Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Podstawy automatyki i teorii maszyn

semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 13

Ogólny warunek stabilności.
Kryterium Hurwitza.
Kryterium Nyquista.
Zapas modułu i zapas fazy.
Korekcja układów automatyki.

STABILNOŚĆ UKŁADÓW AUTOMATYKI

Stabilność

W matematyce:

- teoria stabilności
- stabilność metod numerycznych
- stabilność w geometrii teoretycznej

W naukach inżynierskich:

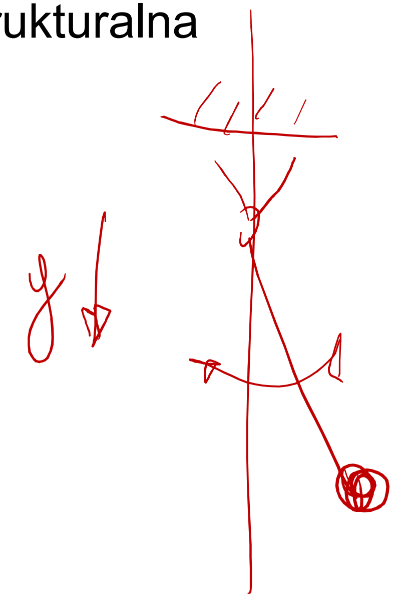
- stabilność wejście-wyjście
- stabilność lotu
- stabilność statków

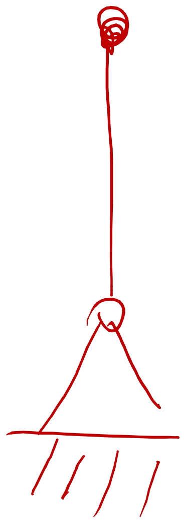
Stabilność

Teoria stabilności (matematyka) – badanie stabilności rozwiązań równań różniczkowych, czyli ich zachowania przy małych zaburzeniach warunków początkowych

Rodzaje stabilności:

- Lapunowa
- asymptotyczna
- orbitalna
- strukturalna

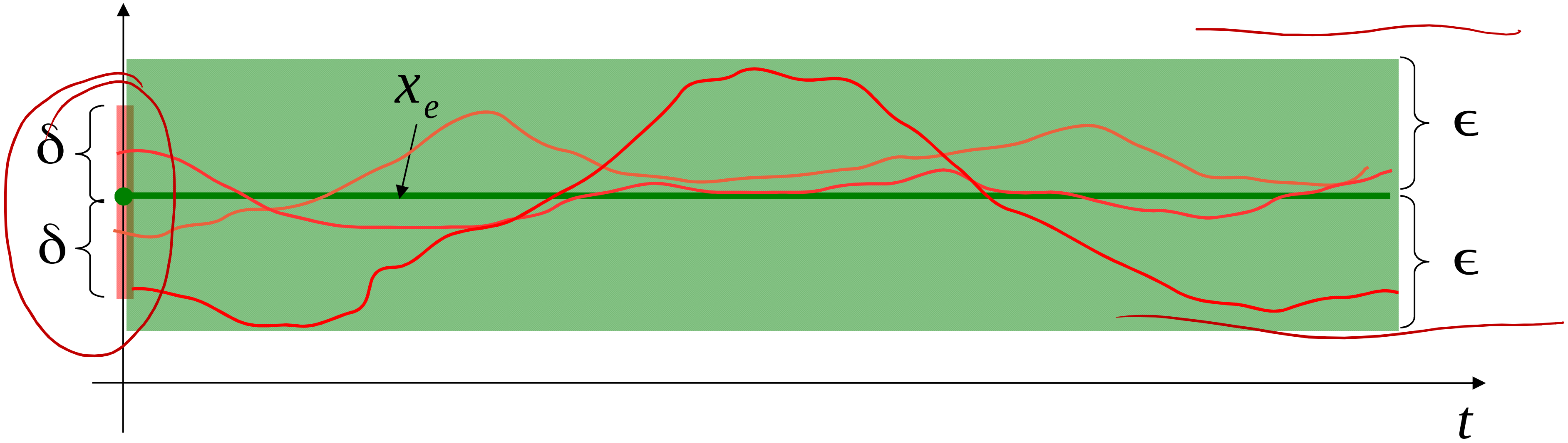




Stabilność w sensie Lapunowa

$$\dot{x}(t)=f(x(t))$$

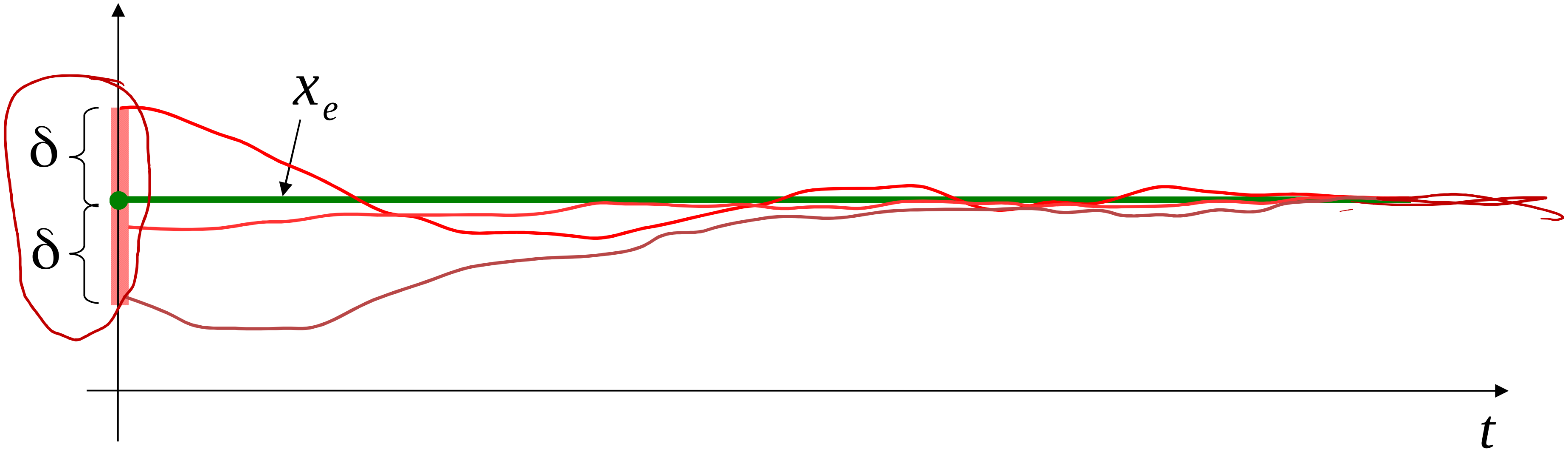
$f(x_e)=0,\ \ x_e$ - położenie równowagi



$$\underset{t\geqslant 0}{\forall}\ \ \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \ \underset{\delta>0}{\exists}\qquad \text{jeżeli } \|x(0)-x_e\|<\delta\text{, to } \|x(t)-x_e\|<\epsilon$$

Stabilność asymptotyczna

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad f(x_e) = 0, \quad x_e \text{ - położenie równowagi}$$



$$\underset{t \geqslant 0}{\forall} \quad \underset{\epsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \qquad \text{jeżeli } \| x(0) - x_e \| < \delta, \text{ to } \lim_{t \to \infty} \| x(t) - x_e \| = 0$$

Stabilność BIBO

Bounded Input, Bounded Output stability (w teorii sterowania)

Układ liniowy jest BIBO stabilny jeśli jego wyjście pozostaje ograniczone przy ograniczonym wejściu.

$x(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

$$\underset{0<A<\infty}{\exists} \quad \underset{0<B<\infty}{\exists} \quad \underset{t \geqslant 0}{\forall} \quad \text{jeżeli } |x(t)| \leqslant A \text{, to } |y(t)| \leqslant B$$

Kryteria stabilności

- Ogólny warunek stabilności
- Kryterium Hurwitz
- Kryterium Nyquista

Ogólny warunek stabilności

$$G(s) = \frac{1}{s - p_1} \qquad p_1 \text{ - biegun } \in \mathbb{C}$$

wejście: $x(t) = \delta(t)$; $X(s) = 1$

wyjście: $Y(s) = X(s) \cdot G(s) = 1 \cdot \frac{1}{s - p_1}$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_1}\right\} = e^{p_1 t} = e^{(a_1 + j b_1)t} =$$

$$= e^{a_1 t} e^{j b_1 t} = e^{a_1 t}\left(\cos b_1 t + j \sin b_1 t\right)$$

$$\boxed{\operatorname{Re} y(t) = e^{a_1 t} \cos b_1 t}$$

Ogólny warunek stabilności

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1}$$

biegun transmitancji

Wymuszenie impulsowe: $x(t)=\delta(t),\ X(s)=1$

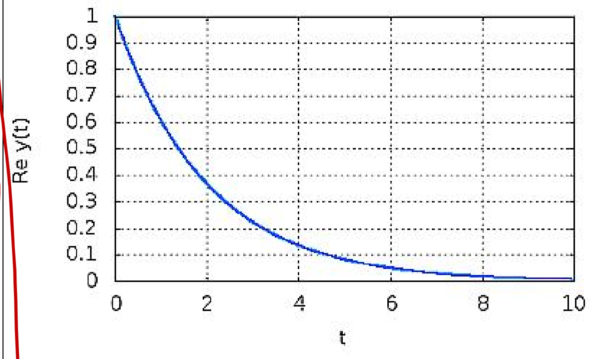
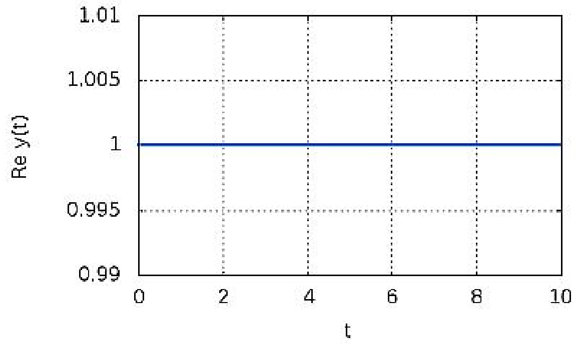
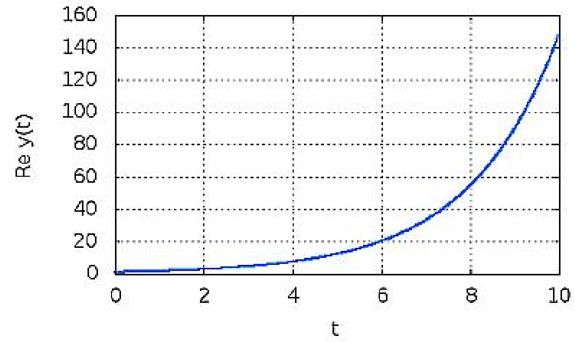
Odpowiedź impulsowa: $y(t)=L^{-1}\{x(s)G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-p_1}\right\}=e^{p_1 t}$

$$y(t)=e^{(a_1+jb_1)t}=e^{a_1 t}e^{jb_1 t}=e^{a_1 t}\left(\cos b_1 t+j\sin b_1 t\right)$$

$$\operatorname{Re} y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t$$

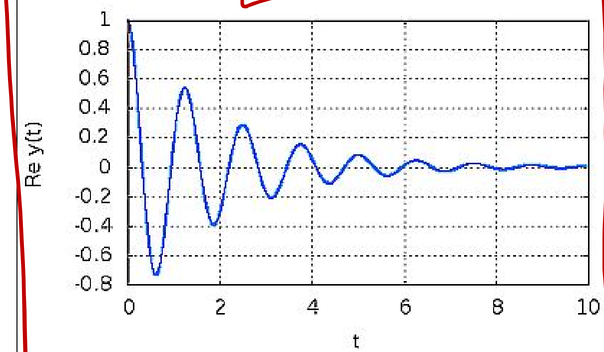
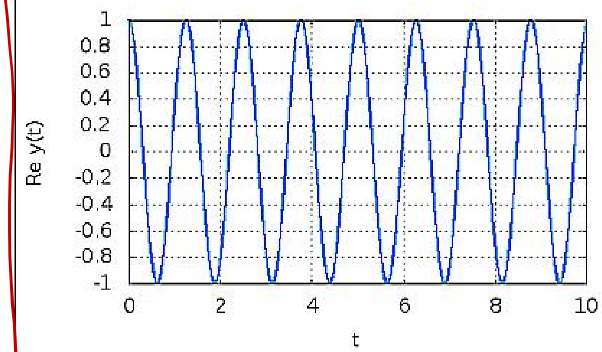
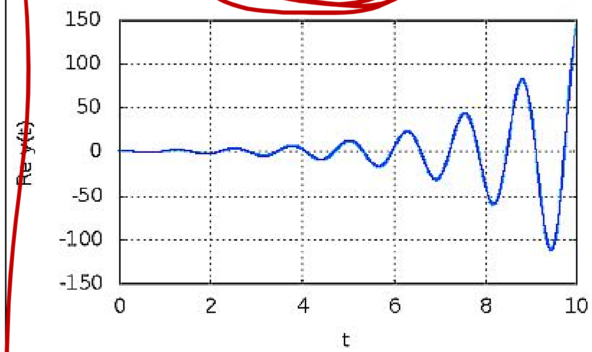
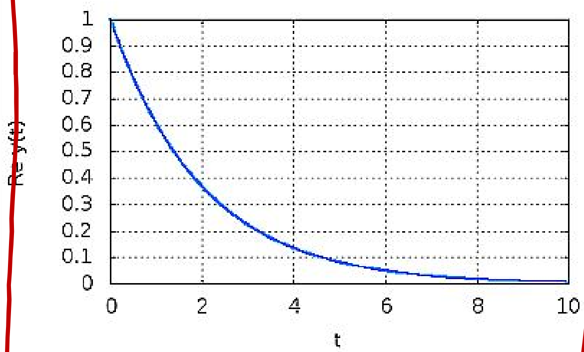
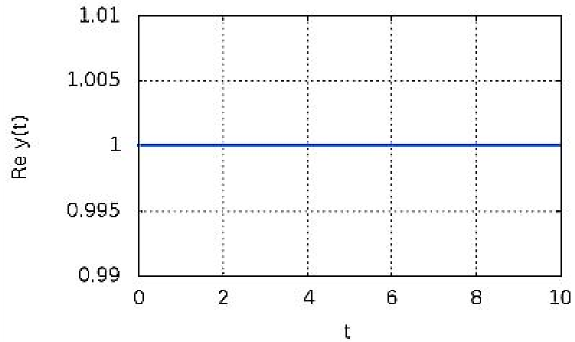
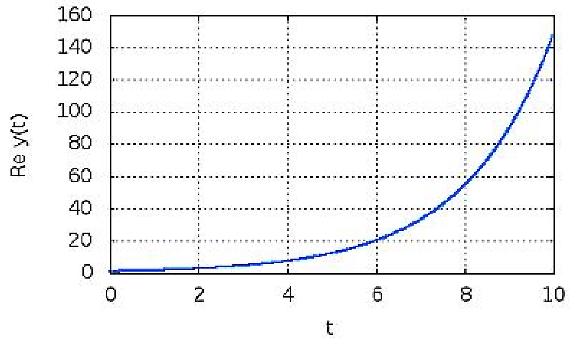
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1} \qquad y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t$$

$$\mathrm{Re}(p_1)=a_1$$
$$\mathrm{Im}(p_1)=b_1$$

	$a_1<0$	$a_1=0$	$a_1>0$
$b_1>0$ $b_1<0$			
$b_1=0$			

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1} \qquad y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t$$

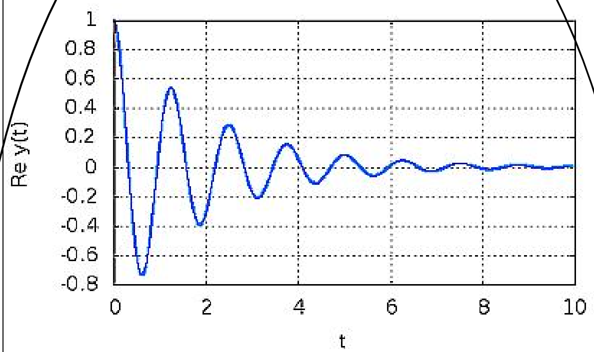
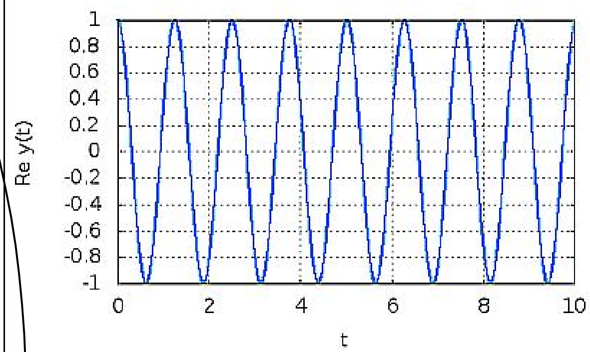
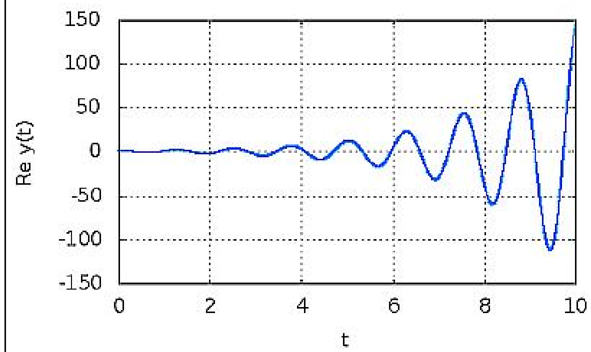
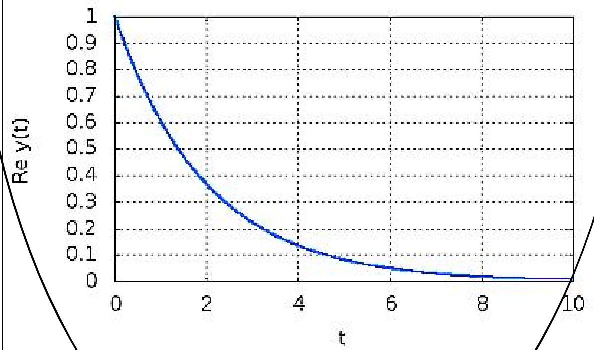
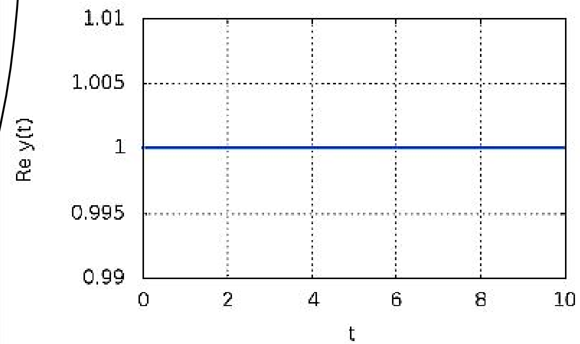
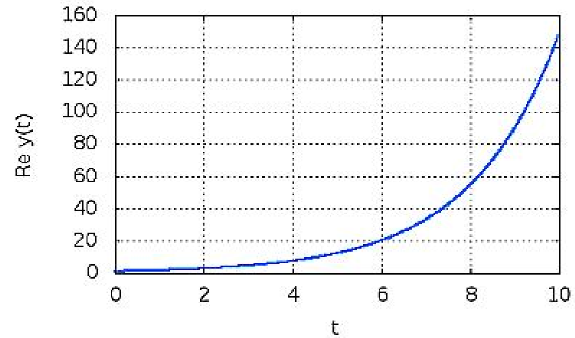
$$\mathrm{Re}(p_1)=a_1$$
$$\mathrm{Im}(p_1)=b_1$$

	$a_1<0$	$a_1=0$	$a_1>0$
$b_1>0$ $b_1<0$			
$b_1=0$			

stab. asympt. stabil. niestab.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{s-p_1} \qquad y(t)=e^{a_1 t}\cos b_1 t$$

$$\mathrm{Re}(p_1)=a_1$$
$$\mathrm{Im}(p_1)=b_1$$

	$a_1<0$	$a_1=0$	$a_1>0$
$b_1>0$ $b_1<0$			
$b_1=0$			

stabilne asymptotycznie $\mathrm{Re}(p_1)<0$

Ogólny warunek stabilności – definicja

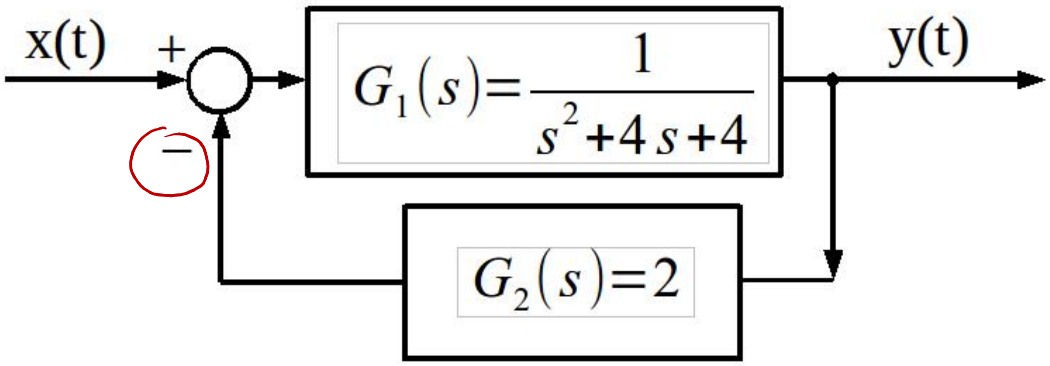
Układ liniowy o jednym wejściu i jednym wyjściu jest stabilny, jeśli części rzeczywiste wszystkich biegunów jego transmitancji są mniejsze od zera.

$$G(s)=\frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$$\operatorname{Re} p_1<0 \wedge \operatorname{Re} p_2<0 \wedge \dots \wedge \operatorname{Re} p_n<0$$

Przykład 1

Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności



$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=$$

$$=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}=\frac{\frac{1}{s^2+4s+4}}{1+\frac{2}{s^2+4s+4}}=\frac{1}{s^2+4s+6}=\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$\Delta=4^2-4\cdot 6=16-24=-8$$

$$\sqrt{\Delta}=j2\sqrt{2}$$

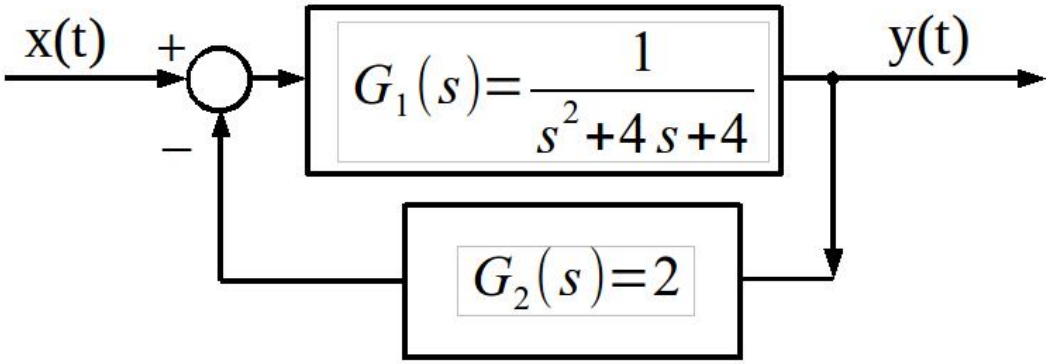
$$p_1=\frac{-4-j2\sqrt{2}}{2}=-2-j\sqrt{2}$$

$$p_2=\frac{-4+j2\sqrt{2}}{2}=-2+j\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} Re(p_1)=-2<0 \\ Re(p_2)=-2<0 \end{array}\right\} \text{stabilny}$$

Przykład 1

Zbadać stabilność układu korzystając z ogólnego warunku stabilności



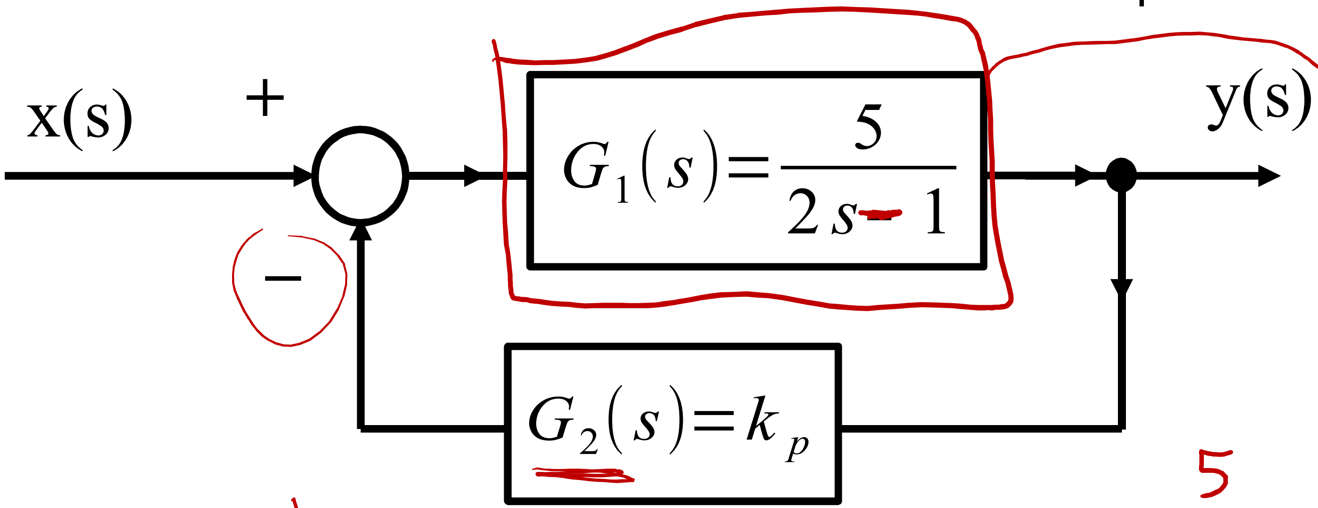
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{1}{s^2+4s+6}=\frac{1}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

$$p_1=-2-\cancel{2}\sqrt{2}\,j\,,\quad p_2=-2+\sqrt{2}\,j$$

$$\Re(p_1)<0 \wedge \Re(p_2)<0 \Rightarrow$$ układ jest stabilny z ogólnego warunku stabilności

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



biegun $= \frac{1}{2} > 0$

G_1 niestab.

$$G_R(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1}{1+G_1G_2} = \frac{\frac{5}{2s-1}}{1+\frac{5}{2s-1}k_p} = \frac{5}{2s-1+5k_p}$$

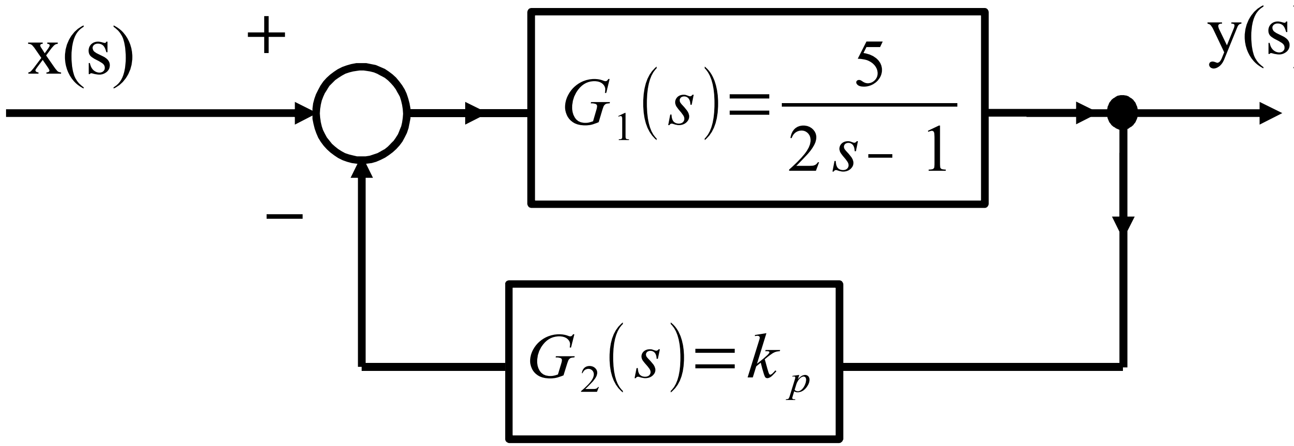
$$= \frac{5}{2\left(s - \frac{1-5k_p}{2}\right)}$$

stabilny $\Rightarrow \frac{1-5k_p}{2} < 0$

$$k_p > \frac{1}{5}$$

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



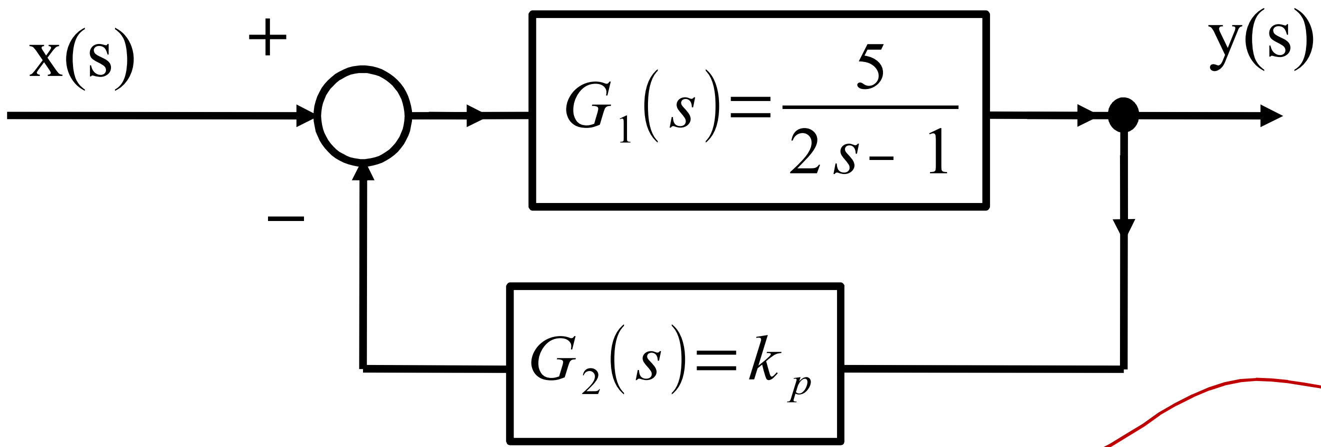
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re\left(p_1\right)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



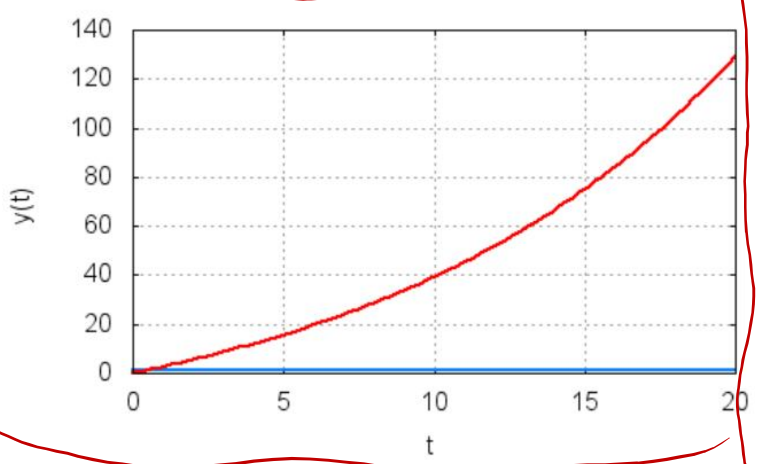
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

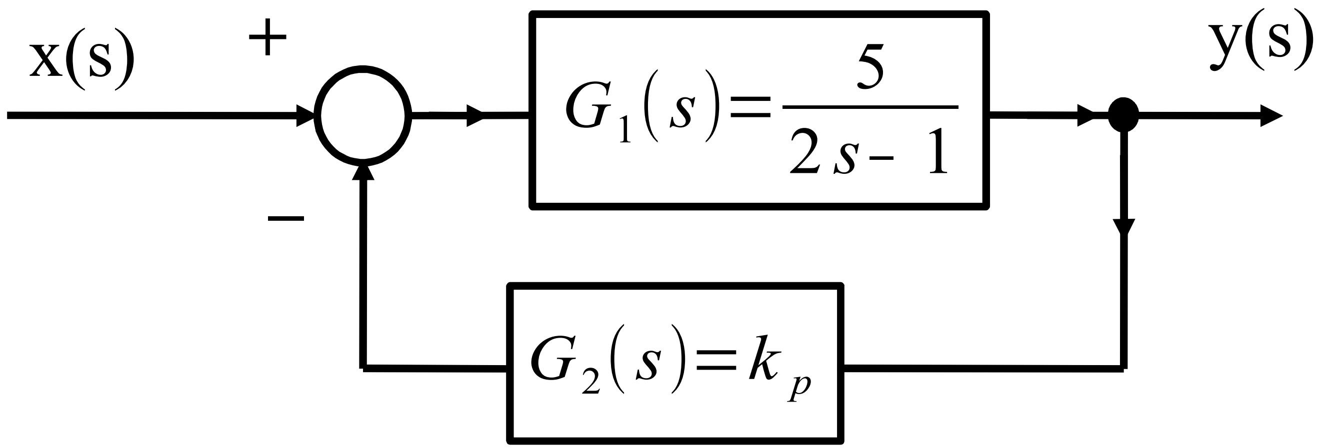
Odp. na wymuszenie skokowe:

$k_p=\frac{1}{6}$ (układ niestabilny)



Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



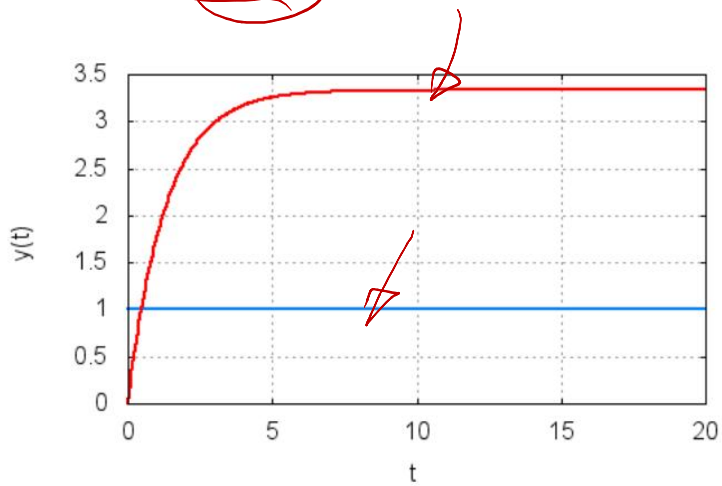
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

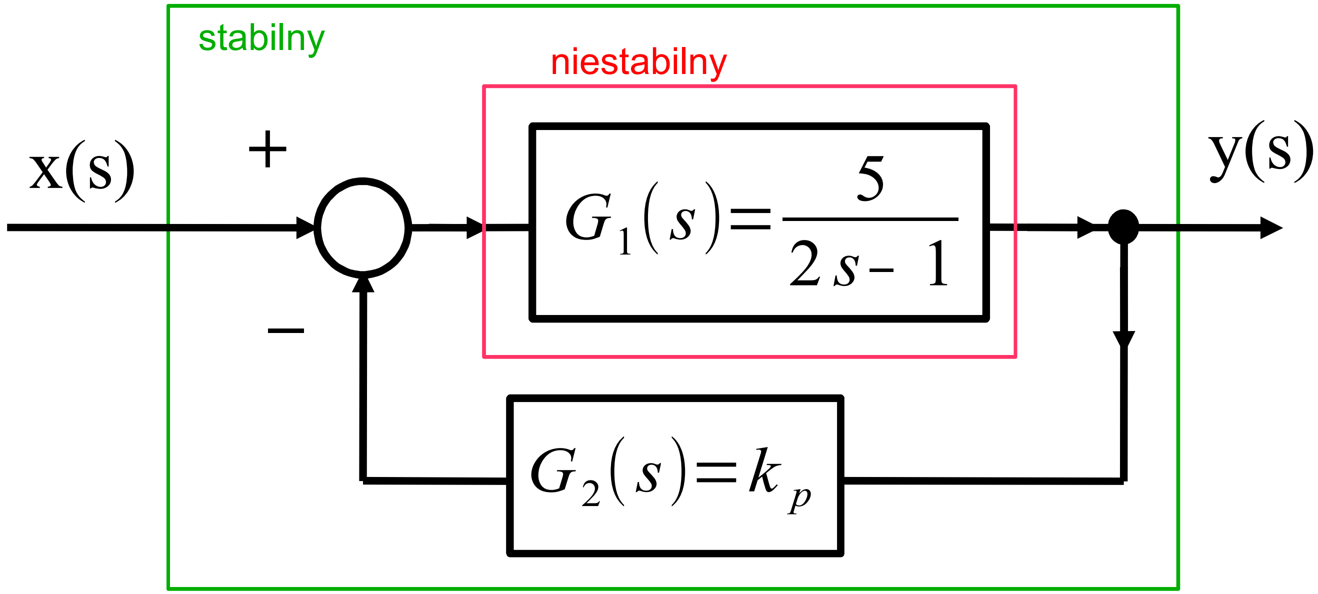
Odp. na wymuszenie skokowe:

$k_p=\frac{1}{2}$ (układ stabilny)



Przykład 2

Dobrać wartość współczynnika k_P aby układ był stabilny.



$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1}{1+G_1G_2}=\frac{5}{2}\frac{1}{s-\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)}$$

$$p_1=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{2}k_p\right)$$

Układ stabilny, jeżeli $\Re(p_1)<0 \quad \Rightarrow \quad k_p>\frac{1}{5}$

Kryterium Hurwitza

<u>W matematyce</u>

Warunek konieczny i wystarczający na położenie wszystkich pierwiastków wielomianu w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej

<u>W teorii sterowania</u>

Warunek konieczny i wystarczający na ujemną część rzeczywistą wszystkich biegunów transmitancji operatorowej obiektu

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+...+b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+...+a_1 s+a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

1 $a_n>0,\ \ a_{n-1}>0,\ \ ...,\ \ a_1>0,\ \ a_0>0$

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

1 $\quad a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \ldots, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

2

Macierz Hurwitza

$$M_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

1 $\quad a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \ldots, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

2

$$\begin{array}{cccccc} \Delta_2 & \Delta_3 & & \Delta_{n-1} & & \\ \end{array}$$

$$M_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Δ_i - *wiodące minory główne i-tego rzędu macierzy Hurwitza*

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^{n} + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

$\det\Delta_n = \det\Delta_{n-1} \cdot a_0$

1. $a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \ldots, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

2. $\det\Delta_2 > 0$
   $\det\Delta_3 > 0$
   $\ldots$
   $\det\Delta_{n-1} > 0$

$$M_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Δ_i - *wiodące minory główne i-tego rzędu macierzy Hurwitza*

Kryterium Hurwitza – definicja

Układ liniowy typu SISO o transmitancji

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

jest stabilny, jeżeli:

sprawdzamy od n>2

nie sprawdzamy det Δ_n bo: $\det \Delta_n = a_0 \det \Delta_{n-1}$

1. $a_n > 0, \quad a_{n-1} > 0, \quad \ldots, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$

2. $\det \Delta_2 > 0$

   $\det \Delta_3 > 0$

   $\ldots$

   $\det \Delta_{n-1} > 0$

$$M_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Δ_2, Δ_3, Δ_{n-1}

Δ_i - *wiodące minory główne i-tego rzędu macierzy Hurwitza*

Kryterium Hurwitza – definicja

Macierz Hurwitza

$$M_{nxn}=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & . & 0 & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & . & 0 & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Kryterium Hurwitza

n	G(s)	Warunki stabilności
1	$\dfrac{L(s)}{a_1 s + a_0}$	$a_1 > 0, \quad a_0 > 0$
2	$\dfrac{L(s)}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$
3	$\dfrac{L(s)}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$a_3 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0$ $\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} > 0$
4	$\dfrac{L(s)}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$	$a_4 > 0, \, a_3 > 0, \, a_2 > 0, \, a_1 > 0, \, a_0 > 0$ $\det\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} > 0 \qquad \det\begin{bmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{bmatrix} > 0$

Kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza ≠ Kryterium Routh'a
(1895)   (1876)

Kryterium Liénard'a–Chipart'a – modyfikacja kryterium Hurwitza

Kryterium Hurwitza

Przykład 1

$n = 2$

$$G(s) = \frac{5s+3}{\underbrace{10}_{a_2}s^2+\underbrace{3}_{a_1}s+\underbrace{1}_{a_0}}$$

$a_2, a_1, a_0 > 0 \rightarrow$ stab.

Kryterium Hurwitza

Przykład 2

$$G(s)=\frac{2s}{2s^3+s+20}$$

$n=3$

$a_3=2;\quad a_2=0;\quad a_1=1,\quad a_0=20$

$a_2=0 \rightarrow$ niestab. z kryt. Hurwitza

Kryterium Hurwitza

Przykład 3

$$G(s) = \frac{3s - 5}{s^3 + 4s^2 + 3s + 10}$$

$n = 3$

$a_3 = 1; \ a_2 = 4; \ a_1 = 3; \ a_0 = 10$

(1) $a_3, a_2, a_1, a_0 > 0$

(2) $\det \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 10 > 0$

układ stab. z kryt. H.

Kryterium Hurwitza

Przykład 4

$n=4$

$$G(s)=\frac{1}{\underbrace{3}_{a_4}s^4+\underbrace{4}_{a_3}s^3+\underbrace{6}_{a_2}s^2+\underbrace{4}_{a_1}s+\underbrace{5}_{a_0}}$$

(1) $a_4 \ldots a_0 > 0$

(2) $\det \Delta_2 = \det\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 24-12>0$

$$\det \Delta_3 = \det\begin{bmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4\cdot6\cdot4 - 4\cdot5\cdot4 - 3\cdot4\cdot4 = 4\cdot4(6-5-3) < 0$$

układ niestabilny z Hurwitza

Kryterium Hurwitza

Przykład 5

Dobrać parametr k aby spełnić kryterium Hurwitza

$$\frac{ks}{4s^3+3s^2+ks+1}$$

$n=3$

$a_3=4>0$; $a_2=3>0$; $\boxed{a_1=k>0}$

$a_0=1>0$

$$\det\Delta_2=\det\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & k \end{vmatrix}=3k-4>0$$

$$\boxed{k>\frac{4}{3}}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 6

Dobrać parametr k aby spełnić kryterium Hurwitza

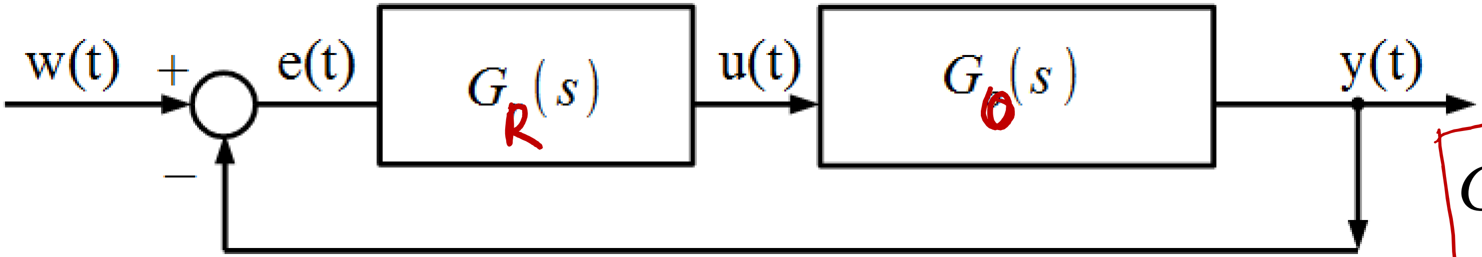
$$\frac{2}{2s^3 + ks^2 + (1+k)s + 3}$$

Do samodzielnego rozwiązania

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_R(s)=\frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

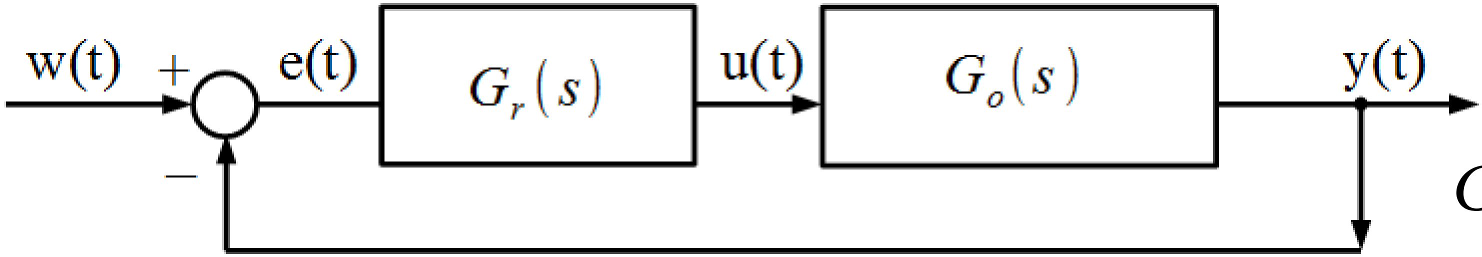
$$G(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{G_R G_o}{1+G_R G_o}=\frac{\frac{4s}{(Ts+1)(s^3+2s^2+s+1)}}{1+\frac{4s}{(Ts+1)(s^3+2s^2+s+1)}}=$$

$$=\frac{4s}{(Ts+1)(s^3+2s^2+s+1)+4s}=\frac{4s}{Ts^4+(2T+1)s^3+(T+2)s^2+(T+5)s+1}$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_r(s)=\frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

$$G_z(s)=\frac{G_rG_o}{1+G_rG_o}=\frac{4s}{a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

$$\boxed{a_4=T,\ a_3=2T+1,\ a_2=T+2,\ a_1=T+5,\ a_0=1}$$

$a_4>0 \rightarrow T>0$

$a_3>0 \rightarrow T>-\frac{1}{2}$

$a_2>0 \rightarrow T>-2$

$a_1>0 \rightarrow T>-5$

$a_0>0$

$$\det \Delta_2=\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=(2T+1)(T+2)-T(T+5)=$$

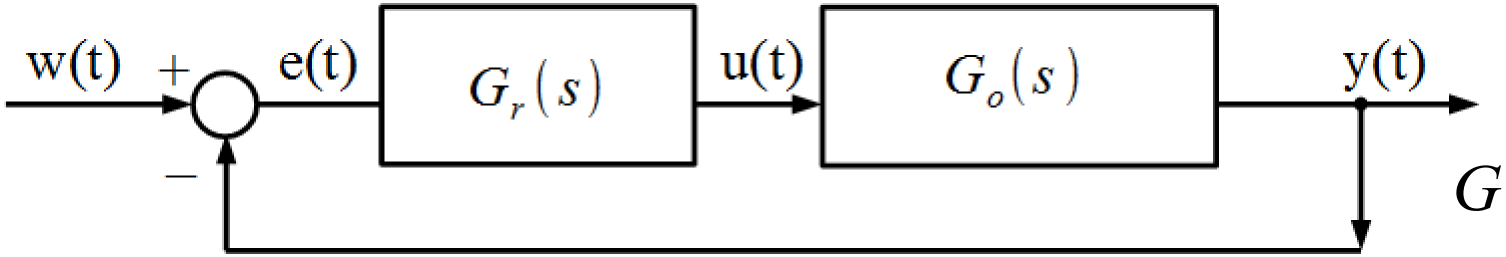
$$=2\cancel{T^2}+\cancel{4T}+\cancel{T}+2-\cancel{T^2}-\cancel{5T}=$$

$$=T^2+2>0 \rightarrow T\in R$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_r(s) = \frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s) = \frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

$$G_z(s) = \frac{G_r G_o}{1+G_r G_o} = \frac{4s}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$a_4 = T, \; a_3 = 2T+1, \; a_2 = T+2, \; a_1 = T+5, \; a_0 = 1$$

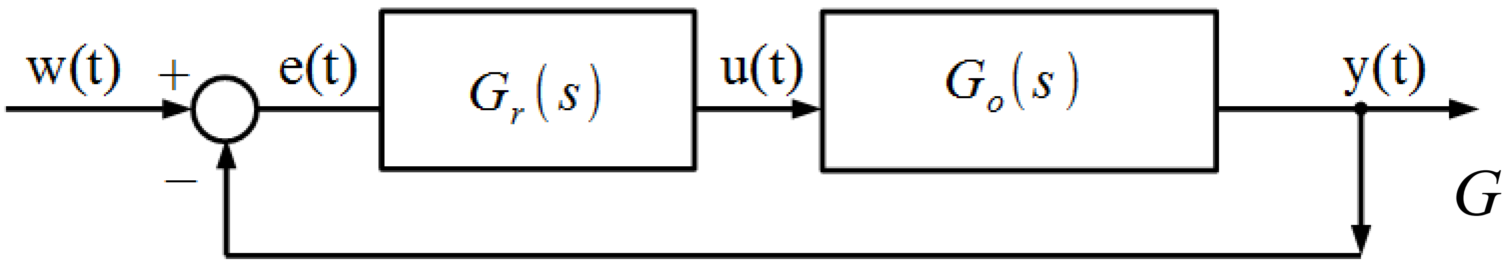
$$a_4 > 0, \; a_3 > 0, \; a_2 > 0, \; a_1 > 0, \; a_0 > 0 \rightarrow T > 0$$

$$\det \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = (2T+1)(T+2)(T+5) - T(T+5)^2 - (2T+1)^2$$

Kryterium Hurwitza

Przykład 7

Dobrać parametr T aby spełnić kryterium Hurwitza



$$G_r(s)=\frac{4s}{Ts+1}$$

$$G_o(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+s+1}$$

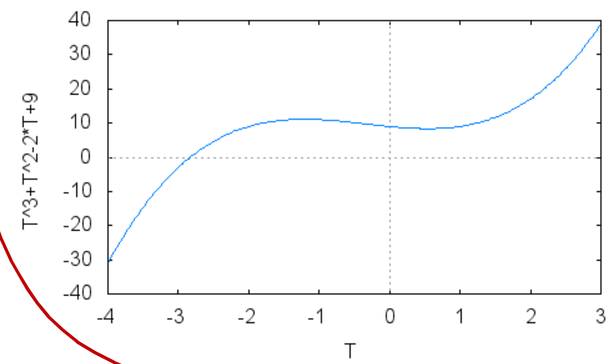
$$G_z(s)=\frac{G_r G_o}{1+G_r G_o}=\frac{4s}{a_4 s^4+a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s+a_0}$$

$$a_4=T,\ a_3=2T+1,$$
$$a_2=T+2,\ a_1=T+5,\ a_0=1$$

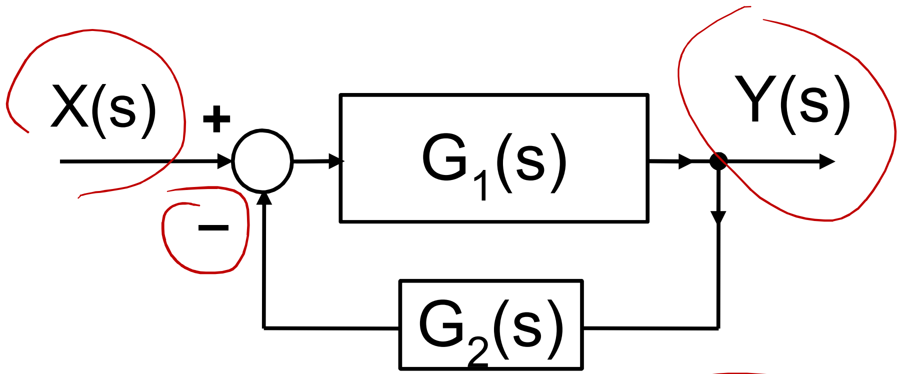
$$a_4>0,\ a_3>0,\ a_2>0,\ a_1>0,\ a_0>0 \rightarrow T>0$$

$$\Delta_2=\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}=T^2+2>0 \quad T\in\mathbb{R}$$

$$\Delta_3=\begin{bmatrix} a_3 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{bmatrix}=\boxed{T^3+T^2-2T+9>0} \rightarrow T>-2.83$$



Kryterium Nyquista – idea

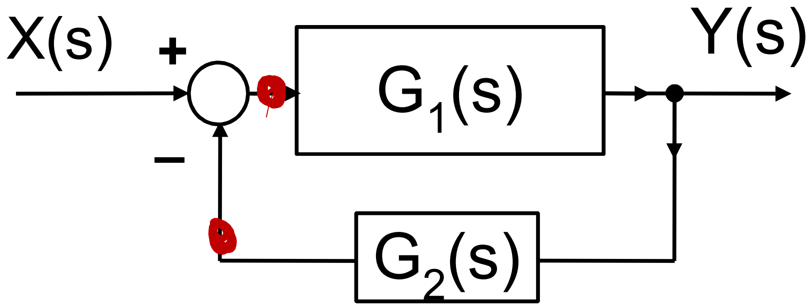


$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

ukł. zamknięty

$$G_1 \cdot G_2 \neq -1$$

Kryterium Nyquista – idea



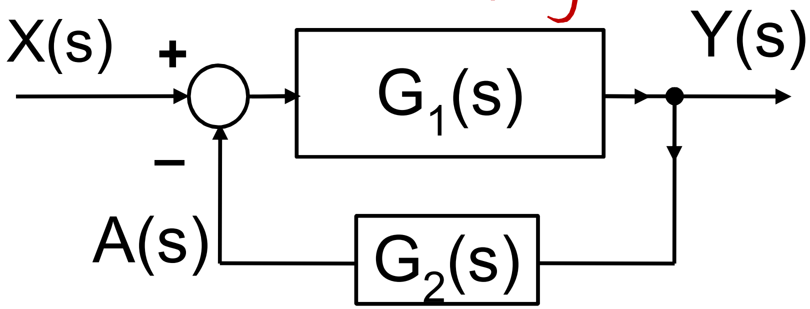
$$G_z(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

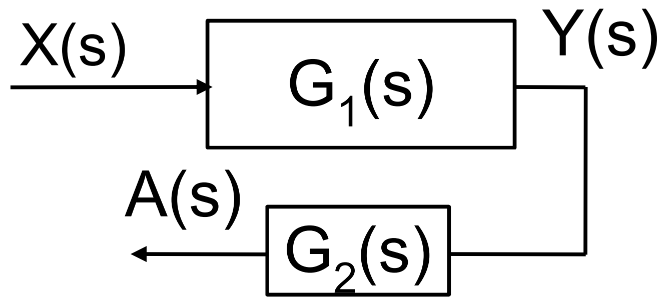
Niestabilny, gdy: $G_1 G_2 = -1$

Kryterium Nyquista – idea

układ otwarty

zamknięty



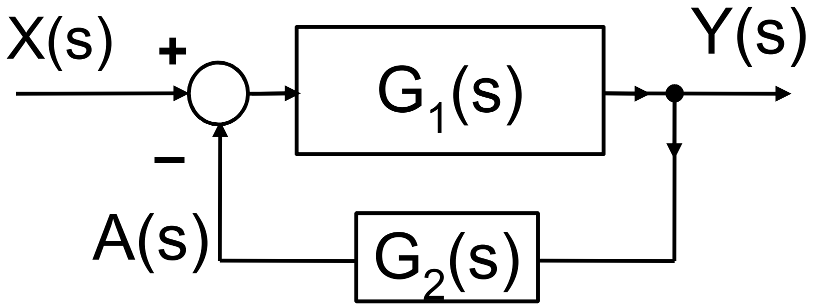


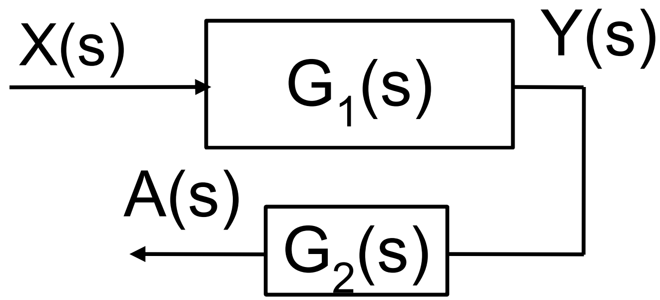
$$G_z(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

$$G_{otw}(s)=\frac{A(s)}{X(s)}=G_1(s)G_2(s)$$

Niestabilny, gdy: $\boxed{G_1 G_2} = -1$

Kryterium Nyquista – idea

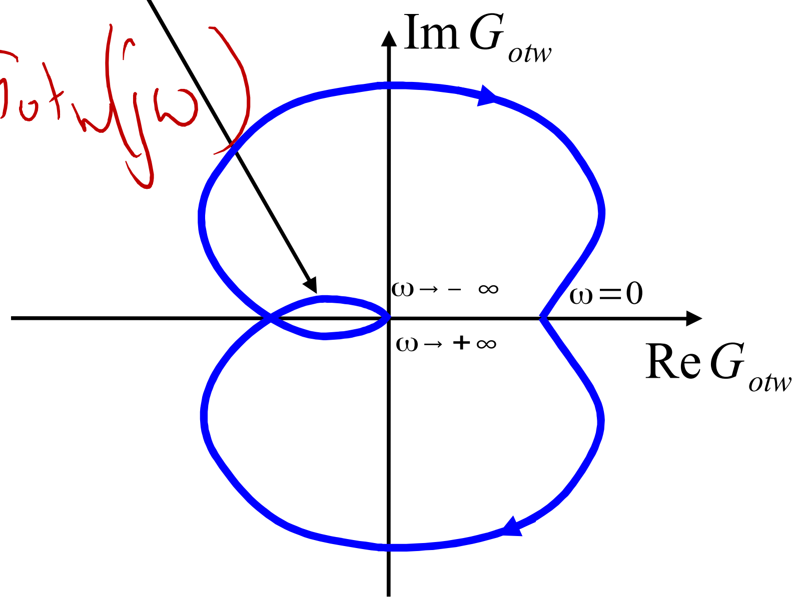




$$G_z(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

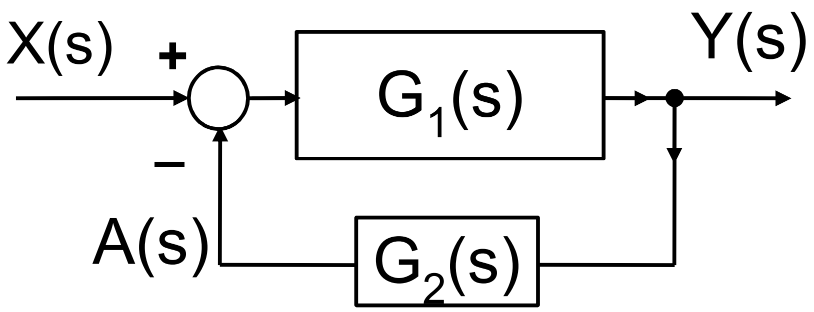
$$G_{otw}(s)=\frac{A(s)}{X(s)}=G_1(s)G_2(s)$$

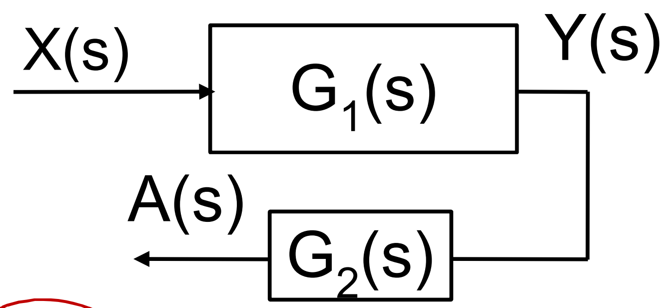
$G_{otw}(j\omega)$



Niestabilny, gdy: $\boxed{G_1 G_2} = -1$

Kryterium Nyquista – idea

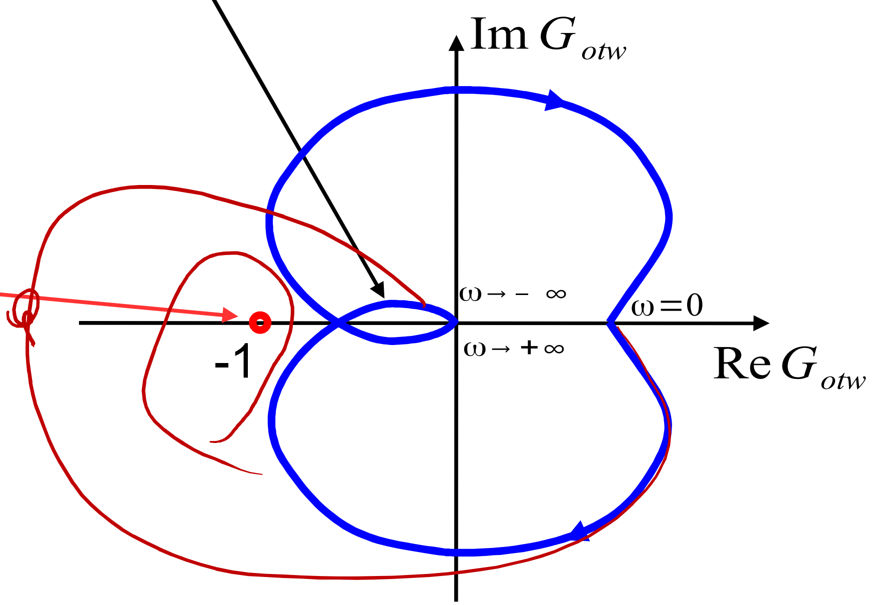




$$G_z(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$

$$G_{otw}(s)=\frac{A(s)}{X(s)}=G_1(s)G_2(s)$$

Niestabilny, gdy: $G_1 G_2 = -1$

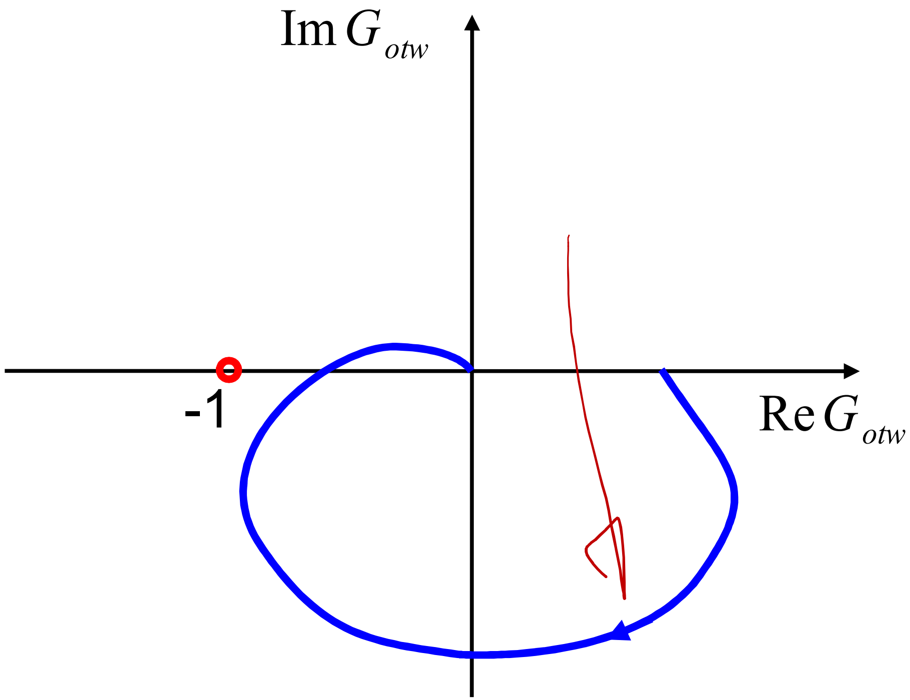


Kryterium Nyquista (szczególne) – definicja

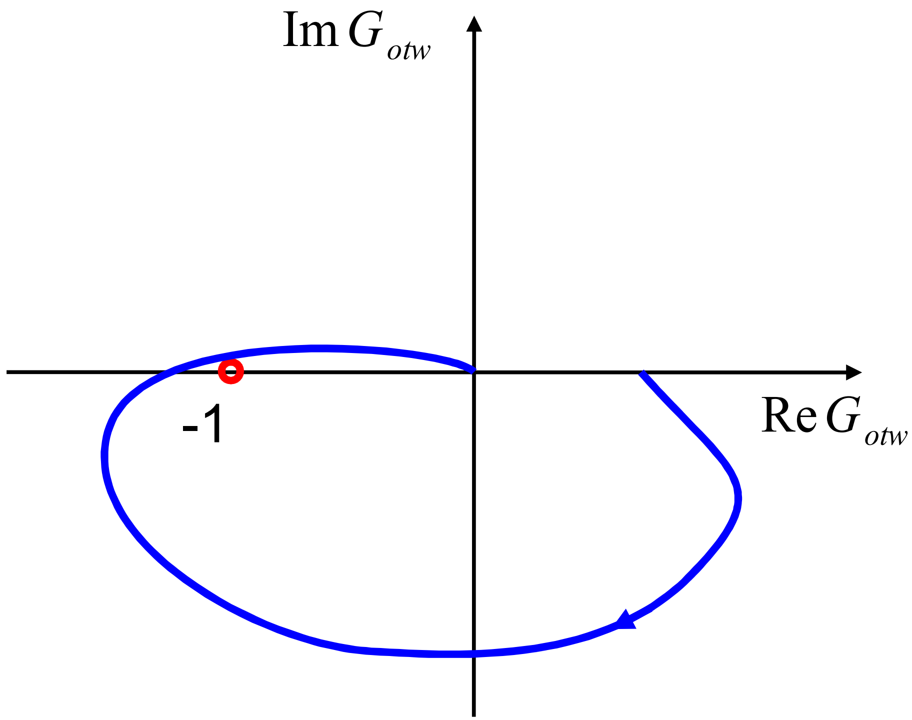
Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:
1) układ otwarty jest stabilny i
2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu (-1,j0).
// punkt (-1,j0) jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //

Kryterium Nyquista (szczególne) – definicja

Układ zamknięty ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny, jeżeli:
1) układ otwarty jest stabilny i
2) wykres Nyquista układu otwartego nie obejmuje punktu (-1,j0).
// punkt (-1,j0) jest po lewej stronie idąc wzdłuż charakterystyki //



układ zamknięty stabilny

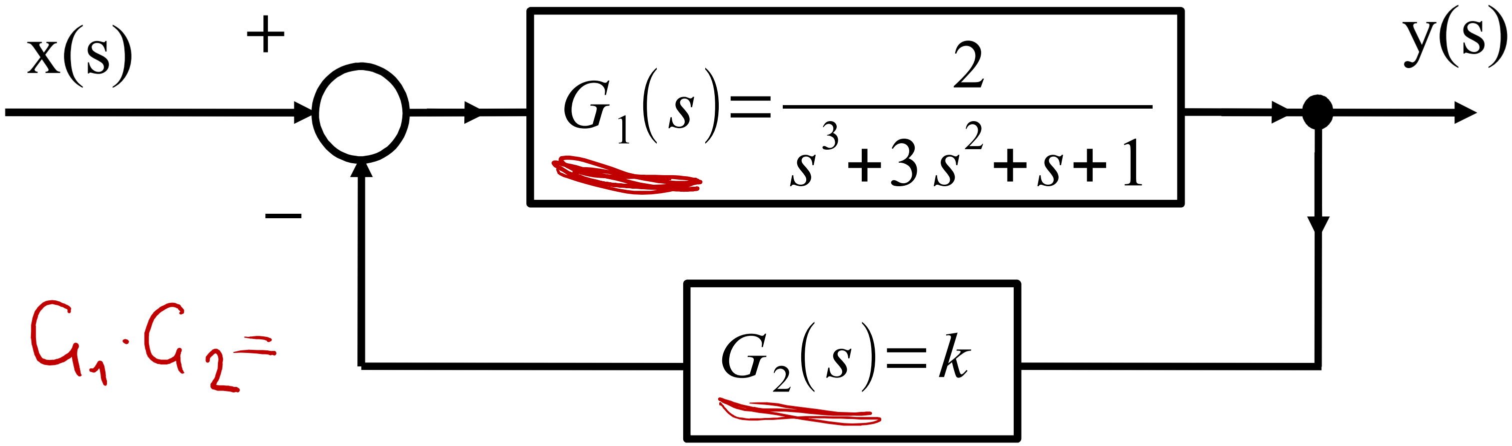


układ zamknięty niestabilny

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista



① $G_{otw.}(s) = G_1 \cdot G_2 = \frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$ → kryt. Hurwitza

$a_3, a_2, a_1, a_0 > 0$

$\det \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = 3-1 > 0$

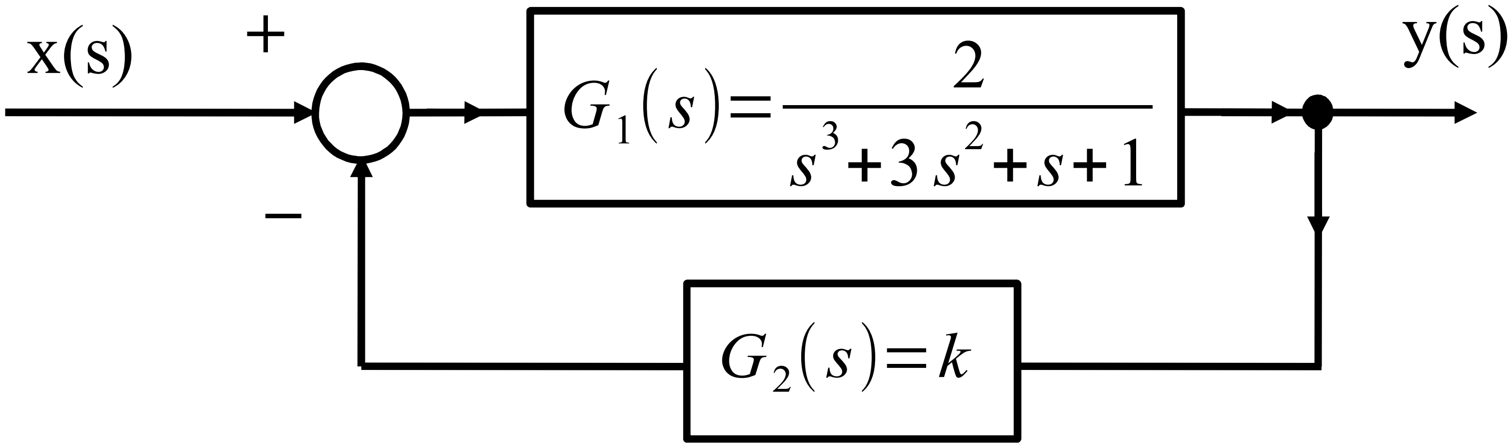
ukł. otwarty jest stabilny

② $G_{otw}(j\omega) = \frac{2k}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + j\omega + 1} = P(\omega) + jQ(\omega)$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista

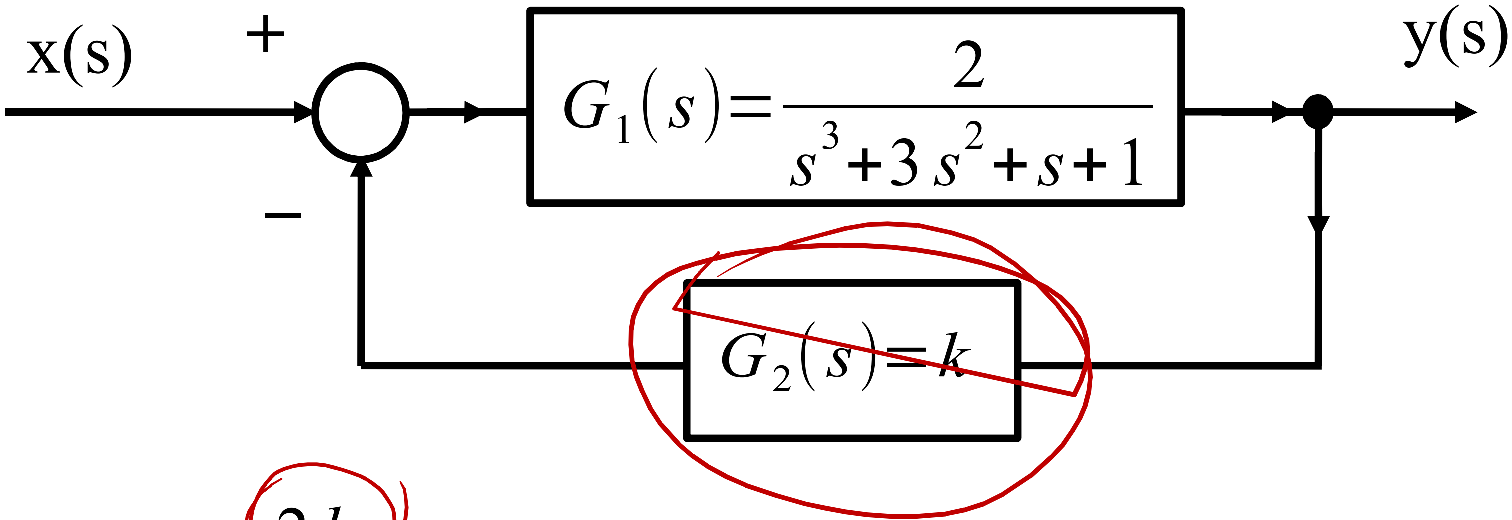


$$G_{otw}(s)=G_1 G_2=\frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista

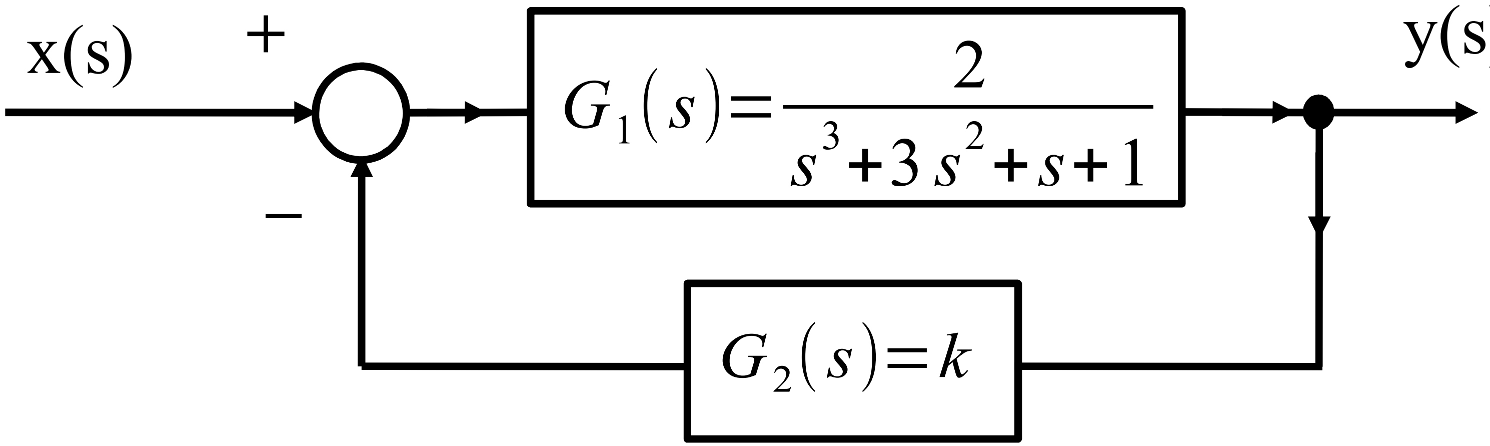


$$G_{otw}(s)=G_1 G_2=\frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$$ - stabilny z kryterium Hurwitza

Kryterium Nyquista

Przykład 8

Dobrać k aby spełnione było kryterium Nyquista



$$G_{otw}(s)=G_1 G_2=\frac{2k}{s^3+3s^2+s+1}$$ - stabilny z kryterium Hurwitza

$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

Kryterium Nyquista

Przykład 8

$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

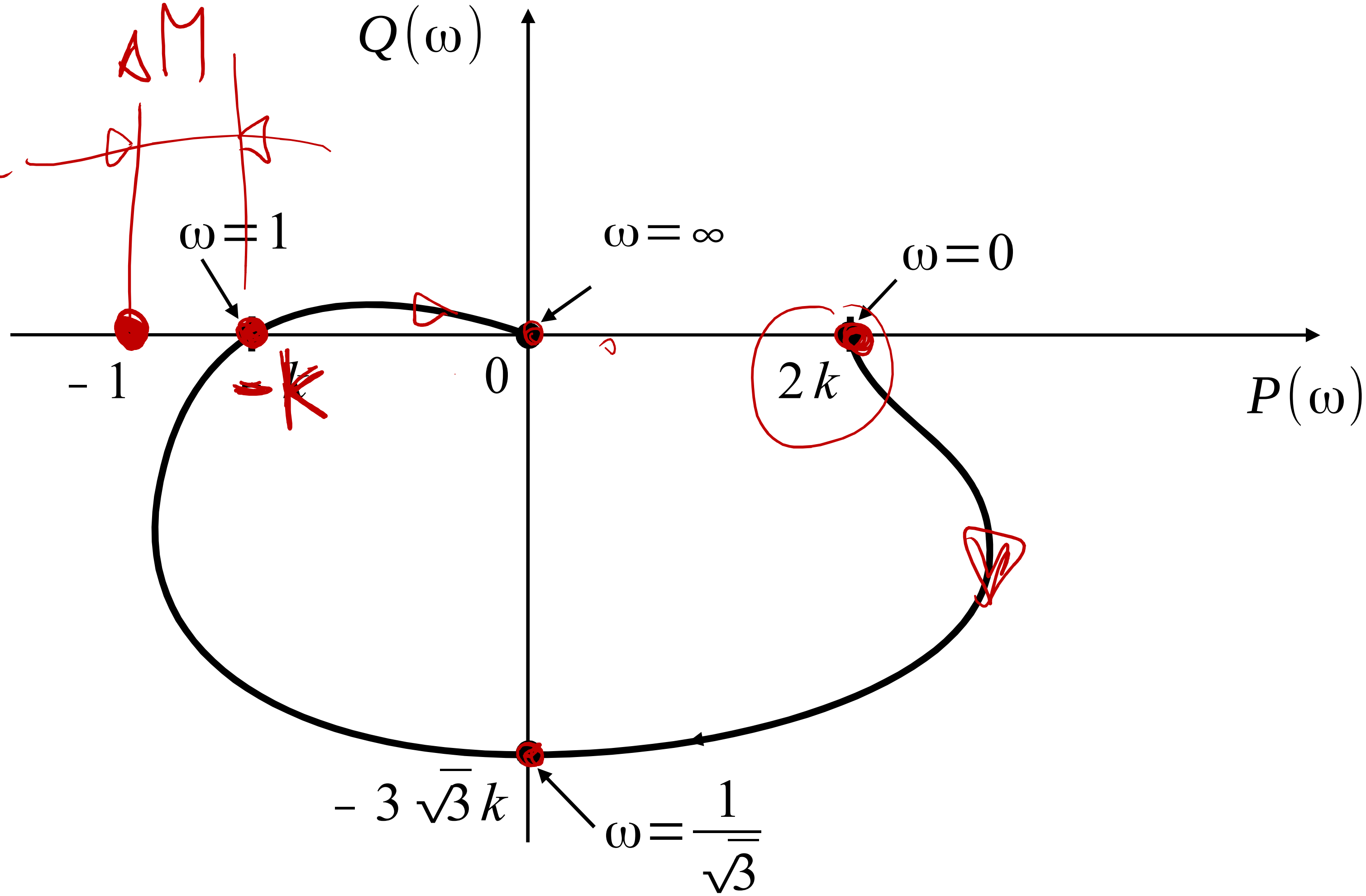
Kryterium Nyquista

Przykład 8

$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

zapas modułu

ΔM

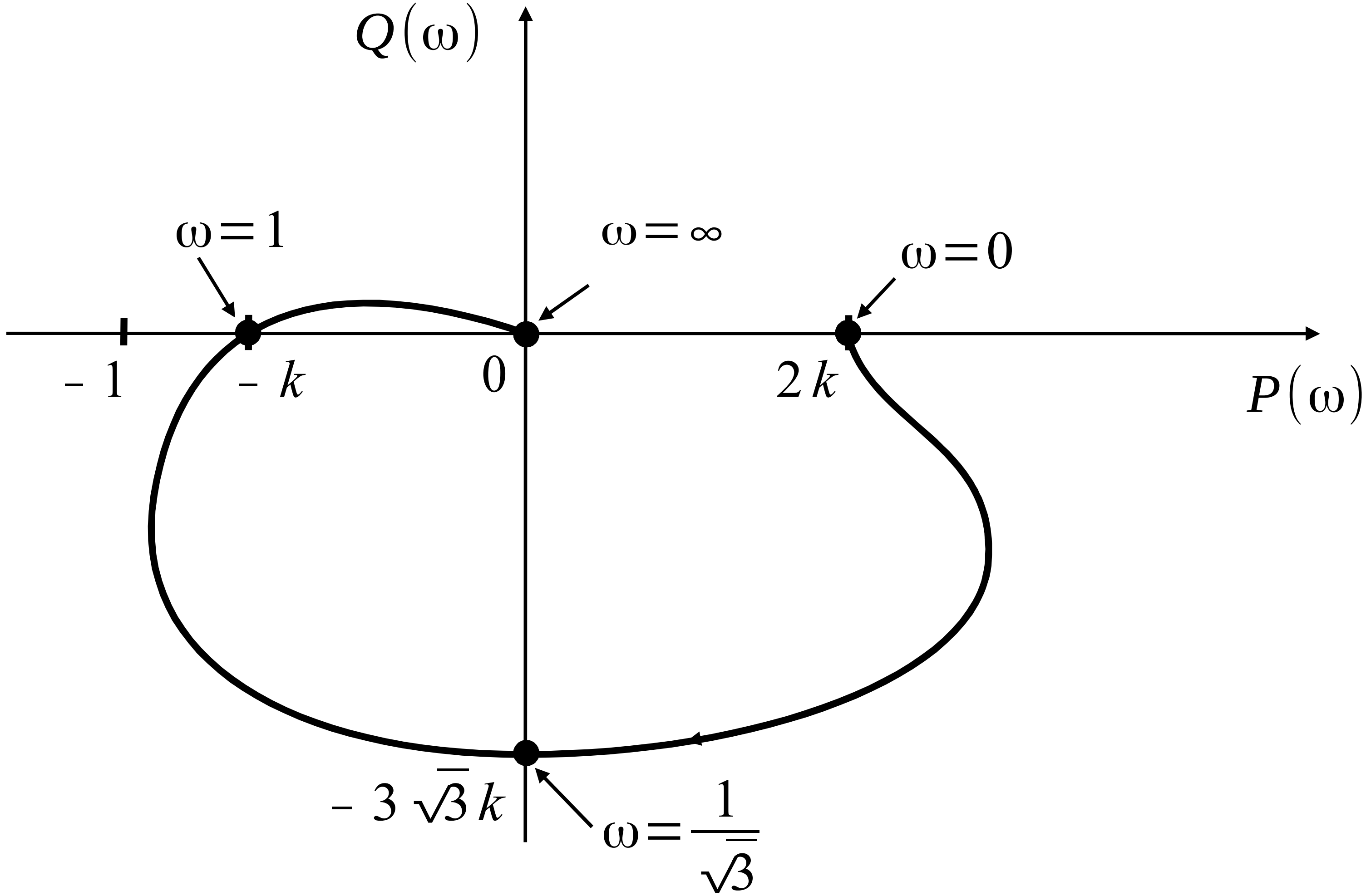


$0<K<1$

Kryterium Nyquista

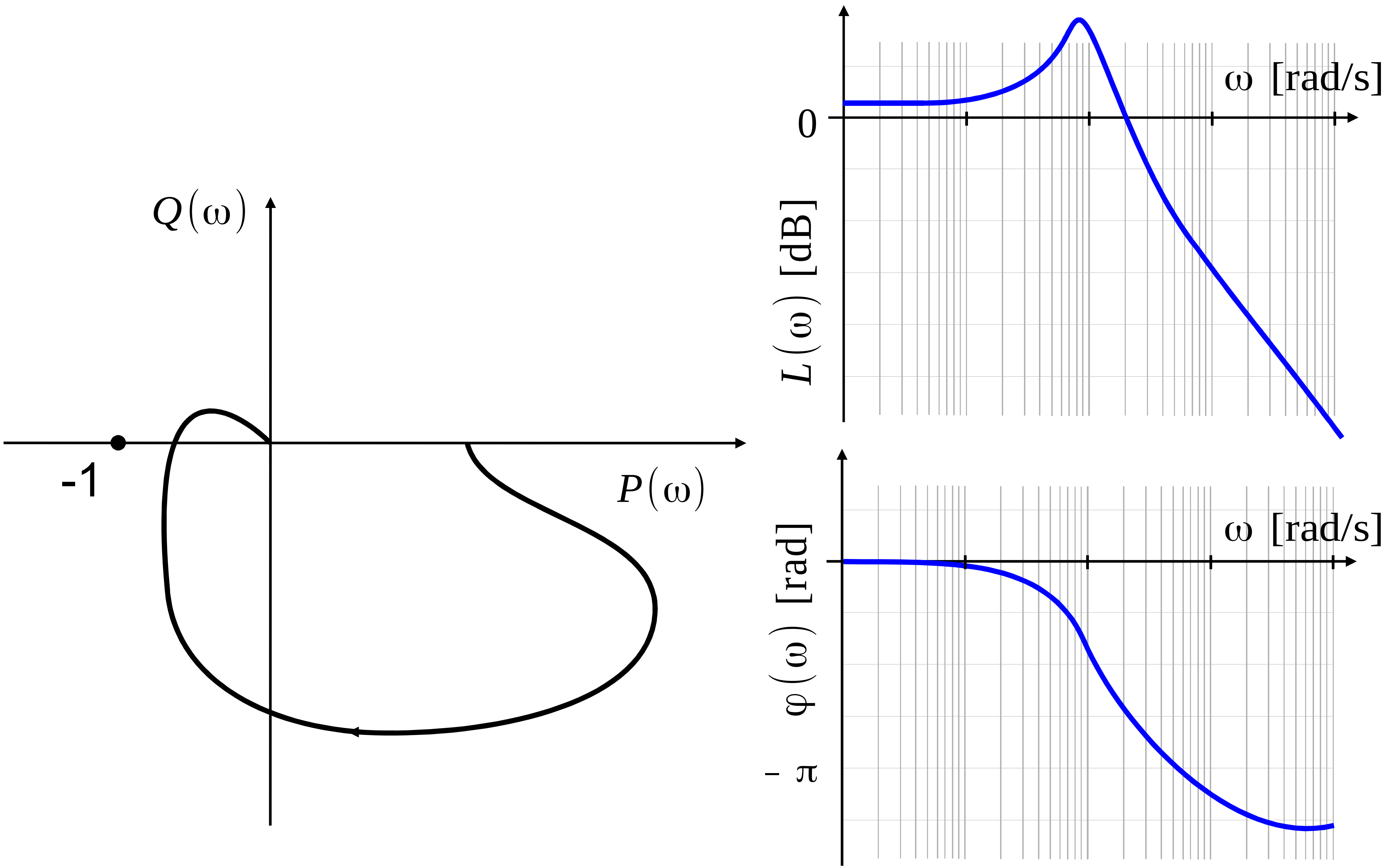
Przykład 8

$$P(\omega)=\frac{2k-6k\omega^2}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},\quad Q(\omega)=\frac{2k\omega^3-2k\omega}{(1-3\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$



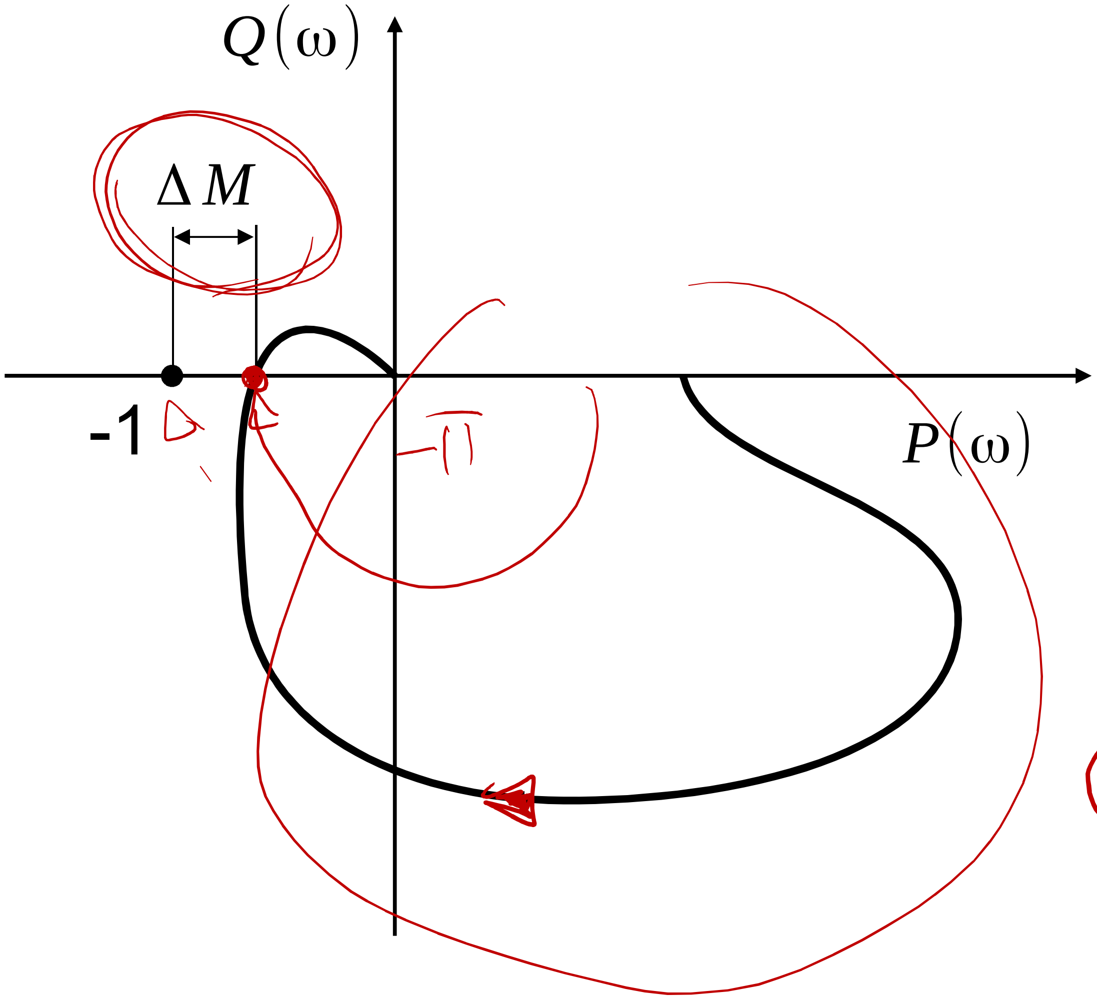
układ zamknięty stabilny dla $0 < k < 1$

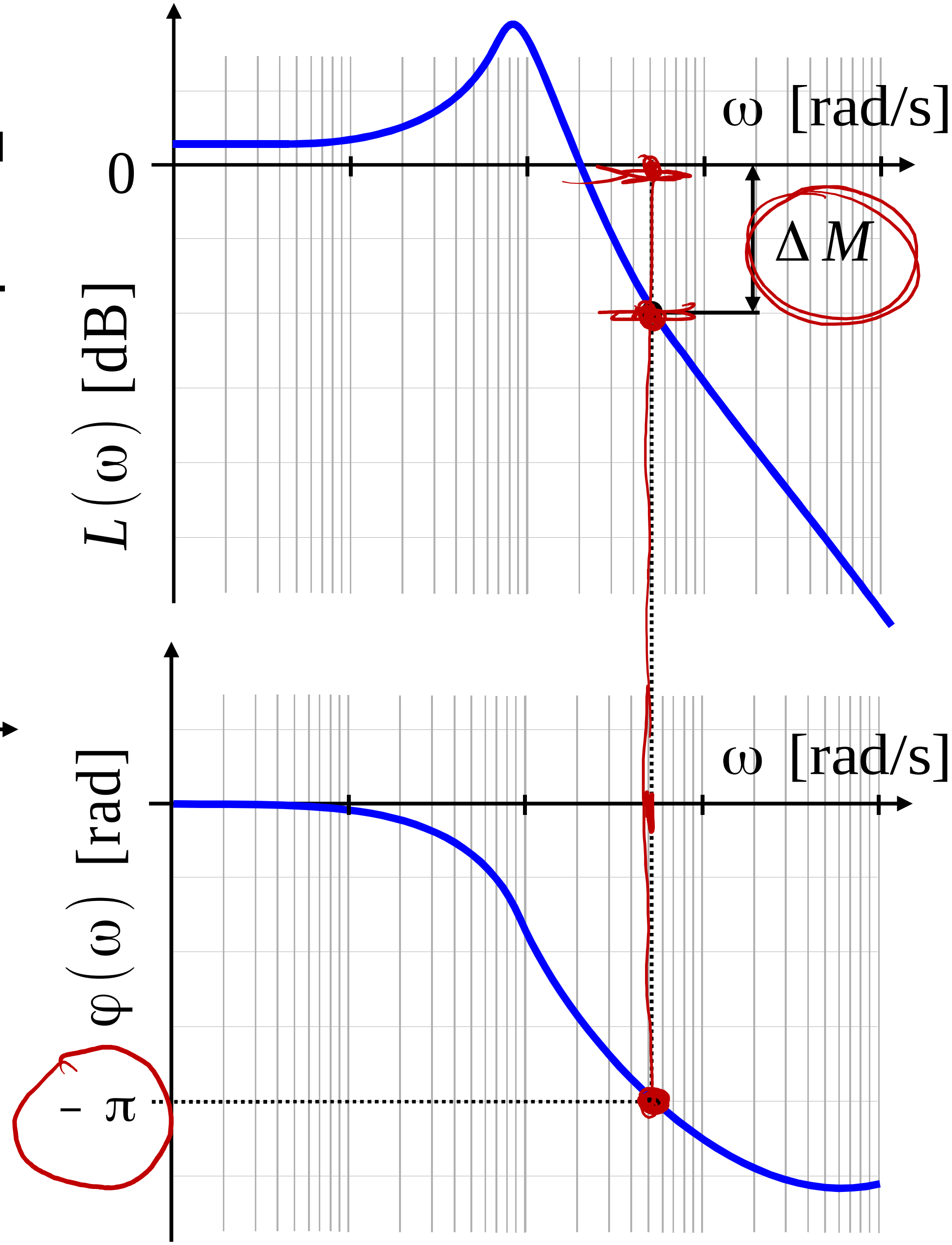
Zapas modułu



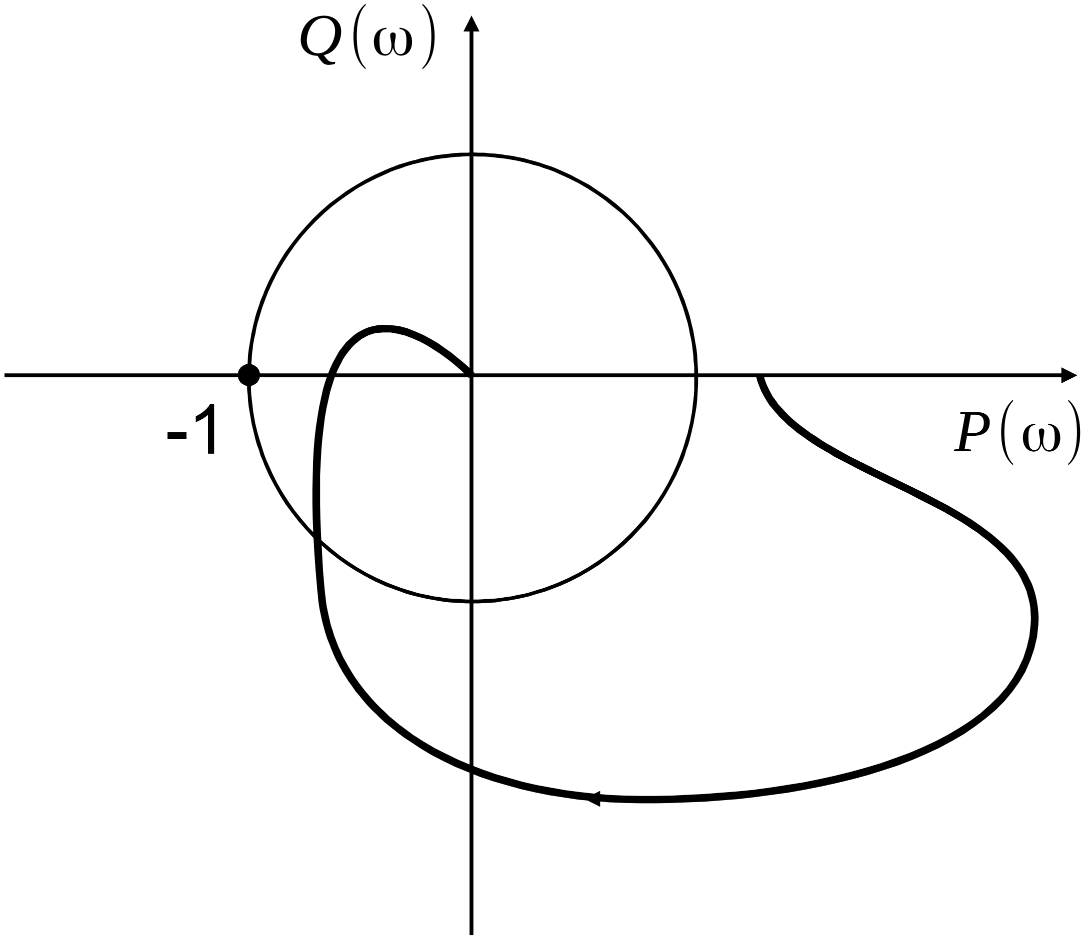
Zapas modułu

Dodanie do układu (szeregowo) wzmocnienia o wartości zapasu modułu spowoduje utratę jego stabilności w czasie pracy ze sprzężeniem zwrotnym.

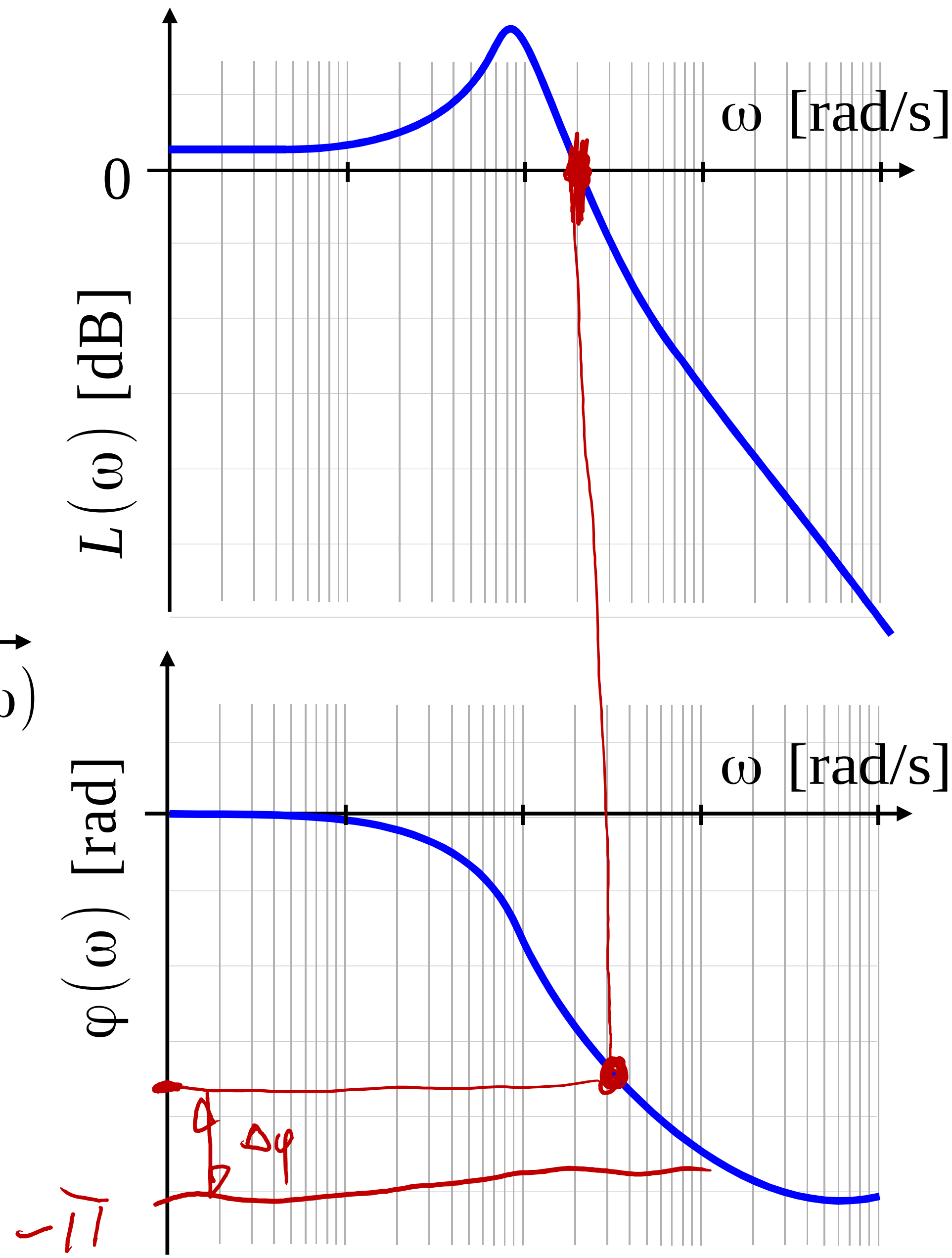




Zapas fazy



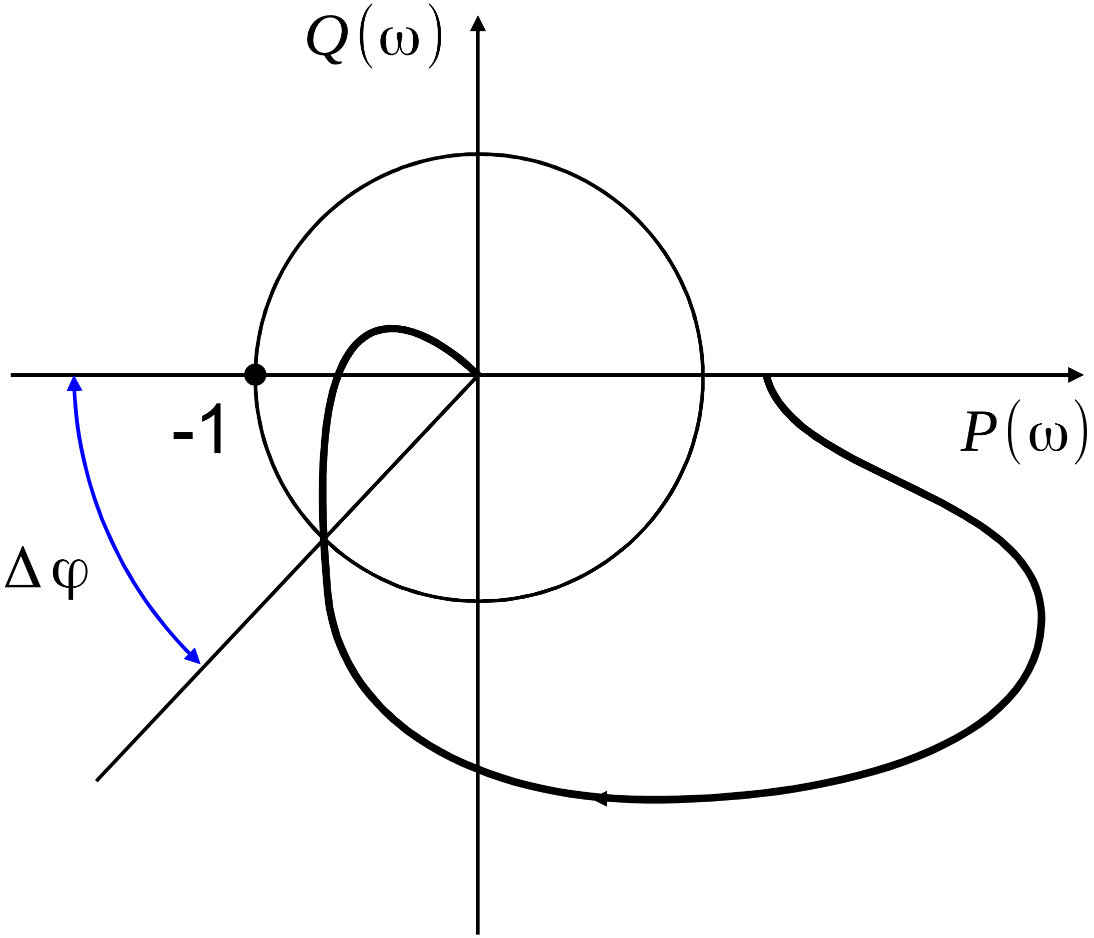
$Q(\omega)$
-1
$P(\omega)$

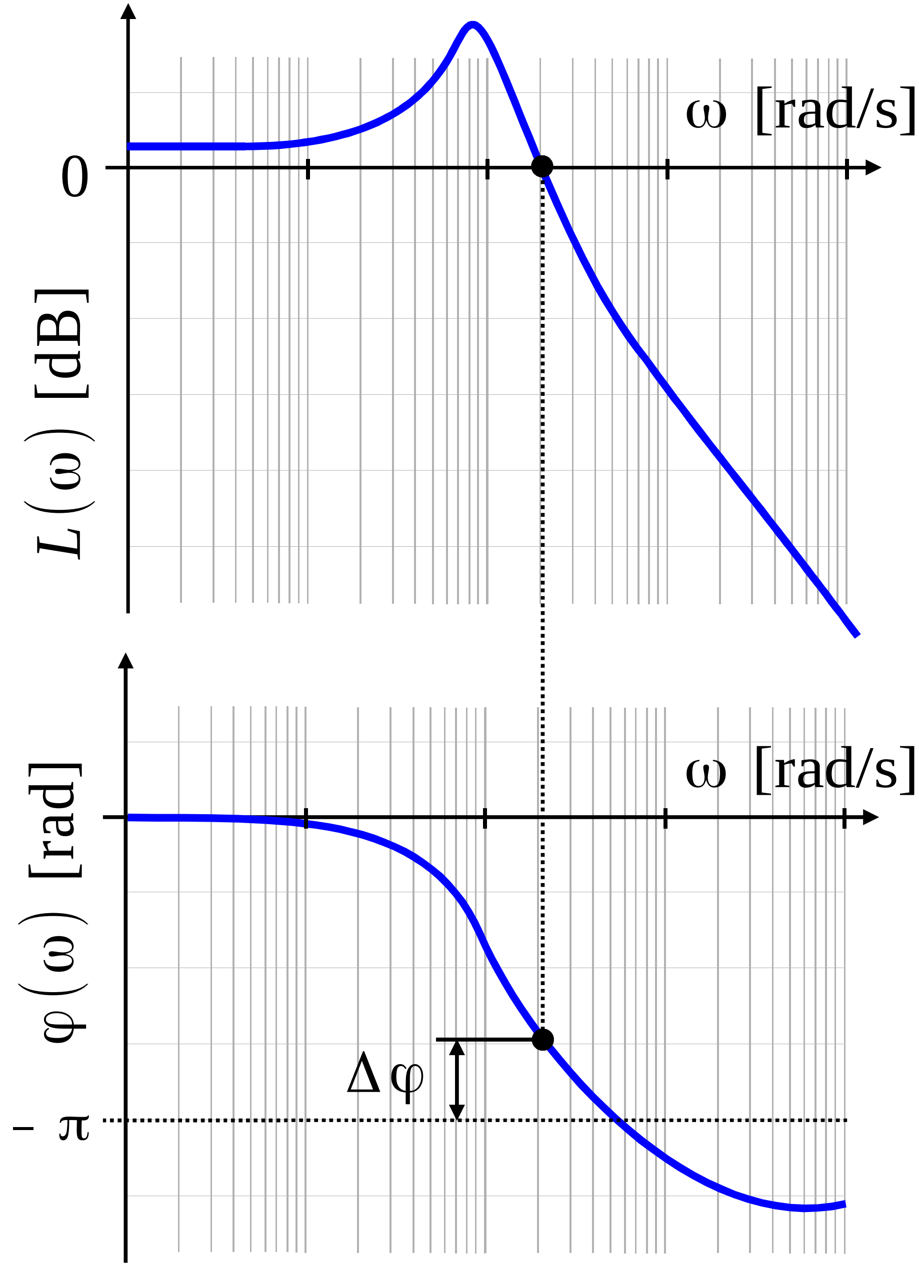


0
ω [rad/s]
$L(\omega)$ [dB]
ω [rad/s]
$\varphi(\omega)$ [rad]
$\Delta\varphi$
$-\pi$

Zapas fazy

Dodanie do układu (szeregowo) obiektu opóźniającego o wartości zapasu fazy spowoduje utratę jego stabilności w czasie pracy ze sprzężeniem zwrotnym.



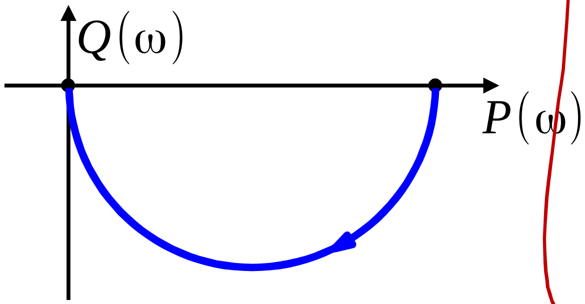


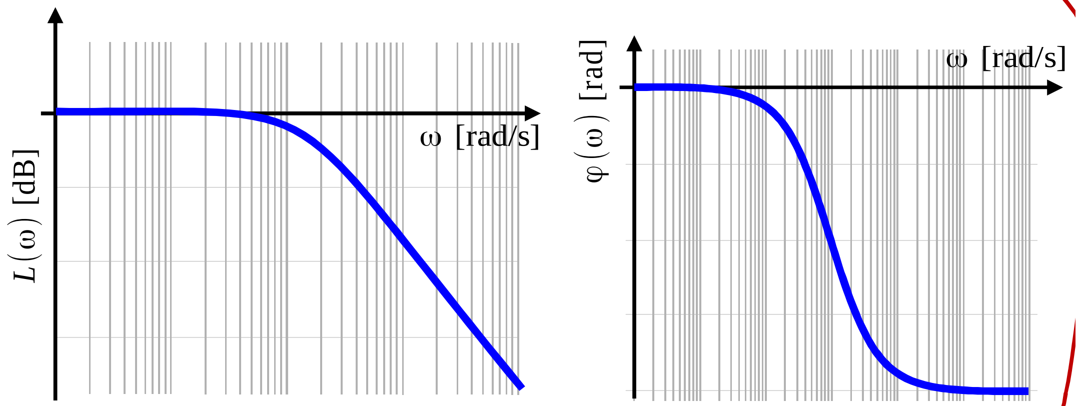
Stabilność układu a charakterystyka Bodego

Charakterystyki Bodego (wzmocnienie + opóźnienie) nie ma interpretacji fizycznej dla układu niestabilnego!

Przykład:

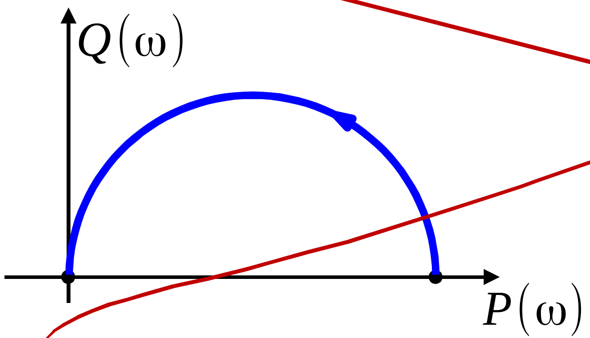
$$G(s)=\frac{1}{s+1}$$

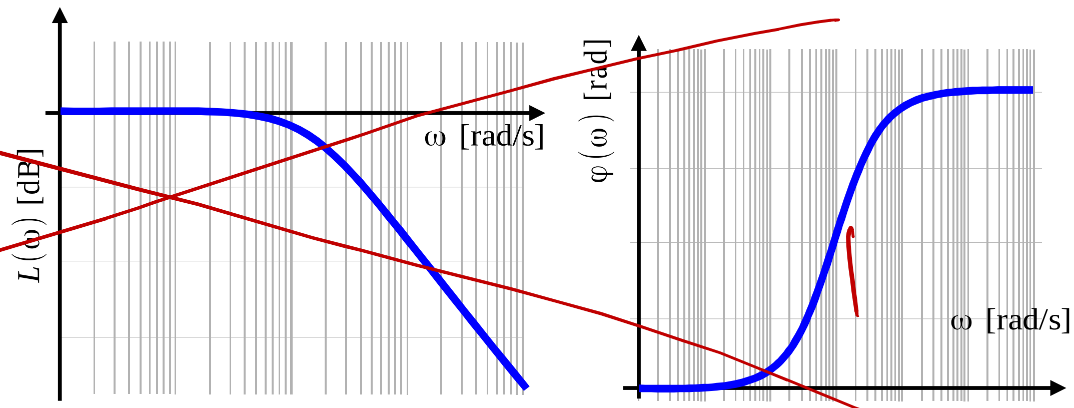




niestab.

$$G(s)=\frac{1}{s-1}$$





Dodawanie charakterystyk Bodego

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s)$$

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)\, G_2(j\omega)$$

$$|G(j\omega)|\, e^{j \operatorname{Arg} G(j\omega)} = |G_1(j\omega)|\, e^{j \operatorname{Arg} G_1(j\omega)} \cdot |G_2(j\omega)|\, e^{j \operatorname{Arg} G_2}$$

$$|G|\, e^{j \boxed{\operatorname{Arg} G}} = |G_1| \cdot |G_2| \cdot e^{j \boxed{(\operatorname{Arg} G_1 + \operatorname{Arg} G_2)}}$$

$$20 \log |G| = 20 \log |G_1| \cdot |G_2| = 20 \log |G_1| + 20 \log |G_2|$$

Dodawanie charakterystyk Bodego

$$G(s) = G_1(s)\,G_2(s)$$

$$G(j\omega) = G_1(j\omega)\,G_2(j\omega)$$

$$|G(j\omega)|\,e^{j\,\mathrm{Arg}\,G(j\omega)} = |G_1(j\omega)|\,e^{j\,\mathrm{Arg}\,G_1(j\omega)} \cdot |G_2(j\omega)|\,e^{j\,\mathrm{Arg}\,G_2(j\omega)}$$

$$|G(j\omega)|\,e^{j\,\mathrm{Arg}\,G(j\omega)} = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot e^{j(\mathrm{Arg}\,G_1(j\omega) + \mathrm{Arg}\,G_2(j\omega))}$$

Wzmocnienie: $|G(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)| \cdot \cancel{|G_3(j\omega)|}$

Wzmocnienie [dB]: $20\log(|G_1(j\omega)|) + 20\log(|G_2(j\omega)|)$

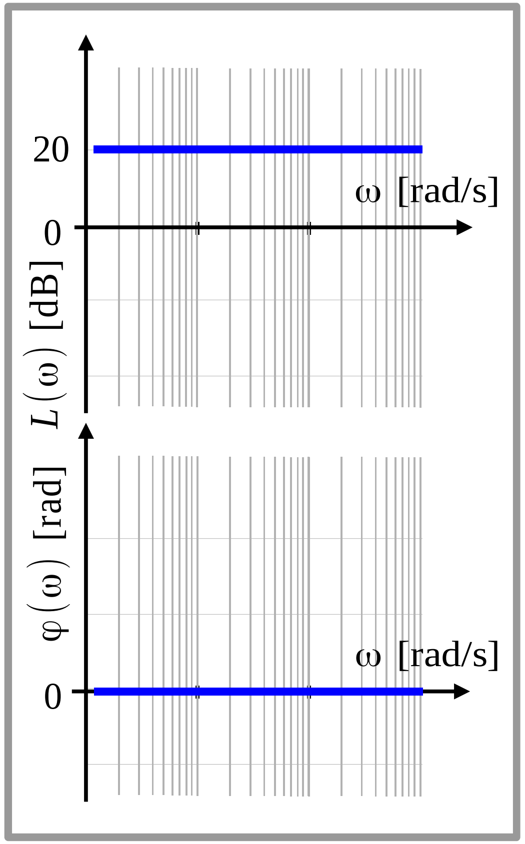
Faza: $\mathrm{Arg}\,G(j\omega) = \mathrm{Arg}\,G_1(j\omega) + \mathrm{Arg}\,G_2(j\omega)$

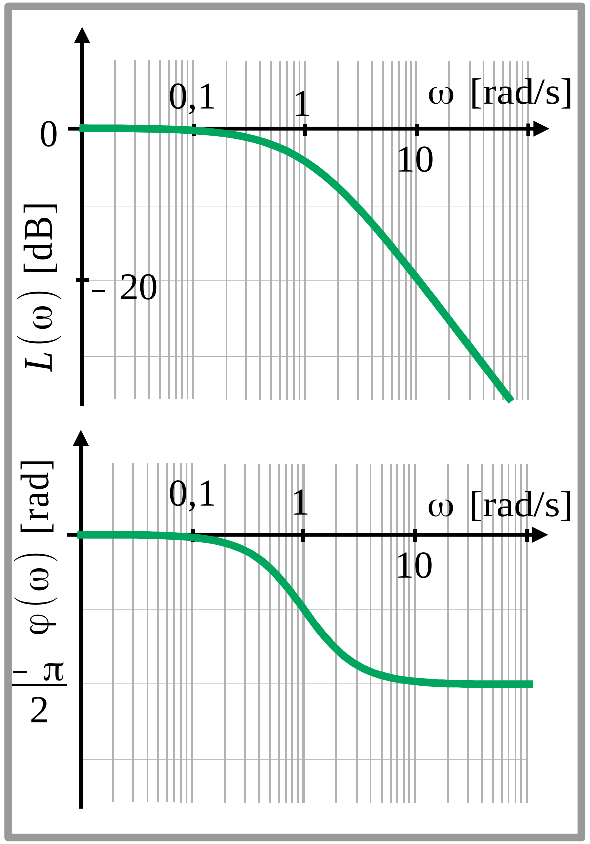
Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

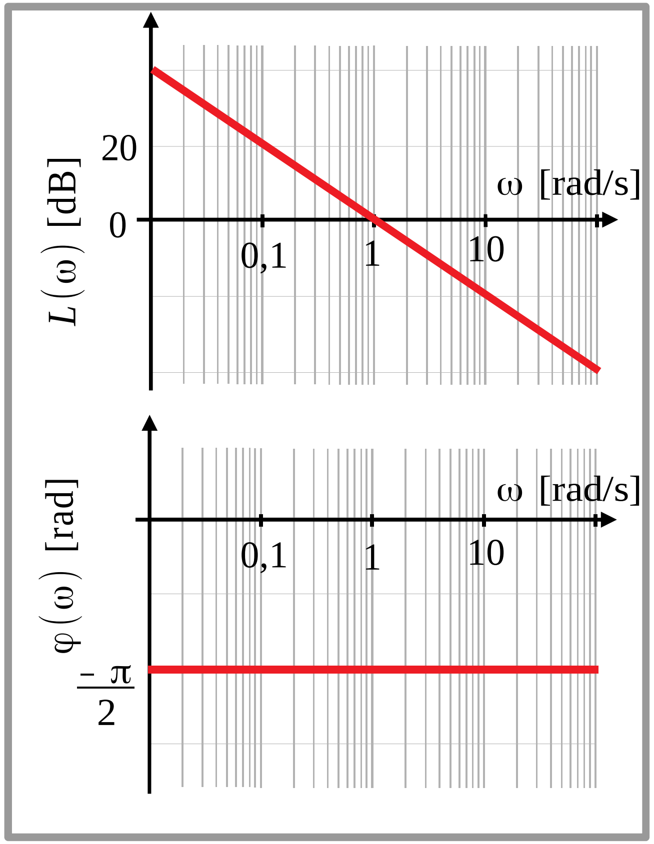
$$G(s) = \frac{10}{s^2+s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2+s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$

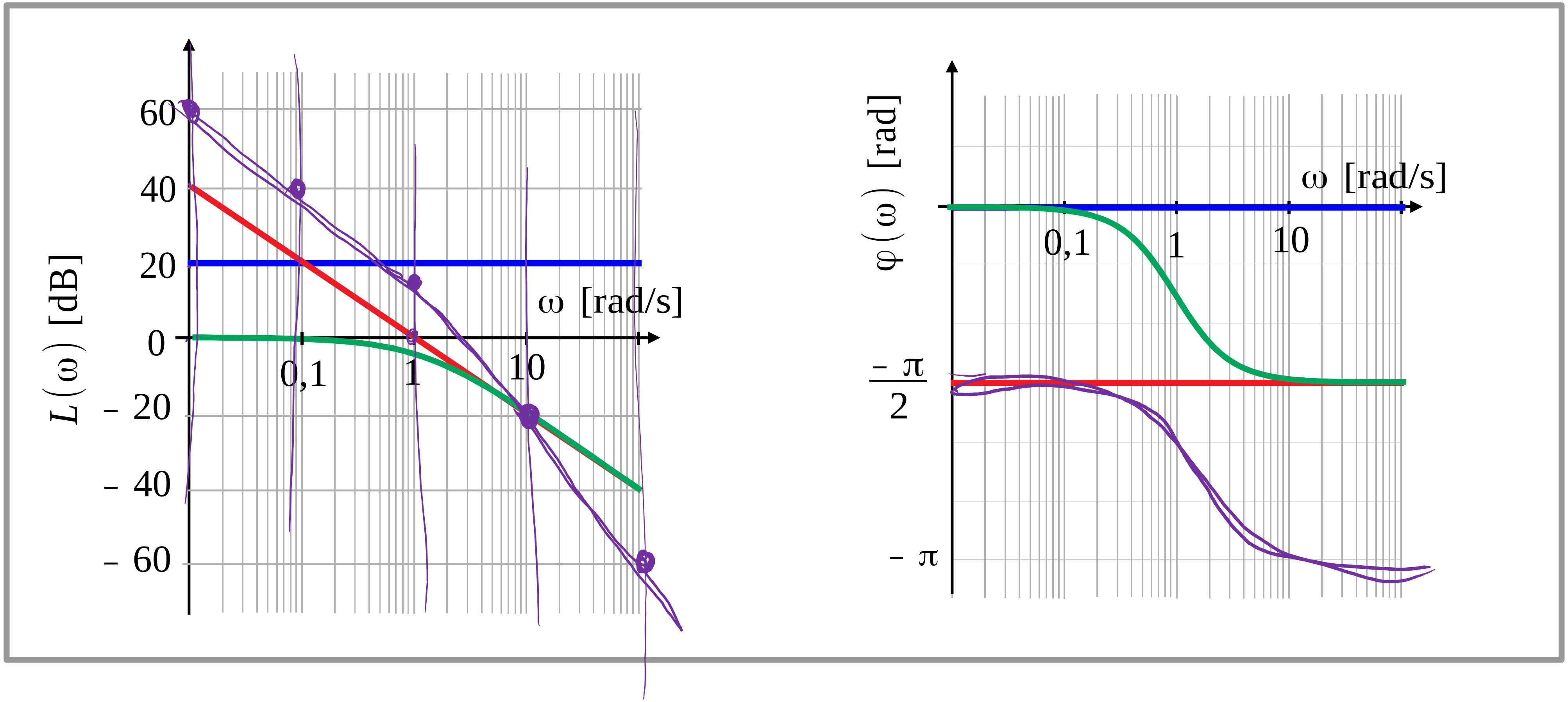






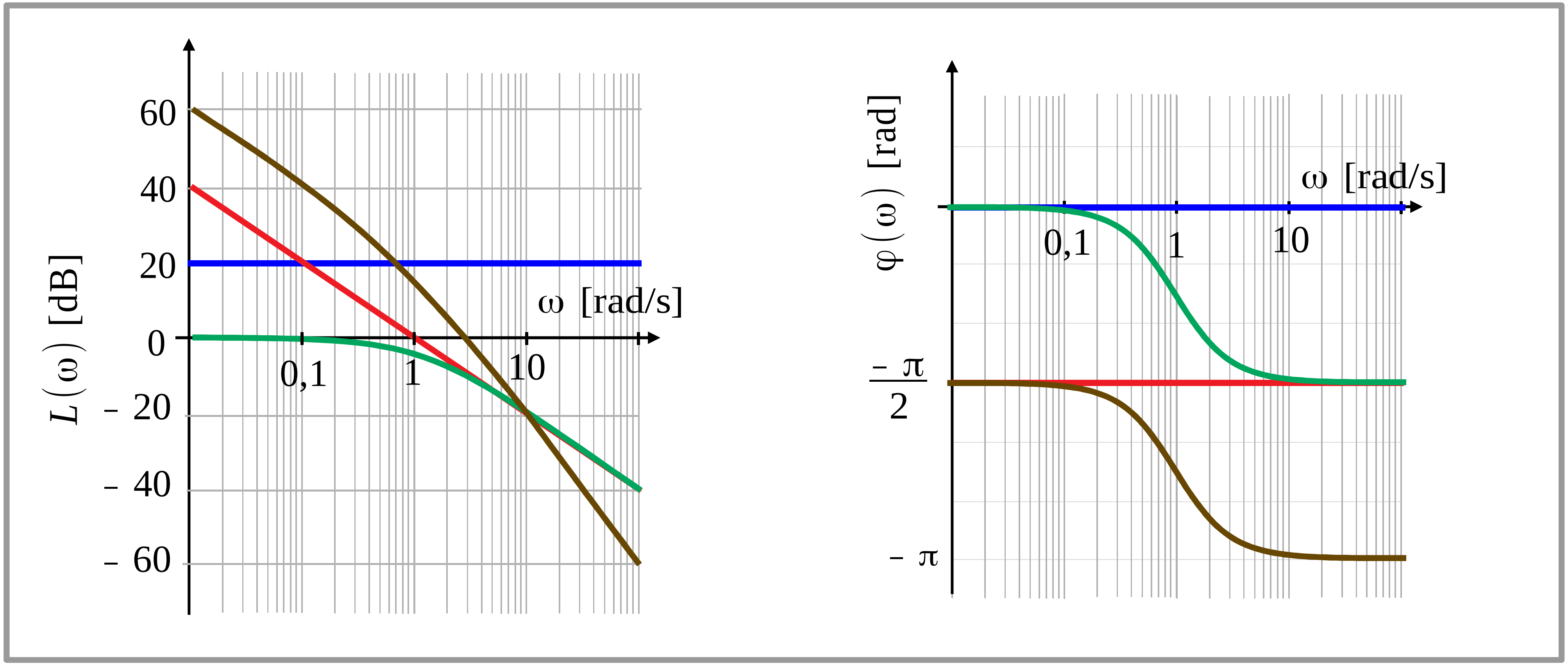
Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2+s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$



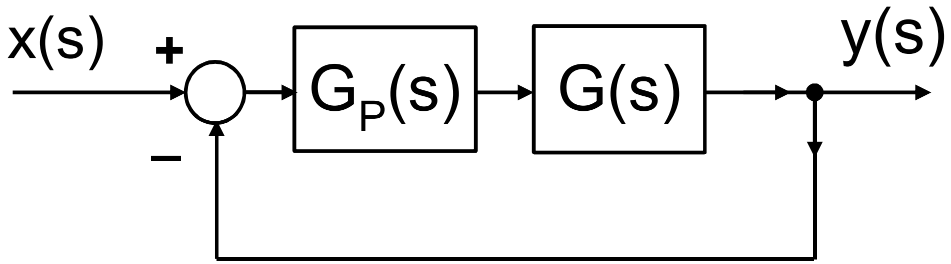
Dodawanie charakterystyk Bodego – przykład

$$G(s) = \frac{10}{s^2+s} = 10 \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s}$$



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P



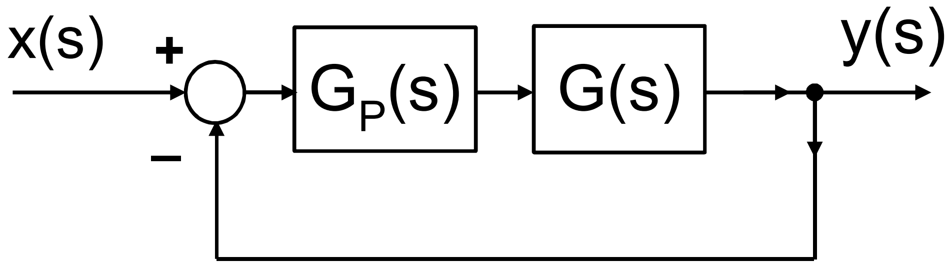
$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

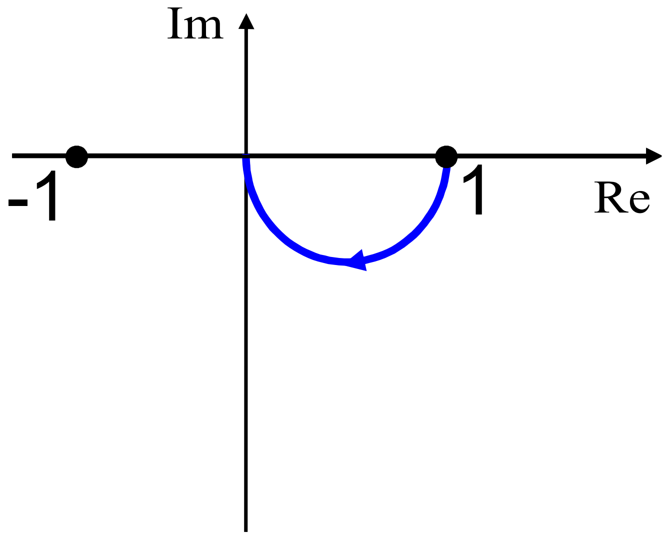


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

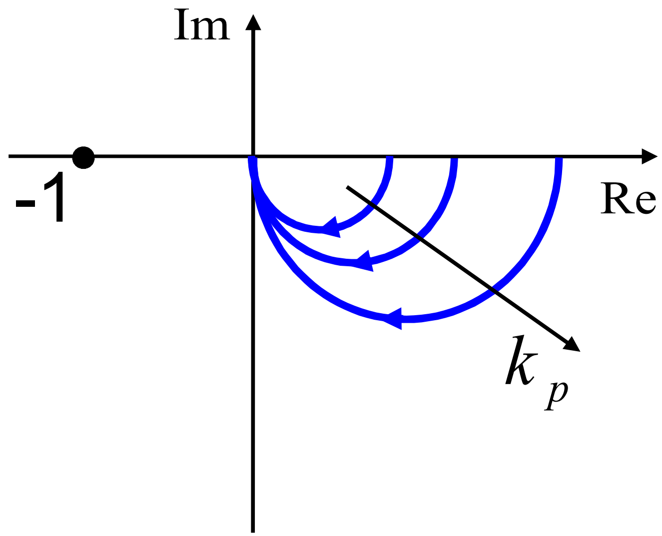
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$



$$G_{otw}(s)=k_p\frac{1}{Ts+1}$$



G_{otw} zawsze stabilny,

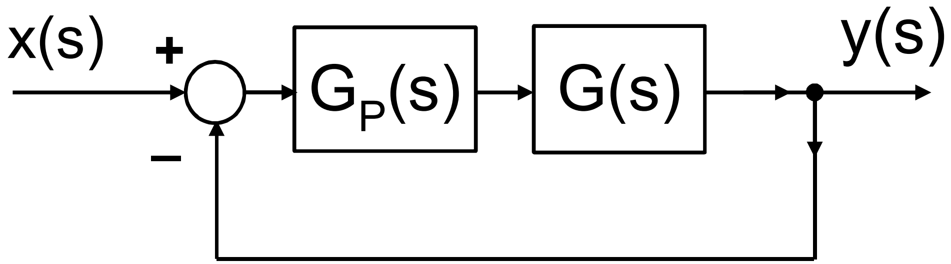
G_{zam} zawsze stabilny.

Błąd w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P+1}x_{st}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

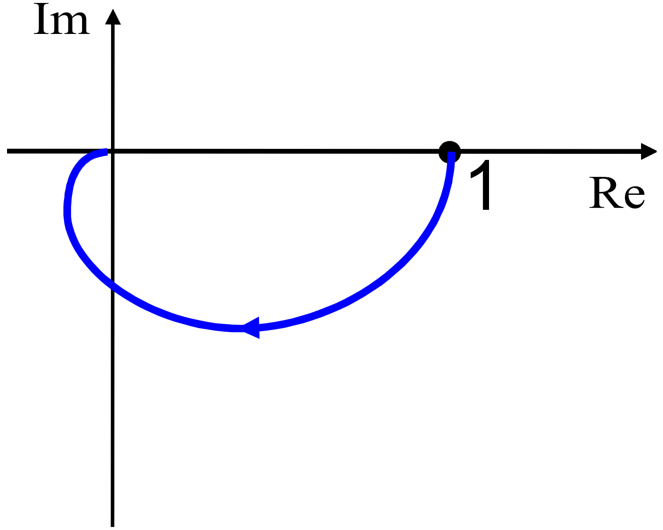


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

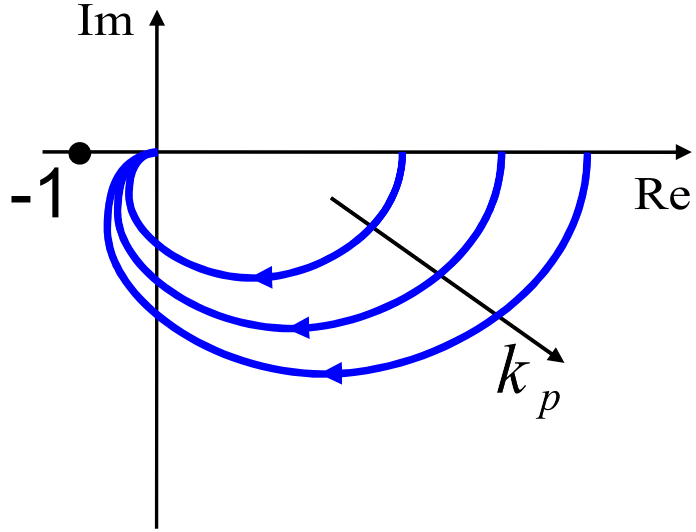
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_1^2 s^2+T_2 s+1}$$



$$G_{otw}(s)=\frac{k_p}{T_1^2 s^2+T_2 s+1}$$



G_{otw} zawsze stabilny,

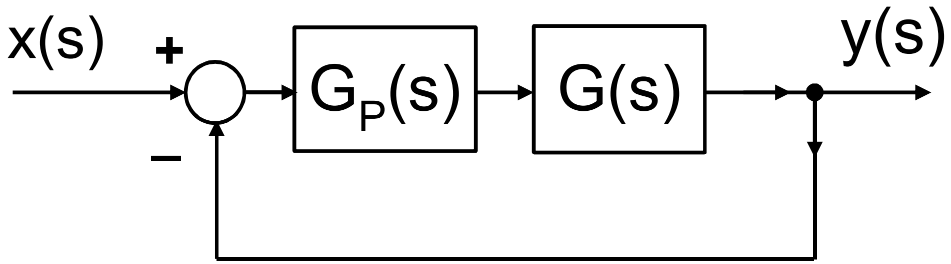
G_{zam} zawsze stabilny.

Błąd w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P+1}x_{st}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P

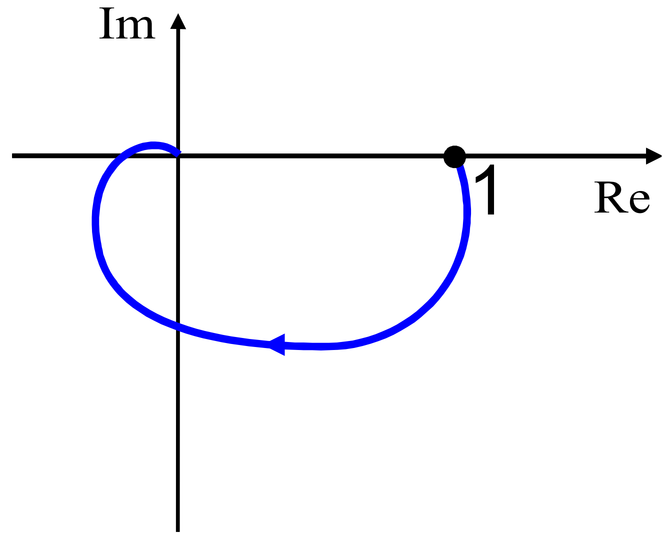


$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)G(s)}{1+G_P(s)G(s)}$$

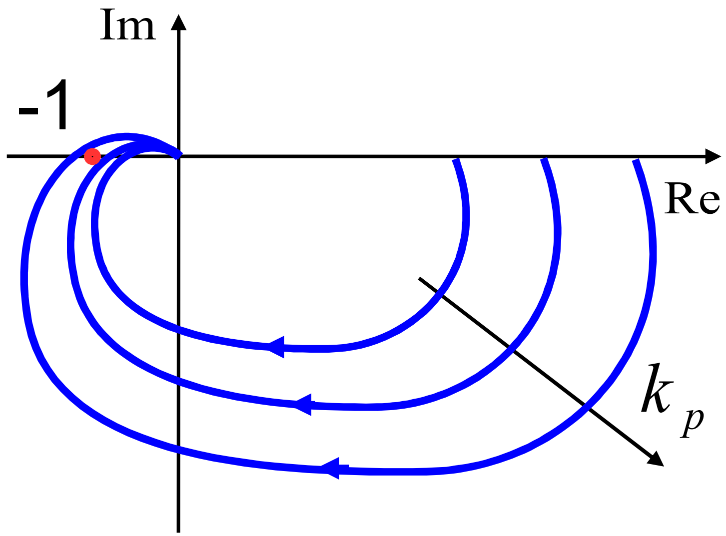
$$G_{otw}(s)=G_P(s)G(s)$$

$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$



$$G_{otw}(s)=\frac{k_p}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$



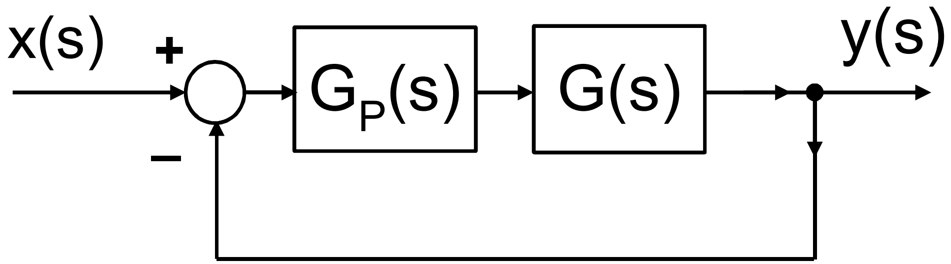
G_{otw} może być stabilny lub niestabilny i może obejmować punkt (-1,j0)

Błąd w stanie ustalonym:

$$\frac{k_P}{k_P+1}x_{st}$$

Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem P



$$G_{zam}(s)=\frac{G_P(s)\,G(s)}{1+G_P(s)\,G(s)}$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)\,G(s)$$

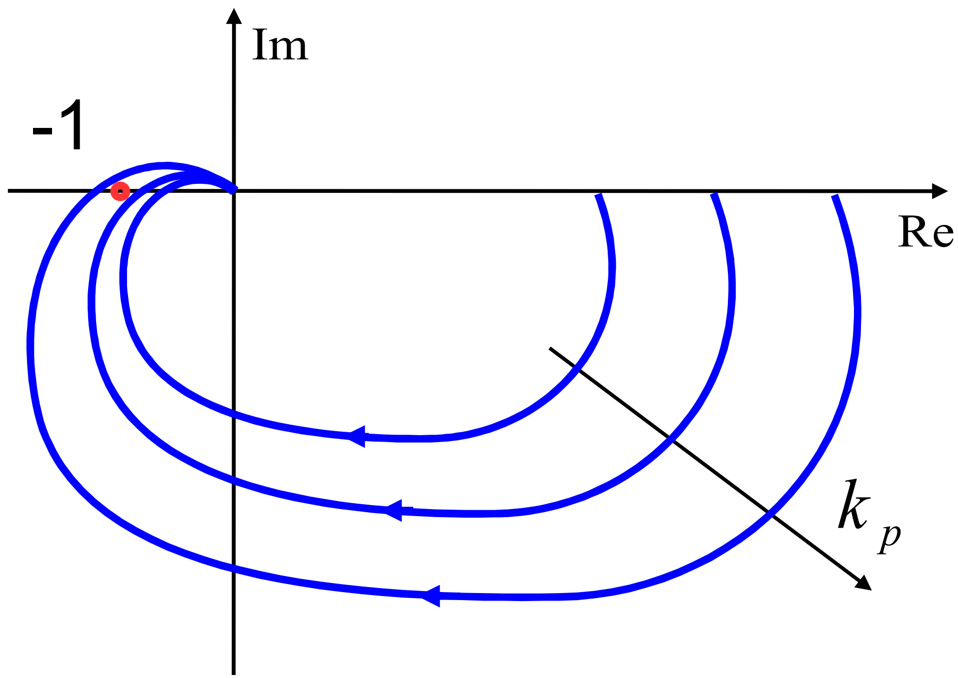
$$G_P(s)=k_P$$

$$G(s)=\frac{1}{T_3^2 s^3+T_2^2 s^2+T_1 s+1}$$

podsumowanie:

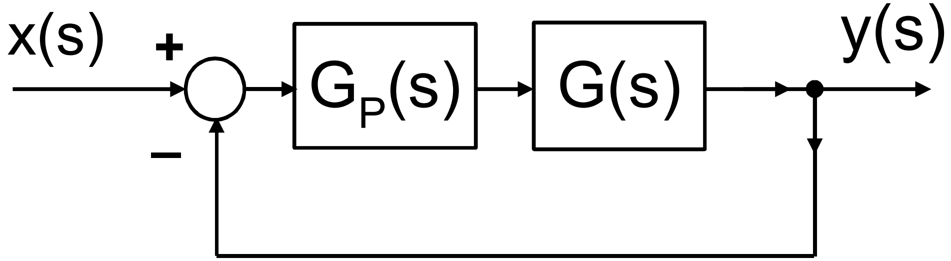
większy kp → mniejszy błąd w stanie ustalonym

mniejszy kp → większy zapas modułu



Kryterium Nyquista

Układ sterowania z regulatorem PI

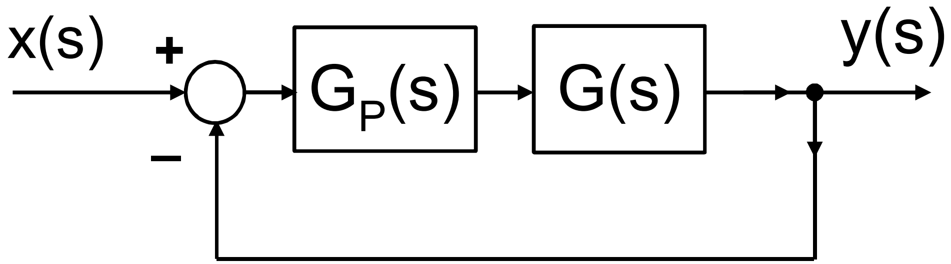


$$G_P(s) = k_P\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

$$G_{otw}(s) = G_P(s)\,G(s)$$

Kryterium Nyquista

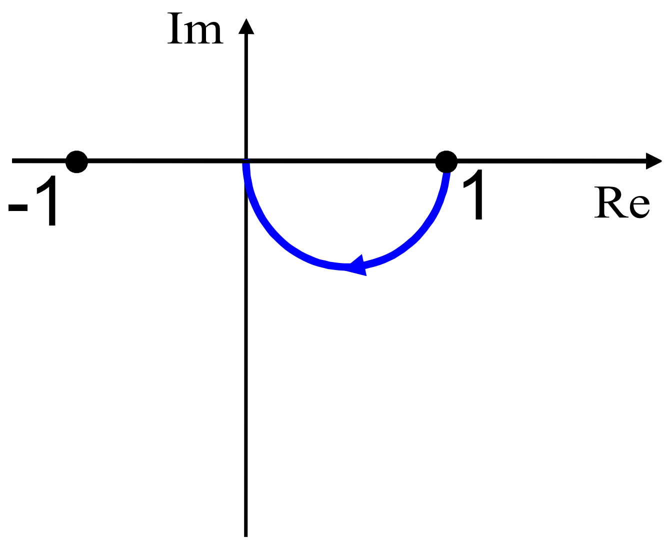
Układ sterowania z regulatorem PI



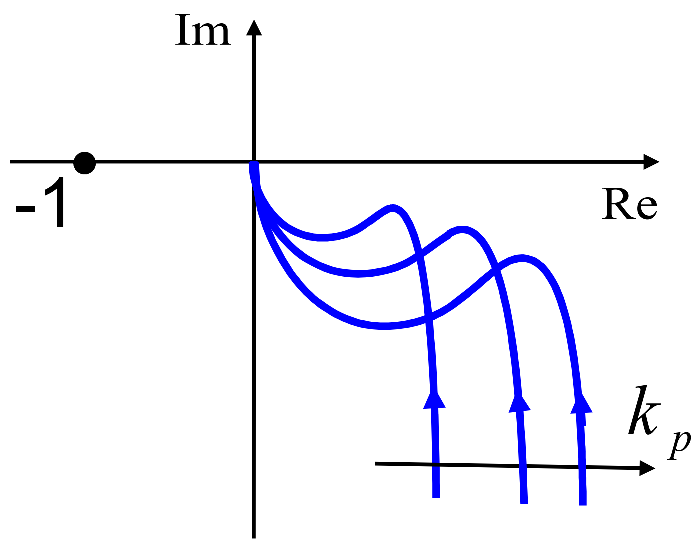
$$G_P(s)=k_P\left(1+\frac{1}{T_i s}\right)$$

$$G_{otw}(s)=G_P(s)\,G(s)$$

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1}$$



$$G_{otw}(s)=k_p\frac{T_i s+1}{T_i T s^2+T_i s}$$



G_{otw} jest na granicy stabilności,

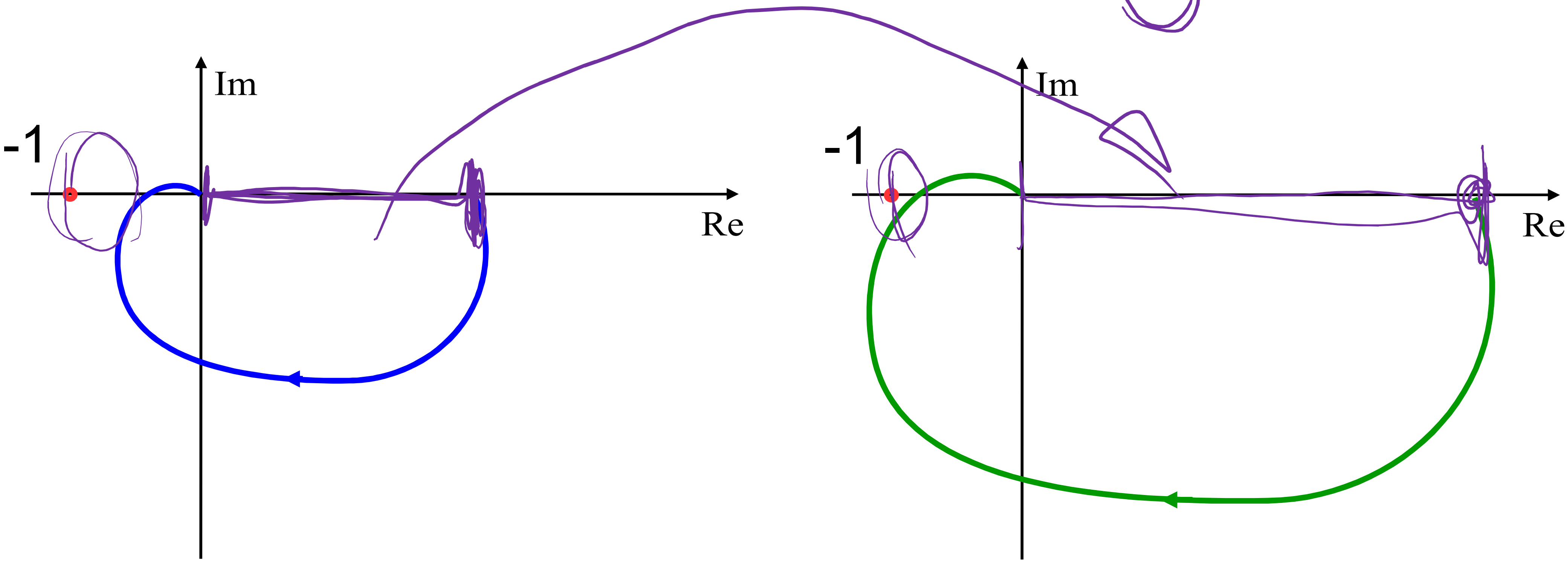
G_{zam} jest stabilny

$G_{otw}\ (\omega=0)\to\infty$ więc błąd w stanie ustalonym $\to 0$

Korekcja

Wpływ dodatkowego wzmocnienia na układ

$G(s)$ $\qquad\qquad$ $k\cdot G(s)$



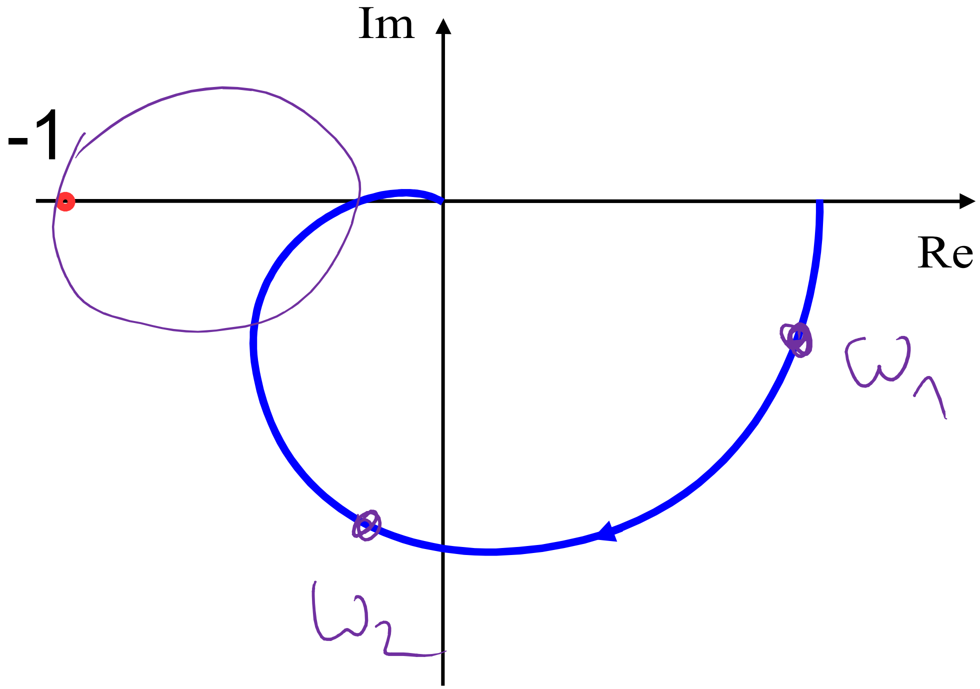
Większy zapas modułu i fazy,
Większy błąd w stanie ustalonym

Mniejszy zapas modułu i fazy,
Mniejszy błąd w stanie ustalonym

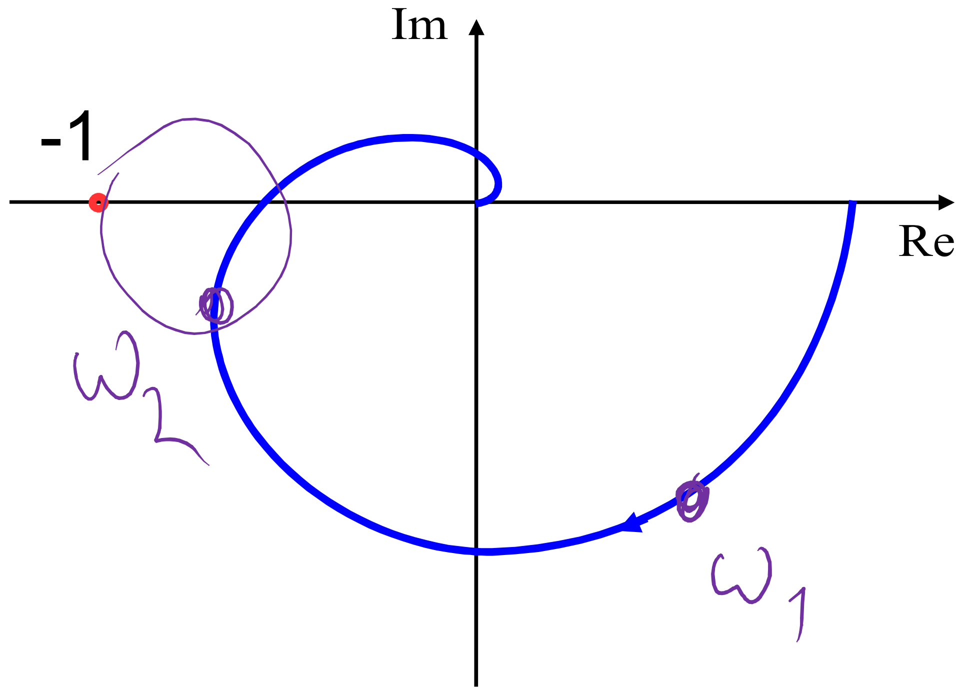
Korekcja

Wpływ opóźnienia na układ

$G(s)$



$G(s) \cdot \boxed{e^{-\tau s}}$



Większy zapas modułu i fazy

Mniejszy zapas modułu i fazy

Korekcja

Przez opóźnienie $$K(s) = \frac{1 + Ts}{1 + as + bs^2}$$

Układem PD $$K(s) = k_P \frac{Ts + 1}{\alpha T s + 1}, \quad \alpha < 1$$

Przez całkowanie $$K(s) = 1 + \frac{k}{1 + Ts}$$

Układem PI $$K(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha T s + 1}, \quad \alpha > 1$$

Układem PID $$K(s) = k(T_d s + 1)\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

Materiał na egzamin – wykłady od 1 do 14
(ponad 1100 slajdów...)

~~Wykład 14~~ – współczesne problemy teorii sterowania, konsultacje

~~Wykład 15~~ – powtórzenie materiału, informacje o egzaminie, ankiety, konsultacje