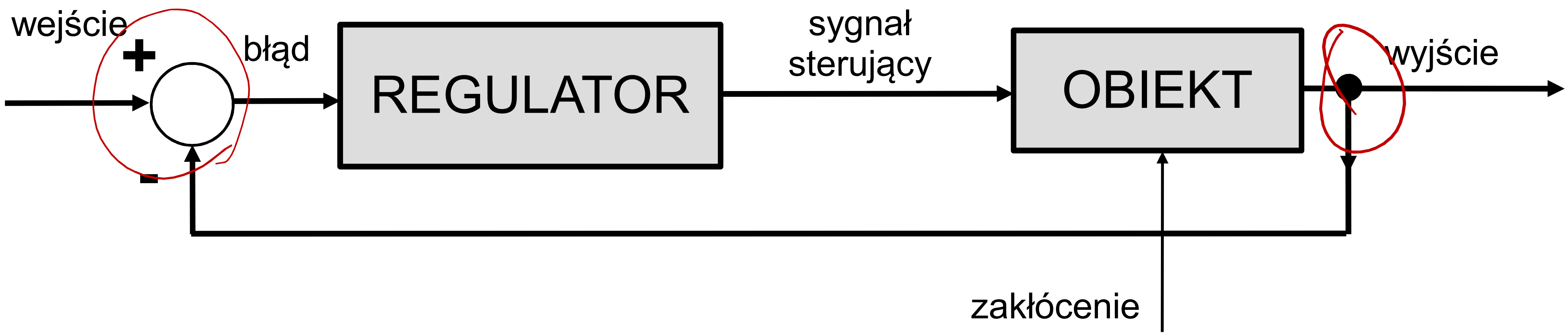
WAŻNE POJĘCIA

- Sterowanie krzepkie (odporne, *robust*) – sposób sterowania, w którym zapewnione jest prawidłowe funkcjonowanie i stabilność przy możliwości zmieniania się parametrów układu w ustalonym zakresie.

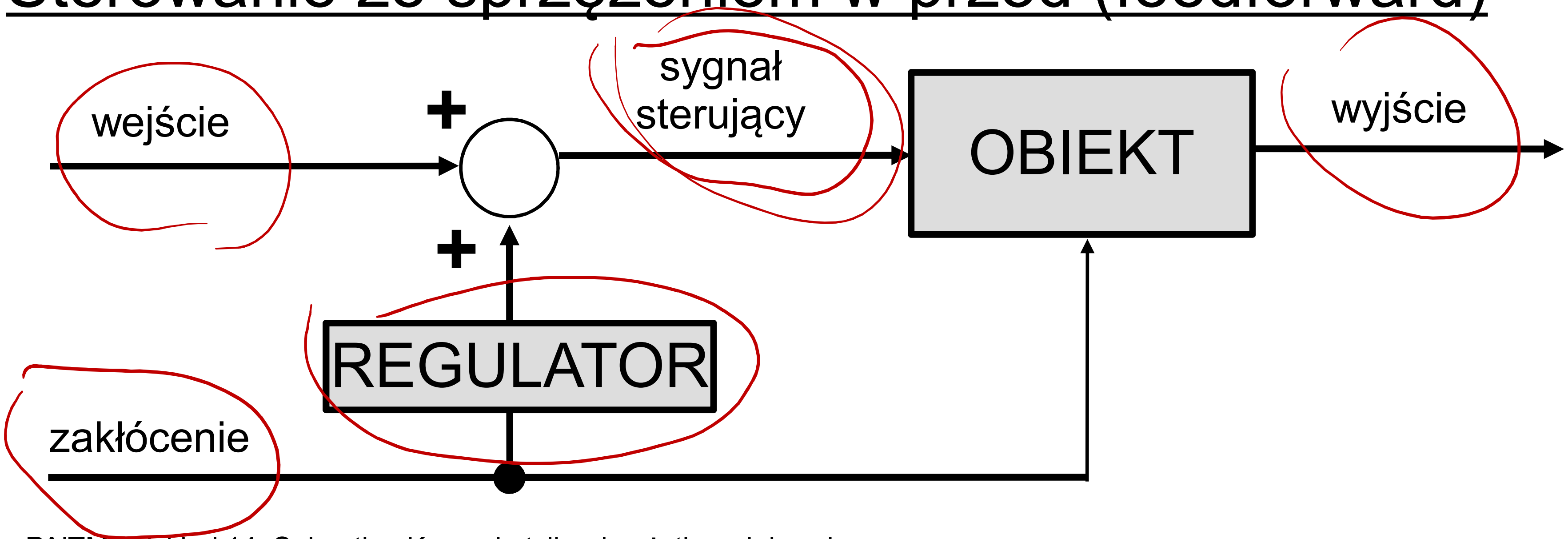
- Sterowanie adaptacyjne – metoda sterowania, w której nastawy regulatora są zmieniane w czasie w celu dostosowania do występujących zmian parametrów układu. Są to regulatory samonastrajalne, z uczeniem iteracyjnym lub oparte o teorię sterowania dualnego.

- Sterowanie inteligentne – sterowanie wykorzystujące np. sztuczne sieci neuronowe, uczenie maszynowe, algorytmy genetyczne, logikę rozmytą.

Sterowanie ze sprzężeniem zwrotnym (feedback)



Sterowanie ze sprzężeniem w przód (feedforward)



TRZY ZADANIA STEROWANIA

Stabilizacja – sterowanie, w którym wartość zadana jest niezmienna w czasie (np. stała temperatura w piecu, stała prędkość silnika, zadane położenie).

Śledzenie trajektorii – wartość zadana jest z góry ustaloną funkcją czasu, czyli ruch odbywa się po trajektorii z ustalonym rygorem czasu (np. sterowanie ramieniem robota)

Podążanie za ścieżką – pożądany stan obiektu (np. Położenie) jest opisane funkcją parametryczną, tzn. Regulator ma zapewnić ruch po ścieżce ale bez rygoru czasowego (regulator może dobrać prędkość, np. ruch pojazdów autonomicznych).

WAŻNE POJĘCIA

<u>Sterowalność</u> – własność układu, polegająca na możliwości zmiany stanu układu z początkowego na dowolny stan końcowy w skończonym czasie i z użyciem dopuszczalnych sygnałów sterujących. Sprawdzamy ją w układach liniowych z warunku na rząd macierzy Kalmana [B AB A^2B …], a w układach nieliniowych z warunku na rząd macierzy tworzonej z zastosowaniem nawiasów Liego.

<u>Obserwowalność</u> – własność układu, polegająca na możliwości odtworzenia stanu układu na podstawie znajomości sygnałów sterujących i wyjściowych. Sprawdzamy ją w układach liniowych z warunku na rząd macierzy Kalmana [C CA CA^2 …]^T.

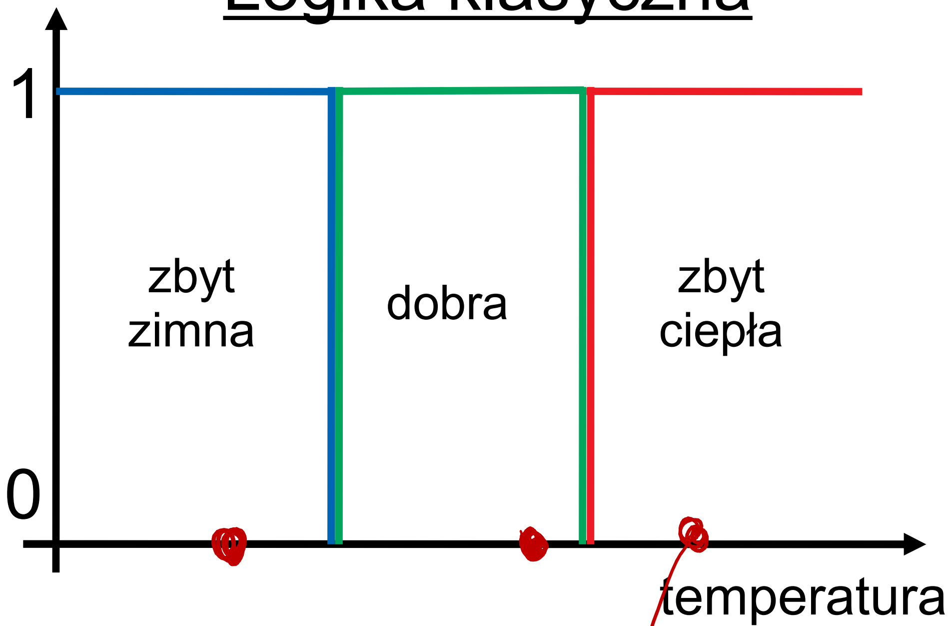
Sterowanie rozmyte w przykładach

Zadanie: sterowanie temperaturą cieczy.

Algorytm sterowania zakłada różne działania w zależności od klasyfikacji temperatury do trzech grup: za zimna, dobra, za ciepła.

Sterowanie rozmyte w przykładach

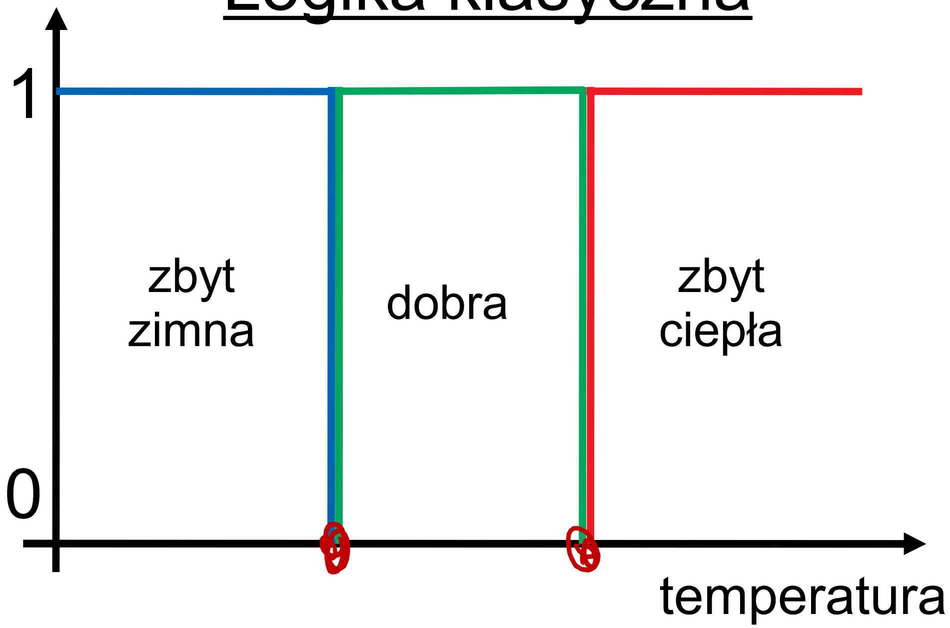
Logika klasyczna



zbyt zimna:	1	0	0
dobra:	0	1	0
zbyt ciepła:	0	0	1

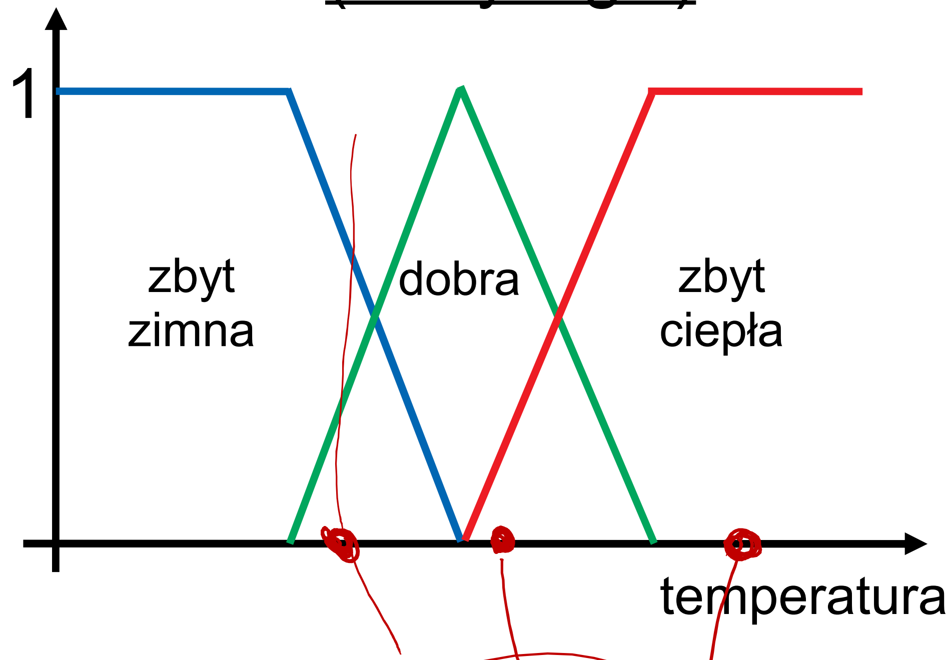
Sterowanie rozmyte w przykładach

Logika klasyczna



zbyt zimna:	
dobra:	
zbyt ciepła:	

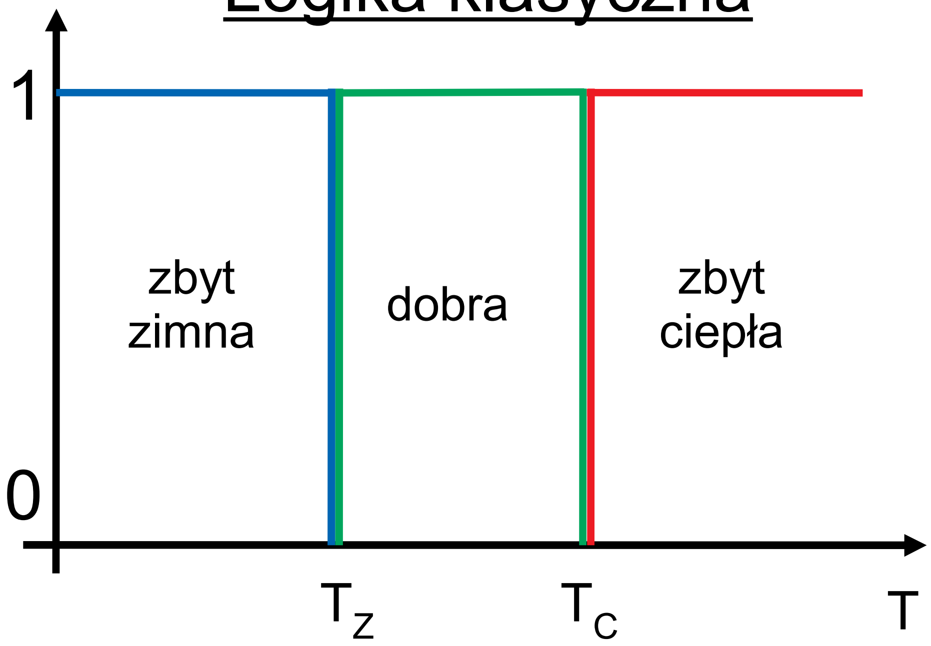
Logika rozmyta (fuzzy logic)



zbyt zimna:	0,8	0	0
dobra:	0,2	0,9	0
zbyt ciepła:	0	0,1	1

Sterowanie rozmyte w przykładach

Logika klasyczna



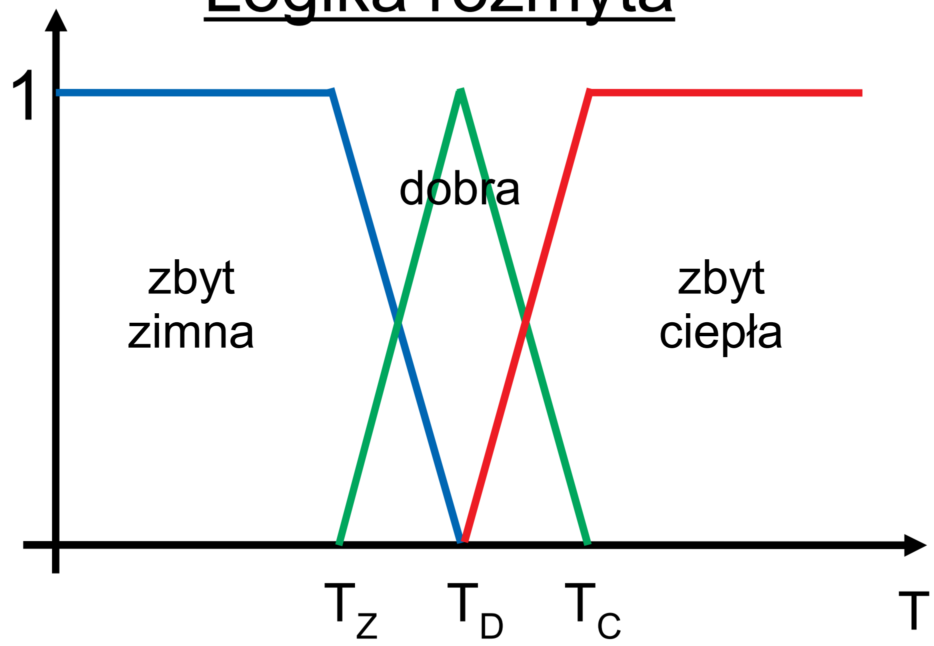
Funkcje przynależności

$$\text{zimna: } \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } T < T_Z \\ 0, \text{ wpp} \end{cases}$$

$$\text{dobra: } \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } T_Z < T < T_C \\ 0, \text{ wpp} \end{cases}$$

$$\text{ciepła: } \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } T > T_C \\ 0, \text{ wpp} \end{cases}$$

Logika rozmyta



Funkcje przynależności

$$\text{zimna: } \begin{cases} 1, \text{ jeżeli } T < T_Z \\ \dfrac{(T_D - T)}{(T_D - T_Z)}, \text{ jeżeli } T_Z < T < T_D \\ 0, \text{ wpp} \end{cases}$$

...

Funkcje przynależności mogą mieć różne kształty

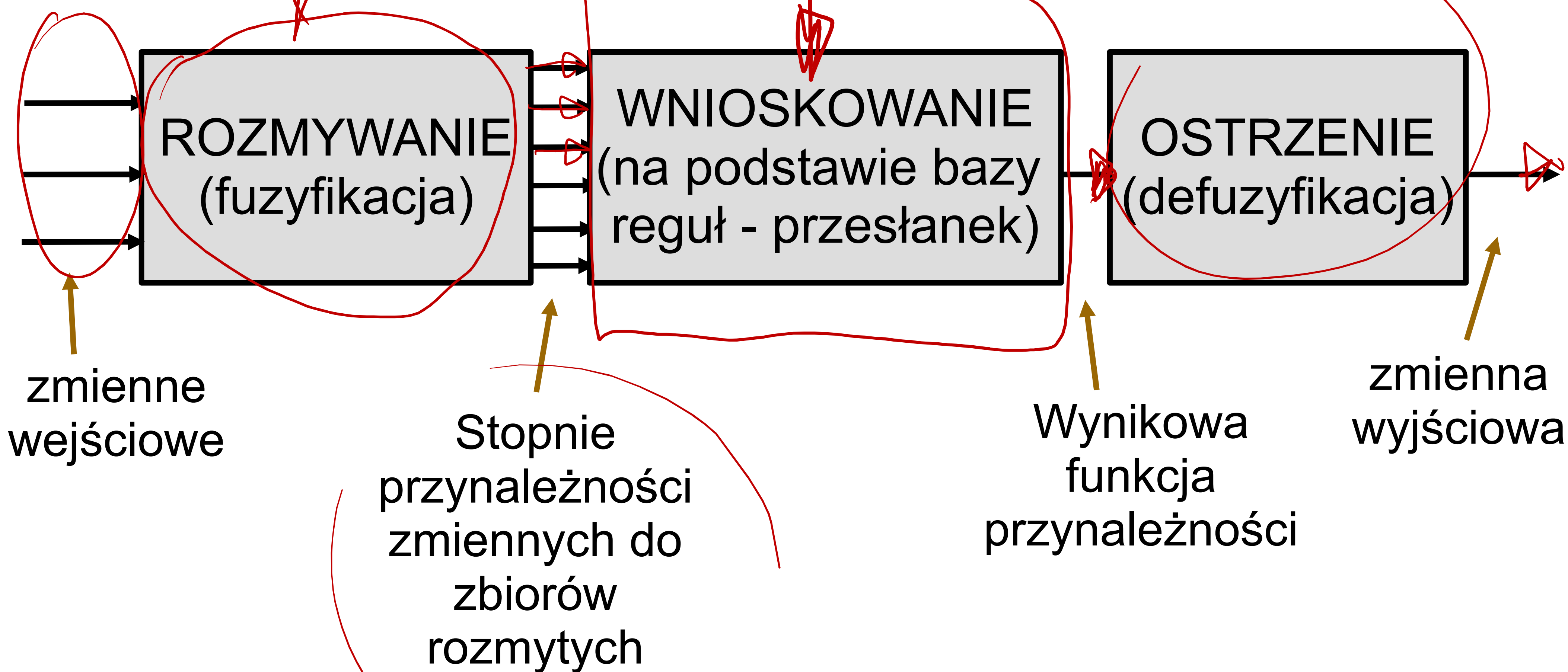
Sterowanie rozmyte w przykładach

Na zbiorach rozmytych możemy przeprowadzać operacje:

- suma (alternatywa / ”lub” / OR) -----> MAX(x,y)
- iloczyn (koniunkcja / „i” / AND) -----> MIN(x,y)
- negacja („nie” / NOT) -----> NOT(x)=1-x

Sterowanie rozmyte w przykładach

Regulator rozmyty



Sterowanie rozmyte w przykładach

Łukasiewicz-Tarski logic

Jan Łukasiewicz (1878-1956)

Alfred Tarski (1901-1983)

Układy ciągłe i dyskretne

Sygnał ciągły x(t) for t ≥ 0	Sygnał dyskretny x[n] for n ≥ 0
Transformata Laplace'a	Transformata Z
$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$	$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$
	(zdefiniowana przez W. Hurewicz)
$L[\delta(t)] = 1$	$Z[\delta(n)] = 1$
$L[1(t)] = \frac{1}{s}$	$Z[1(n)] = \frac{z}{z-1}$
$L[1 - e^{bt}] = \frac{s}{s-b}$	$Z[a^n 1(n)] = \frac{z}{z-a}$

INNE WAŻNE POJĘCIA

Metoda backstepping

Sterowanie ślizgowe

Sterowanie optymalne

Sterowanie w oparciu o płaskość różniczkową

Model-based control

Metoda obliczanego momentu

Regulator liniowo-kwadratowy (LQR)

Przykłady

https://www.youtube.com/watch?v=URmxzxYlmtg

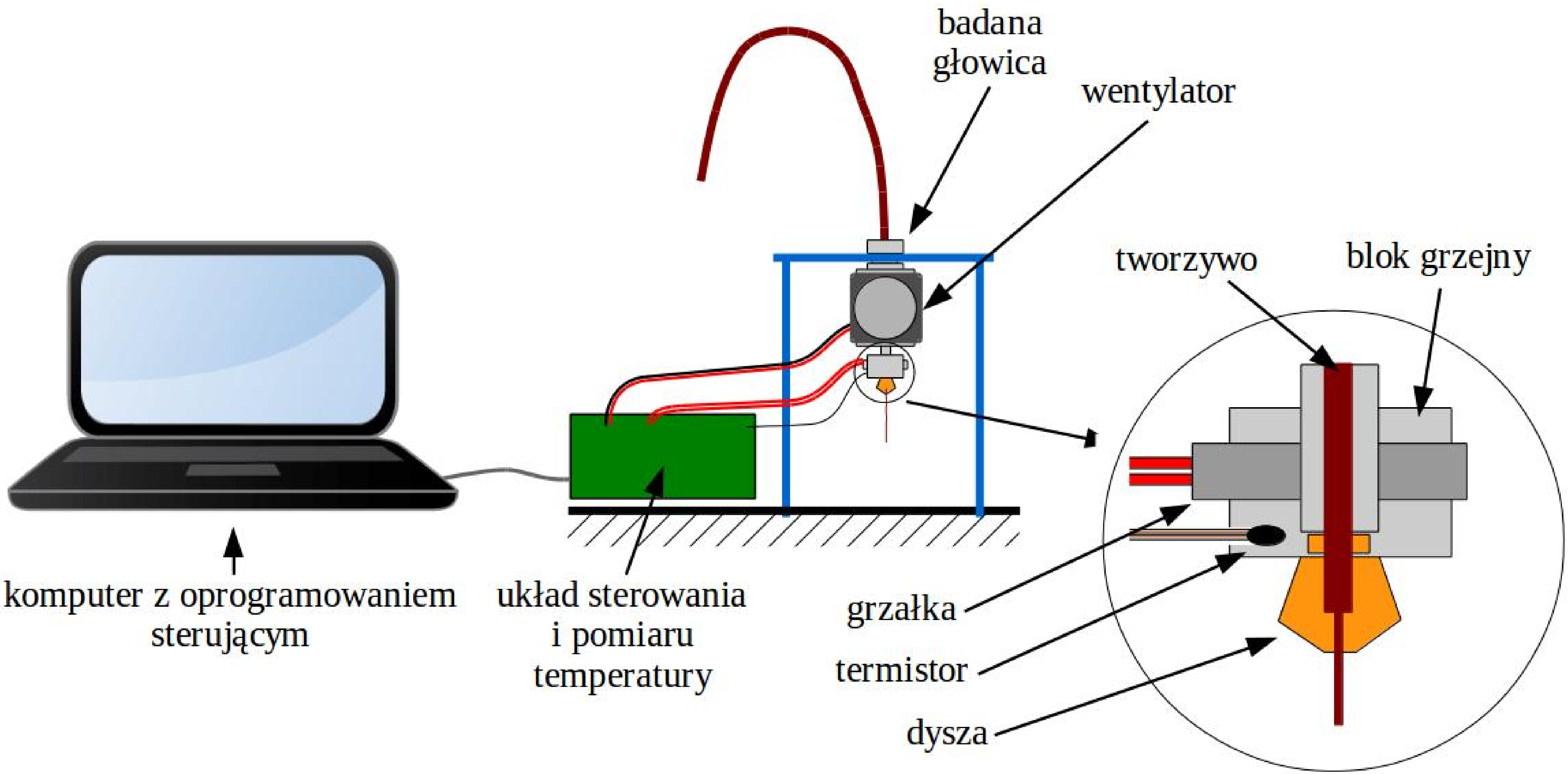
https://vimeo.com/192179726

https://www.youtube.com/watch?v=geqip_0Vjec

https://www.youtube.com/watch?v=w2itwFJCgFQ

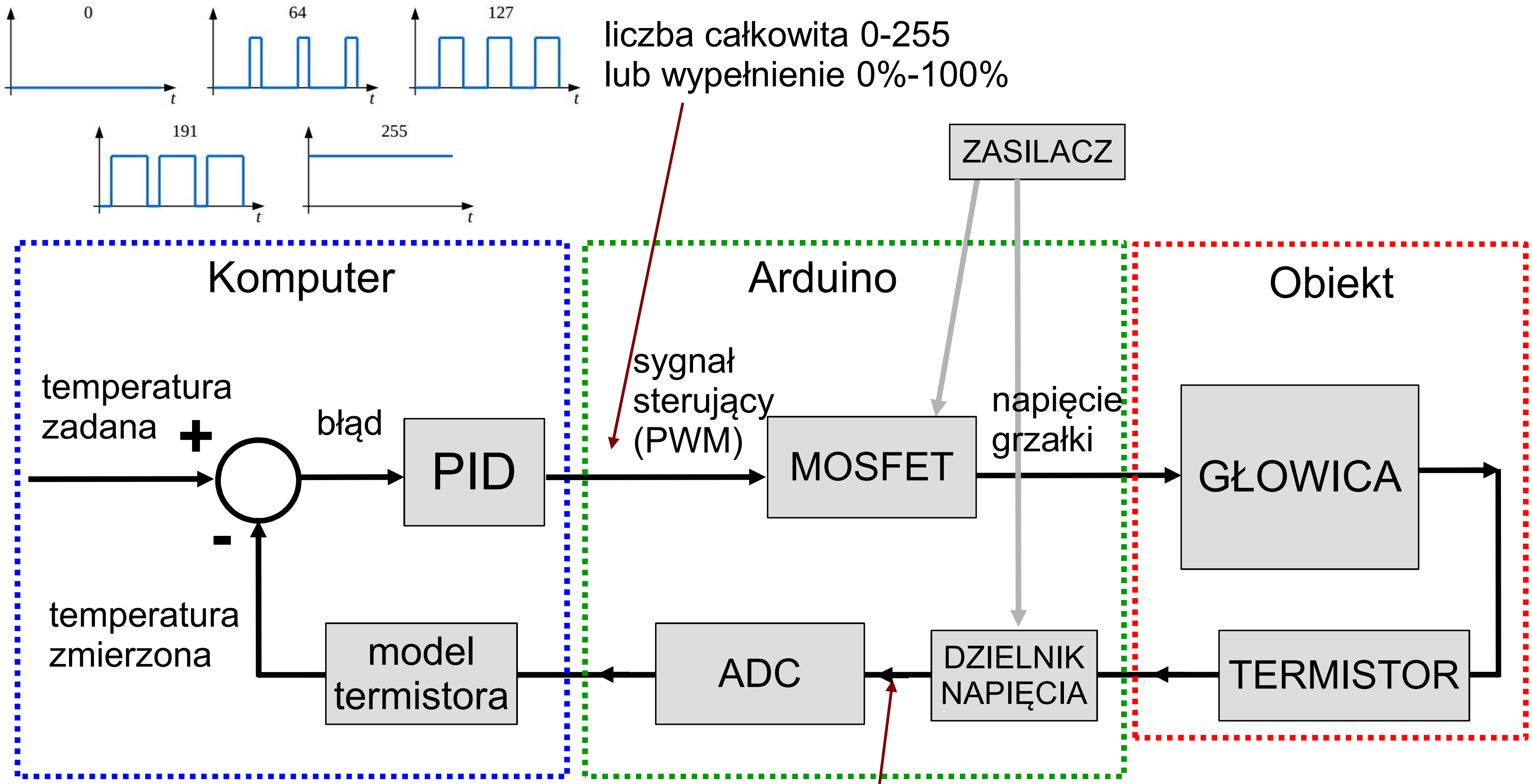
https://www.youtube.com/watch?v=g11LN0UIynY

Przykład – sterowanie temperaturą głowicy drukarki 3D



Rys. 1. Schemat stanowiska do badania głowicy drukarki 3D.

Przykład – sterowanie temperaturą głowicy drukarki 3D



$$T(u_2)=\frac{1}{\frac{1}{T_0}-\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{R_0}{R_2}\left(\frac{u_1}{u_2}-1\right)\right)}$$

spadek napięcia na termistorze

$$R(T)=R_0\exp\left(\beta\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)\right)$$

Materiał na egzamin – wykłady od 1 do 14
(ponad 1100 slajdów...)

Wykład 15 – powtórzenie materiału,
informacje o egzaminie,
ankiety, konsultacje