Wydział Samochodów
i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Podstawy automatyki i teorii maszyn

semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 10

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki z przykładami.

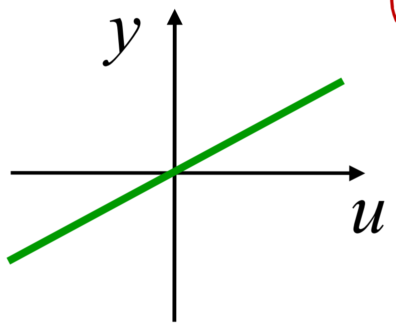
Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

nazwa elementu	transmitancja
Proporcjonalny	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$

Element proporcjonalny

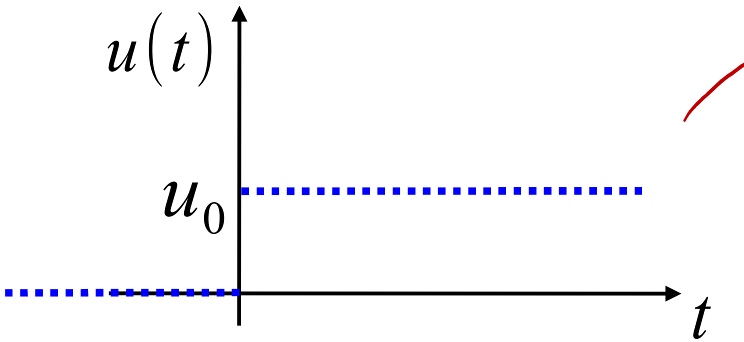
1. Równanie: $\boxed{y(t)=ku(t)} \wedge k\in\mathbb{R}$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

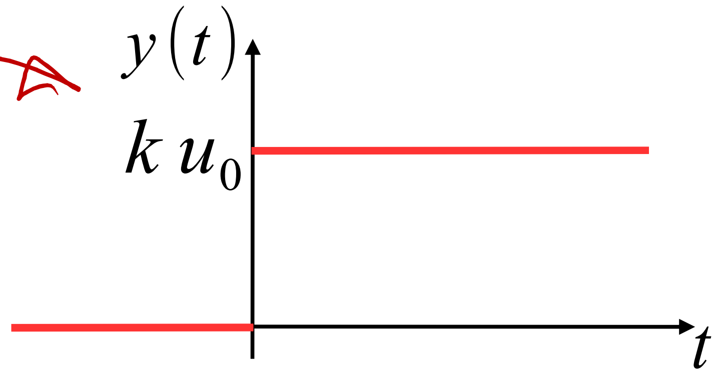
2. Charakterystyka statyczna: $\boxed{y=ku}$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $\boxed{G(s)=k}$

4. Odp. skokowa: $y(t)=k\,u_0\,1(t)$ dla $u(t)=u_0\,1(t)$

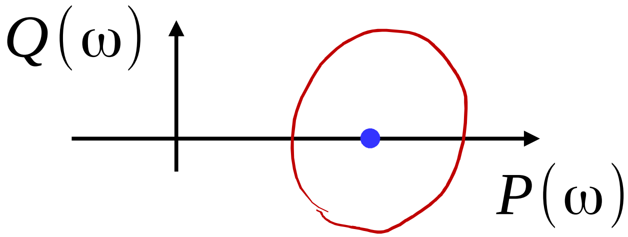




Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=k$ $\quad P(\omega)=k,\ Q(\omega)=0$

6. Wykres Nyquista:

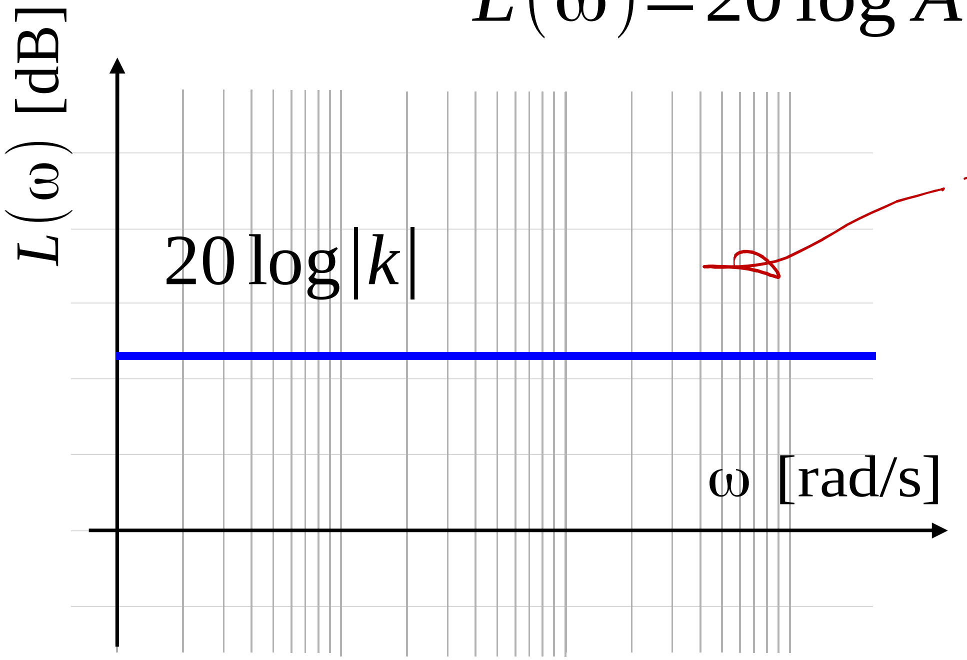


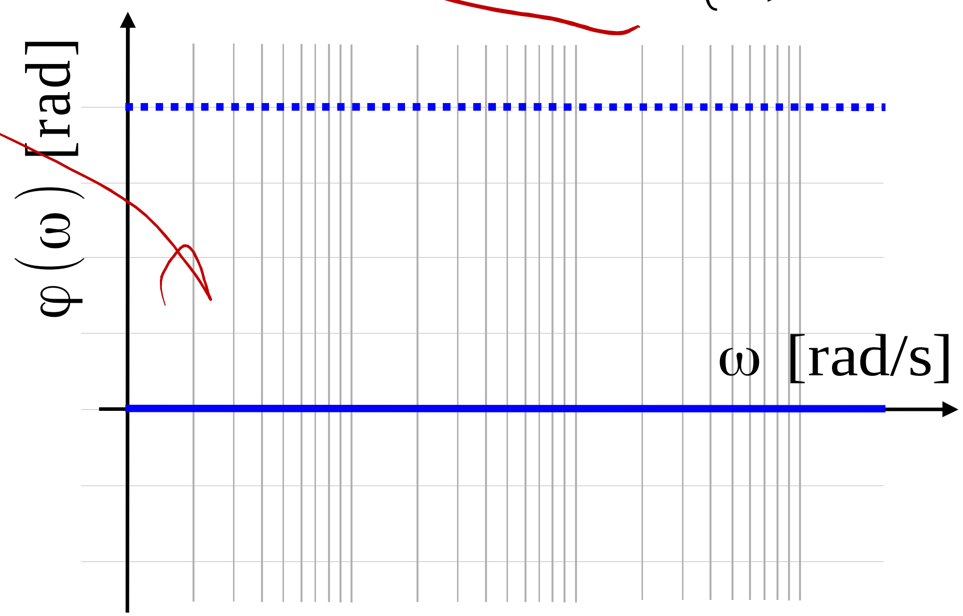
dla $k>0$

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)$$

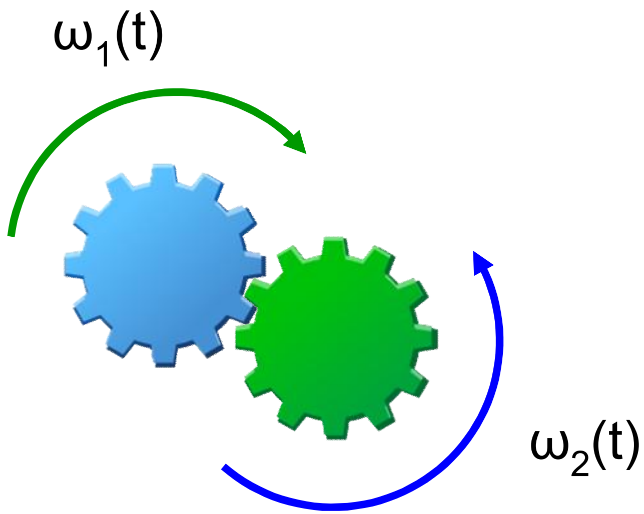
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\begin{cases}0, & \text{dla } k\geq 0\\ \pi, & \text{dla } k<0\end{cases}$$



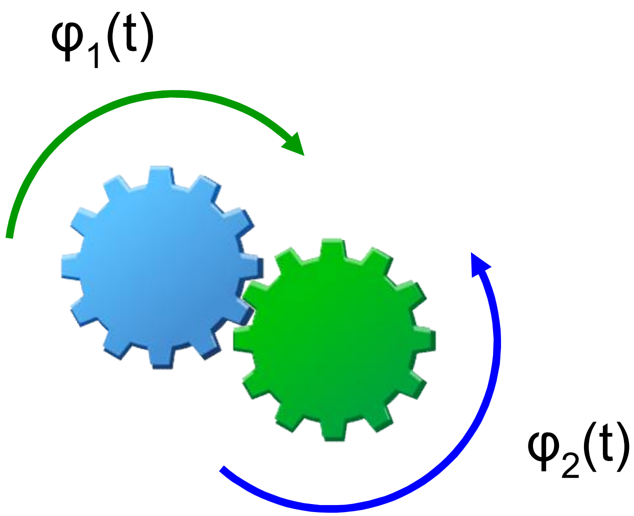


Element proporcjonalny

Przykłady



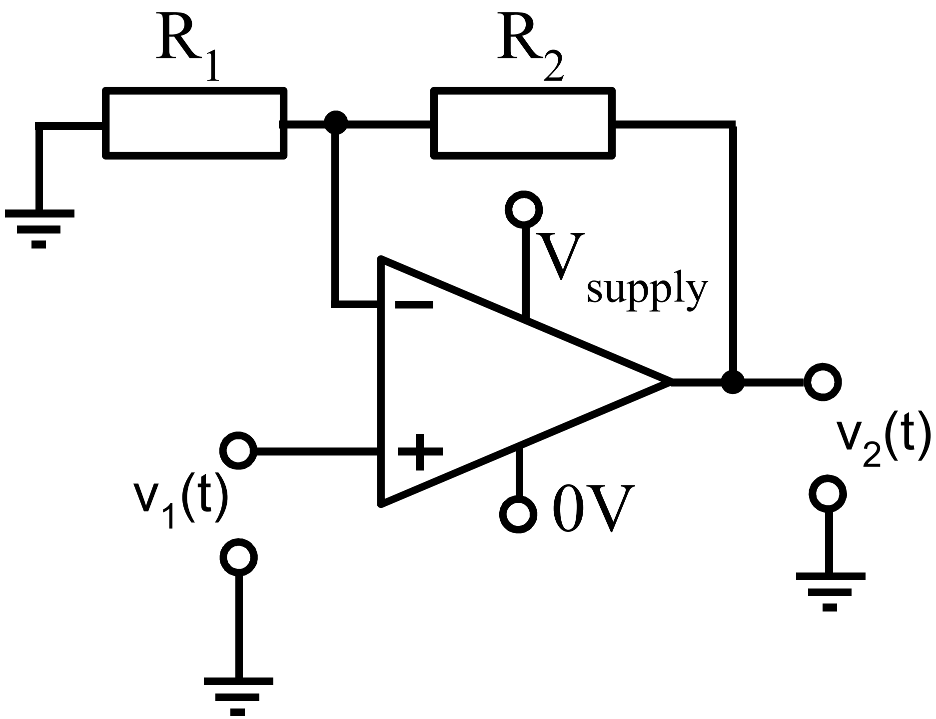
przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa $\omega_1(t)$
wyjście – prędkość kątowa $\omega_2(t)$



przekładnia zębata:
wejście – kąt obrotu $\varphi_1(t)$
wyjście – kąt obrotu $\varphi_2(t)$

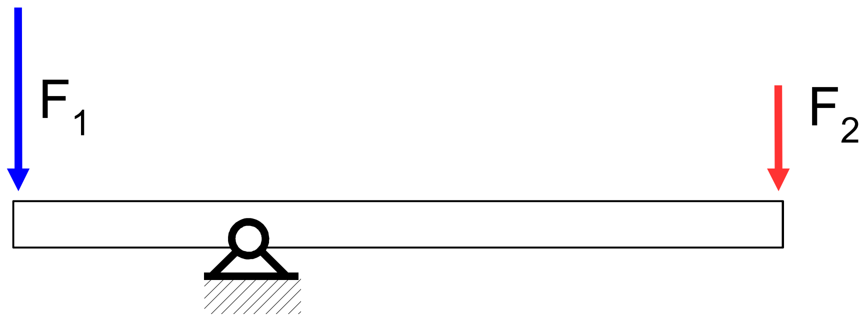
Element proporcjonalny

Przykłady



WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

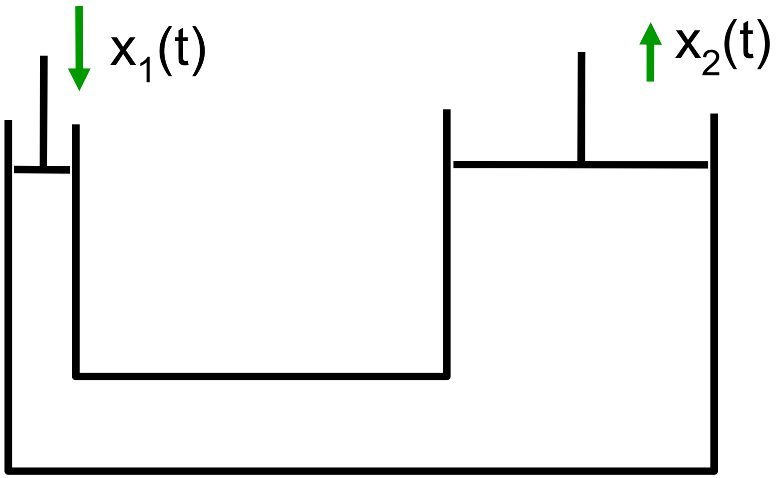
$$v_2(t) = v_1(t)\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$



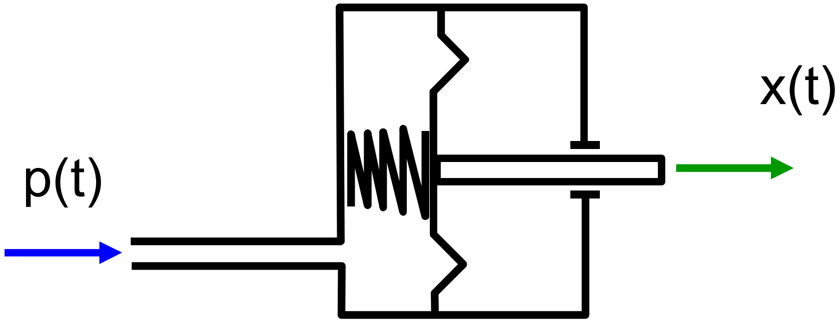
BELKA w stanie ustalonym:
wejście – siła F_1
wyjście – siła F_2

Element proporcjonalny

Przykłady



PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:
wejście – przemieszczenie $x_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x_2(t)$



SIŁOWNIK PNEUMATYCZNY:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – przemieszczenie x(t)

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$k \in R$

$T \in R_+$ $[s]$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:

$$\cancel{T\frac{dy(t)}{dt}}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$u=\text{const.}$; $y=\text{const.}$

$y=k\cdot u$

Element inercyjny pierwszego rzędu

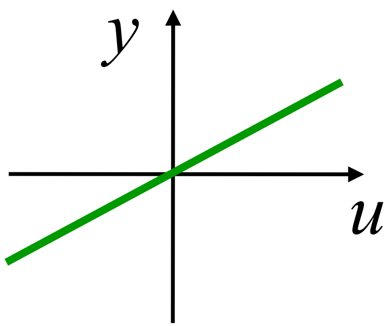
1. Równanie: $$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna: $y=ku$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

$\mathcal{L}$



zał.: $k>0$

---

3. Transmitancja: $$Ts\cdot Y(s)+Y(s)=k\cdot U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k}{Ts+1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:

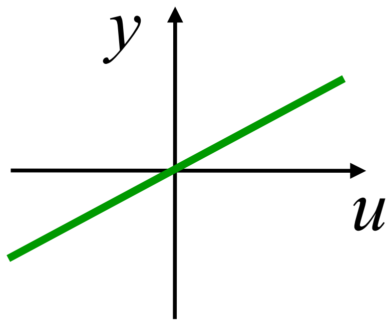
$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$y=ku \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$$



zał.: $k>0$

---

3. Transmitancja:

$$G(s)=\frac{k}{Ts+1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa: $\boxed{u(t) = u_0 \mathbb{1}(t)}$

$$\mathcal{L}\{\mathbb{1}(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$U(s) = u_0 \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot u_0 \frac{1}{s} = \frac{k u_0}{s(Ts+1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k u_0}{s(Ts+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{k u_0}{T}}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)}\right\} =$$

$$= k u_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{T}}{s\left(s+\frac{1}{T}\right)}\right\} = k u_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

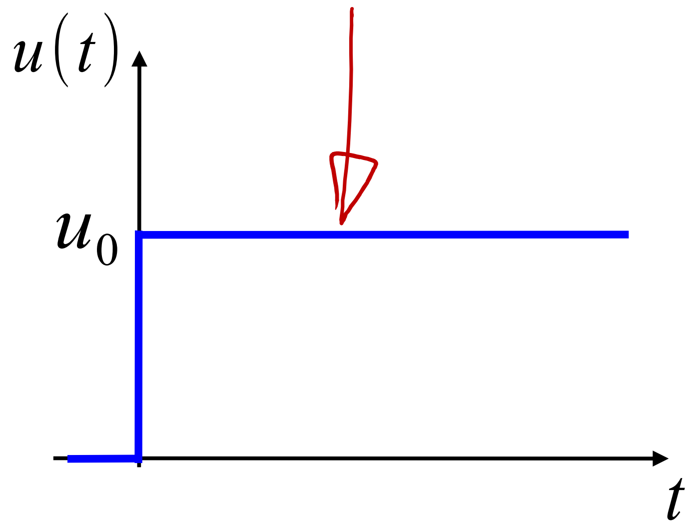
4. Odp. skokowa:

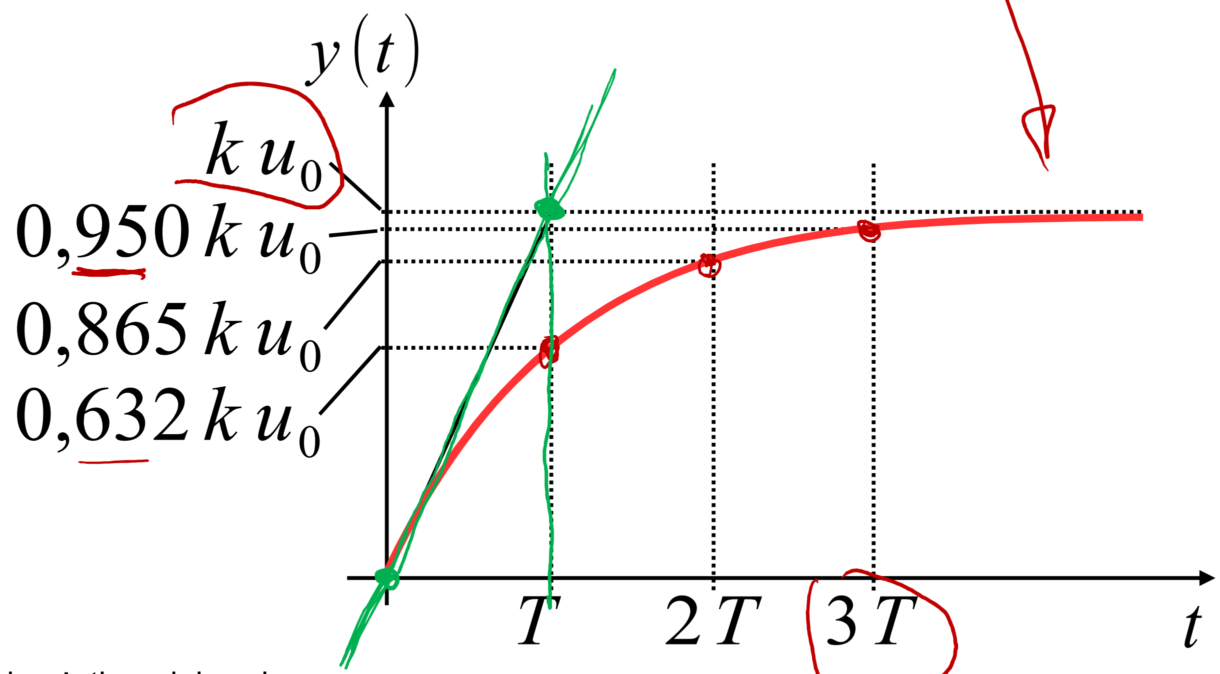
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s(Ts+1)}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k u_0(1-e^{-t/T})$





Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$\frac{k}{1 + jT\omega} \cdot \frac{1 - jT\omega}{1 - jT\omega} = \frac{k - jkT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} \quad i \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\boxed{\frac{k}{T^2\omega^2+1}},\quad Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

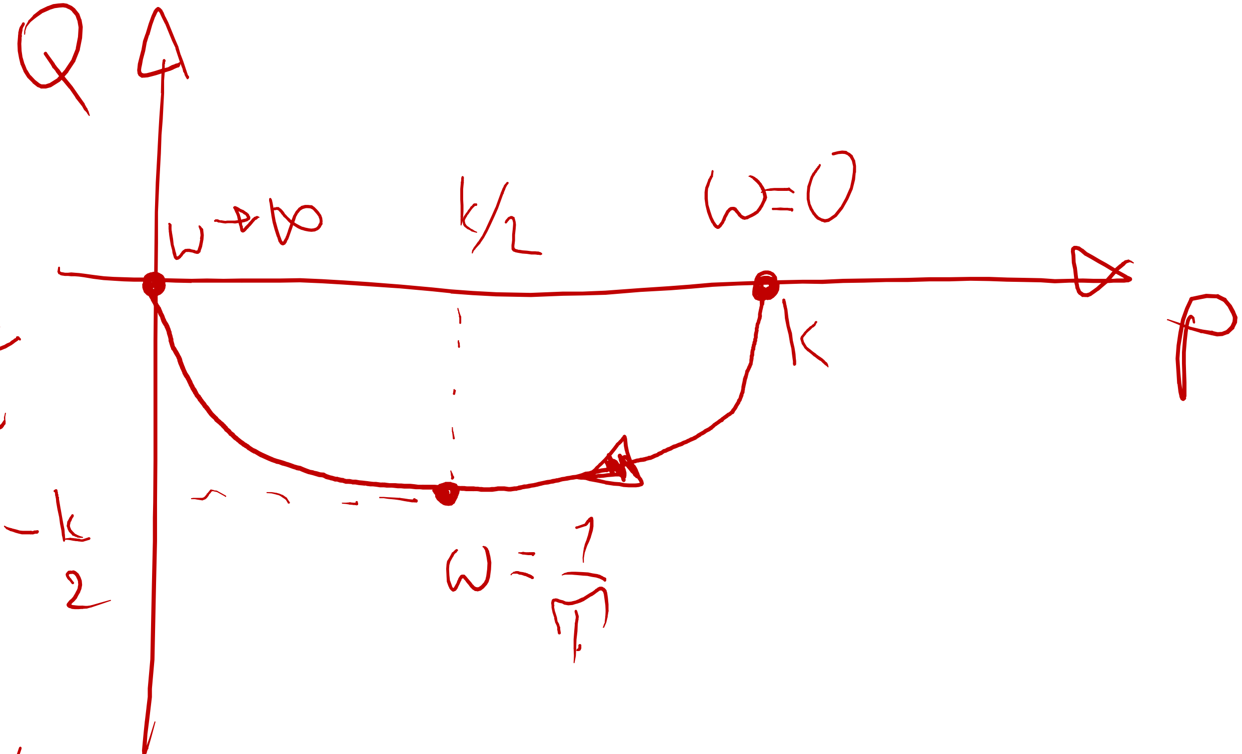
6. Wykres Nyquista:

$P(0)=k$; $Q(0)=0$

$P\left(\frac{1}{T}\right)=\frac{k}{2}$; $Q\left(\frac{1}{T}\right)=-\frac{k}{2}$

$$P(\omega\to\infty)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{\frac{k}{\omega^2}}{T^2+\frac{1}{\omega^2}}=0$$

$$Q(\omega\to\infty)=\lim_{\omega\to\infty}\frac{\frac{-kT}{\omega}}{T^2+\frac{1}{\omega^2}}=0$$



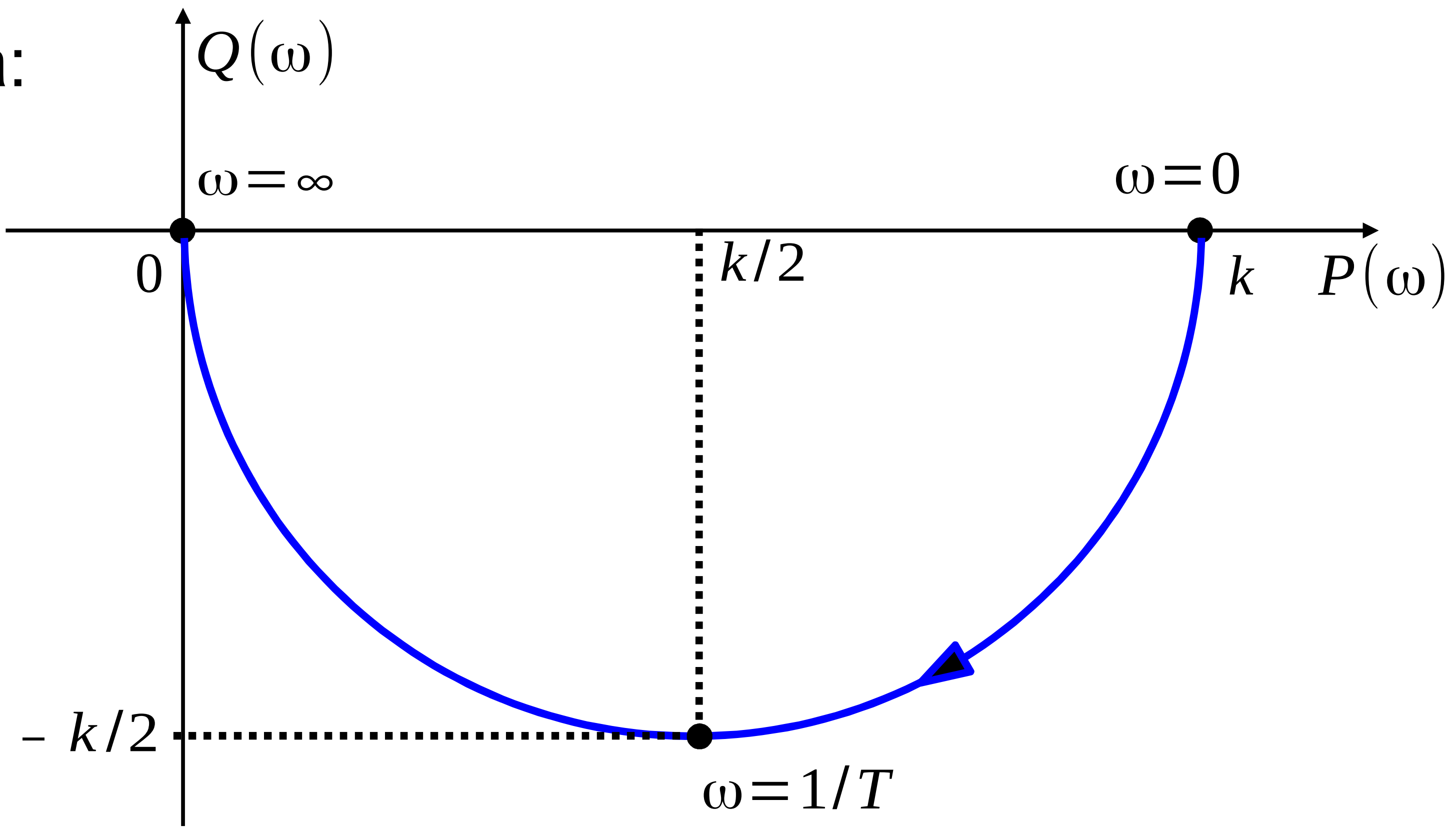
Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}$$

$$P(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:



Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega)=\frac{k}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{-kT\omega}{T^2\omega^2+1}$$

$$A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{k^2+k^2T^2\omega^2}{(T^2\omega^2+1)^2}}=\sqrt{\frac{k^2\cancel{(1+T^2\omega^2)}}{(T^2\omega^2+1)^{\cancel{2}}}}=\frac{|k|}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

$$L(\omega)\,[dB]=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)\,[rad]=arctg\frac{Q}{P}=arctg(-T\omega)=-arctg(T\omega)$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

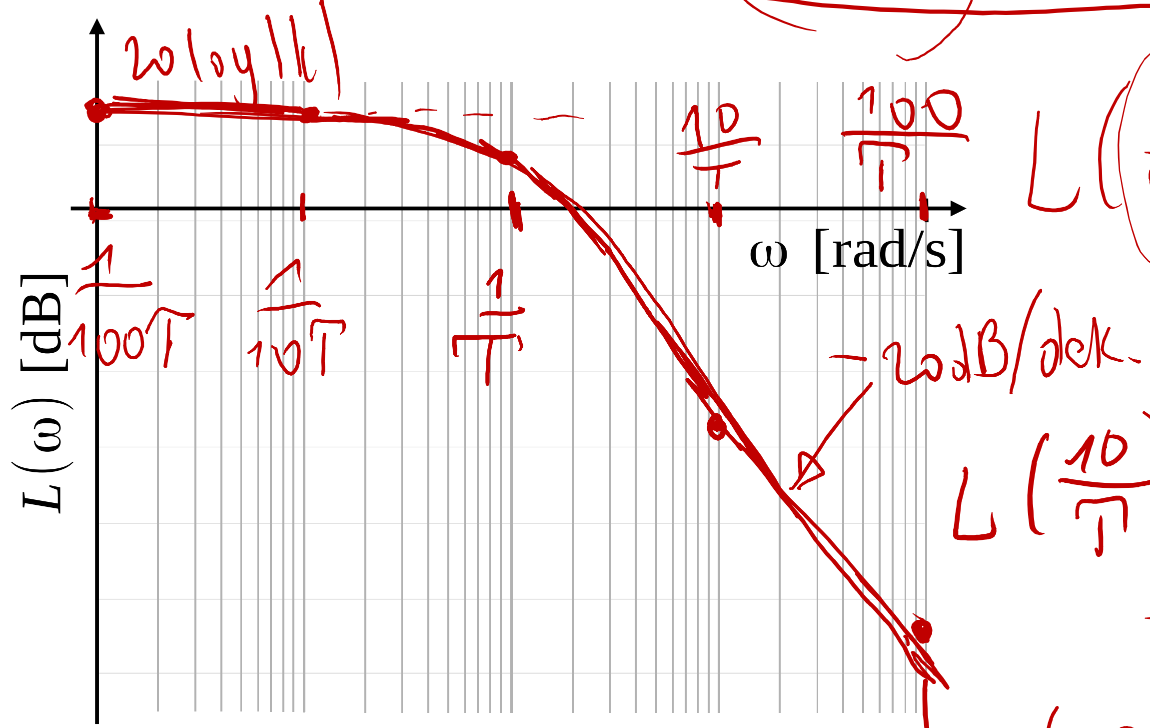
$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega)$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$



$L\left(\frac{1}{T}\right)=20\log|k|-20\log\sqrt{2}=$

$=20\log|k|-3$

$L\left(\frac{10}{T}\right)=20\log|k|-20\log\sqrt{101}=$

$=20\log|k|-20$

$L\left(\frac{100}{T}\right)=20\log|k|-20\log\sqrt{10001}$

$=20\log|k|-40$

$L\left(\frac{1}{10T}\right)=20\log|k|-20\log\sqrt{\frac{101}{100}}=20\log|k|$

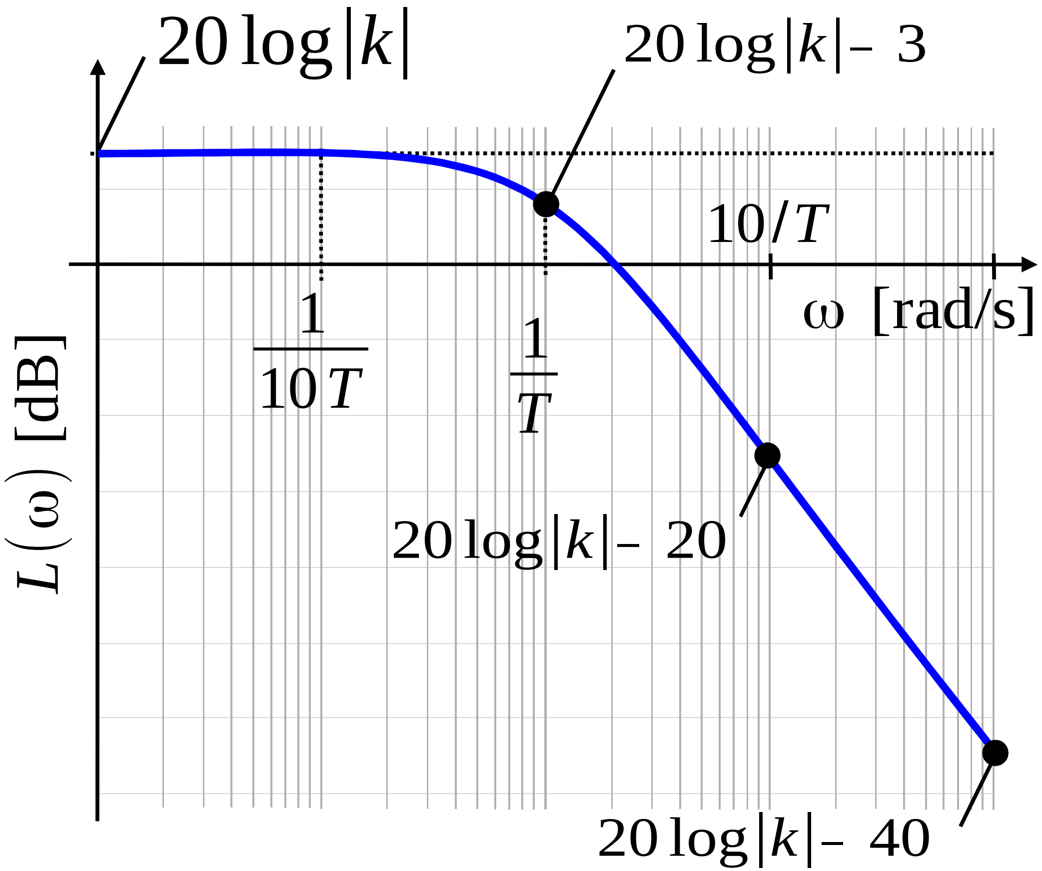
$L\left(\frac{1}{100T}\right)=20\log|k|$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega)$$



Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega) = -\mathrm{arctg}(T\omega)$$

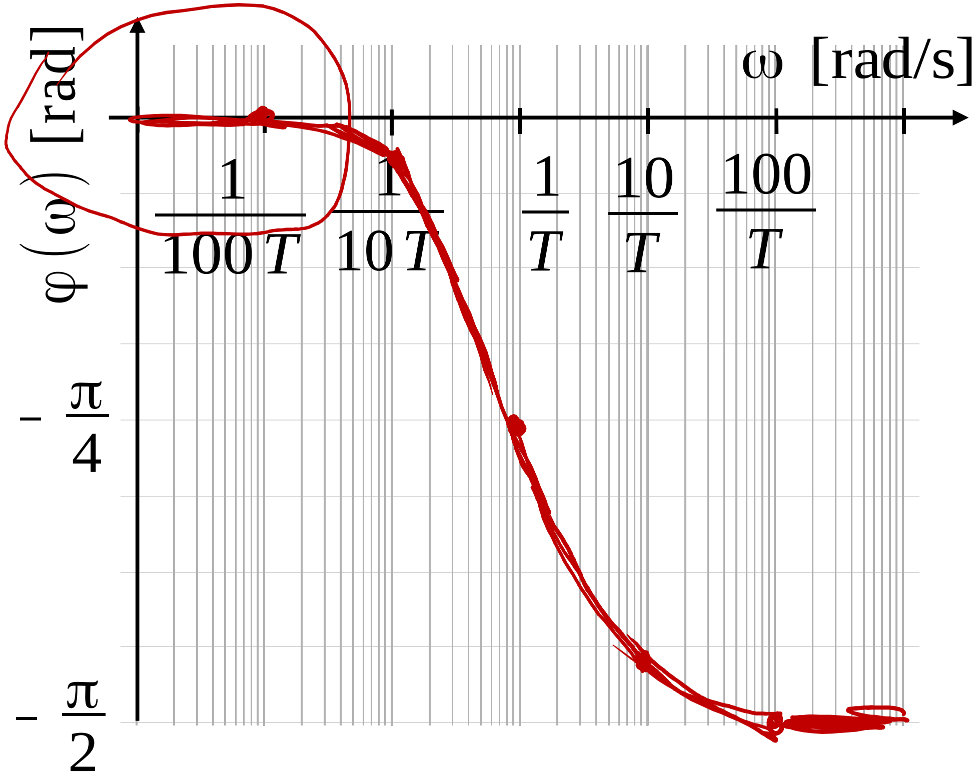
$$\varphi\left(\frac{1}{T}\right) = -\mathrm{arctg}(1) = -45^\circ$$

$$\varphi\left(\frac{10}{T}\right) = -\mathrm{arctg}(10) \approx -84^\circ$$

$$\varphi\left(\frac{100}{T}\right) = -\mathrm{arctg}(100) \approx -90^\circ$$

$$\varphi\left(\frac{1}{10T}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{10}\right) \approx -6^\circ$$

$$\varphi\left(\frac{1}{100T}\right) = -\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{100}\right) \approx 0^\circ$$

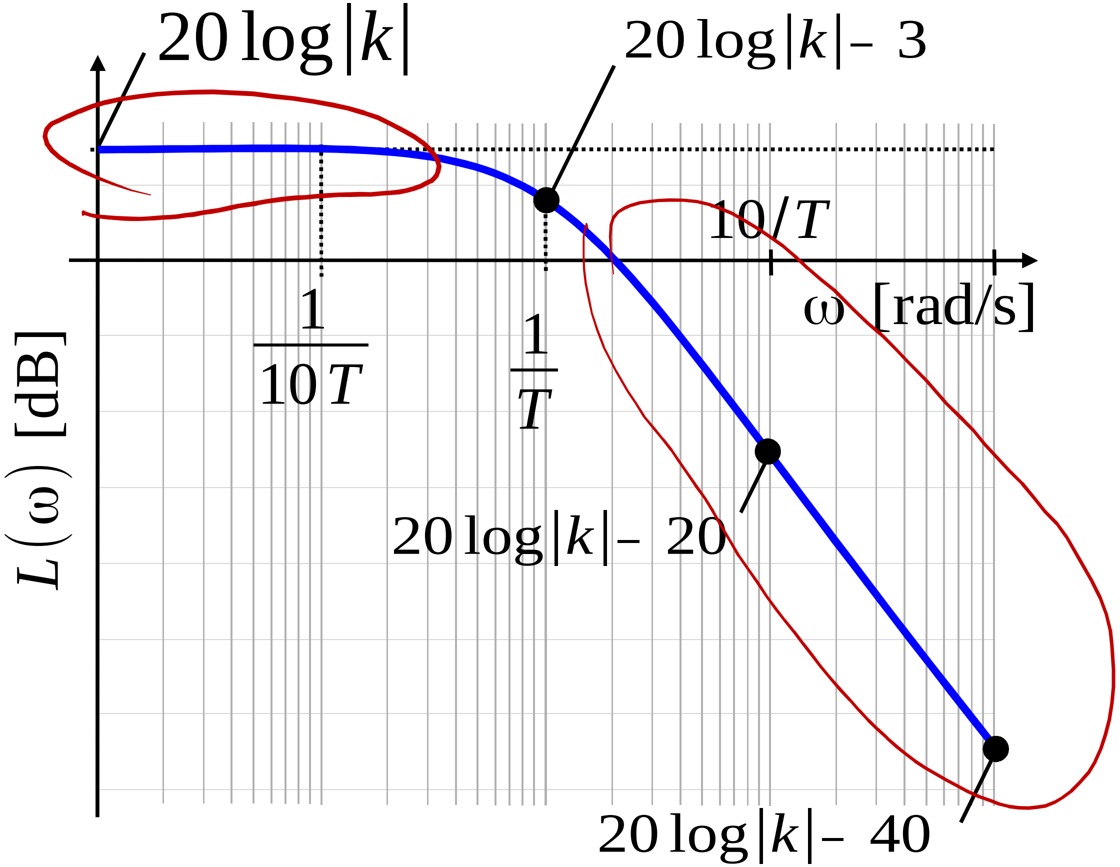


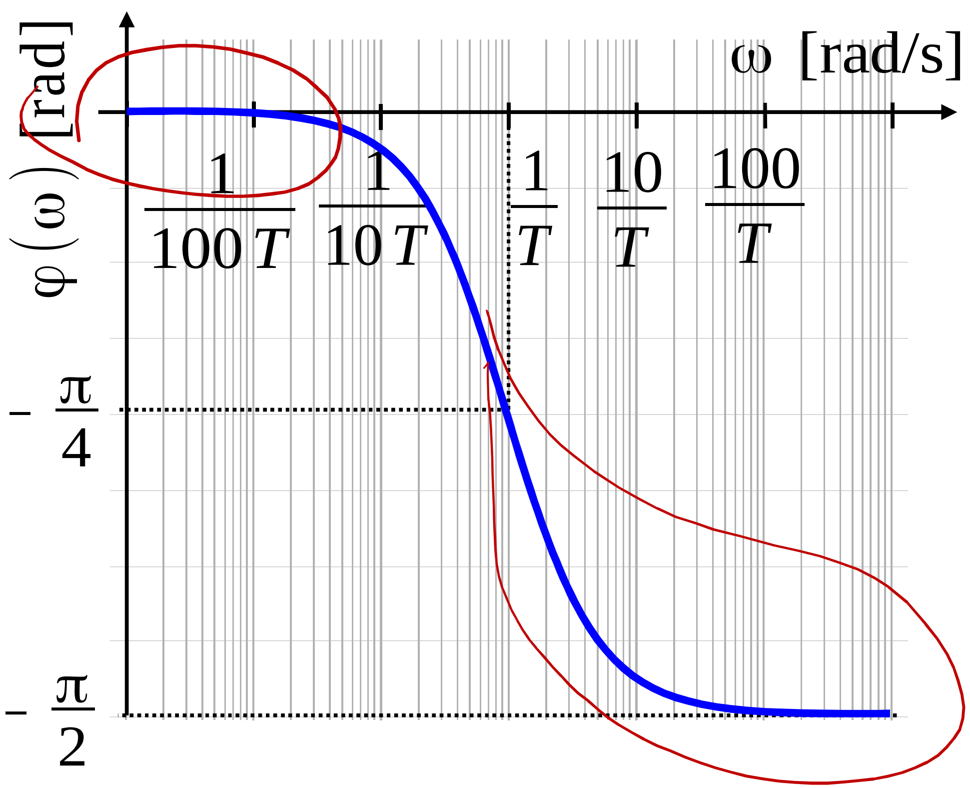
Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

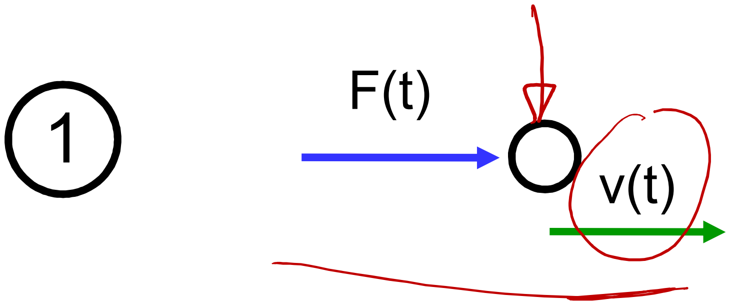
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-T\omega)$$





Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

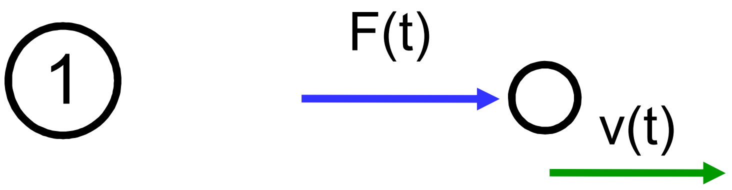


RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła F(t)
wyjście – prędkość v(t)

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną – stałe przełożenia w układzie napędowym)

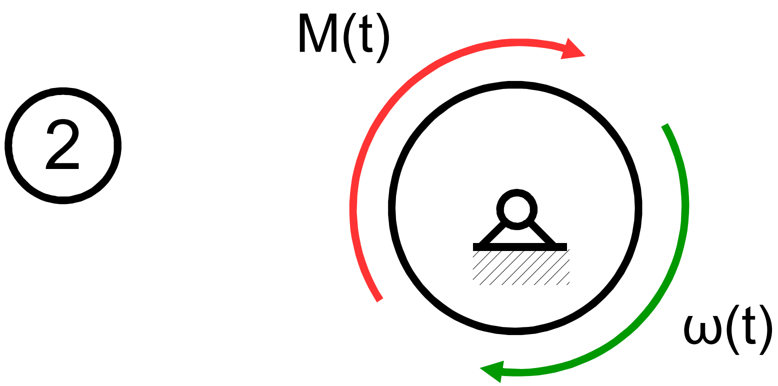
Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła F(t)
wyjście – prędkość v(t)

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

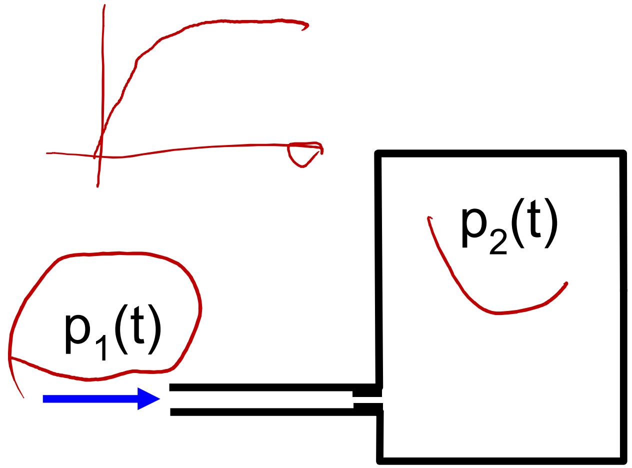


RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – moment M(t)
wyjście – prędkość kątowa ω(t)

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

3

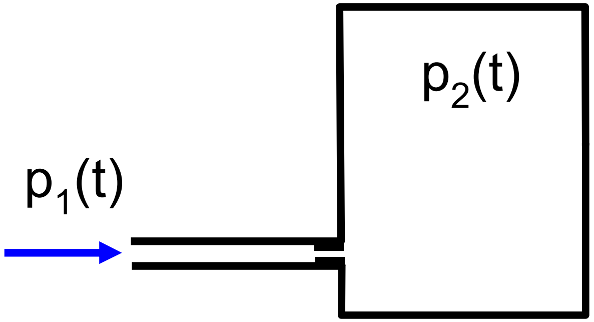


ZBIORNIK POWIETRZA:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – ciśnienie $p_2(t)$

Element inercyjny pierwszego rzędu

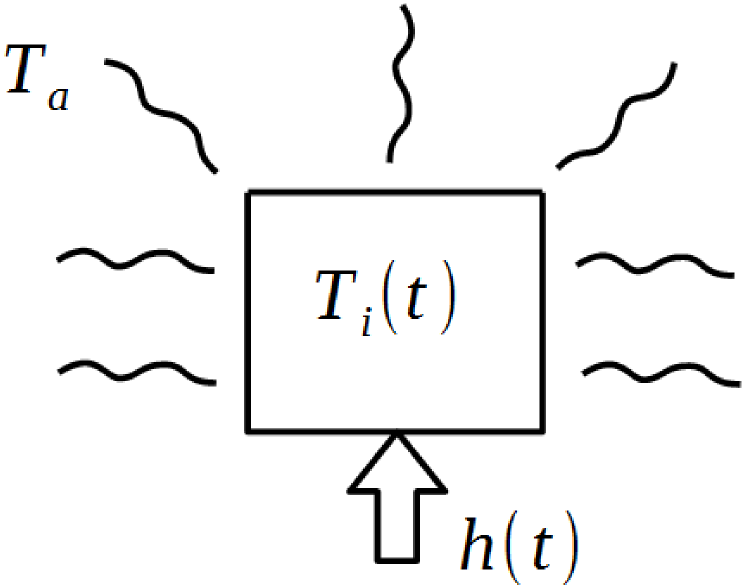
Przykłady

3

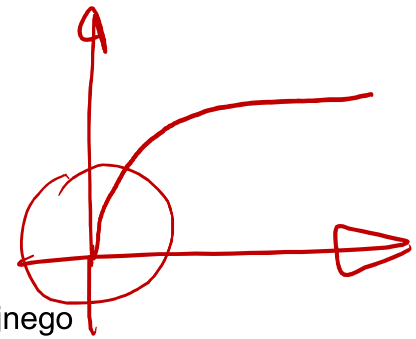


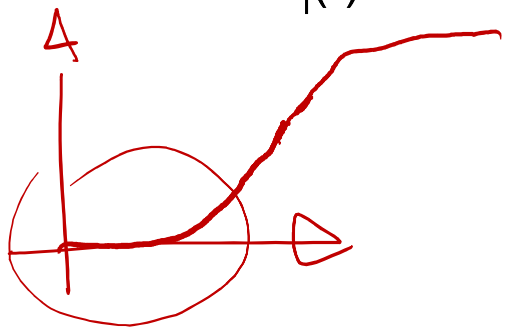
ZBIORNIK POWIETRZA:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – ciśnienie $p_2(t)$

4



OGRZEWANY OBIEKT O MAŁEJ BEZWŁADNOŚCI:
wejście – moc grzałki h(t)
wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$





Element całkujący

$$y(t) = k\int_0^t u(\tau)\,d\tau$$

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

Element całkujący

1. Równanie: $$\underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{0}=k\underbrace{u(t)}_{0}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$u=const;\ y=const.$

$u=0;\ y=const.$

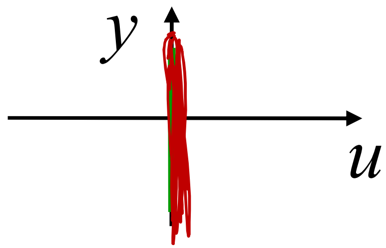
Element całkujący

1. Równanie: $\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$ $k \in \mathbb{R}$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $u = 0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



α

3. Transmitancja: $sY(s) = k \cdot U(s)$

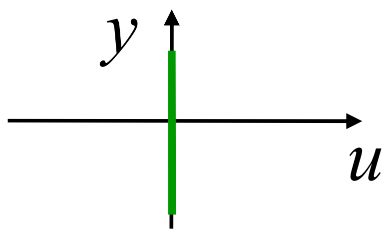
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k}{s} \quad \left(\text{lub. } \frac{1}{T s}\right) \quad T\,[s]$$

Element całkujący

1. Równanie: $$\frac{dy(t)}{dt} = k\,u(t)$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $u = 0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $$G(s) = \frac{k}{s}$$

Element całkujący

4. Odp. skokowa: $u(t) = u_0 \mathbb{1}(t)$; $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k}{s} \cdot u_0 \frac{1}{s} = \frac{k u_0}{s^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = k u_0 t$$

Element całkujący

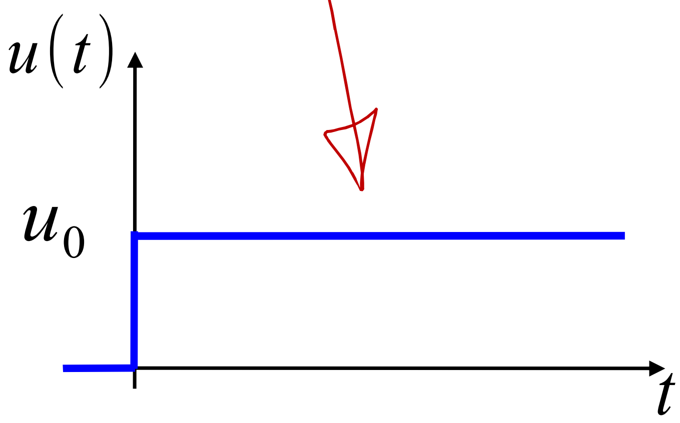
4. Odp. skokowa:

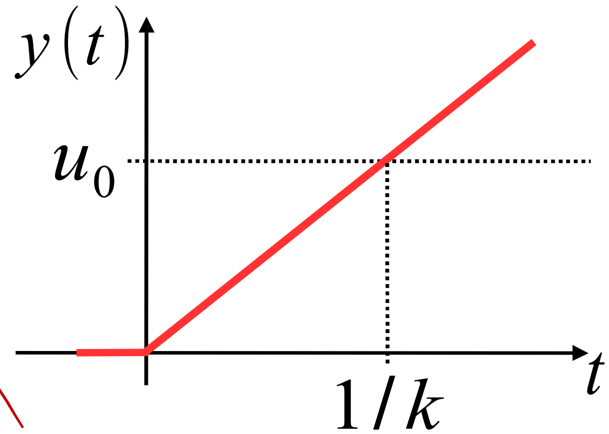
Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k u_0}{s^2}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 t$





Element całkujący

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = \frac{k}{j\omega} \cdot \frac{j}{j} =$

$= \frac{k \cdot j}{j^2\omega} = -j\frac{k}{\omega}$ $\qquad P(\omega) = 0; \; Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$

Element całkujący

5. Transmitancja widmowa: $$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega}$$

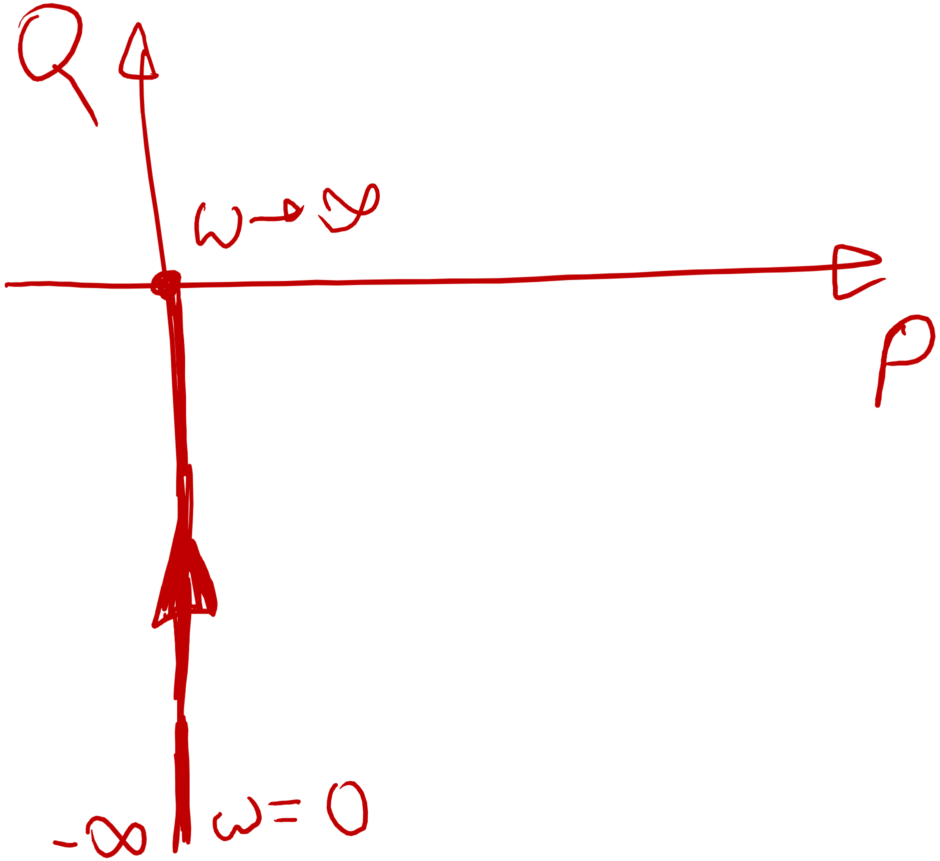
$$P(\omega)=0,\ \ Q(\omega)=-\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:

wł. $k>0$

$P(0)=0;\ Q(0)=-\infty$

$P(\infty)=0;\ Q(\infty)=0$



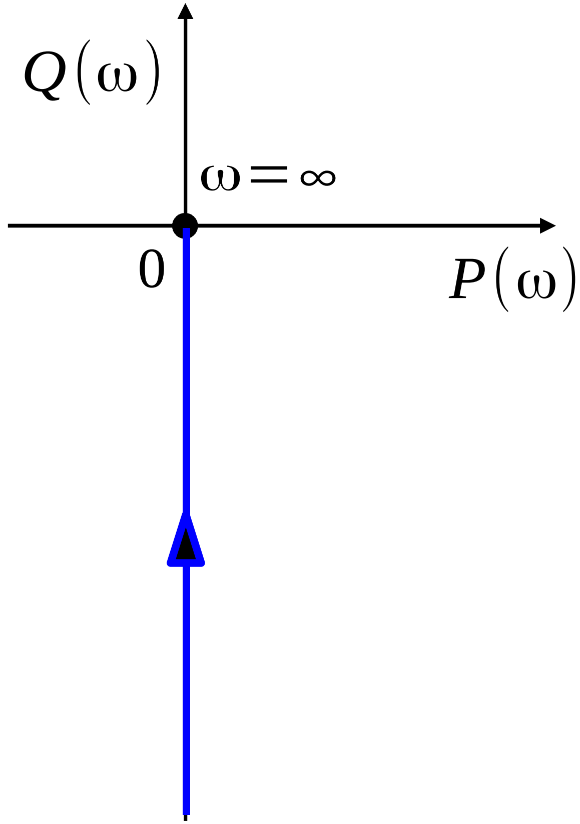
Element całkujący

5. Transmitancja widmowa: $$G(j\omega)=\frac{k}{j\omega}$$

$$P(\omega)=0,\ \ Q(\omega)=-\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element całkujący

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega)=0,\quad Q(\omega)=-\frac{k}{\omega}$$

$$A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|Q|=\left|\frac{k}{\omega}\right|$$

$$L(\omega)=20\log\left|\frac{k}{\omega}\right|$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}=\operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{k}{\omega}}{0}\right)=\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2}$$

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left|\frac{k}{\omega}\right|$

$$L(\omega) = 20\log A(\omega) = 20\log\left|\frac{k}{\omega}\right|$$

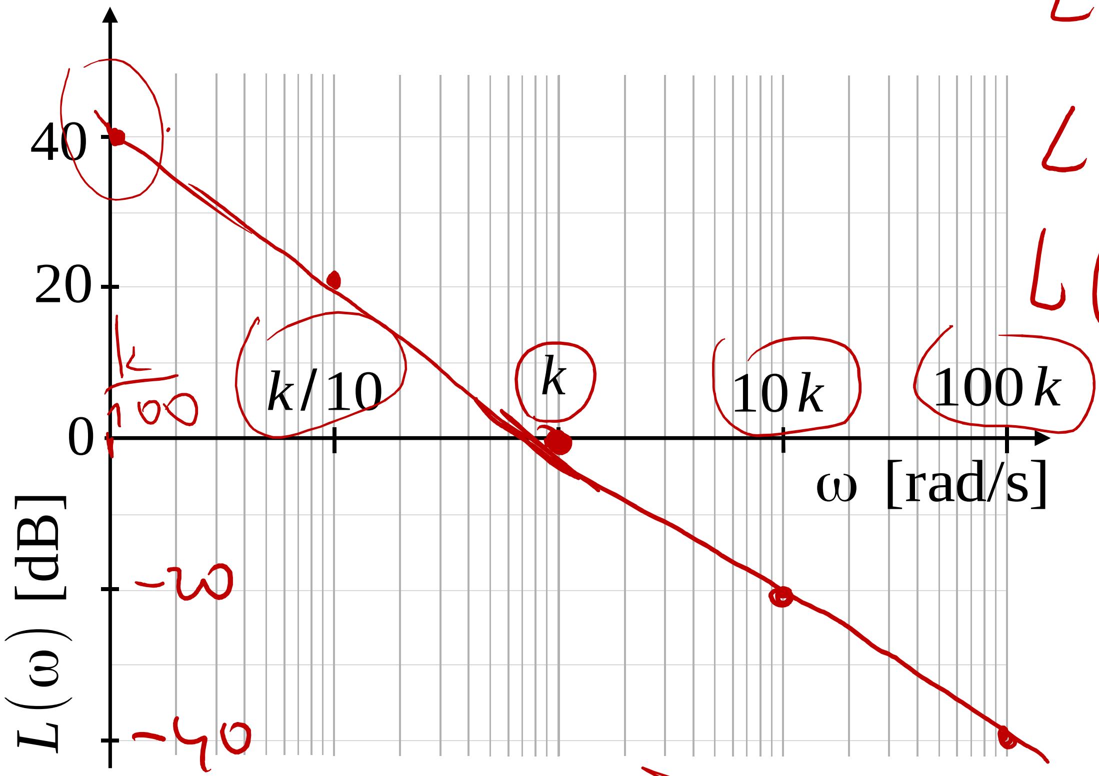
$L(\omega = k) = 20\log|1| = 0$

$L(\omega = 10k) = 20\log\frac{1}{10} = -20$

$L(\omega = 100k) = 20\log\frac{1}{100} = -40$

$L\left(\omega = \frac{k}{10}\right) = 20\log 10 = 20$

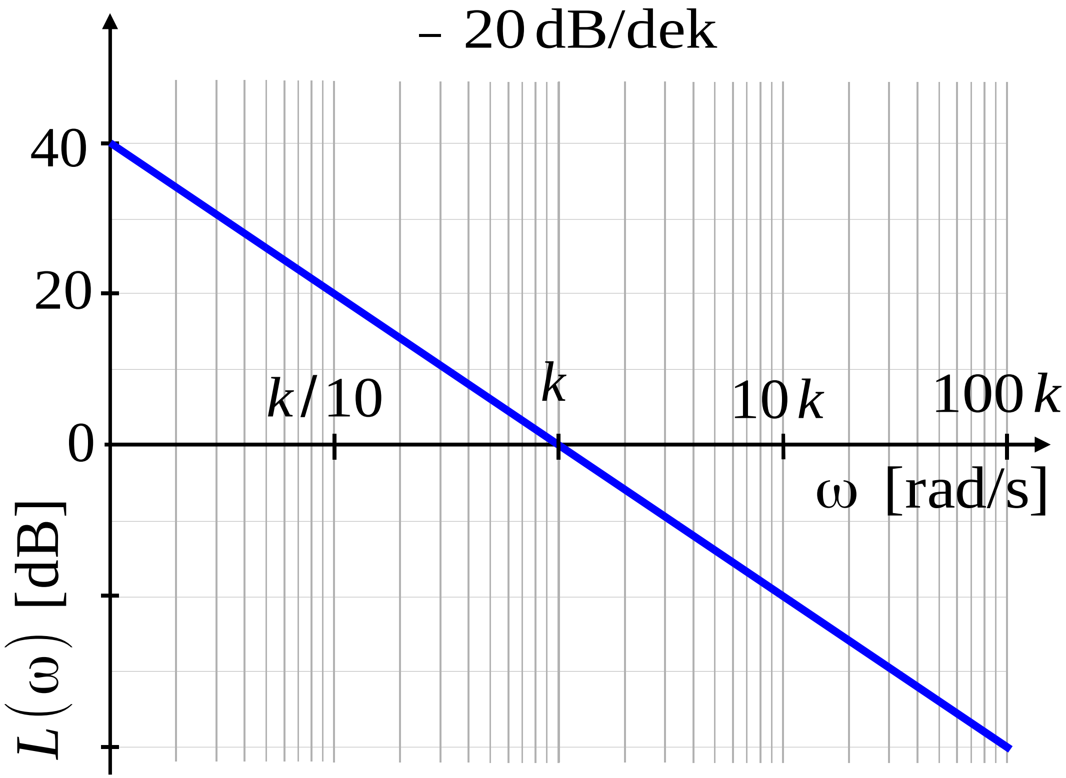
$L\left(\omega = \frac{k}{100}\right) = 20\log 100 = 40$



Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left|\frac{k}{\omega}\right|$

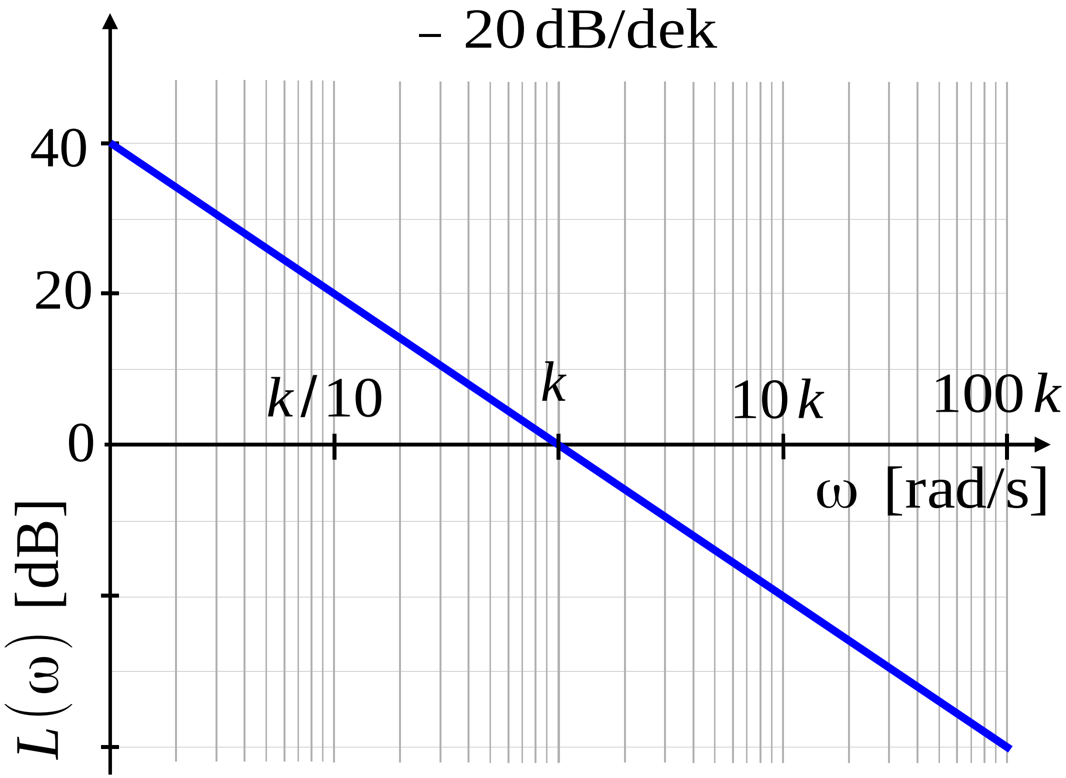
$$L(\omega) = 20\log A(\omega) = 20\log\left|\frac{k}{\omega}\right|$$

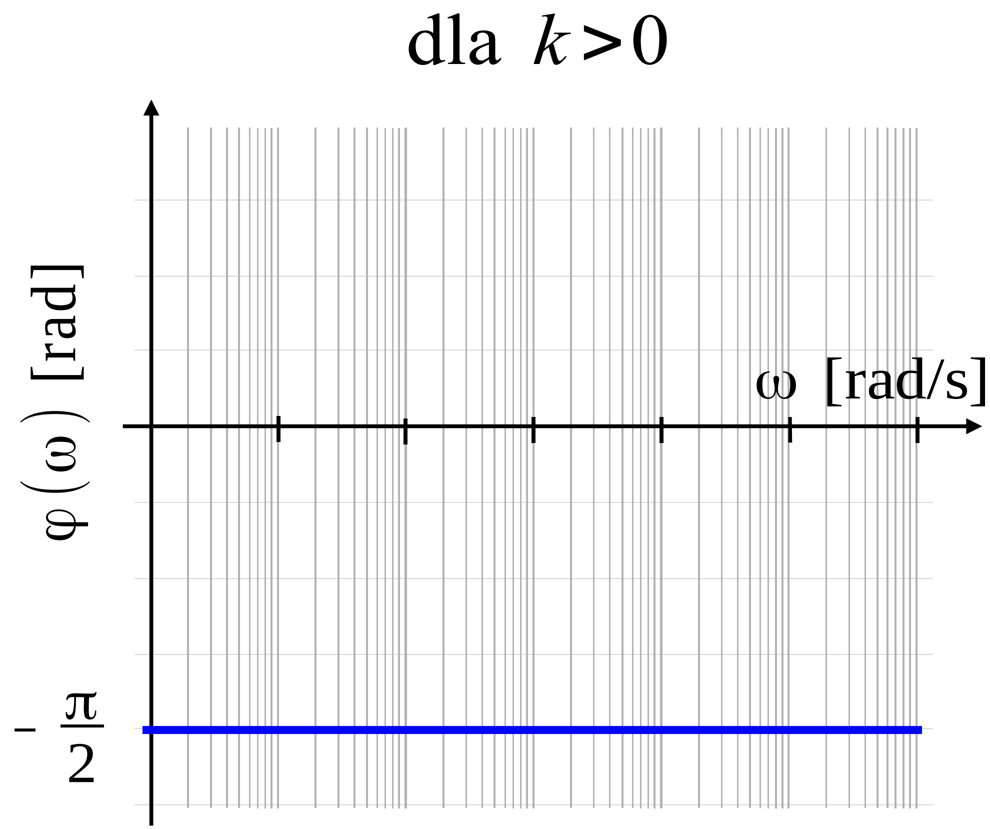


Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=\left|\frac{k}{\omega}\right|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log\left|\frac{k}{\omega}\right| \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(-\infty)$$

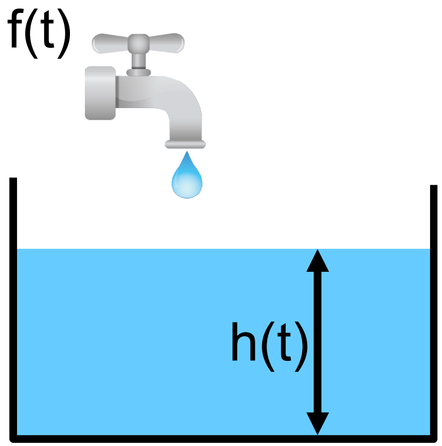




Element całkujący

Przykłady

1

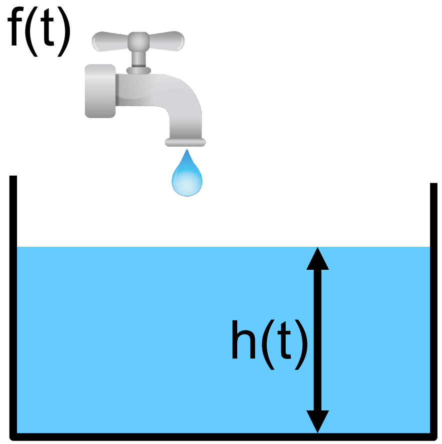


PROSTOPADŁOŚCIENNY ZBIORNIK PŁYNU:
wejście – wydatek dopływu f(t)
wyjście – poziom cieczy h(t)

Element całkujący

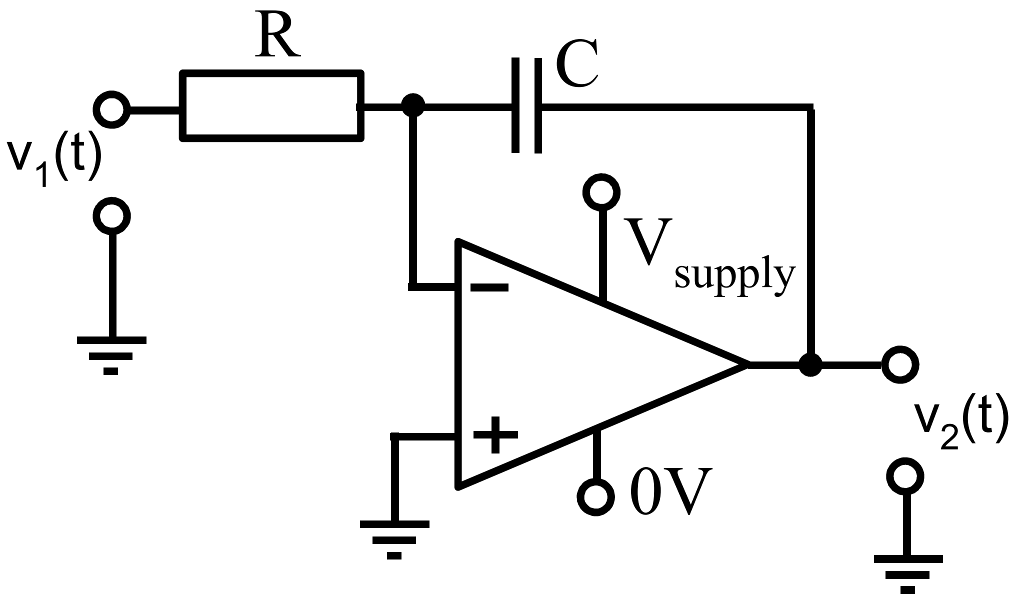
Przykłady

1



PROSTOPADŁOŚCIENNY ZBIORNIK PŁYNU:
wejście – wydatek dopływu f(t)
wyjście – poziom cieczy h(t)

2



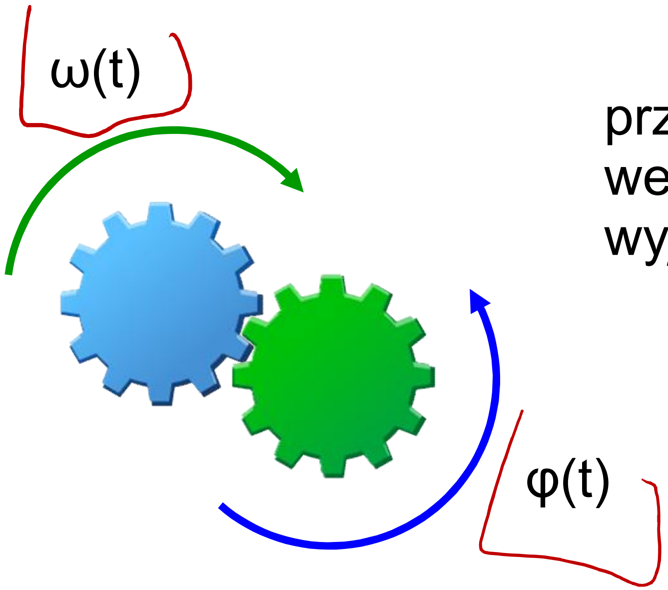
WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t v_1(t)\, dt$$

Element całkujący

Przykłady

3

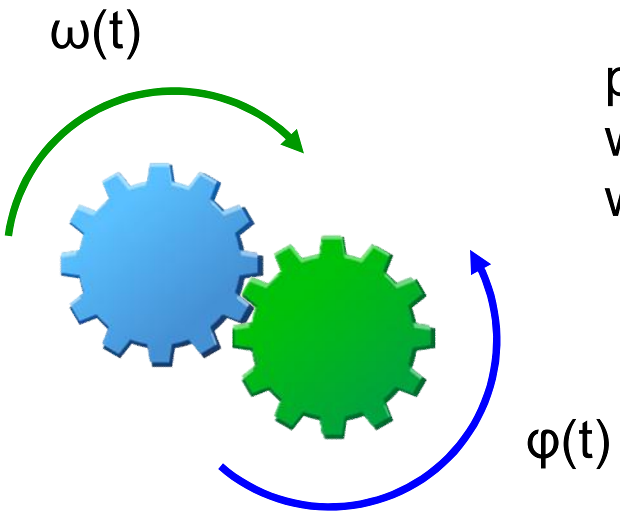


przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa ω(t)
wyjście – kąt obrotu φ(t)

Element całkujący

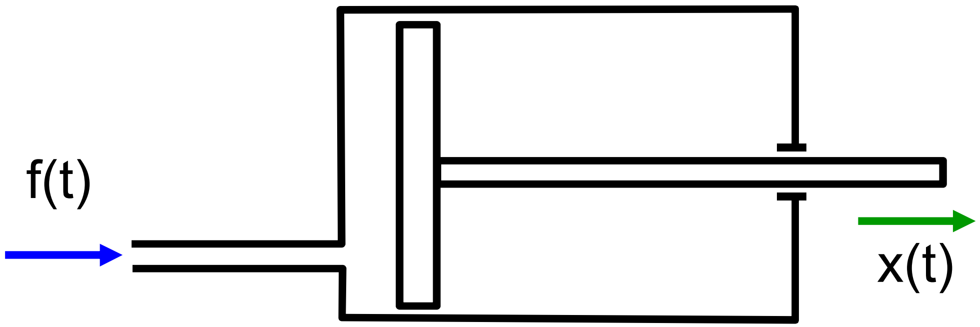
Przykłady

3



przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa ω(t)
wyjście – kąt obrotu φ(t)

4



CYLINDER HYDRAULICZNY:
wejście – wydatek cieczy f(t)
wyjście – przemieszczenie x(t)

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $y(t) = k\frac{du(t)}{dt}$ $k \in \mathbb{R}$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$\underset{0}{y(t)}=k\frac{du(t)}{dt}=0$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$u=const.$; $y=const.$

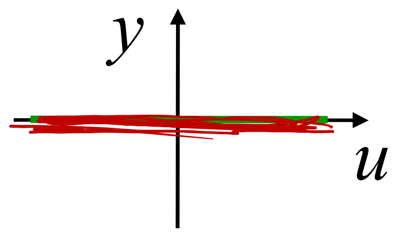
$y=0$; u-dowolne stałe

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $$y=0$$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $$Y(s)=k\cdot s\,U(s)$$

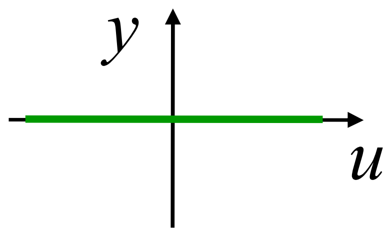
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=k\cdot s$$

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $$y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $$y=0 \quad \text{dla } \frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$$



3. Transmitancja: $$G(s)=k\,s$$

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa: $u(t) = u_0 \mathbb{1}(t)$ $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = k \cdot s \cdot u_0 \frac{1}{s} = k u_0 \cdot 1$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{k u_0 \cdot 1\} = k \cdot u_0 \delta(t)$$

Element różniczkujący idealny

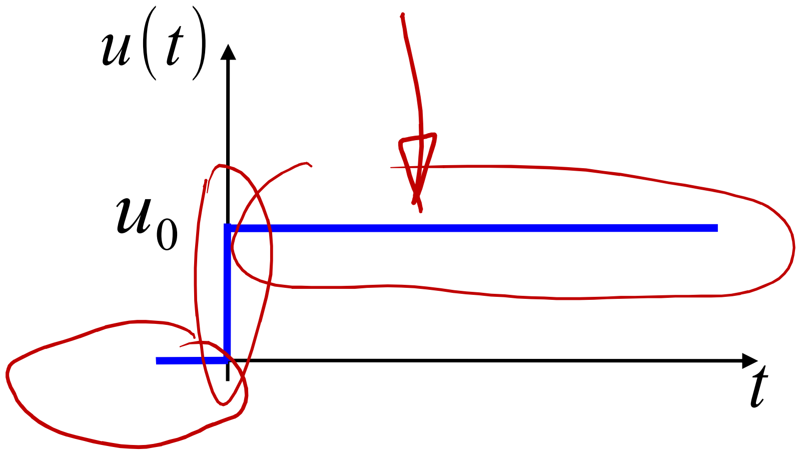
4. Odp. skokowa:

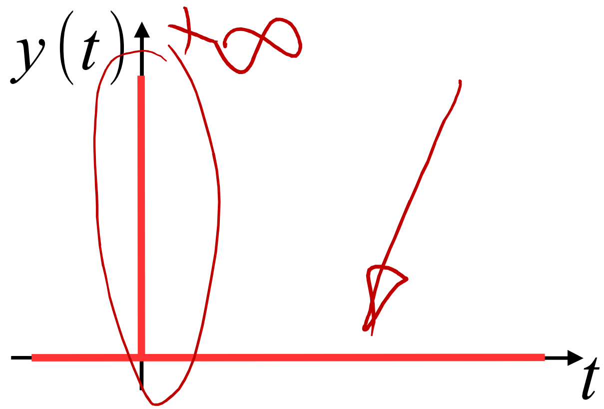
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=k\,u_0$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=k\,u_0\,\delta(t)$





Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k \cdot j\omega$

$P(\omega) = 0$; $Q(\omega) = k\omega$

Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=jk\omega$

$$P(\omega)=0,\ \ Q(\omega)=k\omega$$

6. Wykres Nyquista:

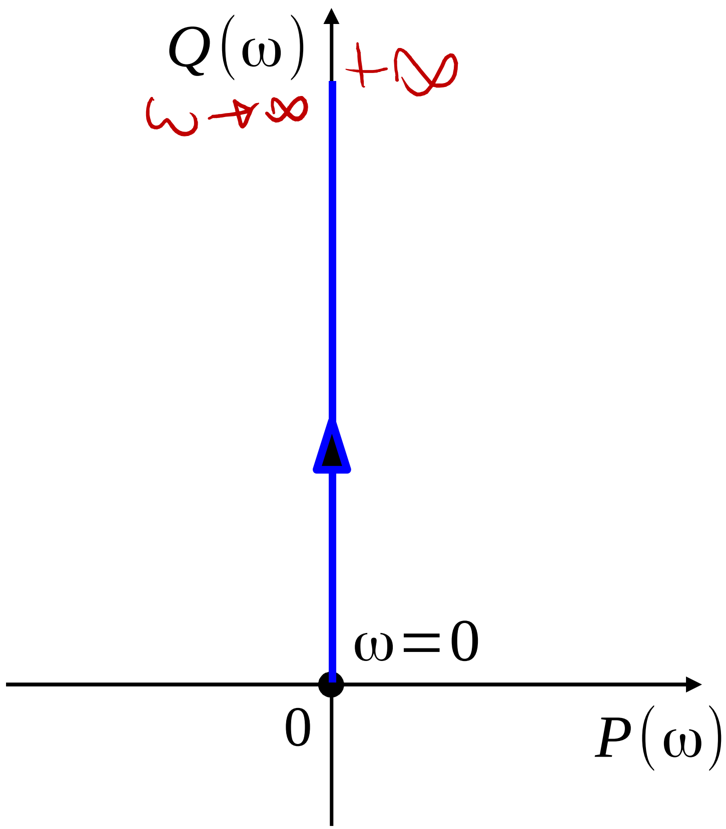
Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=jk\omega$

$$P(\omega)=0,\ \ Q(\omega)=k\omega$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $P(\omega)=0, \; Q(\omega)=k\,\omega$

$A = |Q| = |k\omega|$

$L(\omega) = 20\log|k\omega|$

$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\,\frac{Q}{P} = \mathrm{arctg}(\infty) = \frac{\pi}{2} \quad (\omega, k > 0)$

Element różniczkujący idealny

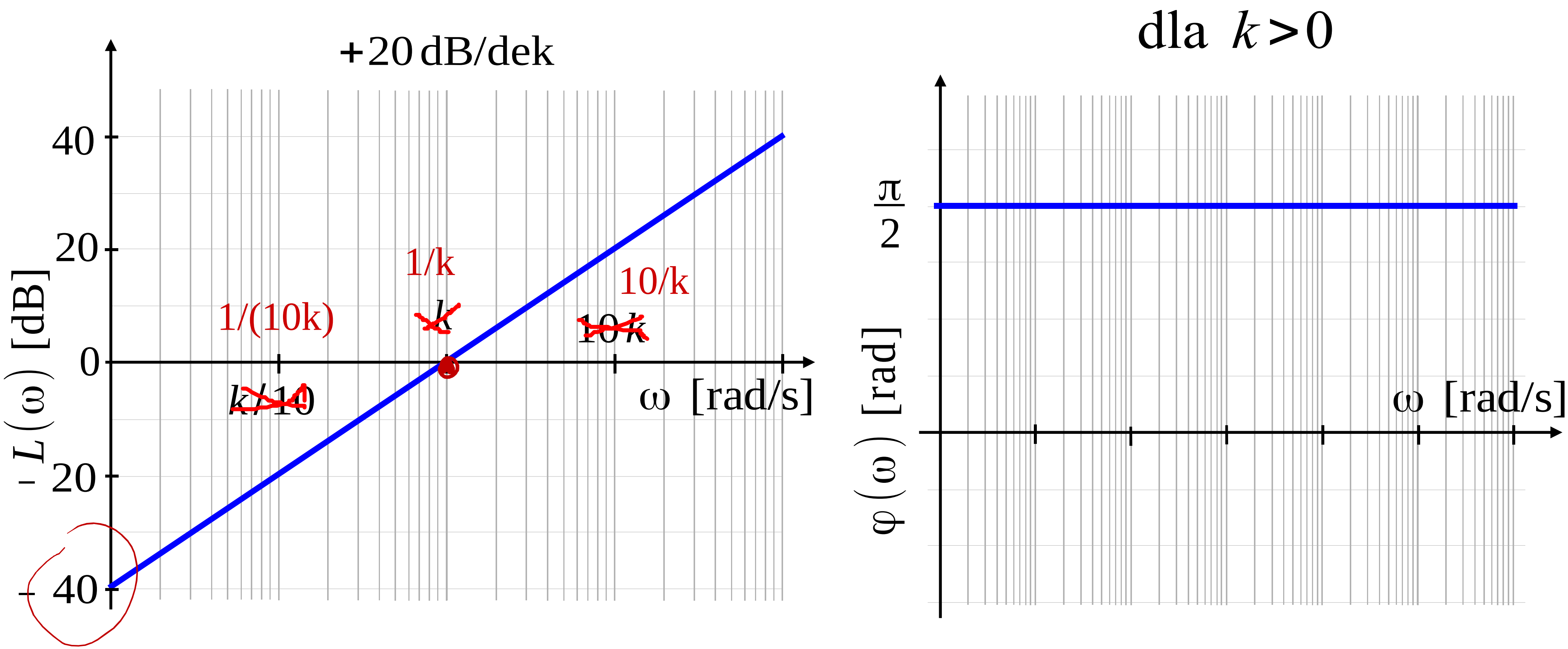
7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\,\omega|$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\,\omega| \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(\infty)$$

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\,\omega|$

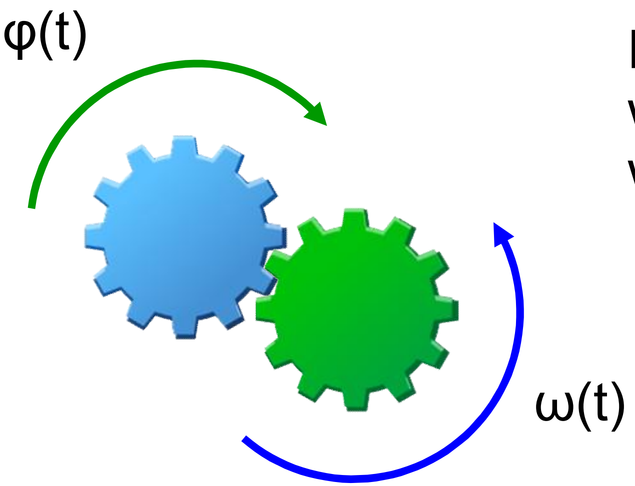
$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\,\omega| \qquad \varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan(\infty)$$



Element różniczkujący idealny

Przykłady

1

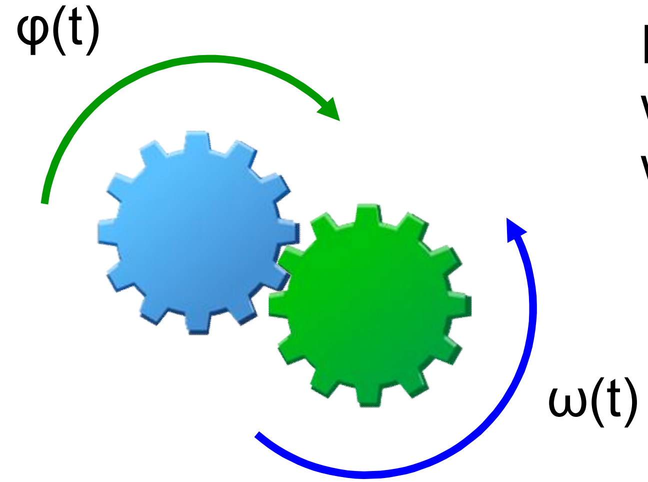


PRZEKŁADNIA ZĘBATA:
wejście – kąt obrotu φ(t)
wyjście – prędkość kątowa ω(t)

Element różniczkujący idealny

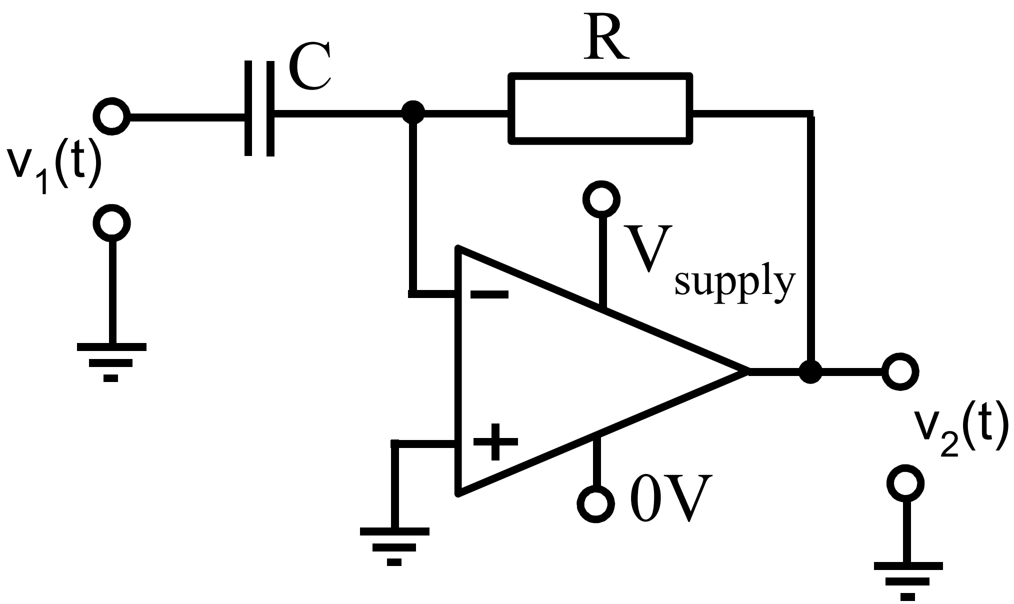
Przykłady

1



PRZEKŁADNIA ZĘBATA:
wejście – kąt obrotu φ(t)
wyjście – prędkość kątowa ω(t)

2



WZMACNIACZ OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = -RC\frac{dv_1(t)}{dt}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$u = const.$ $y = const.$

$y = 0$

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

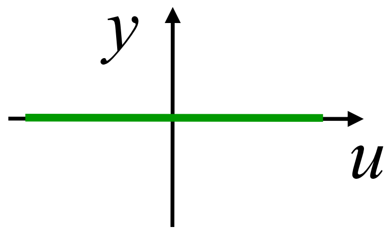
$k\in\mathbb{R}$ $\quad T\in\mathbb{R}_+$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$y=0 \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt}=0\wedge\frac{du}{dt}=0$$



3. Transmitancja:

$$Ts\,Y(s)+Y(s)=k\cdot s\,U(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k\cdot s}{T\cdot s+1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:

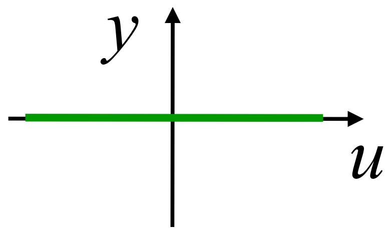
$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

---

2. Charakterystyka statyczna:

$$y=0 \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$$



---

3. Transmitancja:

$$G(s)=\frac{k\,s}{Ts+1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

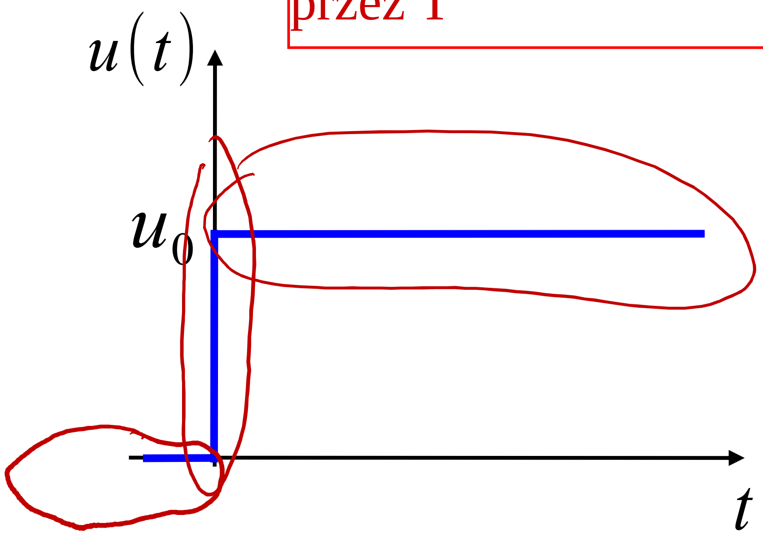
Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

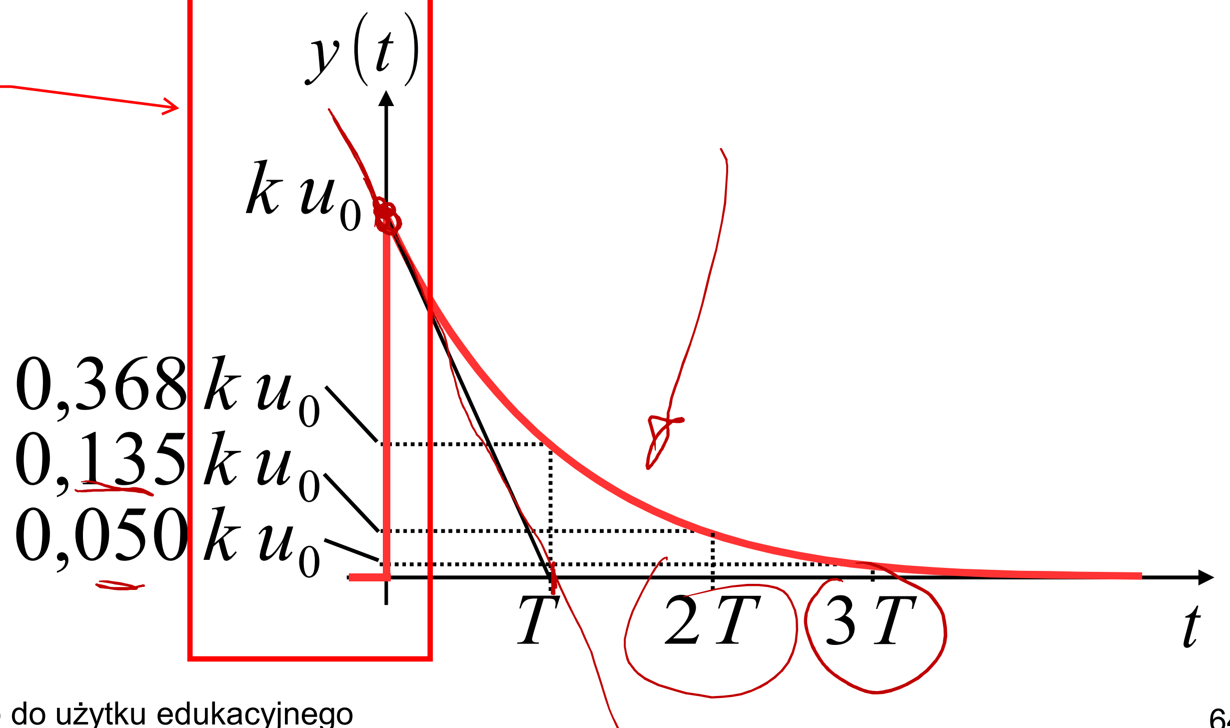
Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k u_0}{Ts+1}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 e^{-t/T}$

wszedzie ku0 powinno byc jeszcze podzielone przez T





Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \dfrac{kj\omega}{Tj\omega + 1} =$

$$= \frac{jk\omega}{1+Tj\omega} \cdot \frac{1-Tj\omega}{1-Tj\omega} = \frac{jk\omega - j^2kT\omega^2}{1^2 - T^2j^2\omega^2} = \frac{jk\omega + kT\omega^2}{1+T^2\omega^2}$$

$$P(\omega) = \frac{Tk\omega^2}{1+T^2\omega^2} \qquad Q(\omega) = \frac{k\omega}{1+T^2\omega^2}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k\, j\omega}{Tj\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{k\,T\,\omega^2}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{k\,\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:

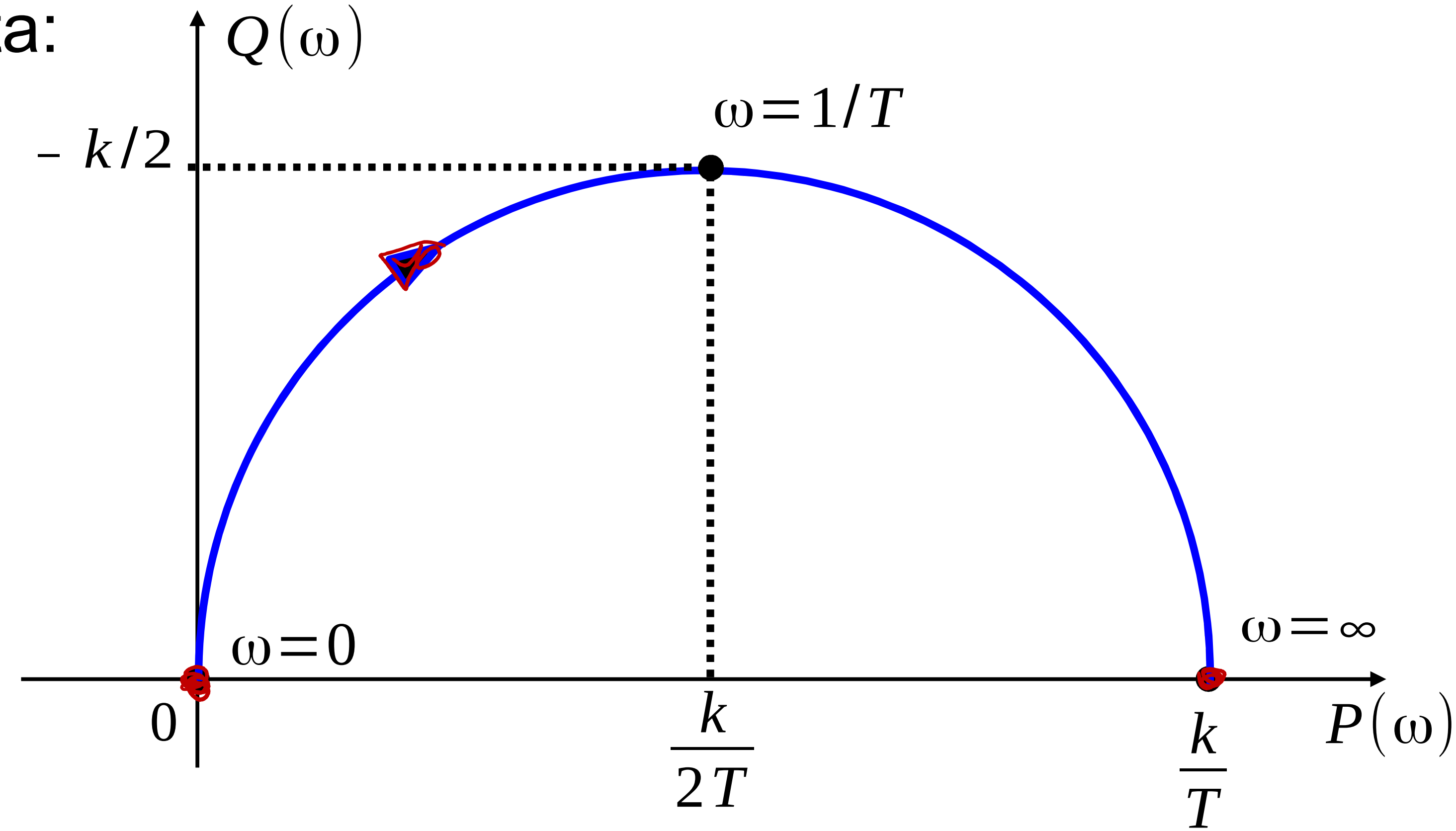
Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k\,j\omega}{Tj\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{kT\omega^2}{T^2\omega^2+1},\quad Q(\omega)=\frac{k\omega}{T^2\omega^2+1}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega) = \frac{k\,T\,\omega^2}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k\,\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

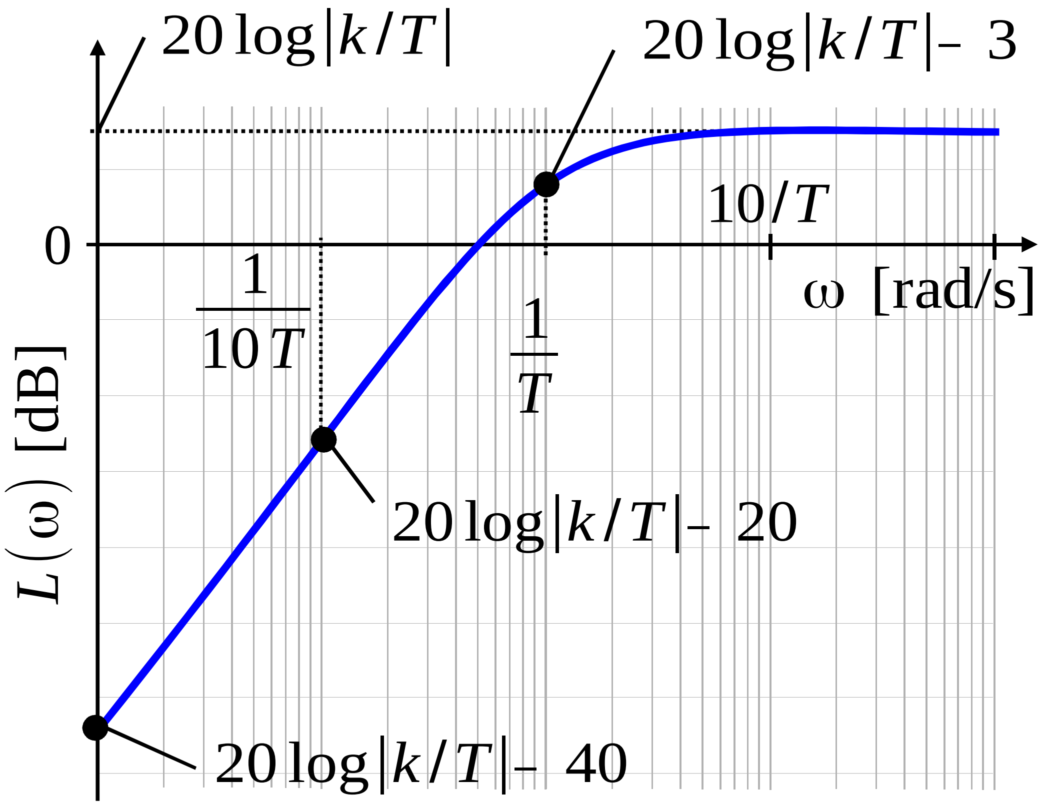
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\,\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\,\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(\frac{1}{T\,\omega}\right)$$



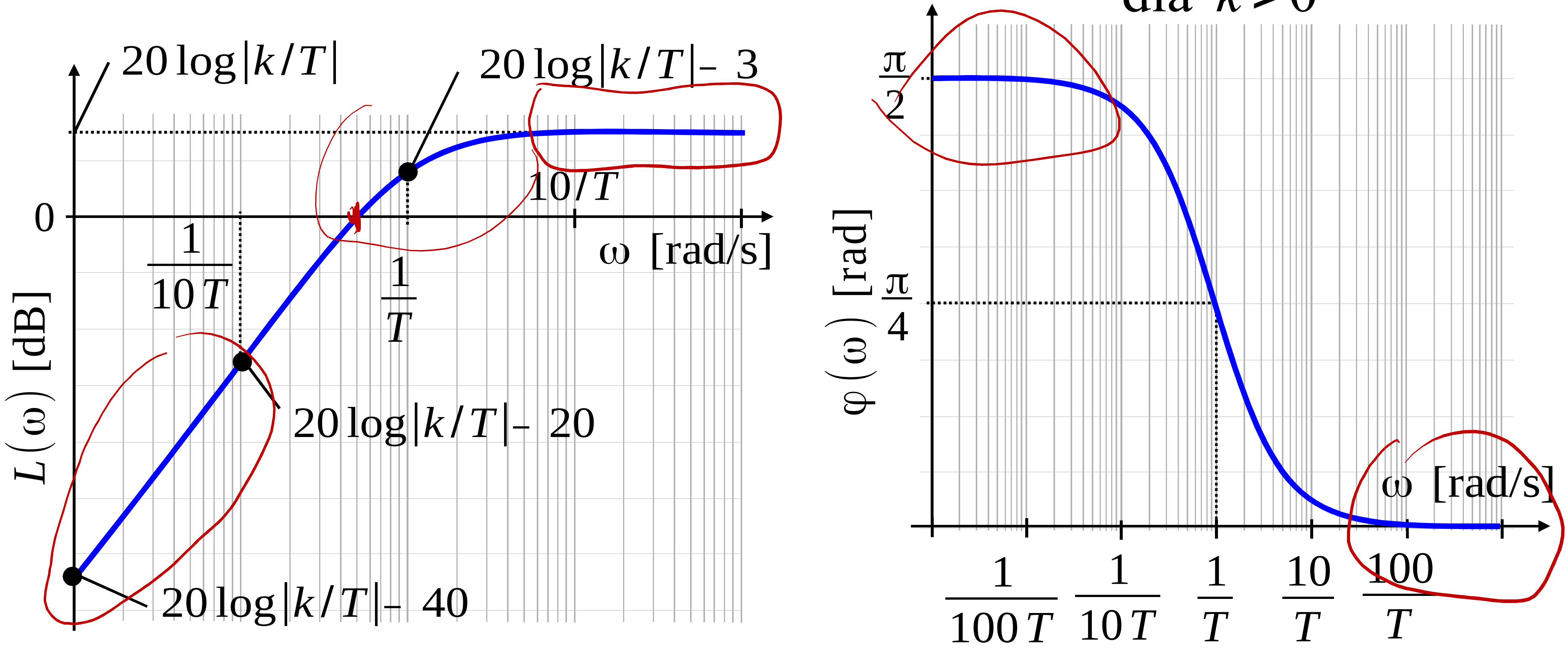
Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=|k\omega|/\sqrt{T^2\omega^2+1}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log|k\omega|-20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right)$$

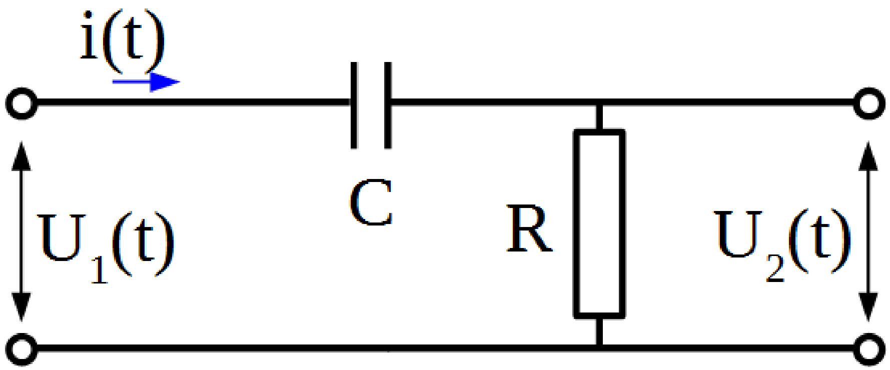
dla $k>0$



Element różniczkujący rzeczywisty

Przykłady

1



OBWÓD RC:
wejście – napięcie $u_1(t)$
wyjście – napięcie $u_2(t)$

Element opóźniający

1. Równanie: $\boxed{y(t)=u(t-\tau)}$ $\tau \in R_+$ $[s]$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t)=u(t-\tau)$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

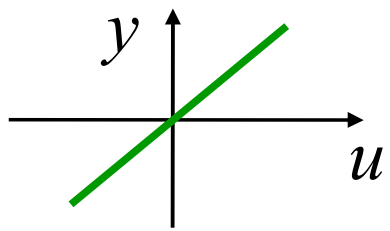
2. Charakterystyka statyczna: $y=u$

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t)=u(t-\tau)$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=u$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $Y(s) = U(s)e^{-\tau s}$

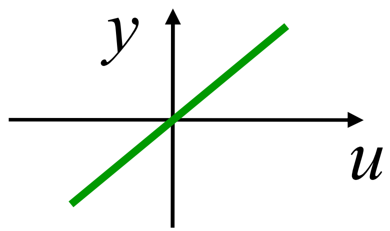
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = e^{-\tau s}$$

Element opóźniający

1. Równanie: $y(t) = u(t - \tau)$

$u(t)$ - wejście
$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = u$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $G(s) = e^{-\tau s}$

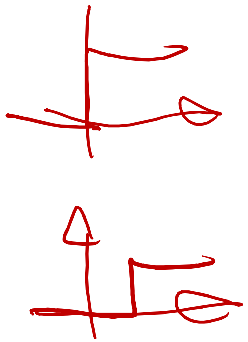
Element opóźniający

4. Odp. skokowa: $u(t) = u_0 \mathbb{1}(t)$ $\quad U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = e^{-\tau s} u_0 \frac{1}{s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ e^{-\tau s} u_0 \frac{1}{s} \right\} = u_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{ 1 \cdot e^{-\tau s} \right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} \right\} =$$

$$= u_0 \mathbb{1}(t-\tau) * \mathbb{1}(t) = u_0 \mathbb{1}(t-\tau)$$



Element opóźniający

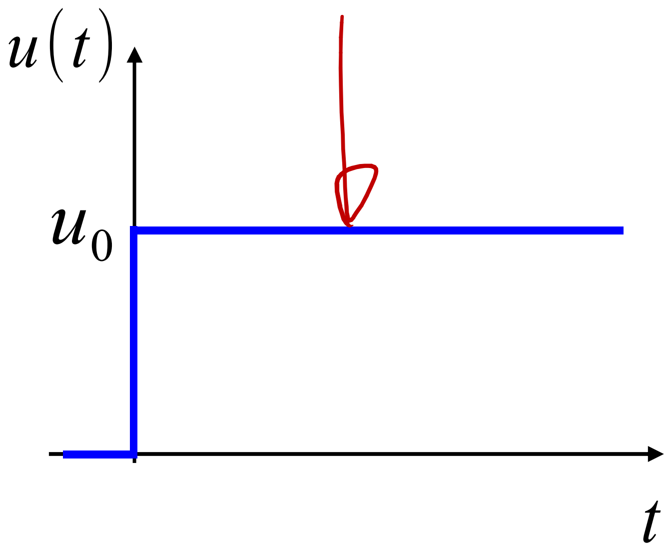
4. Odp. skokowa:

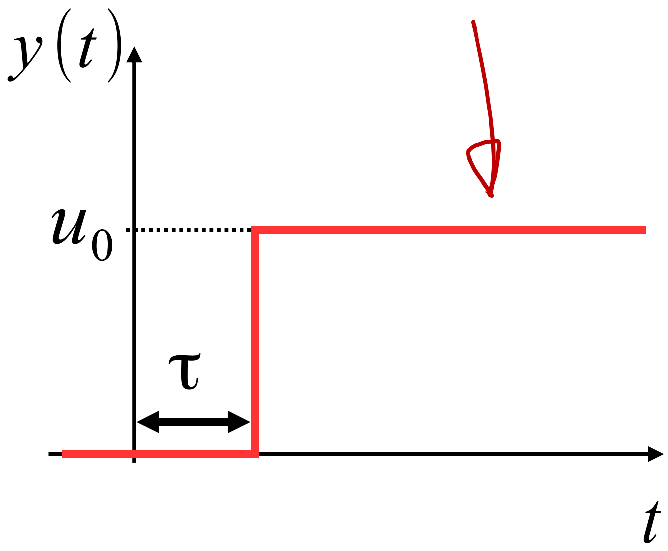
Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0\dfrac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\dfrac{u_0}{s}e^{-\tau s}$

Wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=u_0 1(t-\tau)$





Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$

$$G(j\omega) = \cos\tau\omega - j\sin\tau\omega$$

$$\boxed{e^{-ix} = \cos x - i\sin x}$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega)$$

$$Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=e^{-\tau j\omega}$

$$\boxed{e^{-x}=\cos x-j\sin x}$$

$$P(\omega)=\cos(\tau\omega),\ \ Q(\omega)=-\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:

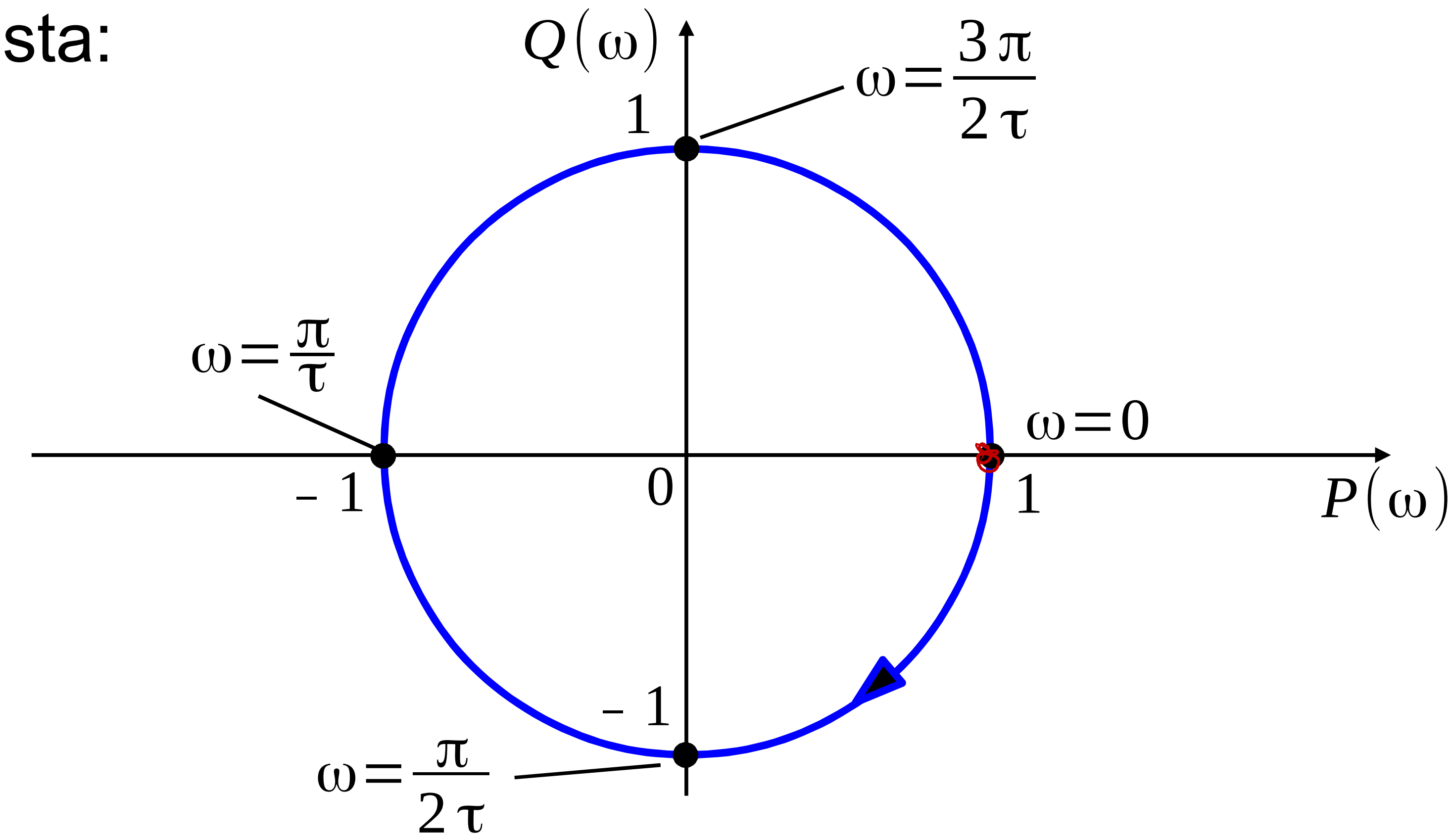
Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=e^{-\tau j\omega}$

$$\boxed{e^{-x}=\cos x-j\sin x}$$

$$P(\omega)=\cos(\tau\omega),\quad Q(\omega)=-\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:



Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $P(\omega)=\cos(\tau\omega),\ Q(\omega)=-\sin(\tau\omega)$

$$A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1 \qquad L(\omega)=20\log A(\omega)=0$$

$$\varphi(\omega)=\operatorname{arctg}\frac{Q}{P}=\operatorname{arctg}\frac{-\sin\tau\omega}{\cos\tau\omega}=\operatorname{arctg}(-\operatorname{tg}\tau\omega)=$$

$$=-\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\tau\omega))=-\tau\omega$$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log 1=0$$

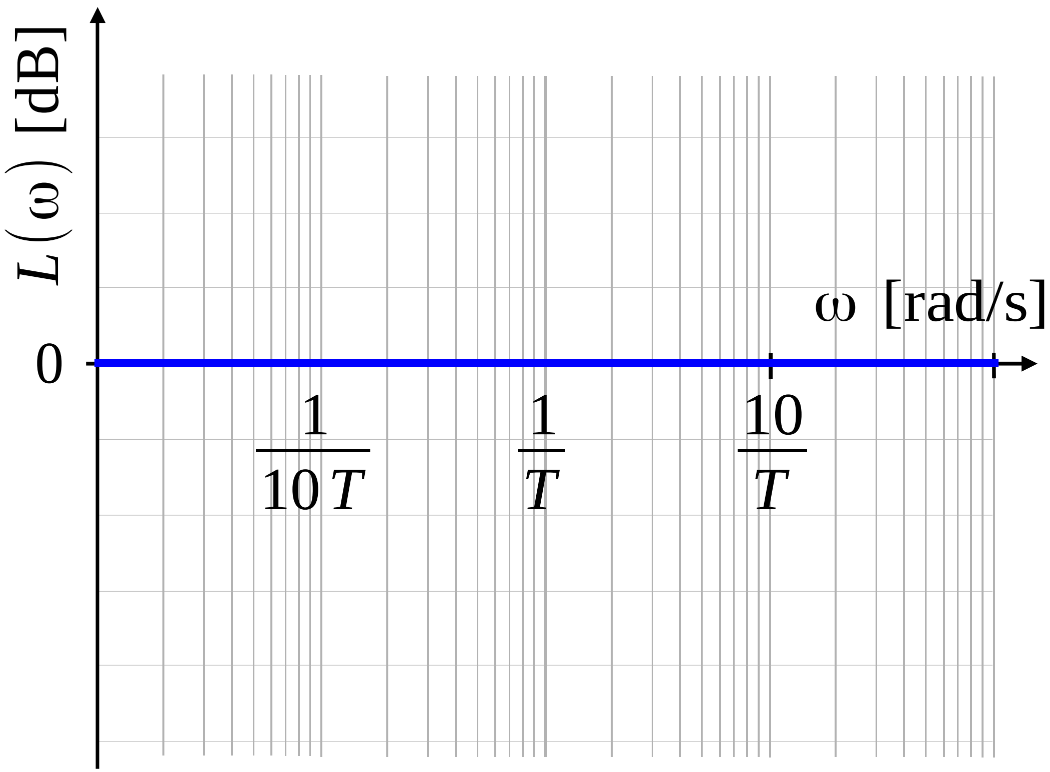
$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(-\tan(\tau\omega)\right)=-\tau\omega$$

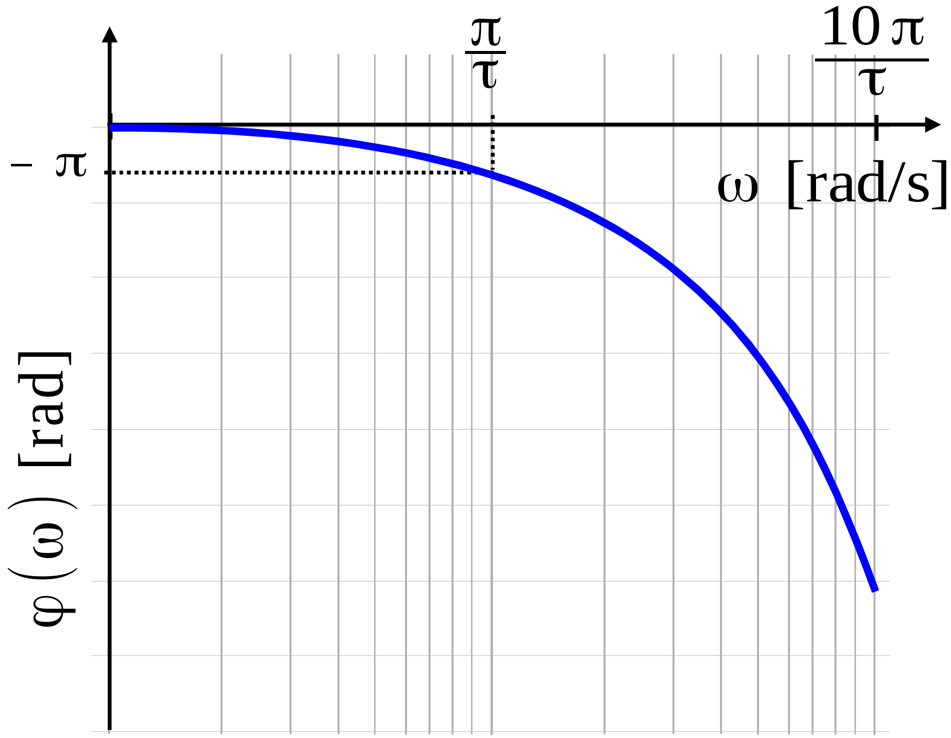
Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}=1$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)=20\log 1=0$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\left(-\tan(\tau\omega)\right)=-\tau\omega$$

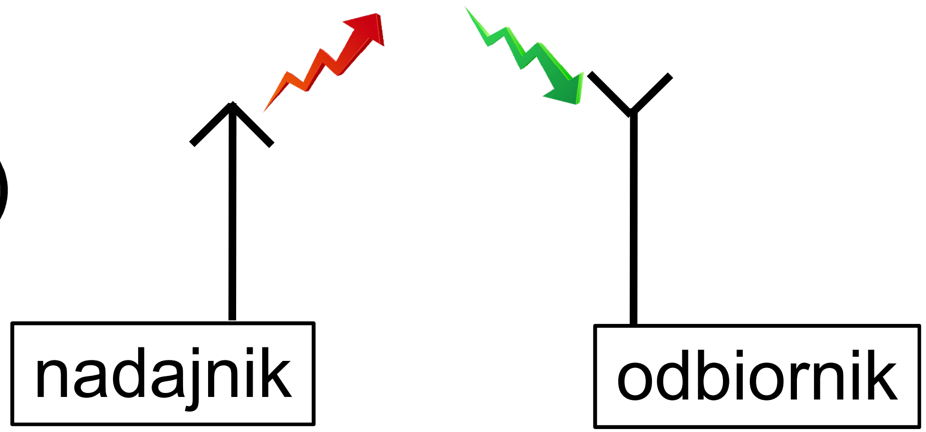




Element opóźniający

Przykłady

1



TRANSMISJA BEZPRZEWODOWA:
wejście – dane wysłane
wyjście – dane odebrane

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: $$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

$T_1, T_2 \in \mathbb{R}_+ \quad [s]$

$k \in \mathbb{R}$

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

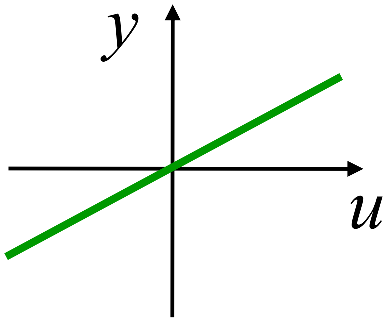
$$T_1^2 \frac{d^2 \overset{\nearrow 0}{y(t)}}{dt^2} + T_2 \frac{d\overset{\nearrow 0}{y(t)}}{dt} + \overset{\nearrow \text{const.}}{y(t)} = k\, \overset{\nearrow \text{const.}}{u(t)}$$

2. Charakterystyka statyczna: $y = k \cdot u$

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: $$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $$y = ku \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



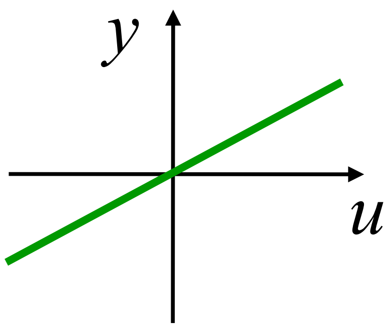
3. Transmitancja: $$T_1^2 s^2 Y(s) + T_2 s Y(s) + Y(s) = k \cdot U(s)$$

$$G(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie: $$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k\,u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $$y = ku \qquad \text{dla } \frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$$



3. Transmitancja: $$G(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1} \cdot \frac{u_0}{s}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{k u_0}{s\left(\underbrace{T_1^2}\, s^2 + \underbrace{T_2}\, s + 1\right)} \right\}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t)=u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s)=u_0\frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s)=G(s)U(s)=\frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2+T_2 s+1)}$

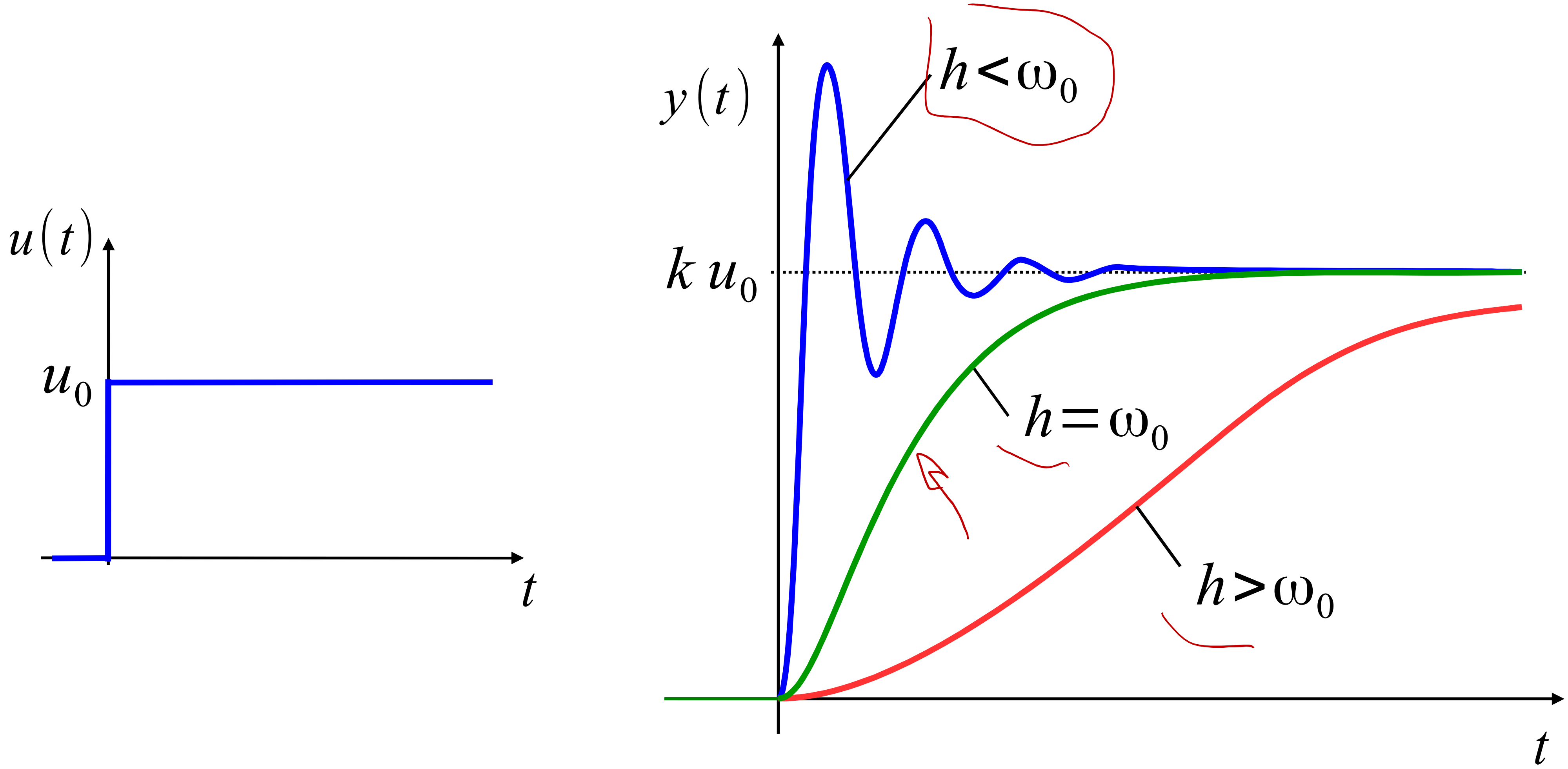
wyjście: $y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=$

$$=\begin{cases} \frac{k u_0}{T_1^2}\left(1-e^{-ht}\left(\cos\omega t+\frac{h}{\omega}\sin\omega t\right)\right), & \text{dla } h\leq\omega_0 \\ \frac{k u_0}{T_1^2}\left(1+e^{-ht}\left(\left(\frac{h+w}{2w}-1\right)e^{-wt}-\frac{h+w}{2w}e^{wt}\right)\right), & \text{dla } h\geq\omega_0 \end{cases}$$

gdzie: $h=\frac{T_2}{2T_1^2}$, $\omega_0=\frac{1}{T_1}$, $\omega=\sqrt{\omega_0^2-h^2}$, $w=\sqrt{h^2-\omega_0^2}$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:



Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(s)=\frac{k}{T_1^2 s^2+T_2 s+1}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k}{-T_1^2\omega^2+T_2 j\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{k\left(1-T_1^2\omega^2\right)}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2},\quad Q(\omega)=\frac{-kT_2\omega}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2}$$

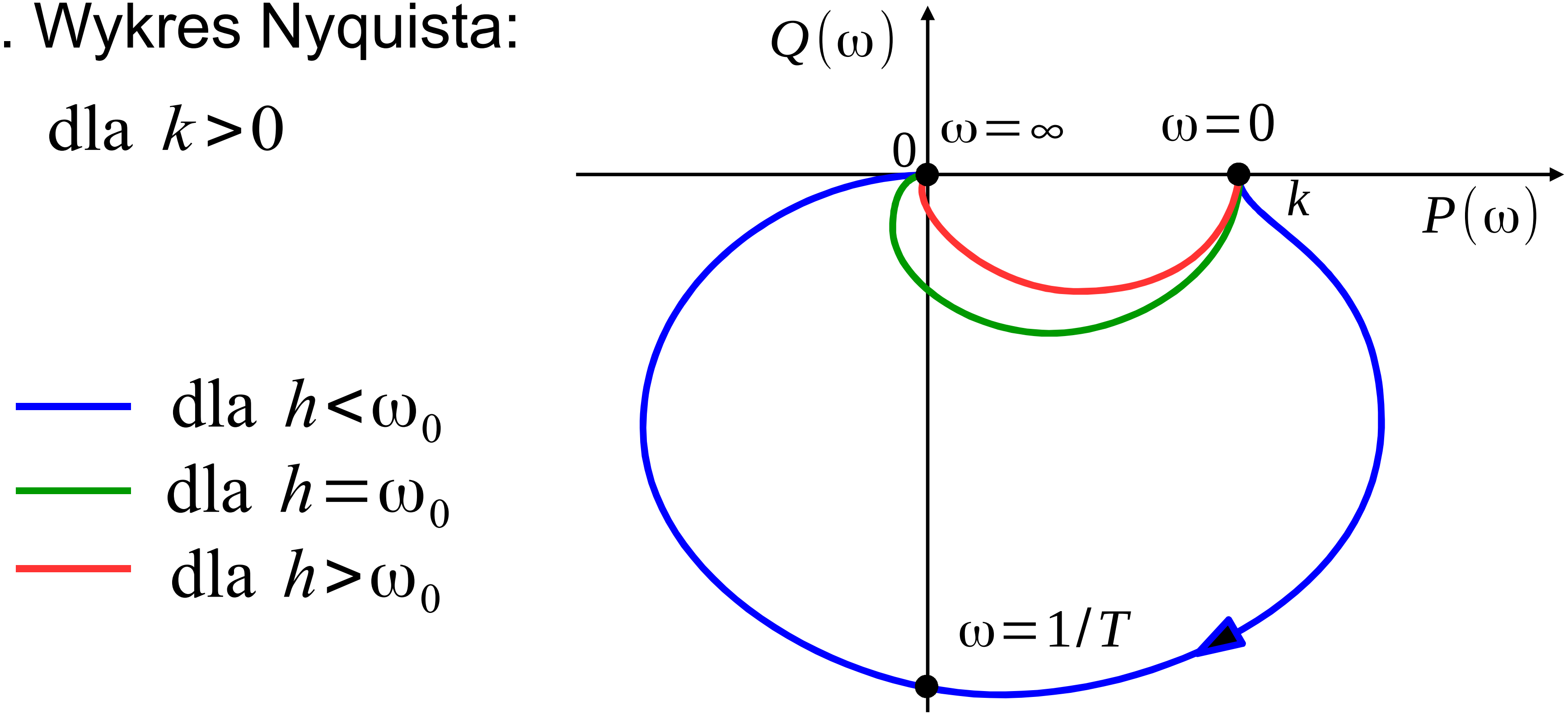
Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega)=\dfrac{k}{-T_1^2\omega^2+T_2 j\omega+1}$

$$P(\omega)=\frac{k\left(1-T_1^2\omega^2\right)}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2},\quad Q(\omega)=\frac{-kT_2\omega}{\left(1-T_1^2\omega^2\right)^2+T_2^2\omega^2}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k>0$



Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}$

$$L(\omega)=20\log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega)=\sqrt{P^2+Q^2}$

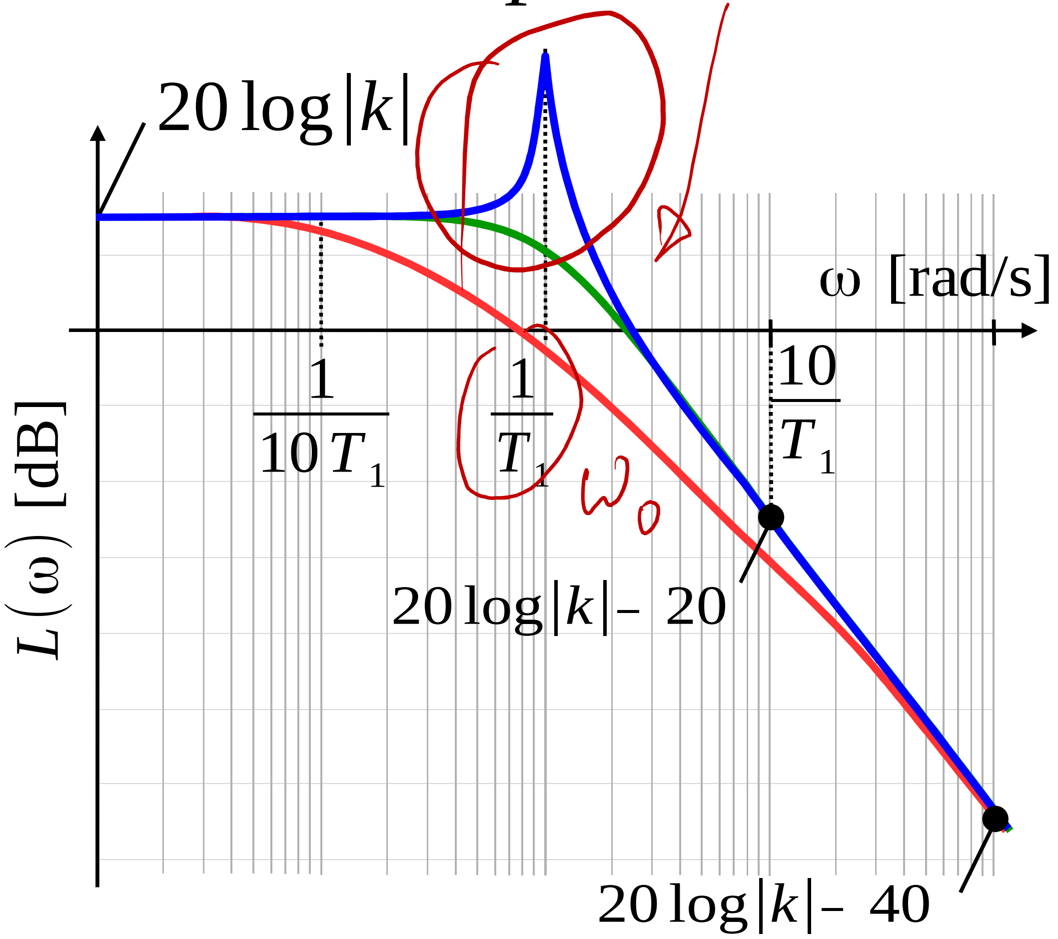
$$L(\omega)=20\log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega)=\arctan\frac{Q}{P}$$

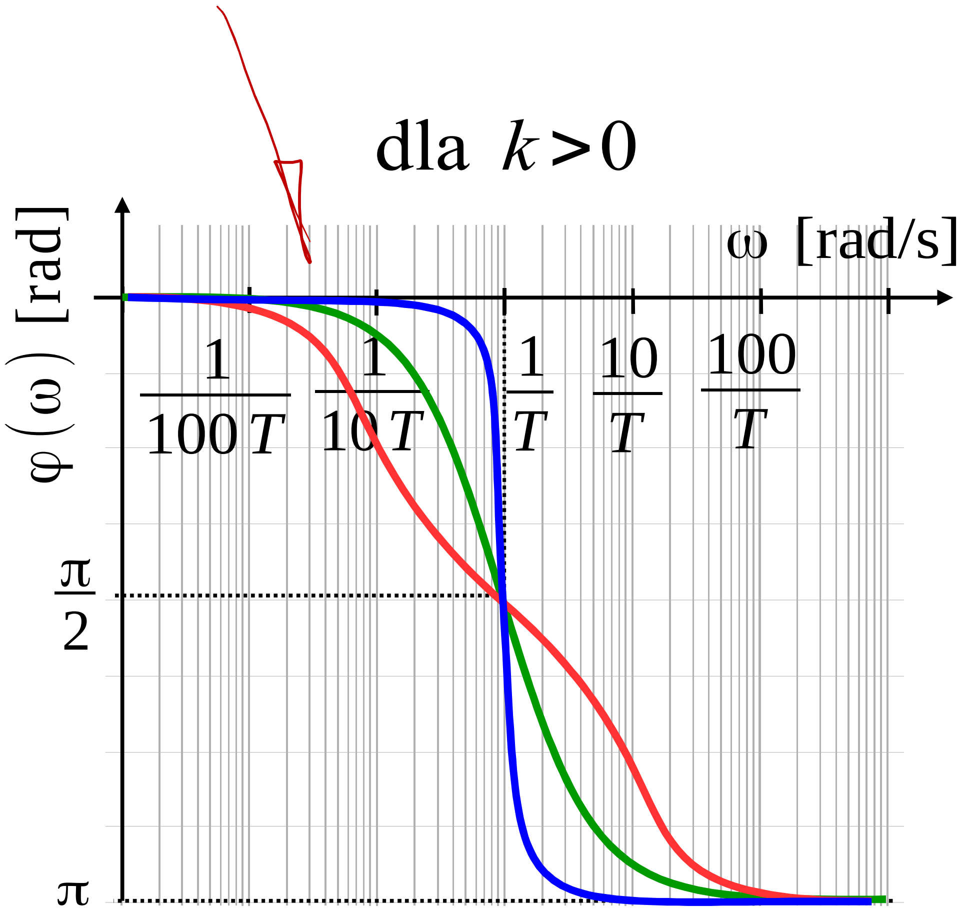
dla $h<\omega_0$

dla $h=\omega_0$

dla $h>\omega_0$



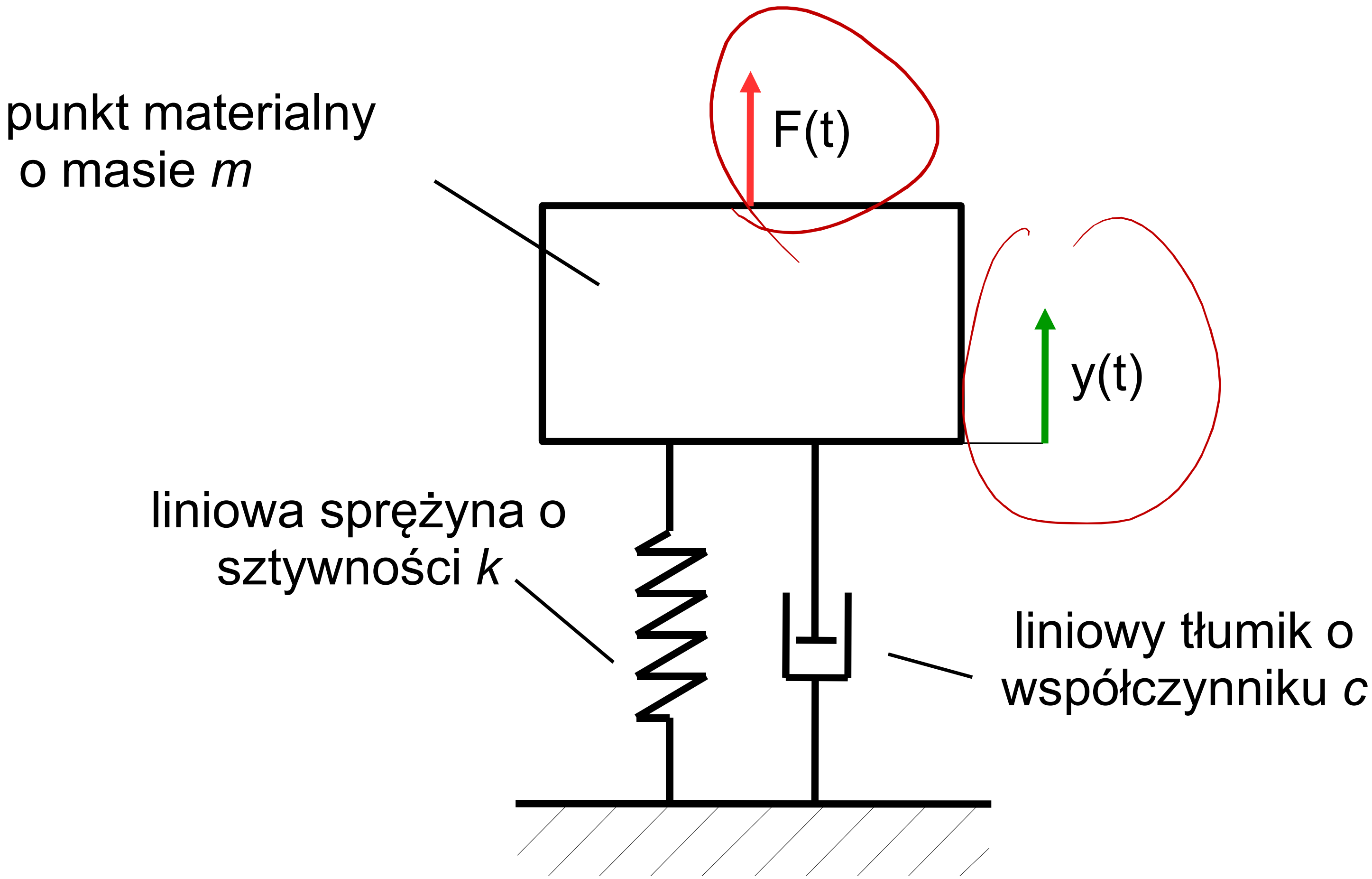
dla $k>0$



Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

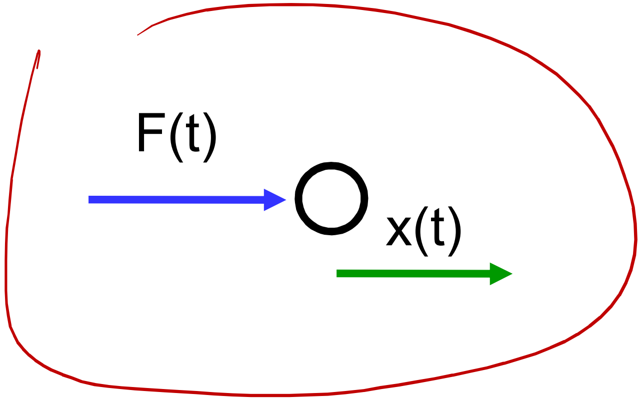
1 UKŁAD DRGAJĄCY:
wejście – siła F(t)
wyjście – przemieszczenie y(t)



Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

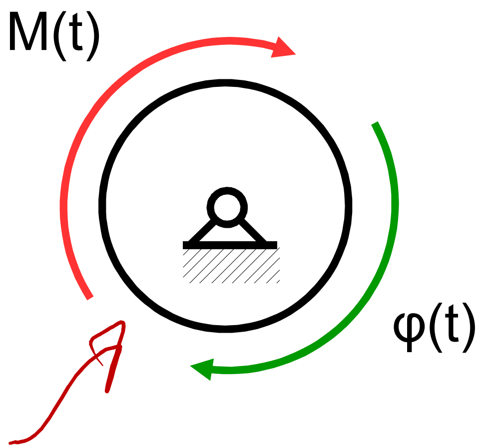
2



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła F(t)
wyjście – przemieszczenie x(t)

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

3

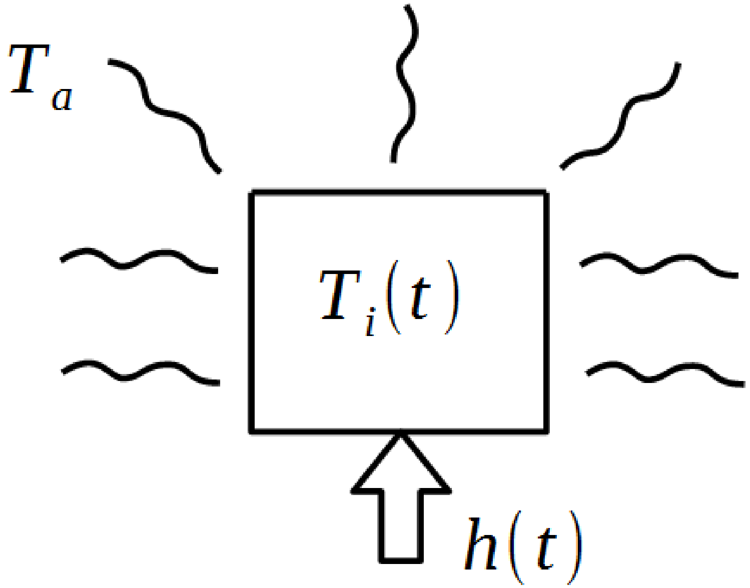


RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – moment M(t)
wyjście – kąt obrotu φ(t)

Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

4

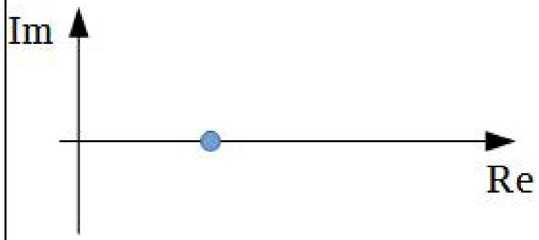


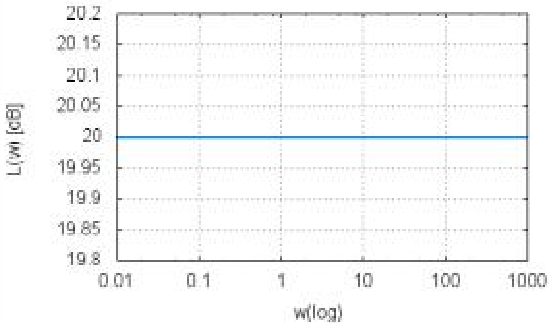
OGRZEWANY OBIEKT O DUŻEJ BEZWŁADNOŚCI:
wejście – moc grzałki h(t)
wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$

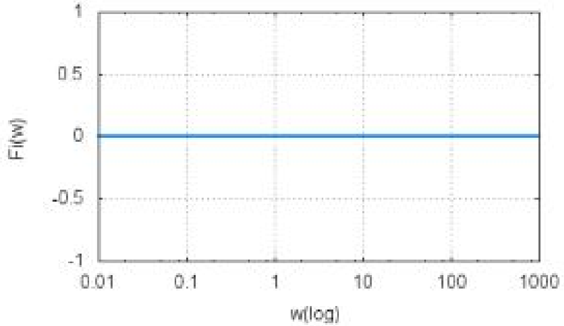
Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

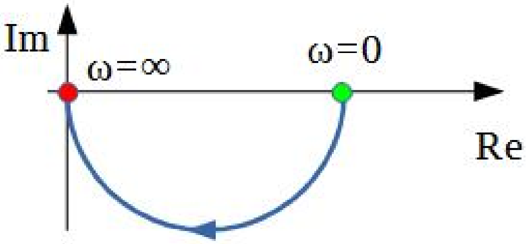
nazwa elementu	transmitancja
Proporcjonalny	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$

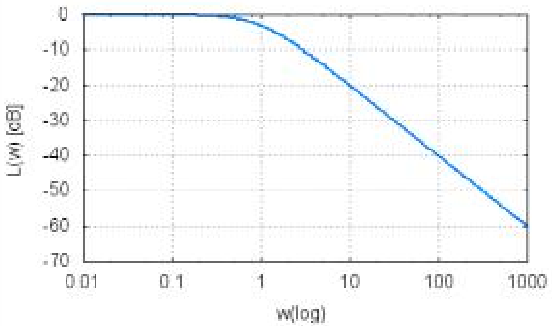
Nyquist plot	Bode Plot (example)

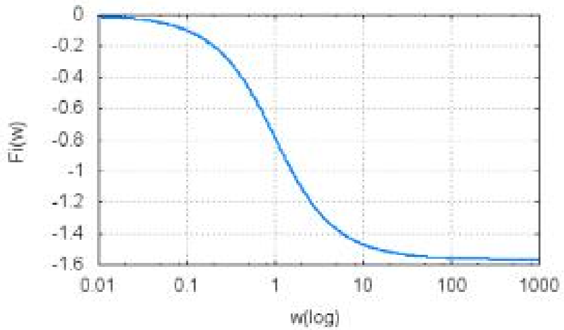


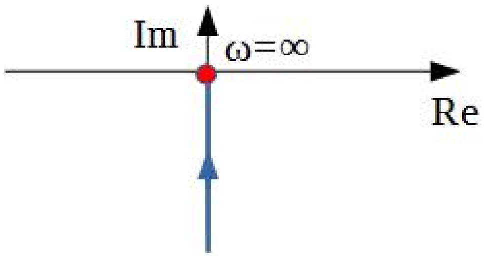


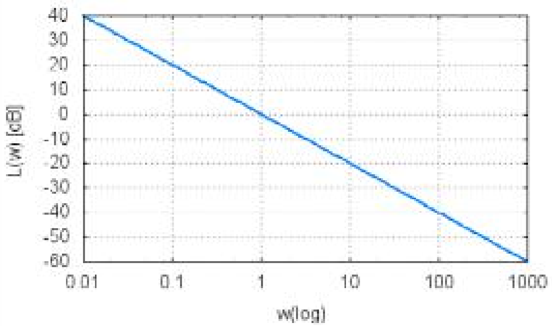


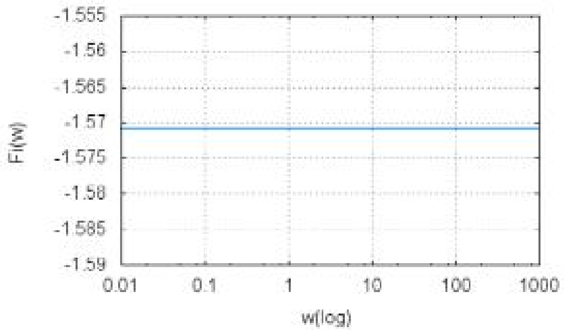


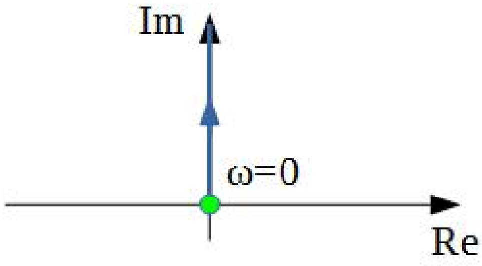


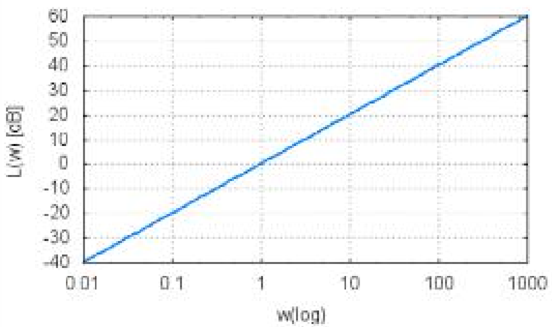


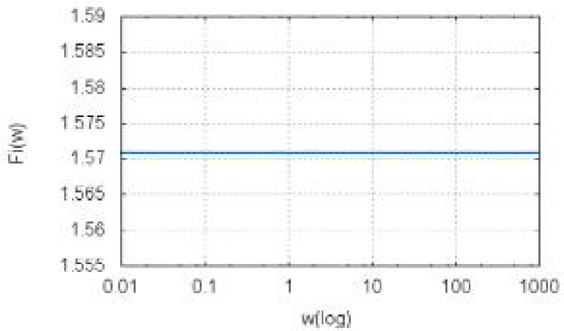












Nyquist plot	Bode Plot (example)