



Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Podstawy automatyki i teorii maszyn
semestr zimowy 2019/2020

dr inż. Sebastian Korczak

Wykład 10

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki z przykładami.

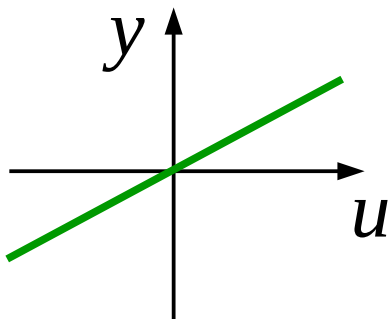
Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

nazwa elementu	transmitancja
Proporcjonalny	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$

Element proporcjonalny

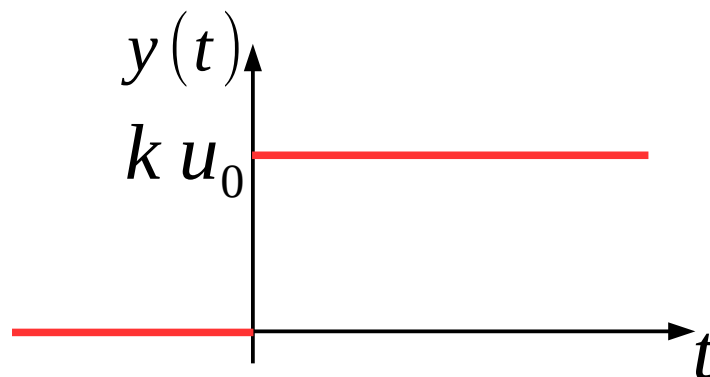
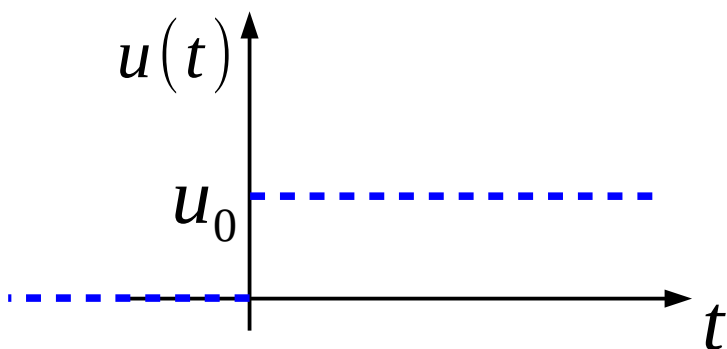
1. Równanie: $y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście, $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $G(s) = k$

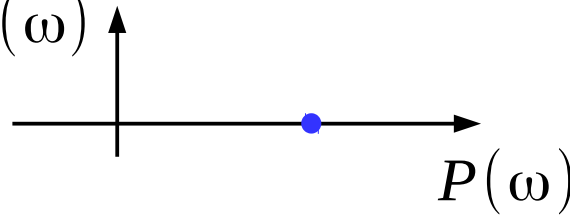
4. Odp. skokowa: $y(t) = k u_0 1(t)$ dla $u(t) = u_0 1(t)$



Element proporcjonalny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = k$ $P(\omega) = k$, $Q(\omega) = 0$

6. Wykres Nyquista: $Q(\omega)$

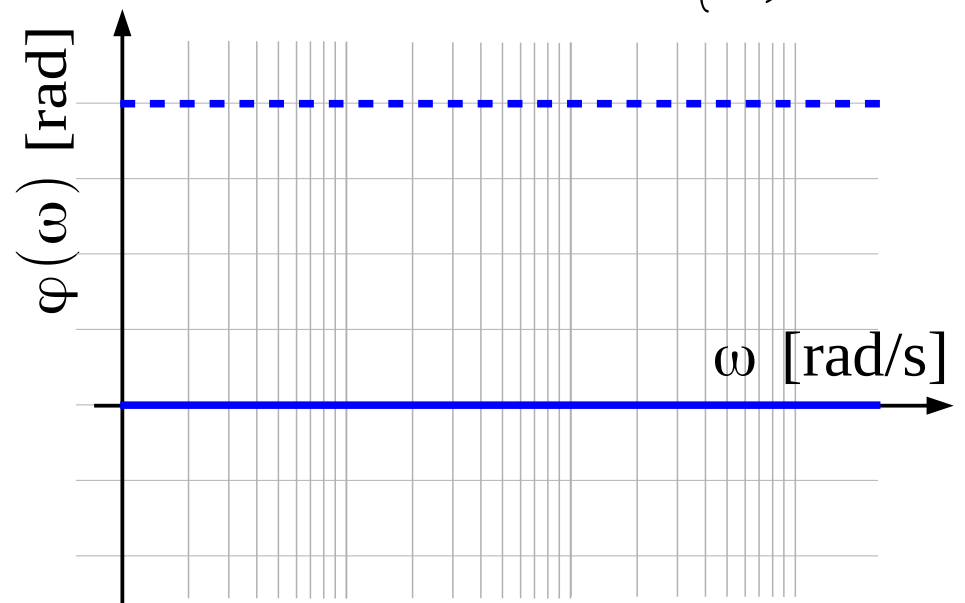
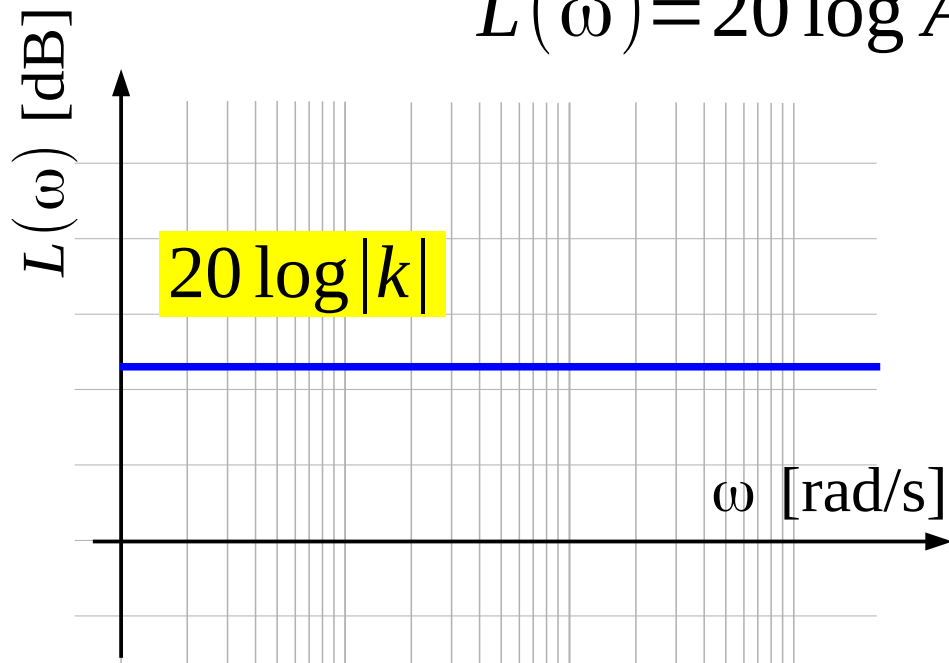


dla $k > 0$

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k|$

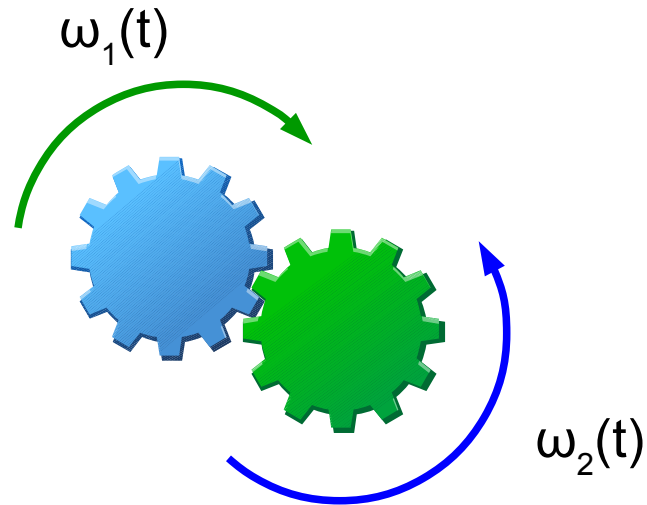
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \geq 0 \\ \pi, & \text{dla } k < 0 \end{cases}$$



Element proporcjonalny

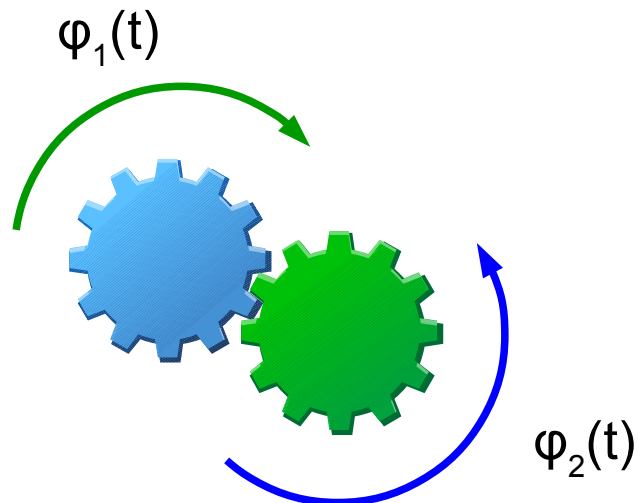
Przykłady



przekładnia zębata:

wejście – prędkość kątowna $\omega_1(t)$

wyjście – prędkość kątowna $\omega_2(t)$



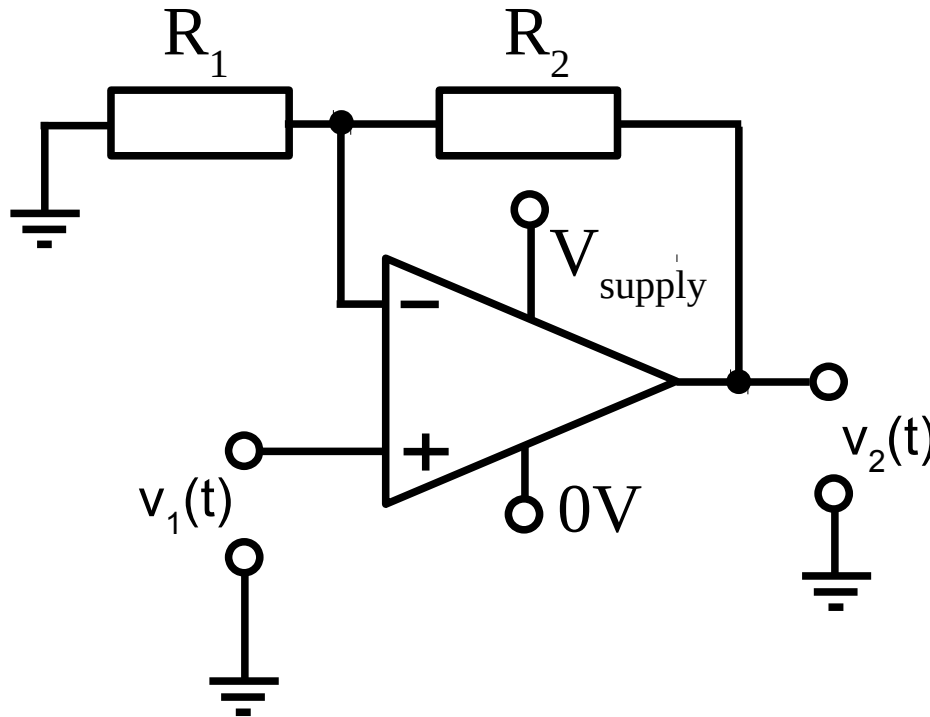
przekładnia zębata:

wejście – kąt obrotu $\varphi_1(t)$

wyjście – kąt obrotu $\varphi_2(t)$

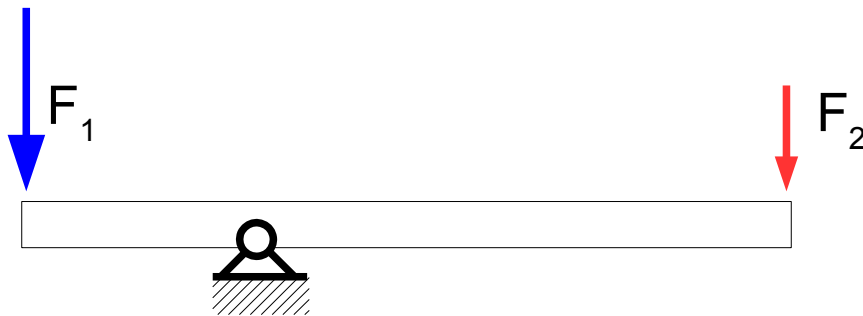
Element proporcjonalny

Przykłady



WZMACNIACZ
OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

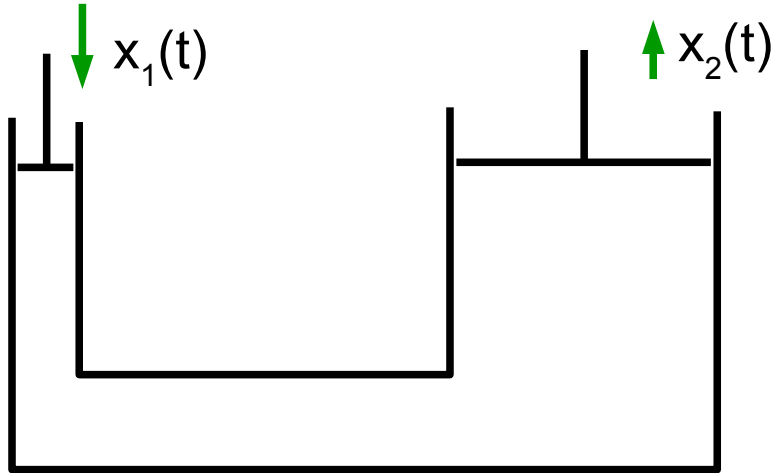
$$v_2(t) = v_1(t) \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$



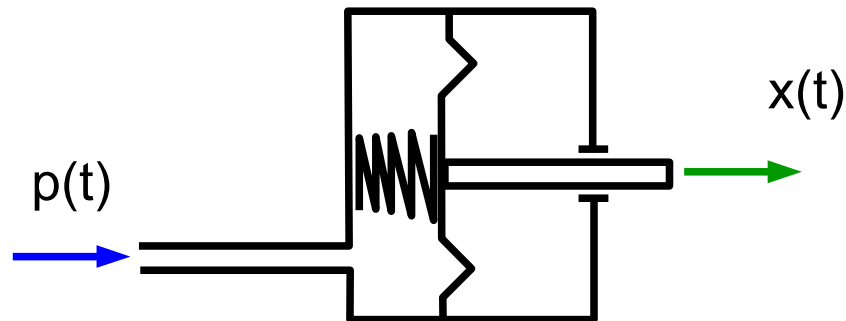
BELKA w stanie ustalonym:
wejście – siła F_1
wyjście – siła F_2

Element proporcjonalny

Przykłady



PODNOŚNIK HYDRAULICZNY:
wejście – przemieszczenie $x_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x_2(t)$



SIŁOWNIK PNEUMATYCZNY:
wejście – ciśnienie $p_1(t)$
wyjście – przemieszczenie $x(t)$

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie:
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$$

$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

Element inercyjny pierwszego rzędu

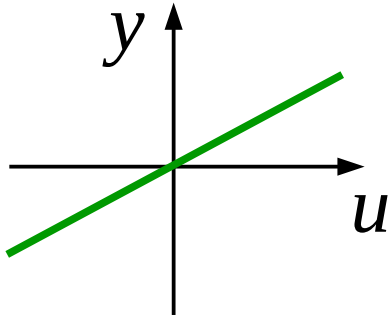
1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



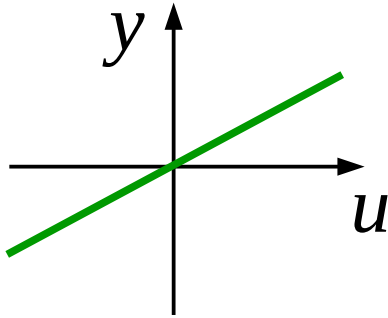
zał.: $k > 0$

3. Transmitancja:

Element inercyjny pierwszego rzędu

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t)$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



zał.: $k > 0$

3. Transmitancja: $G(s) = \frac{k}{Ts+1}$

Element inercyjny pierwszego rzędu

4. Odp. skokowa:

Element inercyjny pierwszego rzędu

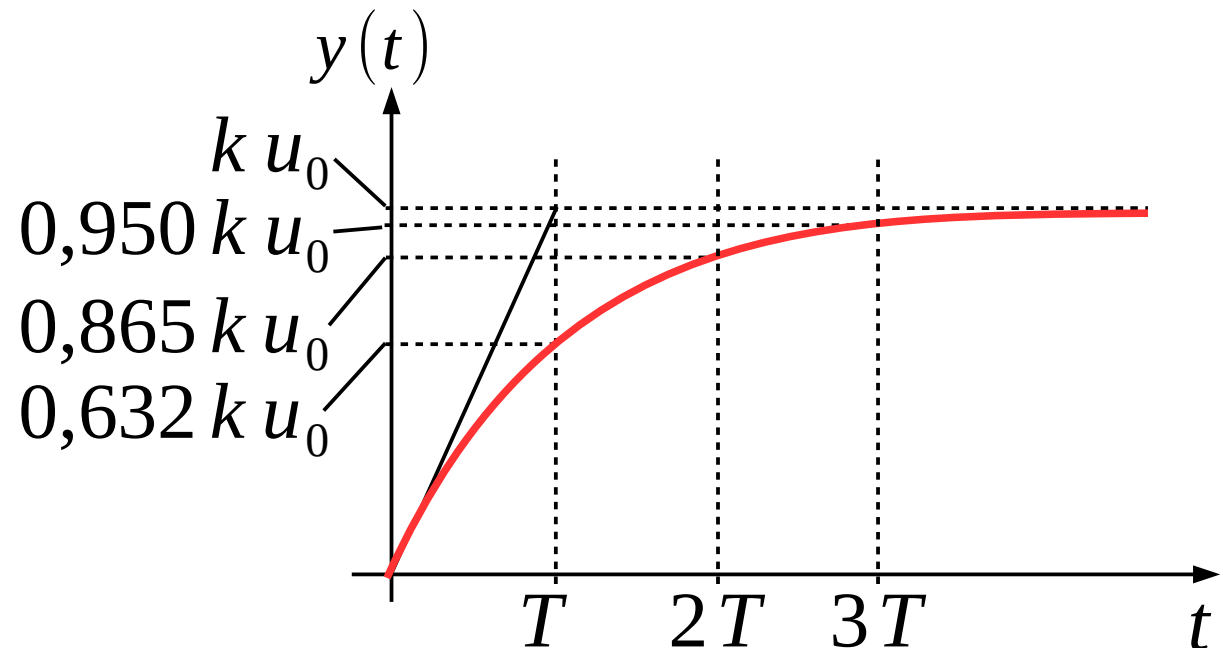
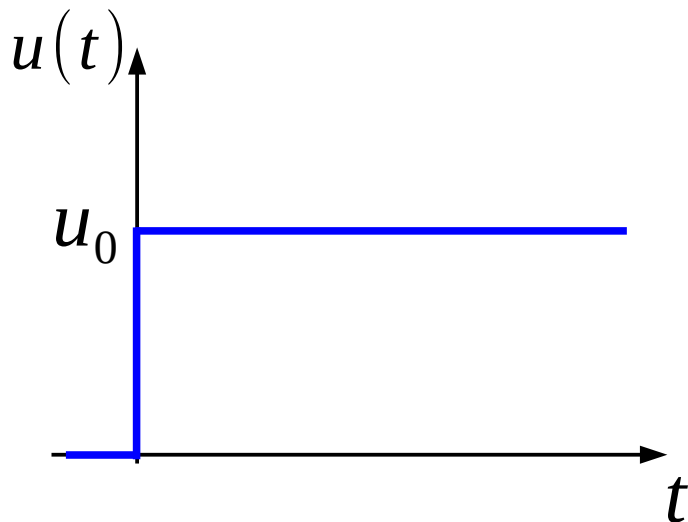
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k u_0}{s(Ts+1)}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 (1 - e^{-t/T})$



Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja
widmowa:

Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:

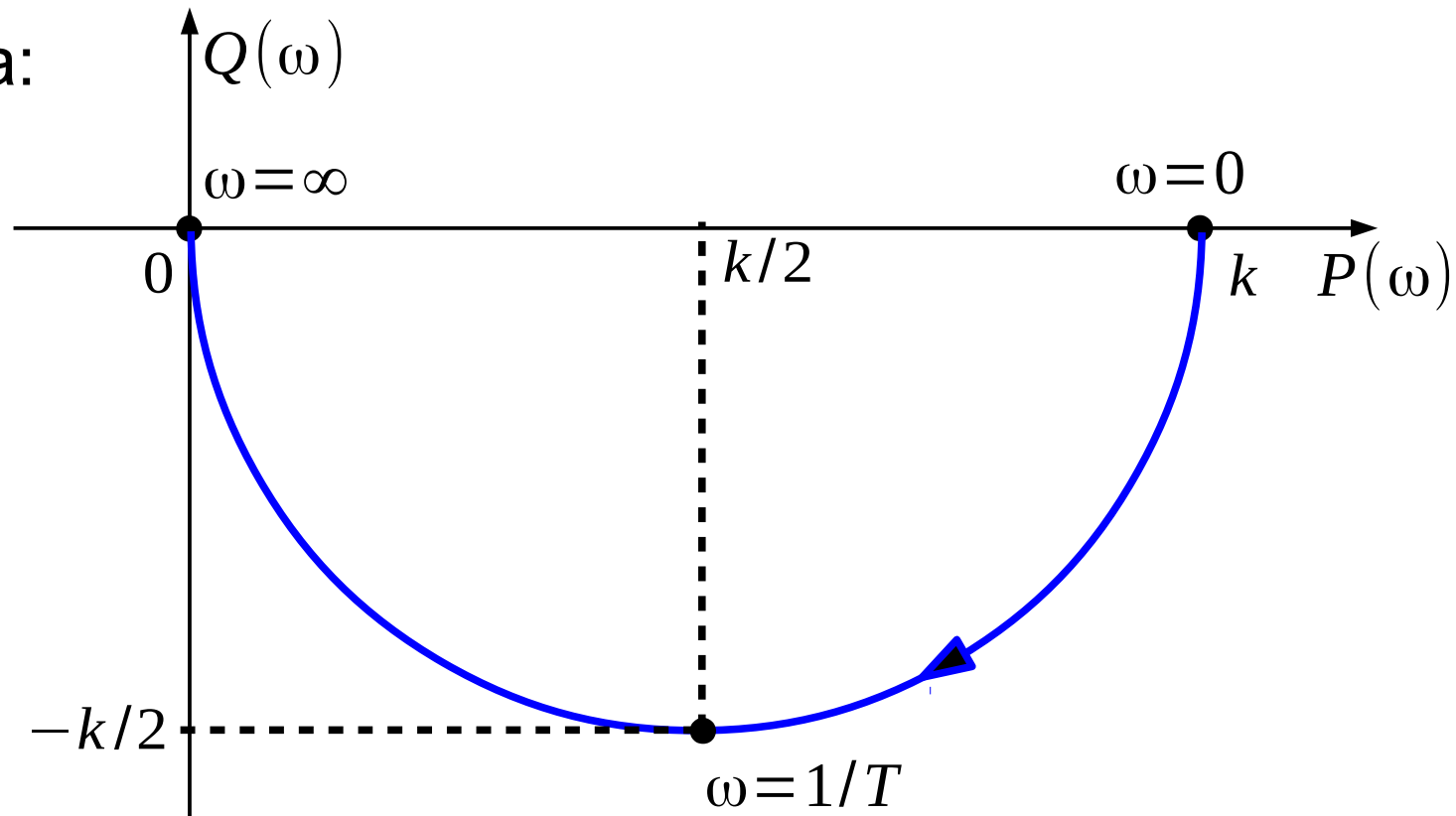
Element inercyjny pierwszego rzędu

5. Transmitancja
widmowa:

$$G(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1}$$

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT\omega}{T^2\omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:



Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega) = \frac{k}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-k T \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

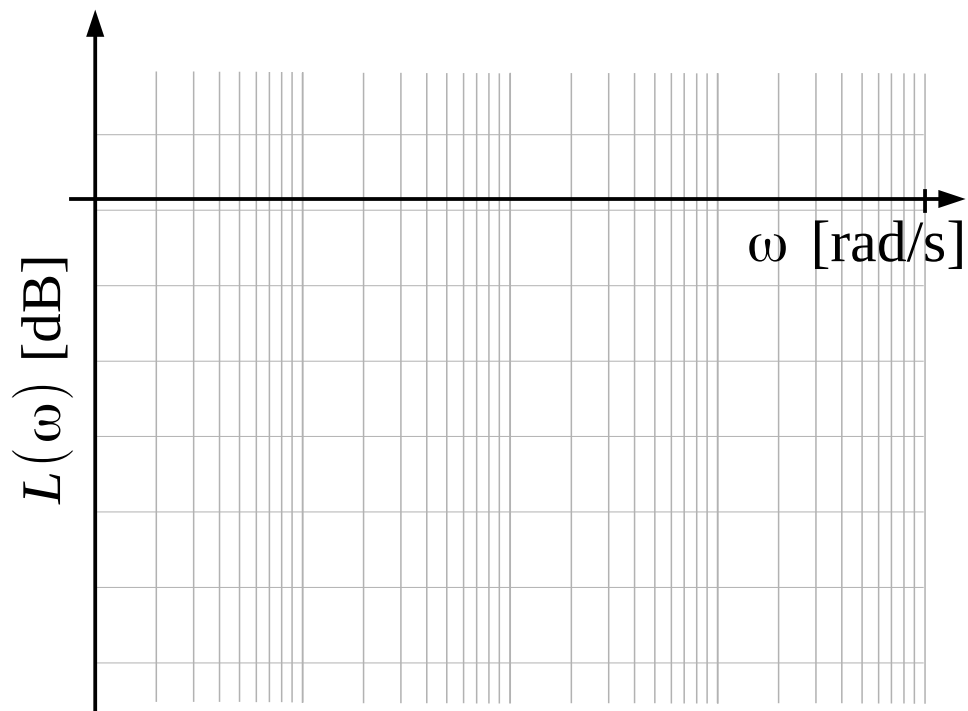
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$

Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

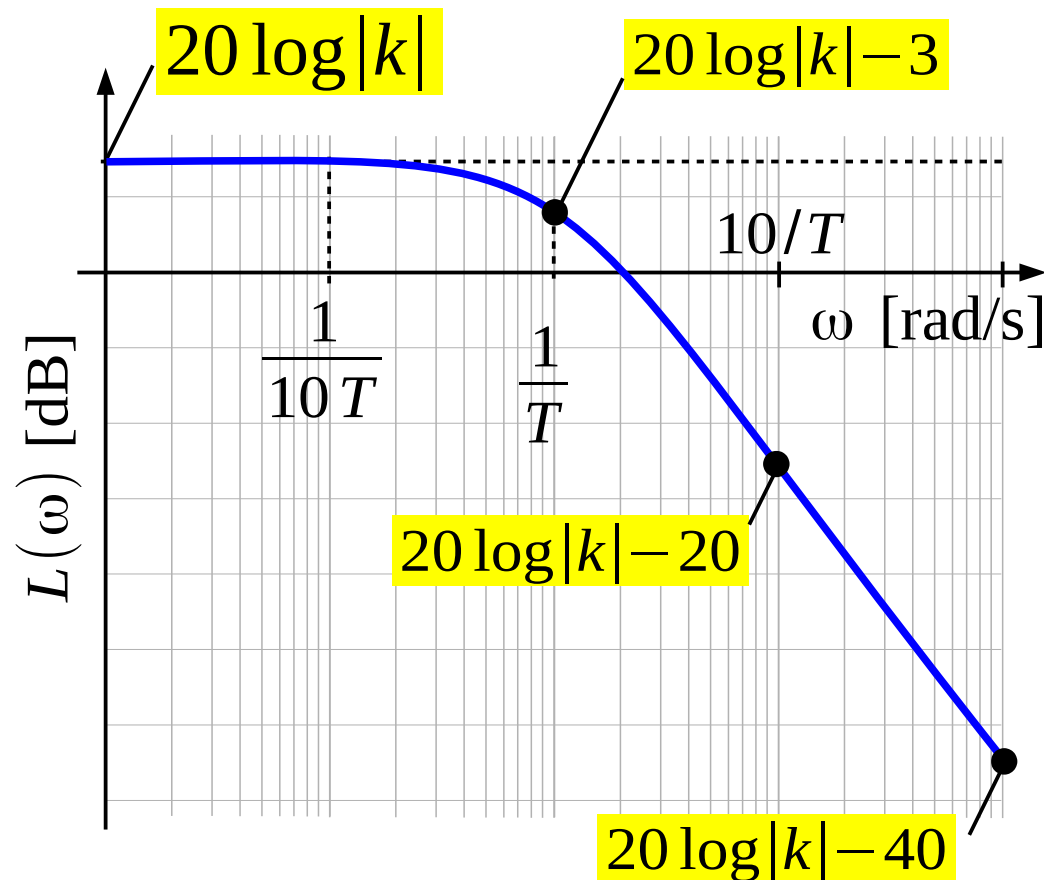


Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

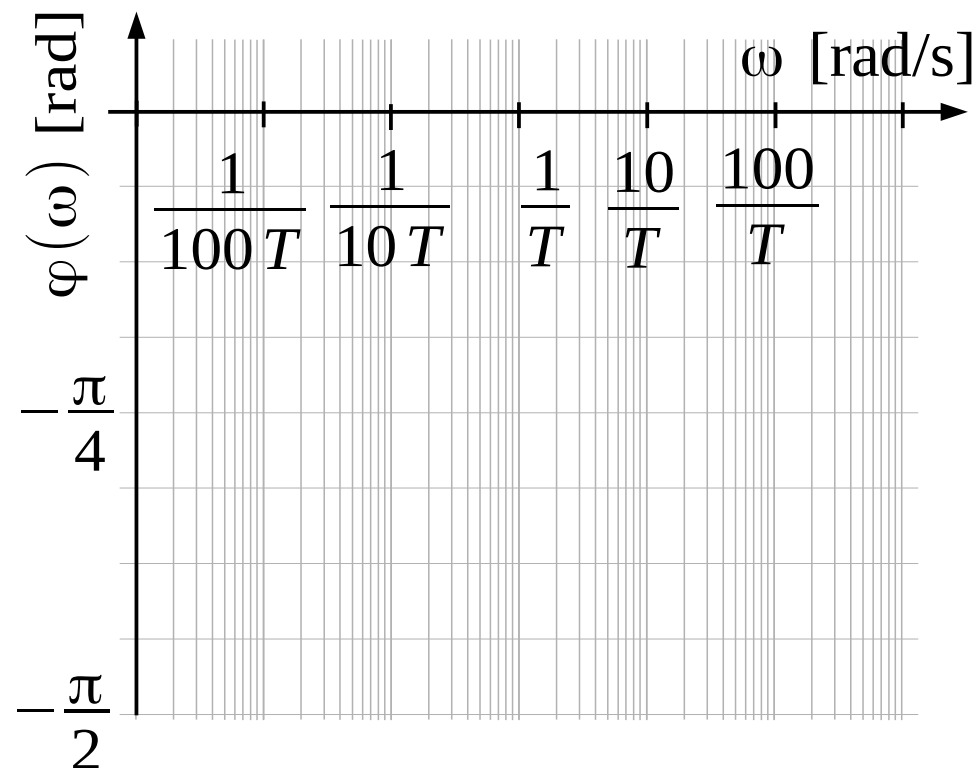
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$



Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$

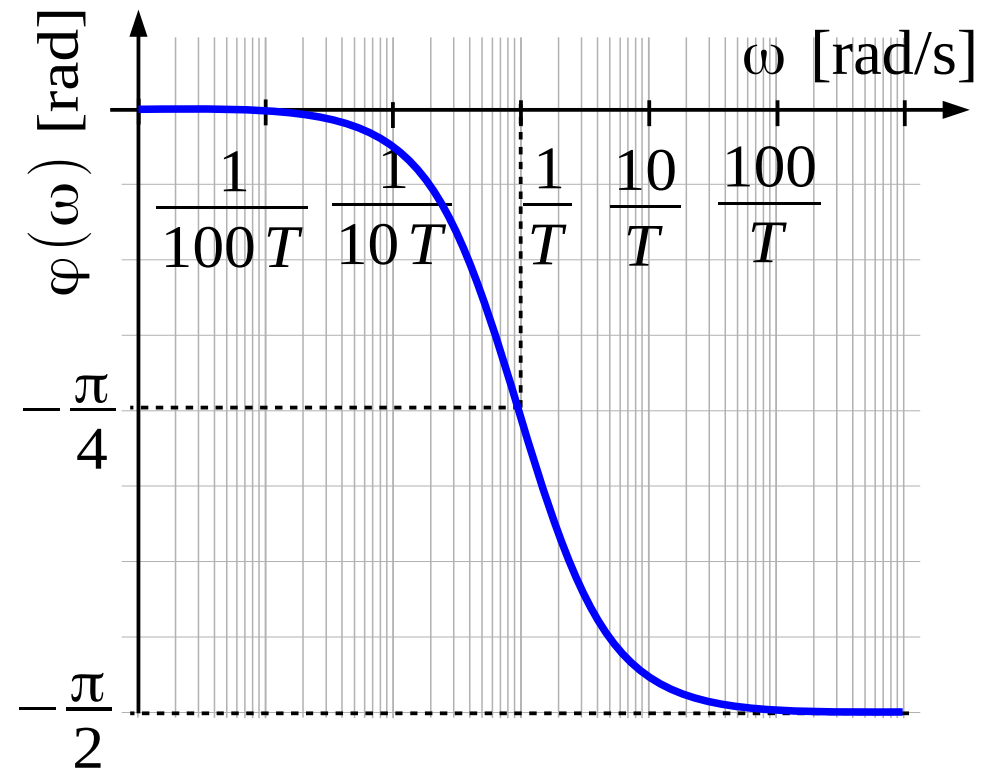
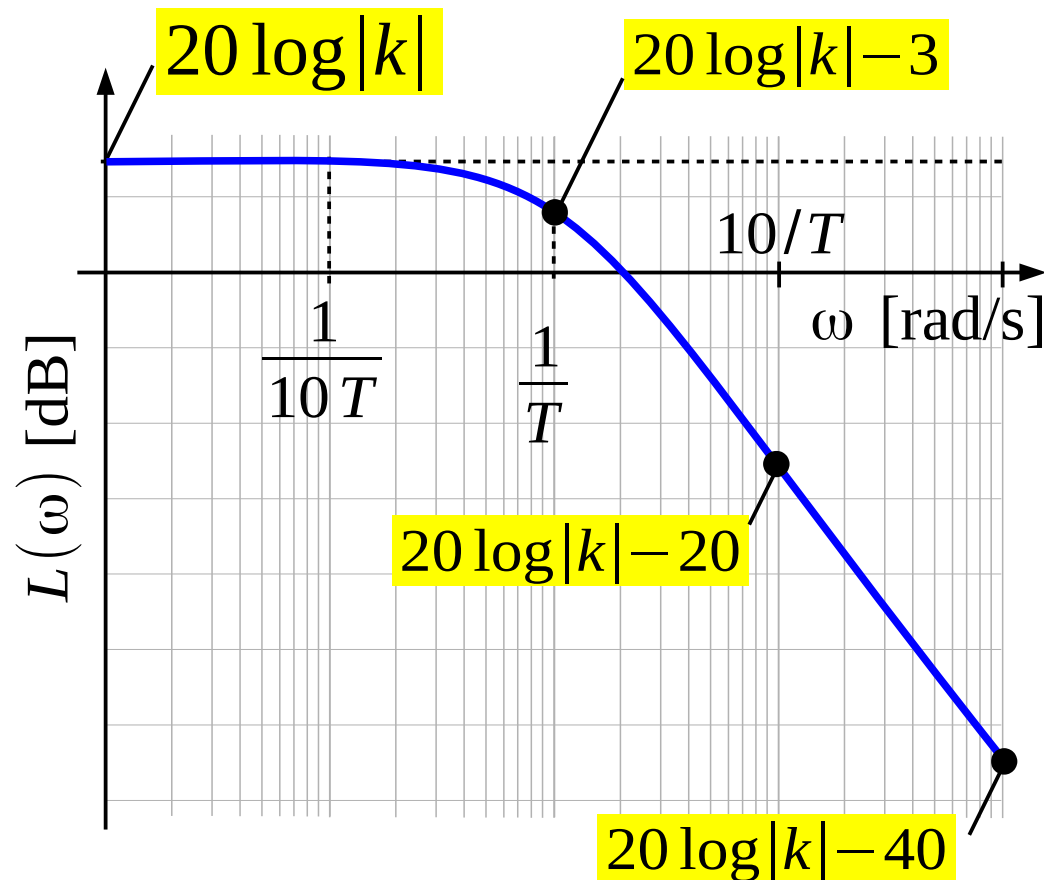


Element inercyjny pierwszego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

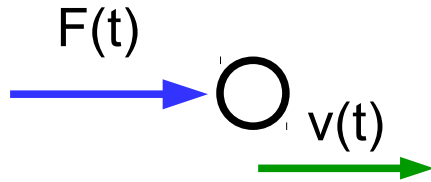
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-T \omega)$$



Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

1



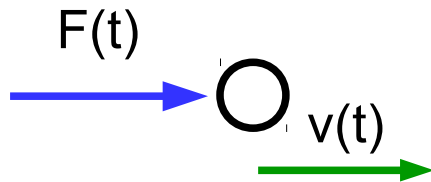
RUCH POSTĘPOWY PUNKTU
MATERIALNEGO Z LINIOWYM
TŁUMIENIEM:
wejście – siła $F(t)$
wyjście – prędkość $v(t)$

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną – stałe przełożenia w układzie napędowym)

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

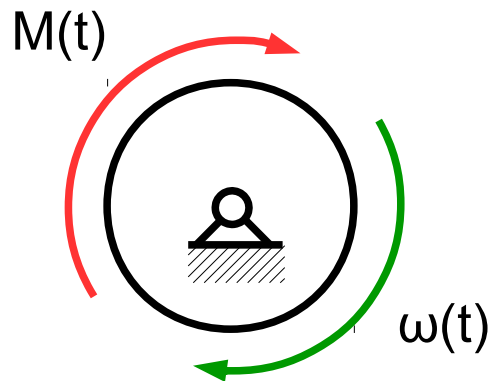
1



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU MATERIALNEGO Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – siła $F(t)$
wyjście – prędkość $v(t)$

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

2

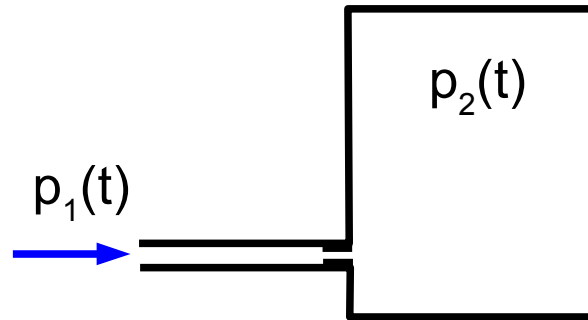


RUCH OBROTOWY BRYŁY SZTYWNEJ Z LINIOWYM TŁUMIENIEM:
wejście – moment $M(t)$
wyjście – prędkość kątowna $\omega(t)$

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

3



ZBIORNIK POWIETRZA:

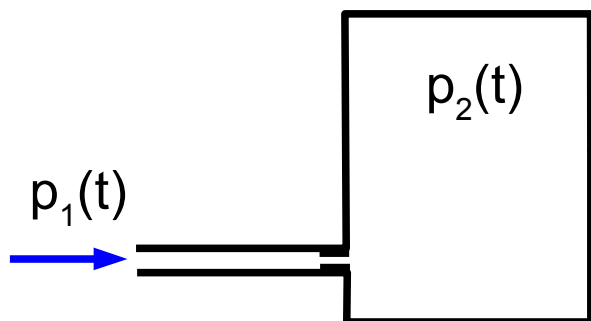
wejscie – ciśnienie $p_1(t)$

wyjscie – ciśnienie $p_2(t)$

Element inercyjny pierwszego rzędu

Przykłady

3

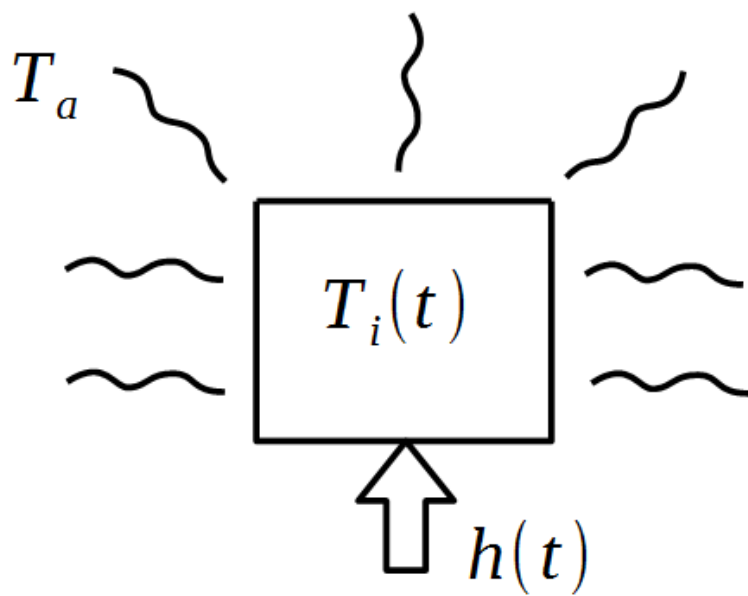


ZBIORNIK POWIETRZA:

wejście – ciśnienie $p_1(t)$

wyjście – ciśnienie $p_2(t)$

4



OGRZEWANY OBIEKT O MAŁEJ
BEZWŁADNOŚCI:

wejście – moc grzałki $h(t)$

wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$

Element całkujący

1. Równanie:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

Element całkujący

1. Równanie:
$$\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$$

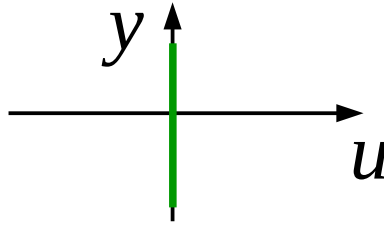
$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

Element całkujący

1. Równanie: $\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $u = 0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

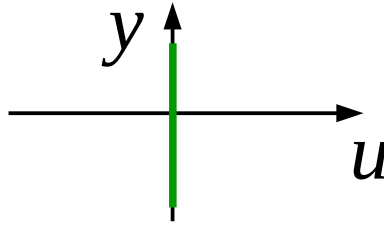


3. Transmitancja:

Element całkujący

1. Równanie: $\frac{dy(t)}{dt} = k u(t)$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $u = 0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $G(s) = \frac{k}{s}$

Element całkujący

4. Odp. skokowa:

Element całkujący

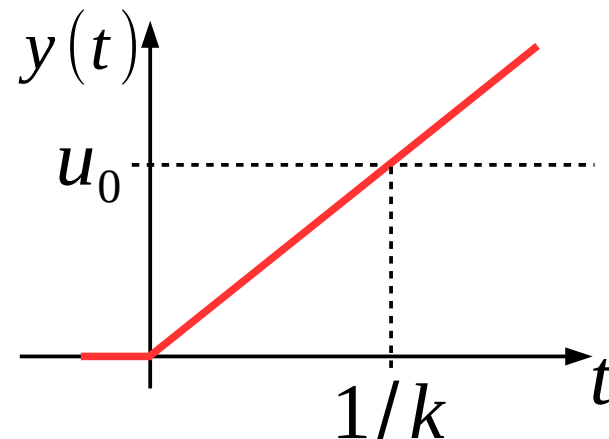
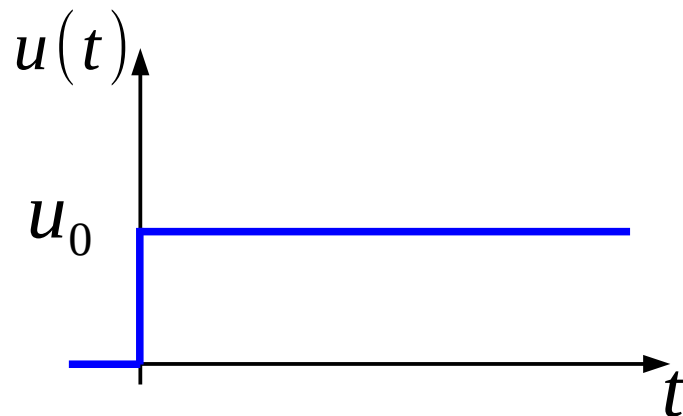
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplace'a wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplace'a wyjścia: $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k u_0}{s^2}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 t$



Element całkujący

5. Transmitancja widmowa:

Element całkujący

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

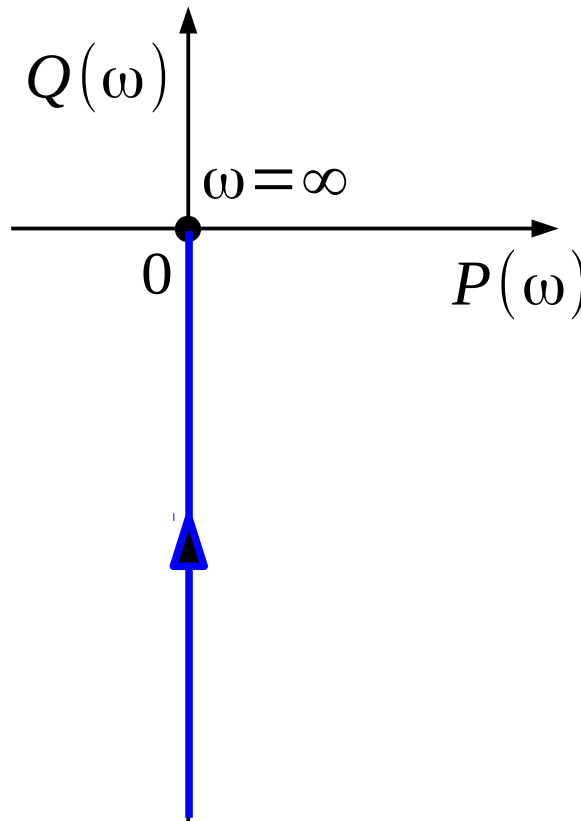
6. Wykres Nyquista:

Element całkujący

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

6. Wykres Nyquista:
dla $k > 0$



Element całkujący

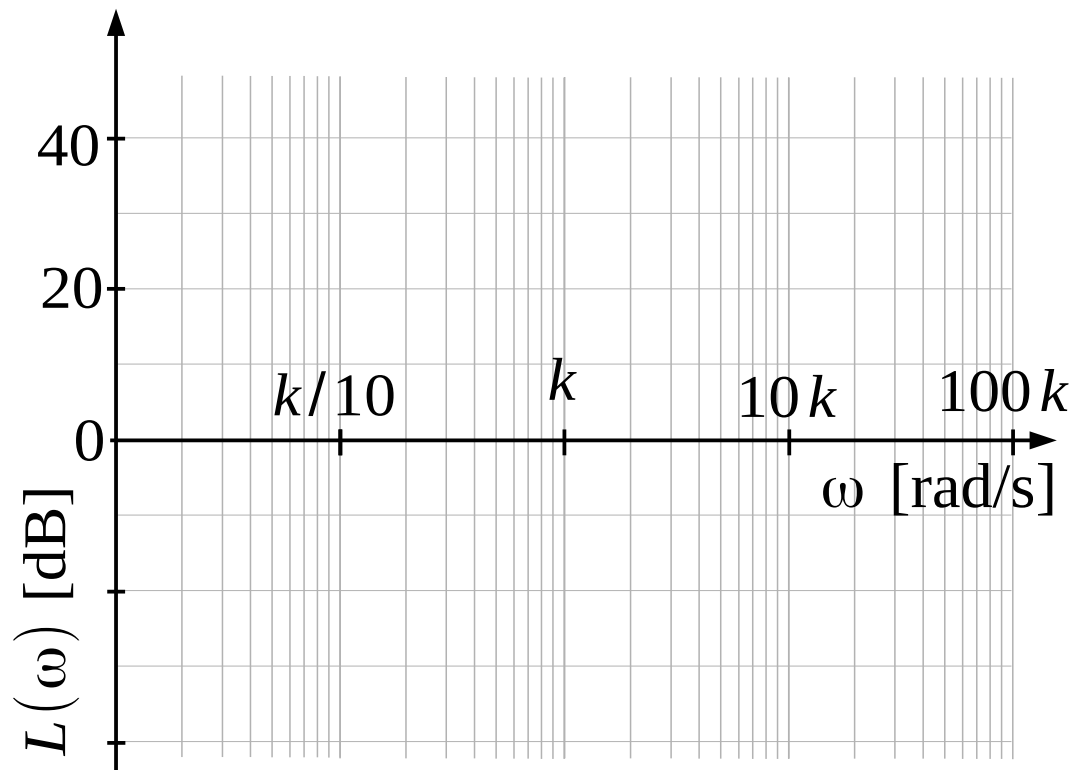
7. Wykres Bodego:

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$

Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

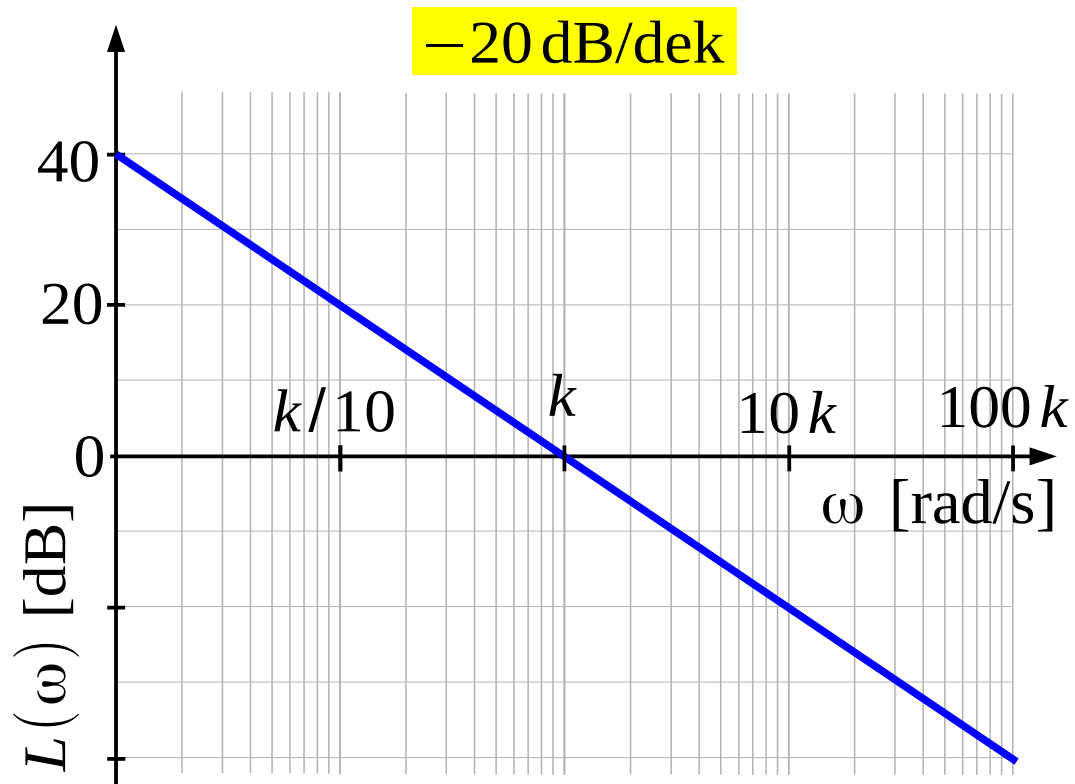
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right|$$



Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

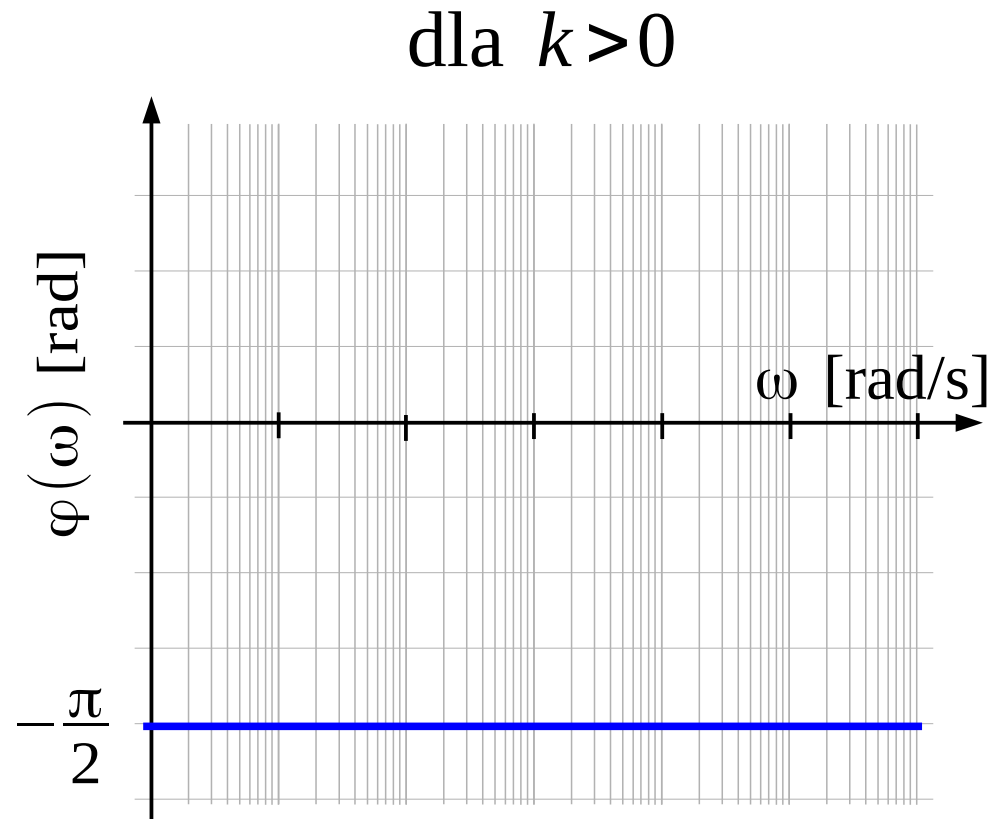
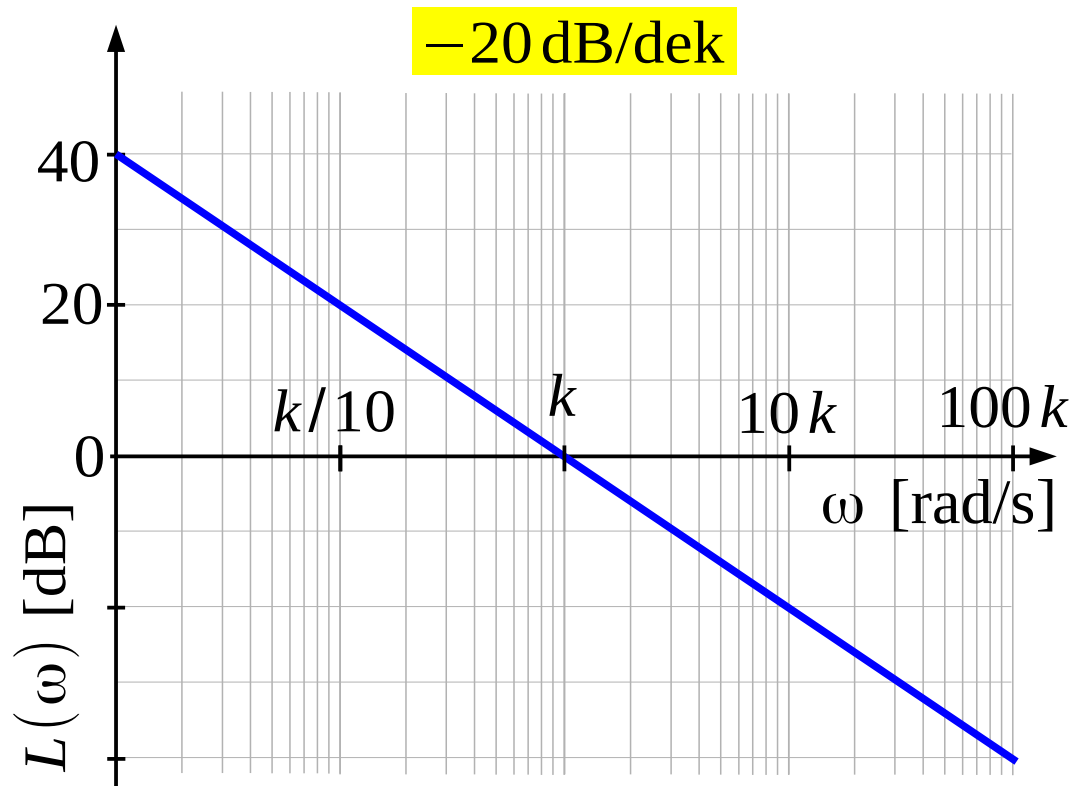
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right|$$



Element całkujący

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = \left| \frac{k}{\omega} \right|$

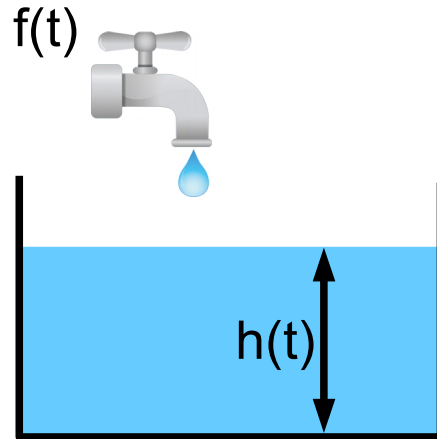
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log \left| \frac{k}{\omega} \right| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\infty)$$



Element całujący

Przykłady

1



PROSTOPADŁOŚCIENNY
ZBIORNIK PŁYNU:

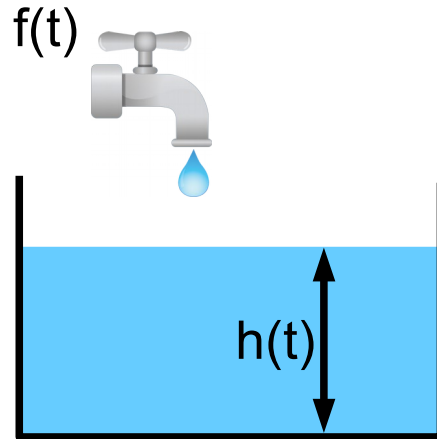
wejście – wydatek dopływu $f(t)$

wyjście – poziom cieczy $h(t)$

Element całkujący

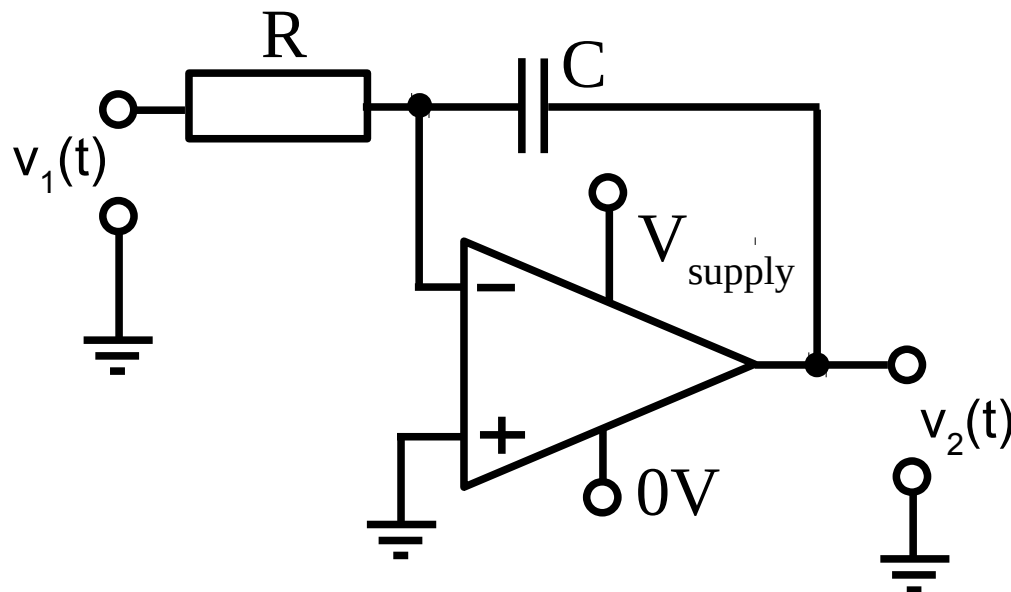
Przykłady

1



PROSTOPADŁOŚCIENNY
ZBIORNIK PŁYNU:
wejście – wydatek dopływu $f(t)$
wyjście – poziom cieczy $h(t)$

2



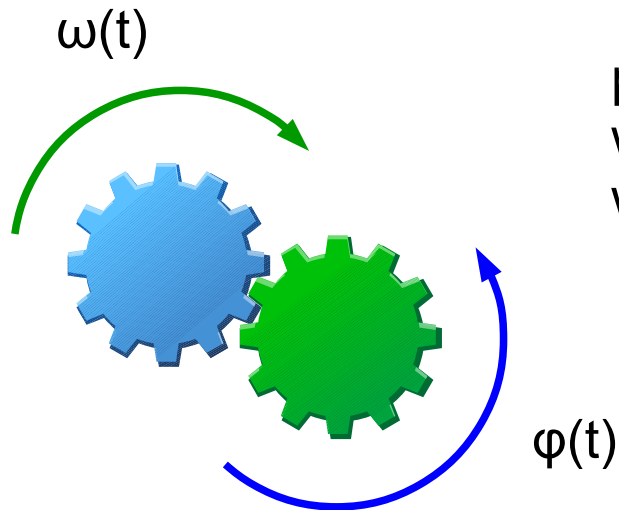
WZMACNIACZ
OPERACYJNY:
wejście – napięcie $v_1(t)$
wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t v_1(t) dt$$

Element całkujący

Przykłady

3

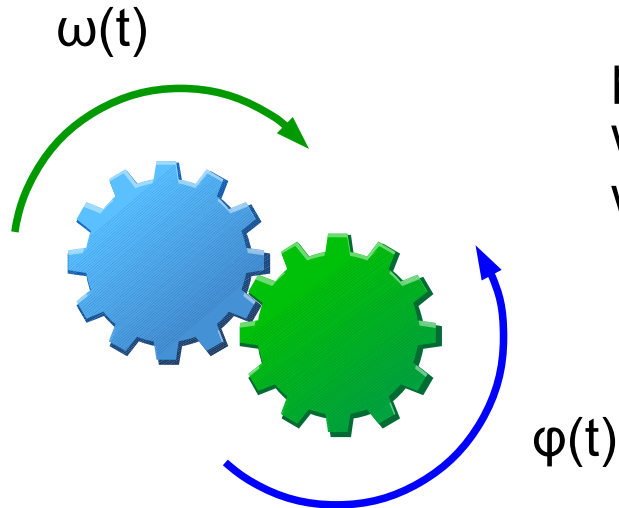


przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowna $\omega(t)$
wyjście – kąt obrotu $\varphi(t)$

Element całkujący

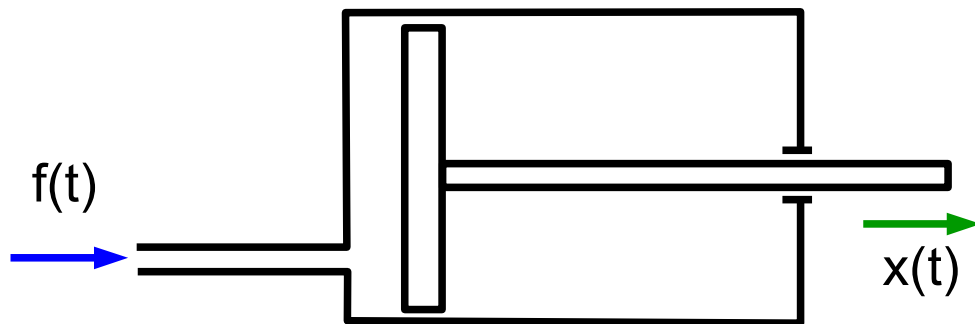
Przykłady

3



przekładnia zębata:
wejście – prędkość kątowa $\omega(t)$
wyjście – kąt obrotu $\varphi(t)$

4



CYLINDER HYDRAULICZNY:
wejście – wydatek cieczy $f(t)$
wyjście – przemieszczenie $x(t)$

Element różniczkujący idealny

1. Równanie:

$$y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

Element różniczkujący idealny

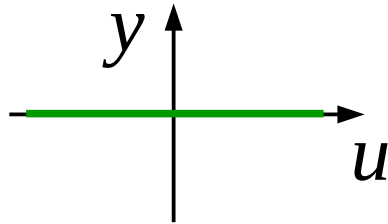
1. Równanie: $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y = 0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

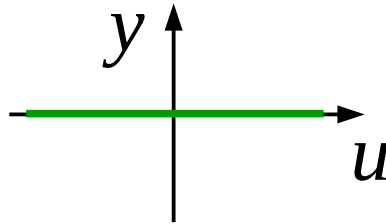


3. Transmitancja:

Element różniczkujący idealny

1. Równanie: $y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja: $G(s) = k s$

Element różniczkujący idealny

4. Odp. skokowa:

Element różniczkujący idealny

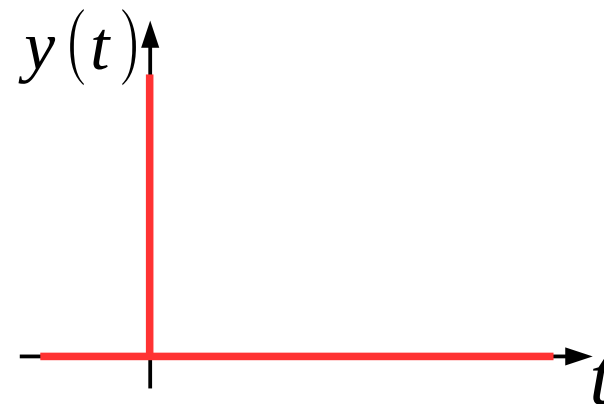
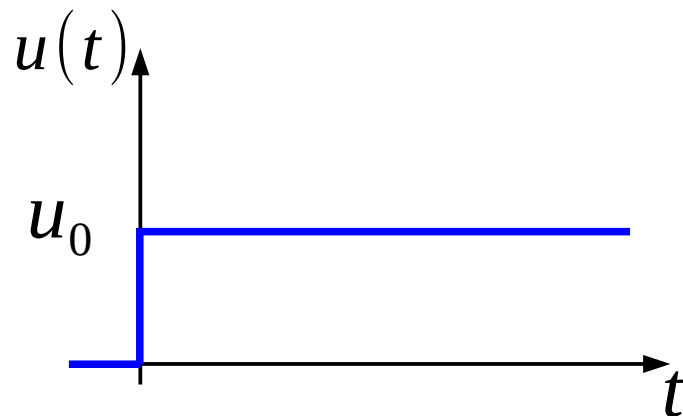
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s)U(s) = k u_0$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 \delta(t)$



Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa:

Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = jk\omega$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

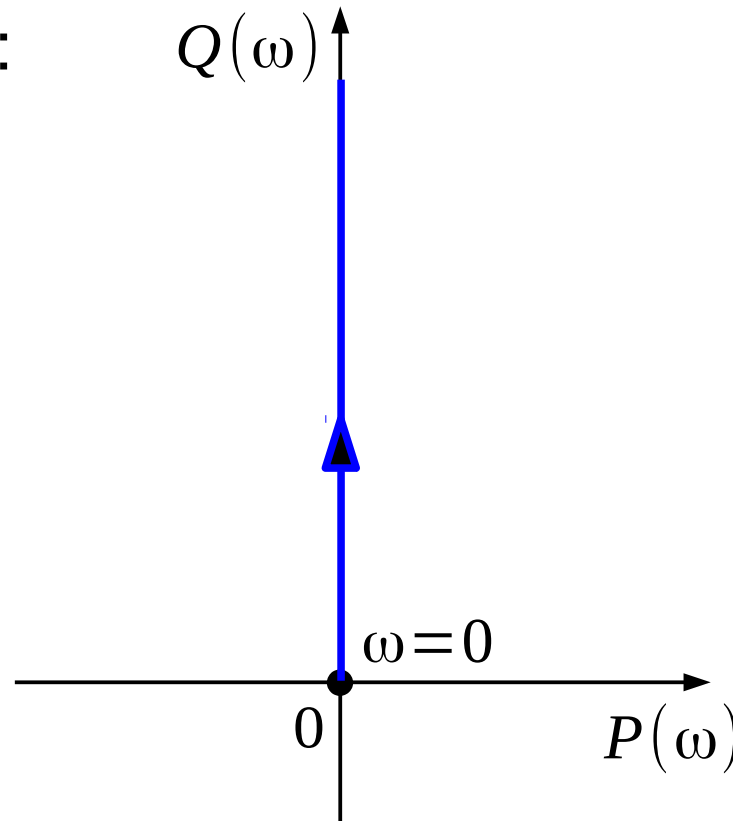
6. Wykres Nyquista:

Element różniczkujący idealny

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = jk\omega$

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k\omega$$

6. Wykres Nyquista:
dla $k > 0$



Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = k \omega$$

Element różniczkujący idealny

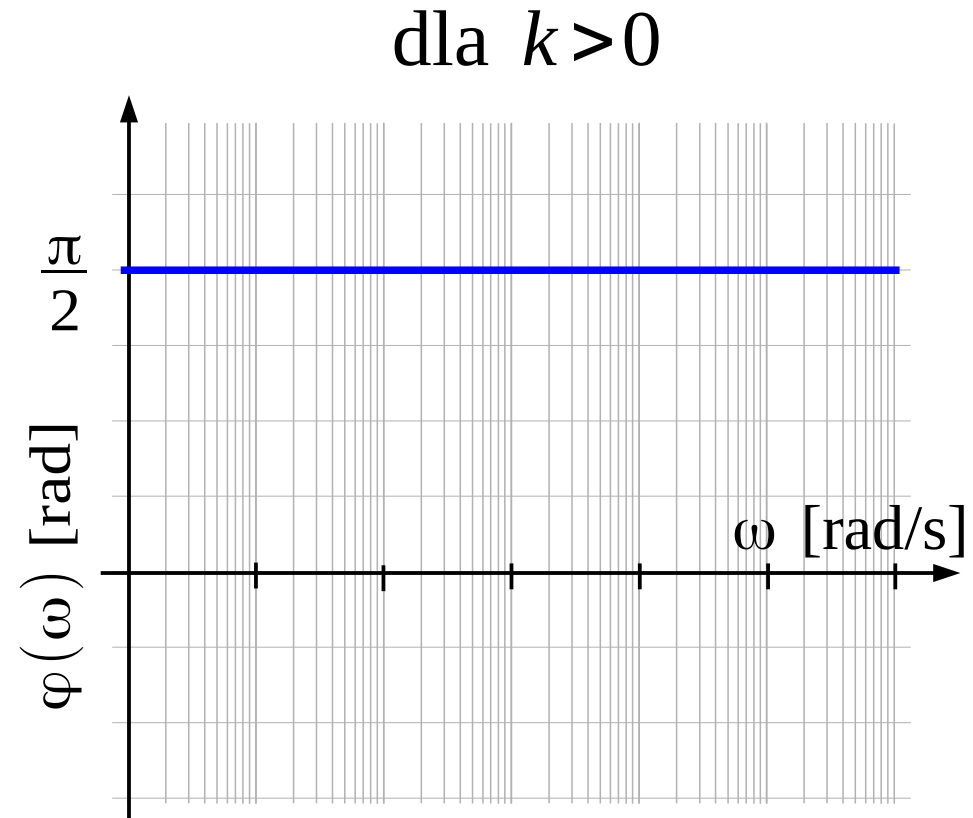
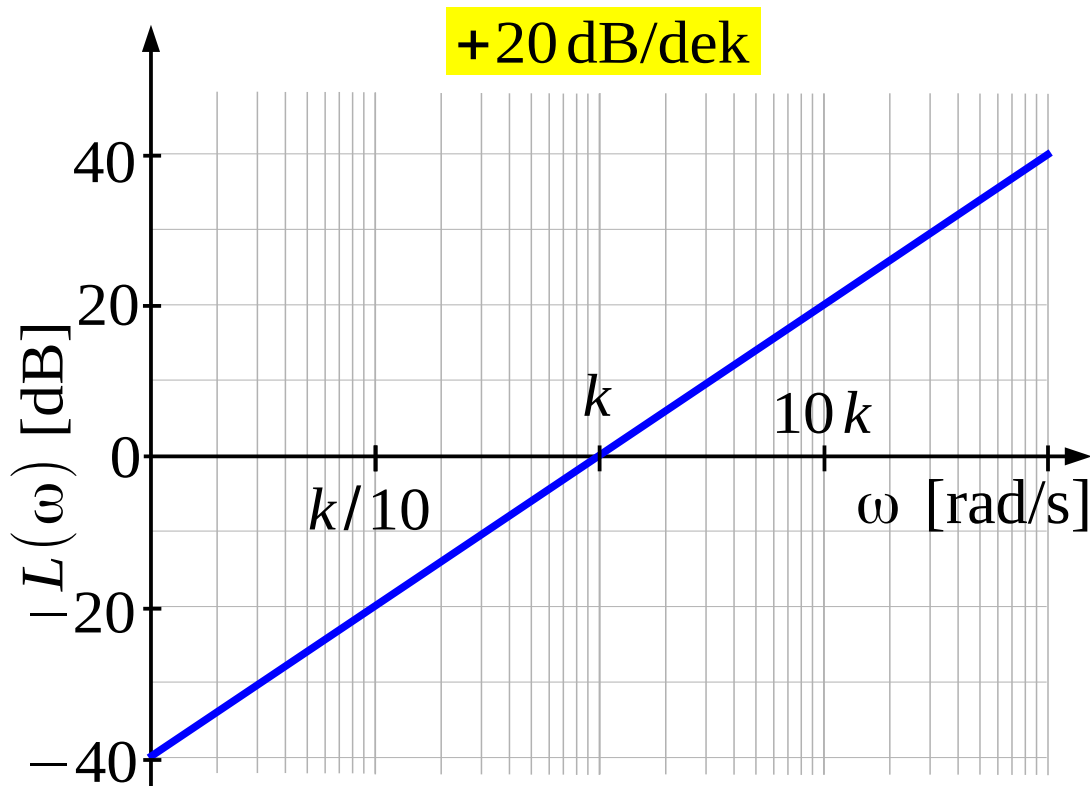
7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(\infty)$$

Element różniczkujący idealny

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega|$

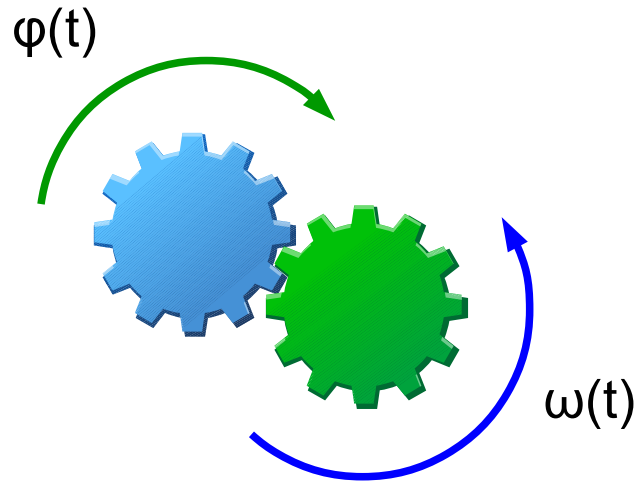
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| \quad \varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(\infty)$$



Element różniczkujący idealny

Przykłady

1



PRZEKŁADNIA ZĘBATA:

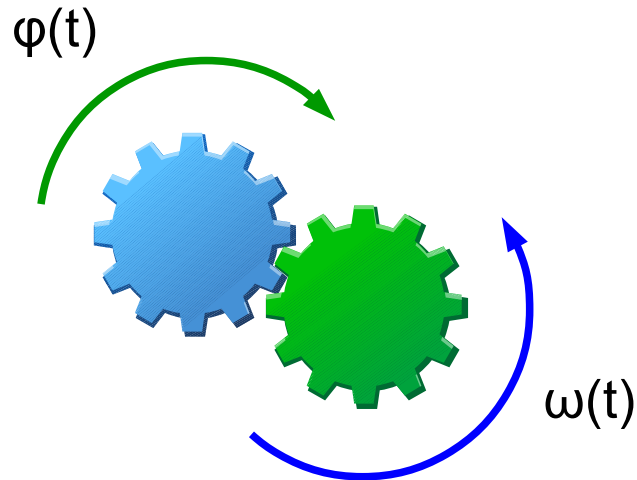
wejście – kąt obrotu $\varphi(t)$

wyjście – prędkość kątowa $\omega(t)$

Element różniczkujący idealny

Przykłady

1

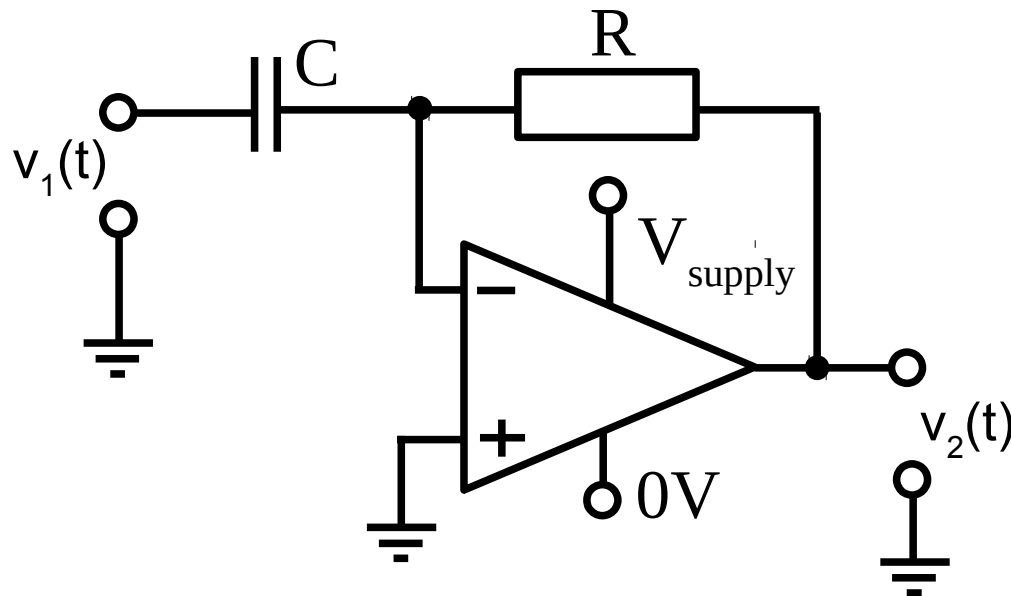


PRZEKŁADNIA ZĘBATA:

wejscie – kąt obrotu $\varphi(t)$

wyjście – prędkość kątowna $\omega(t)$

2



WZMACNIACZ
OPERACYJNY:

wejscie – napięcie $v_1(t)$

wyjście – napięcie $v_2(t)$

$$v_2(t) = -RC \frac{dv_1(t)}{dt}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie:
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$$

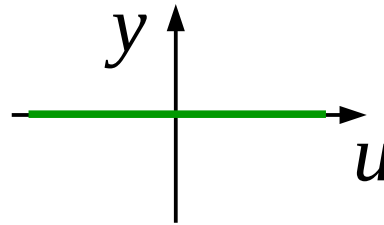
$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$

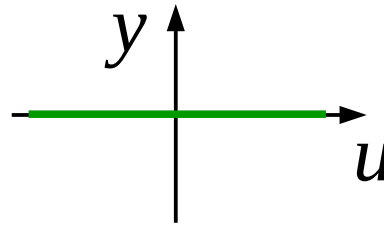


3. Transmitancja:

Element różniczkujący rzeczywisty

1. Równanie: $T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \frac{du(t)}{dt}$ $u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna: $y=0$ dla $\frac{dy}{dt}=0 \wedge \frac{du}{dt}=0$



3. Transmitancja: $G(s) = \frac{k s}{T s + 1}$

Element różniczkujący rzeczywisty

4. Odp. skokowa:

Element różniczkujący rzeczywisty

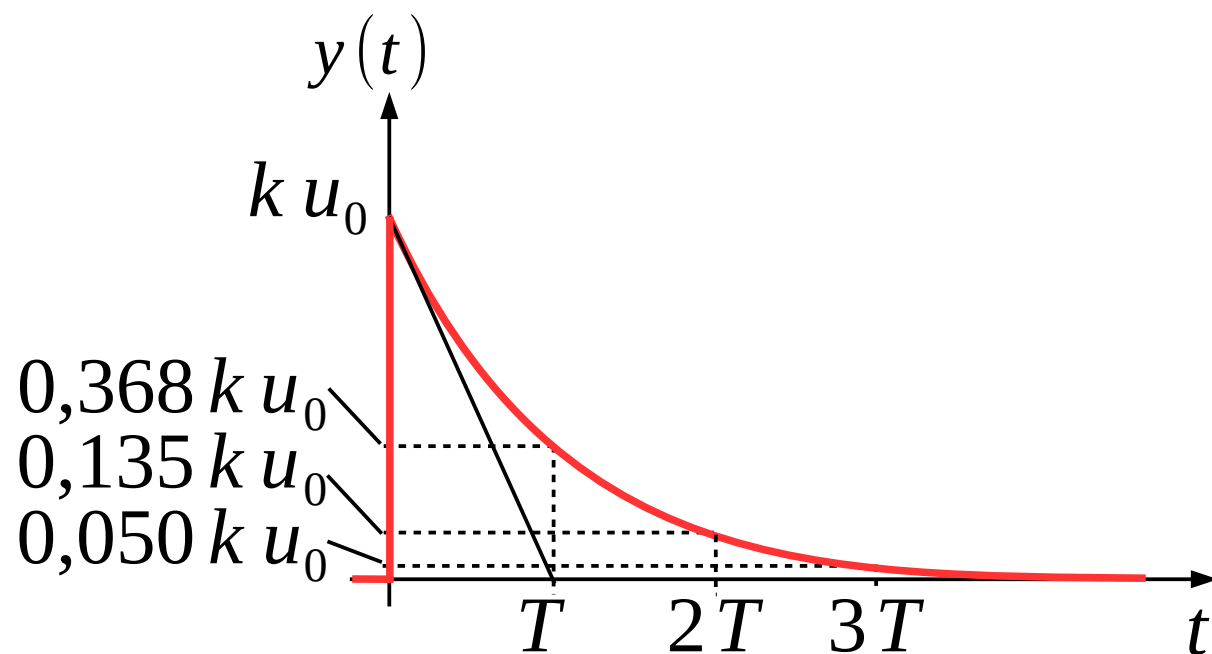
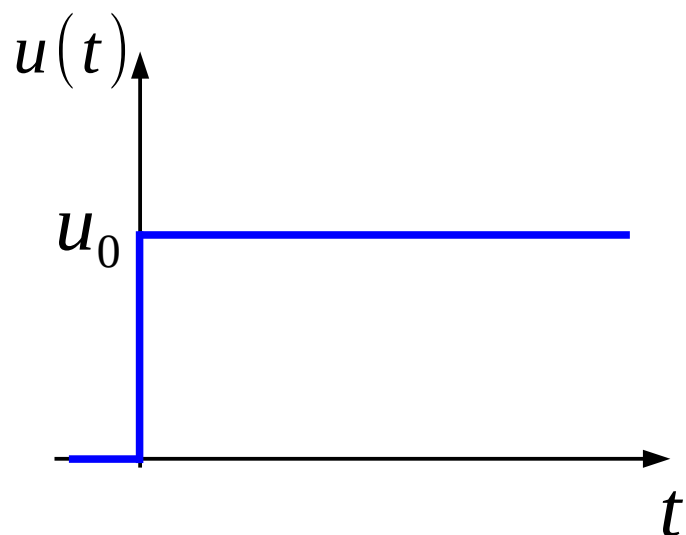
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k u_0}{Ts + 1}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = k u_0 e^{-t/T}$



Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa:

Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k T \omega^2}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:

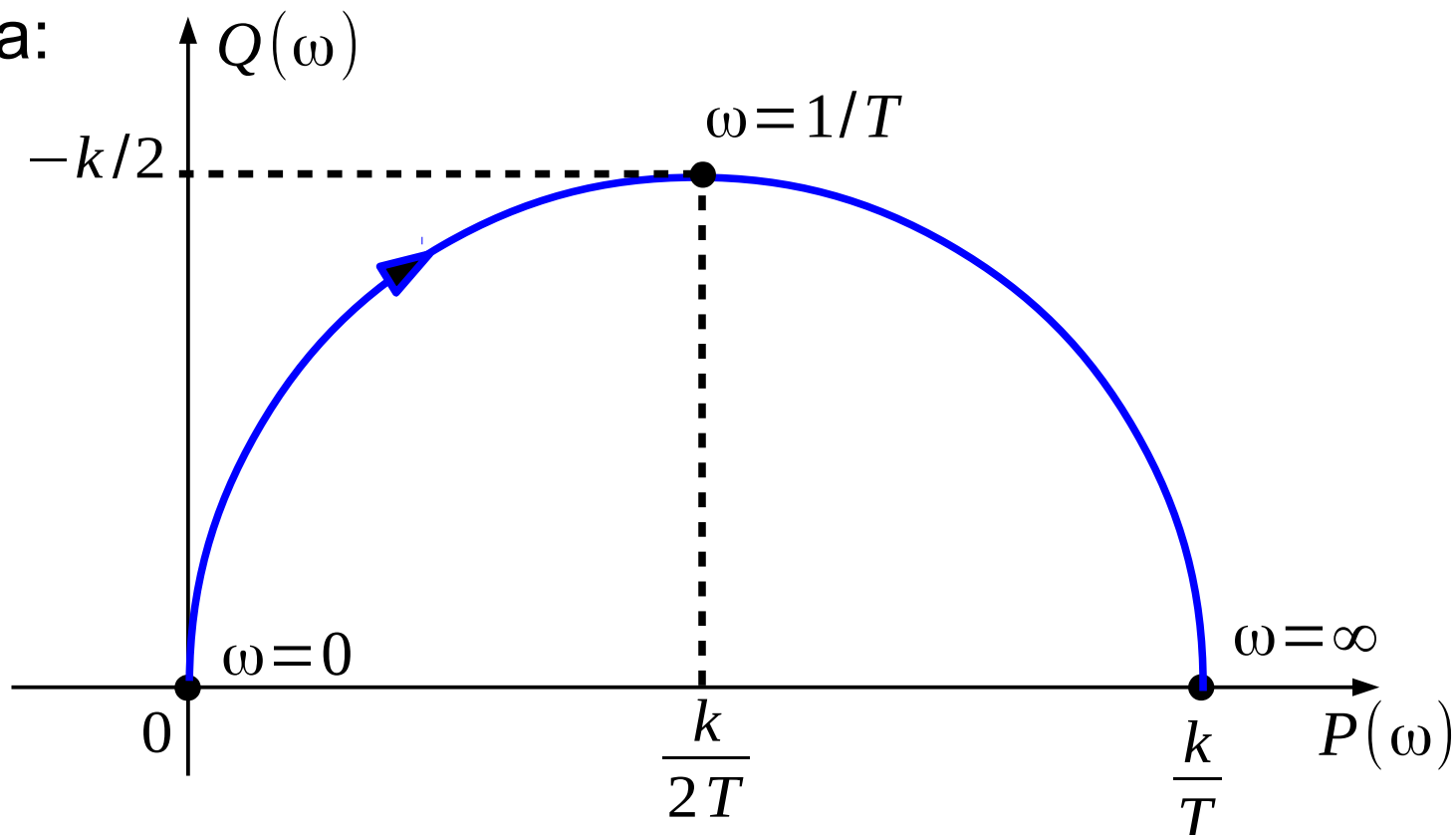
Element różniczkujący rzeczywisty

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k j \omega}{T j \omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k T \omega^2}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k > 0$



Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego:

$$P(\omega) = \frac{k T \omega^2}{T^2 \omega^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{T^2 \omega^2 + 1}$$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

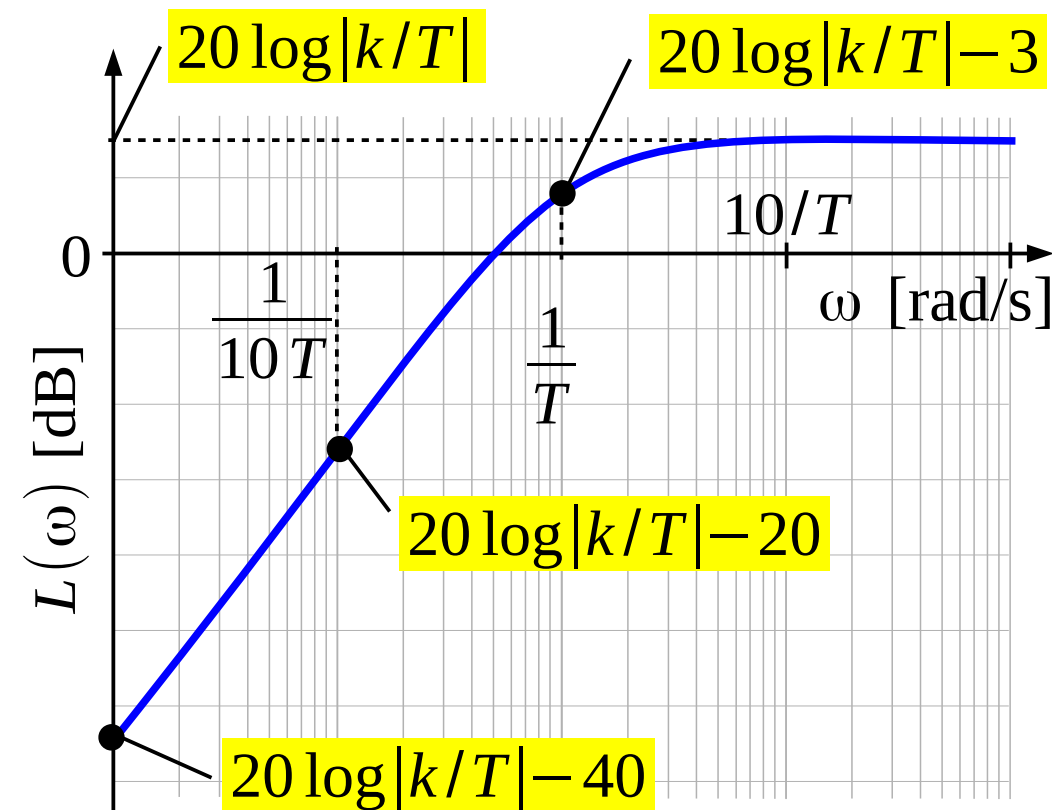
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left(\frac{1}{T \omega} \right)$$

Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left(\frac{1}{T \omega} \right)$$

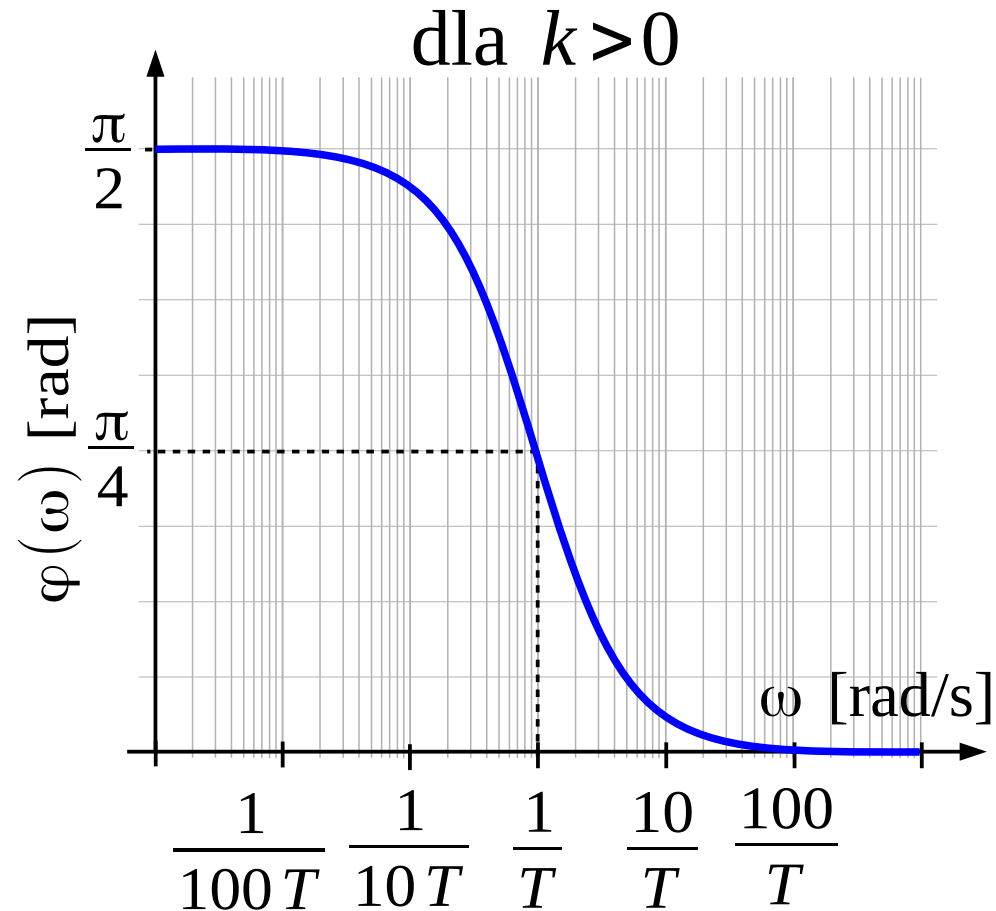
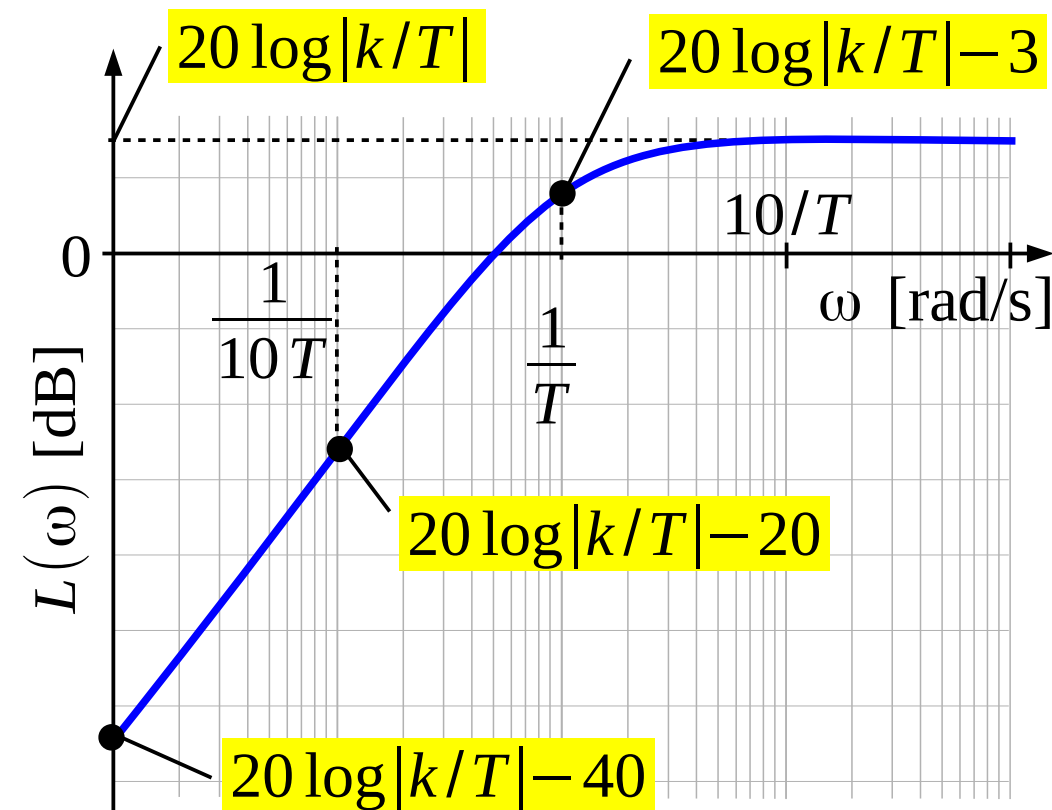


Element różniczkujący rzeczywisty

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = |k \omega| / \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |k \omega| - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}$$

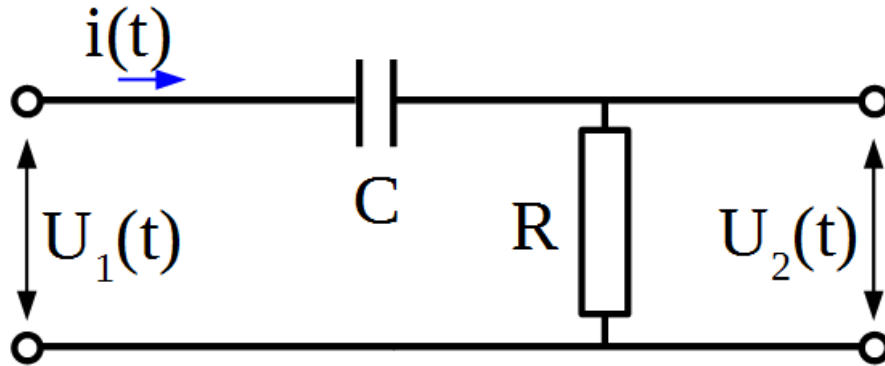
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan \left(\frac{1}{T \omega} \right)$$



Element różniczkujący rzeczywisty

Przykłady

1



OBWÓD RC:
wejście – napięcie $u_1(t)$
wyjście – napięcie $u_2(t)$

Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

Element opóźniający

1. Równanie:

$$y(t) = u(t - \tau)$$

$u(t)$ - wejście

$y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

Element opóźniający

1. Równanie:

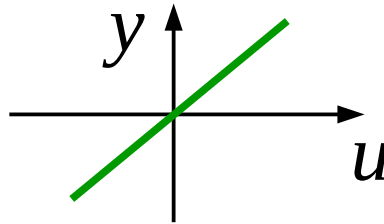
$$y(t) = u(t - \tau)$$

$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$y = u$$

dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:

Element opóźniający

1. Równanie:

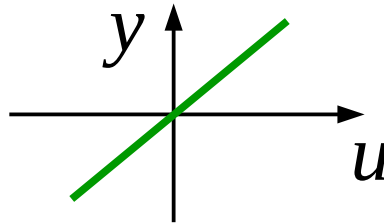
$$y(t) = u(t - \tau)$$

$u(t)$ - wejście
 $y(t)$ - wyjście

2. Charakterystyka statyczna:

$$y = u$$

dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:

$$G(s) = e^{-\tau s}$$

Element opóźniający

4. Odp. skokowa:

Element opóźniający

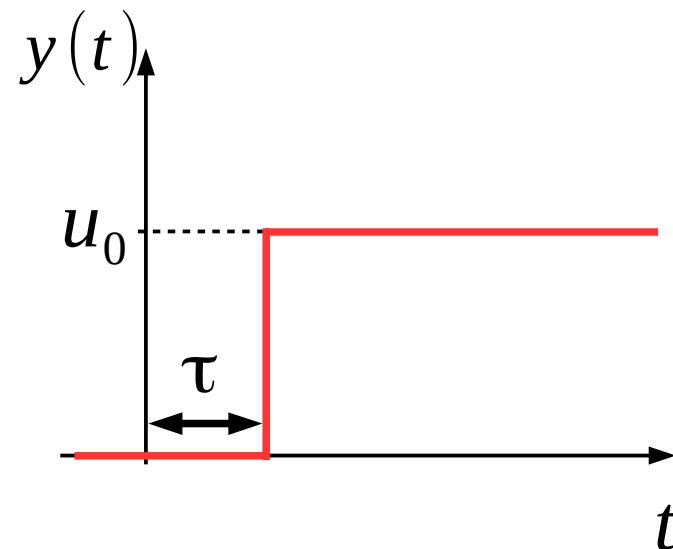
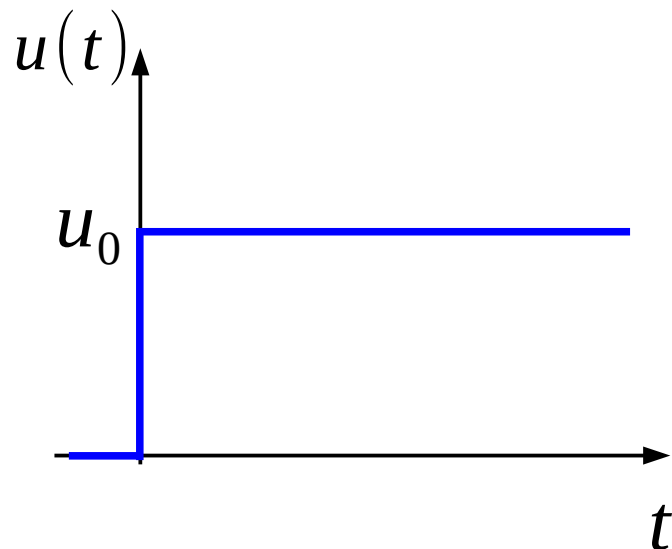
4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 \mathbf{1}(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{u_0}{s} e^{-\tau s}$

Wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = u_0 \mathbf{1}(t - \tau)$



Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa:

Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$

$$e^{-x} = \cos x - j \sin x$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:

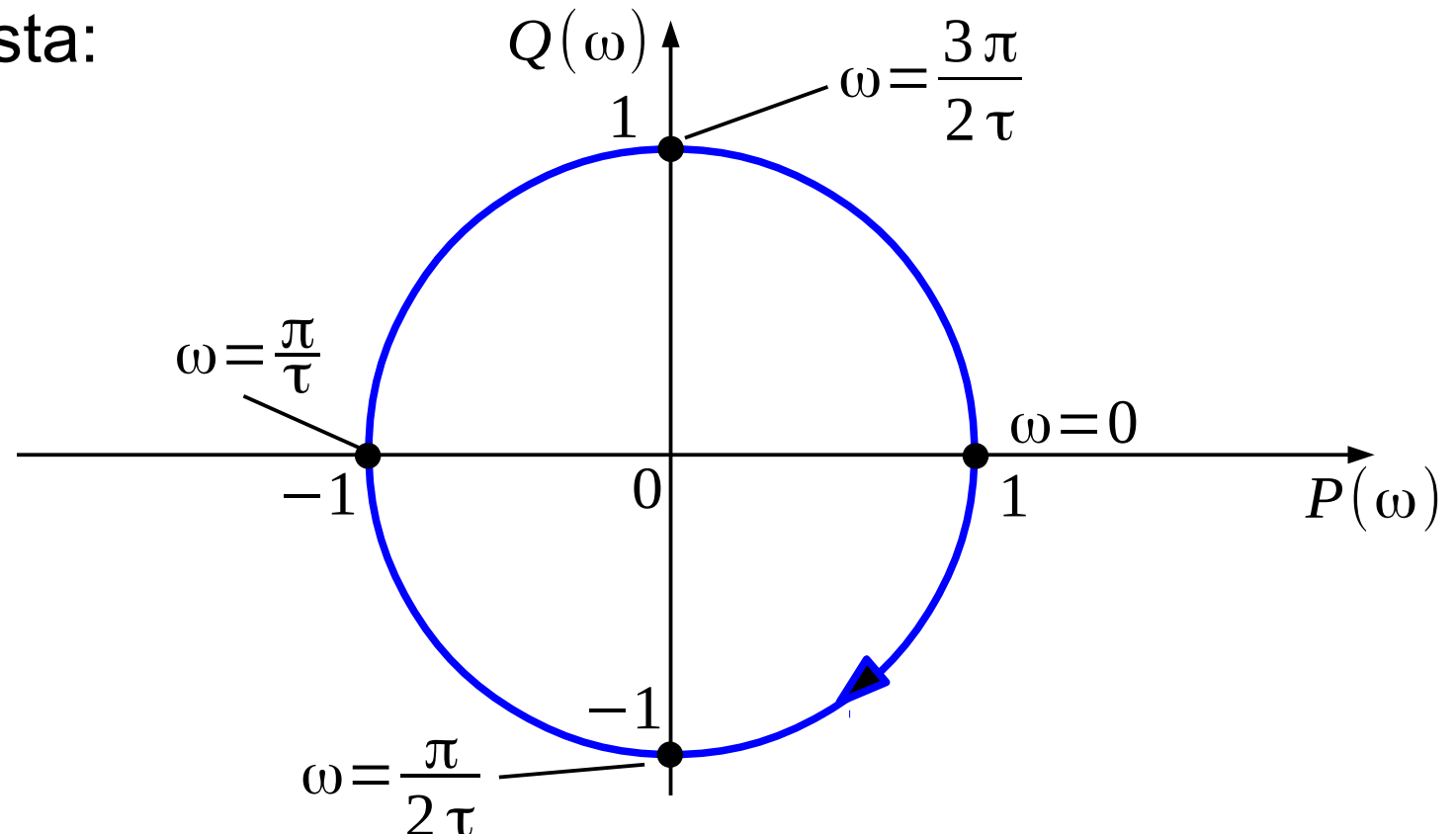
Element opóźniający

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$

$$e^{-x} = \cos x - j \sin x$$

$$P(\omega) = \cos(\tau\omega), \quad Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$$

6. Wykres Nyquista:



Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $P(\omega) = \cos(\tau\omega)$, $Q(\omega) = -\sin(\tau\omega)$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

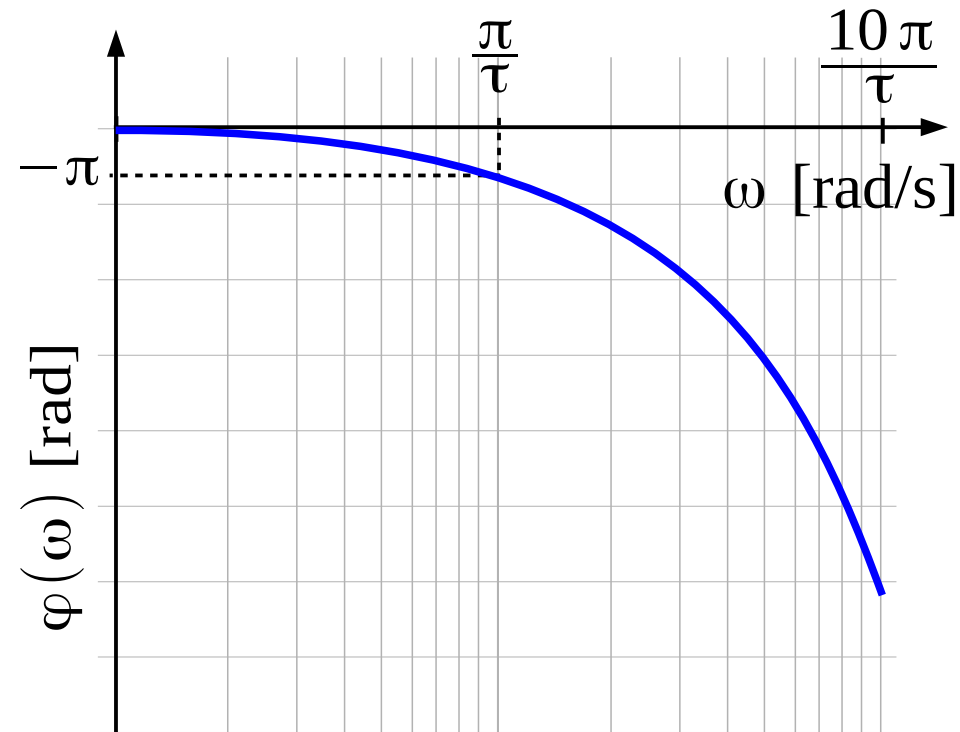
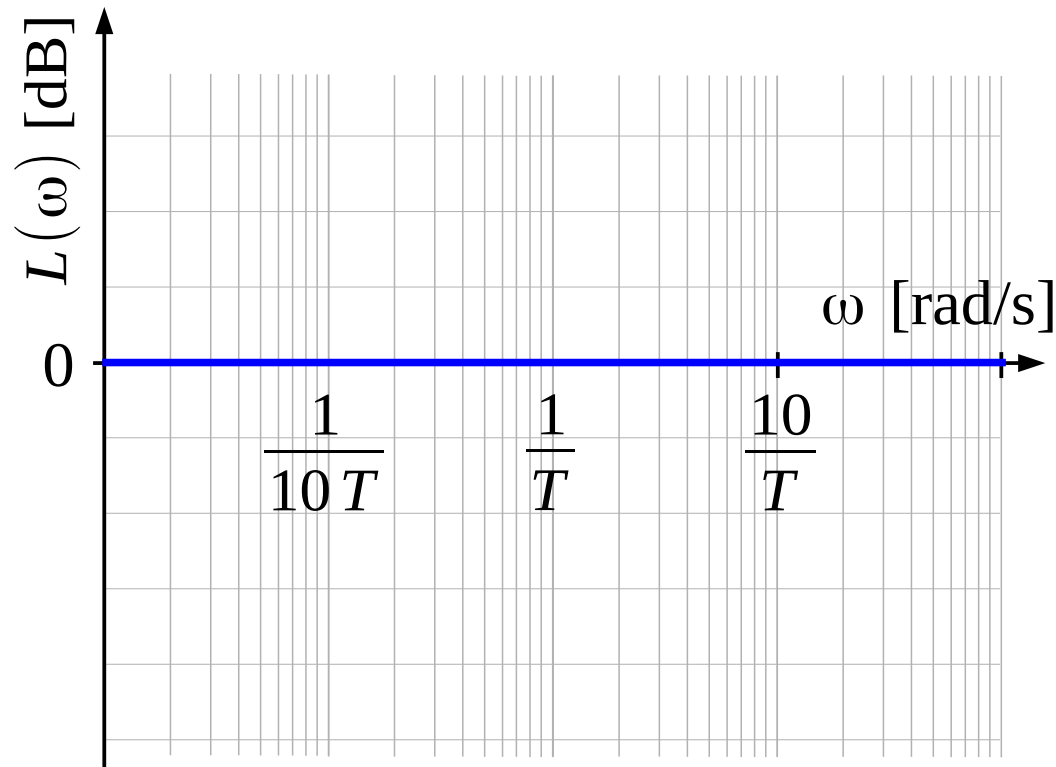
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\tan(\tau\omega)) = -\tau\omega$$

Element opóźniający

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1$

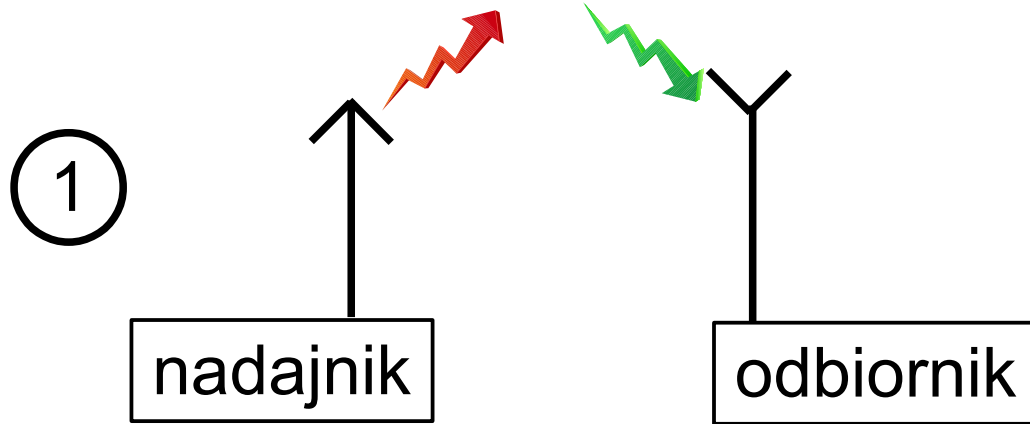
$$L(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log 1 = 0$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P} = \arctan(-\tan(\tau\omega)) = -\tau\omega$$



Element opóźniający

Przykłady



TRANSMISJA
BEZPRZEWODOWA:
wejście – dane wysłane
wyjście – dane odebrane

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:

$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

Element inercyjny drugiego rzędu

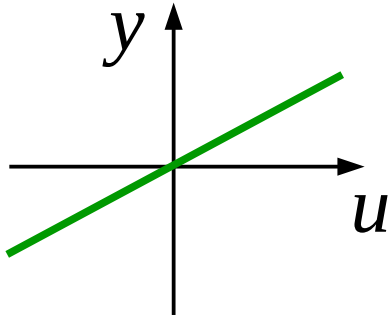
1. Równanie:
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna:

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$

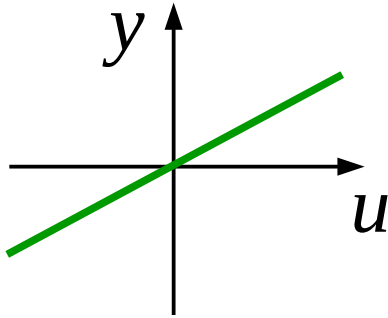


3. Transmitancja:

Element inercyjny drugiego rzędu

1. Równanie:
$$T_1^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k u(t)$$

2. Charakterystyka statyczna: $y = ku$ dla $\frac{dy}{dt} = 0 \wedge \frac{du}{dt} = 0$



3. Transmitancja:
$$G(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:

Wejście: $u(t) = u_0 1(t)$

Transformata Laplacea wejścia: $U(s) = u_0 \frac{1}{s}$

Transformata Laplacea wyjścia: $Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k u_0}{s(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}$

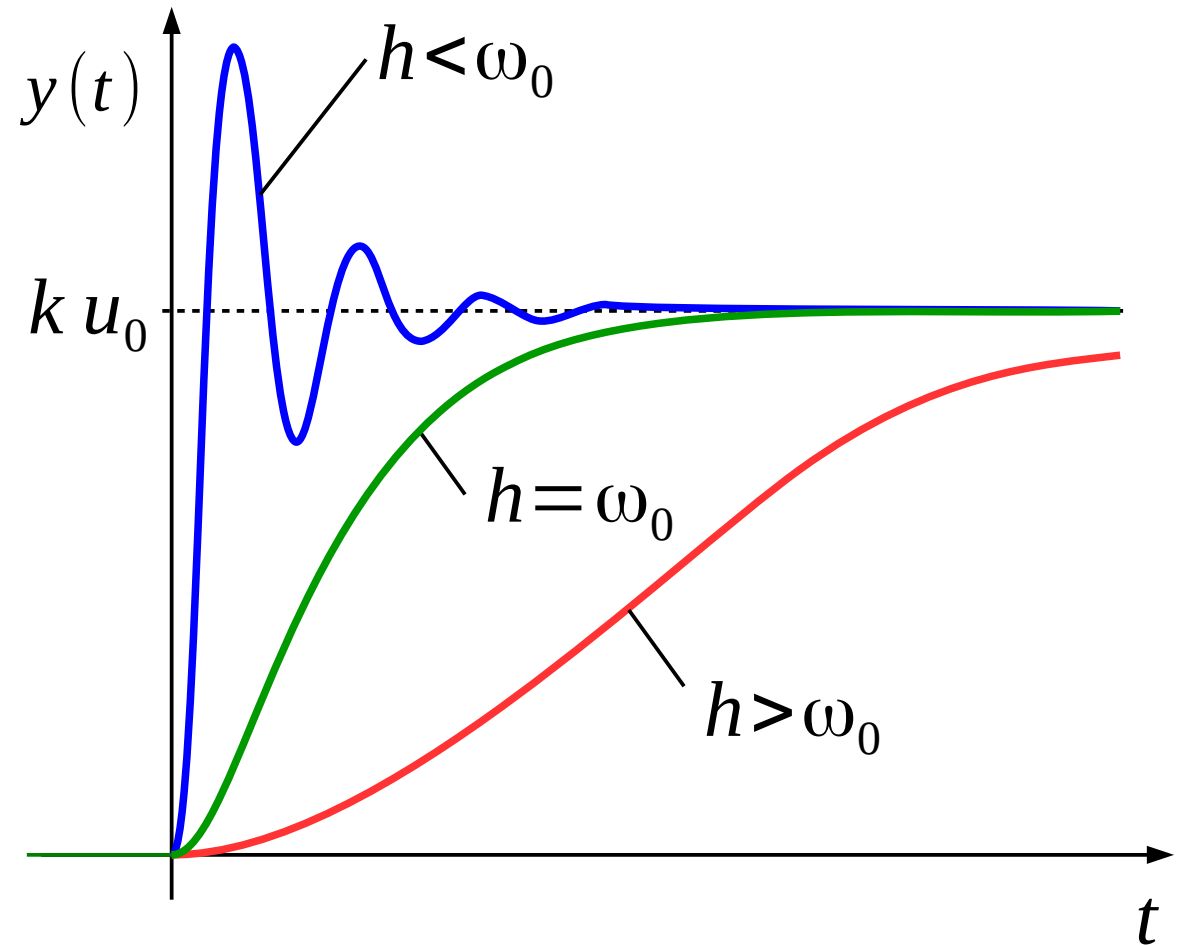
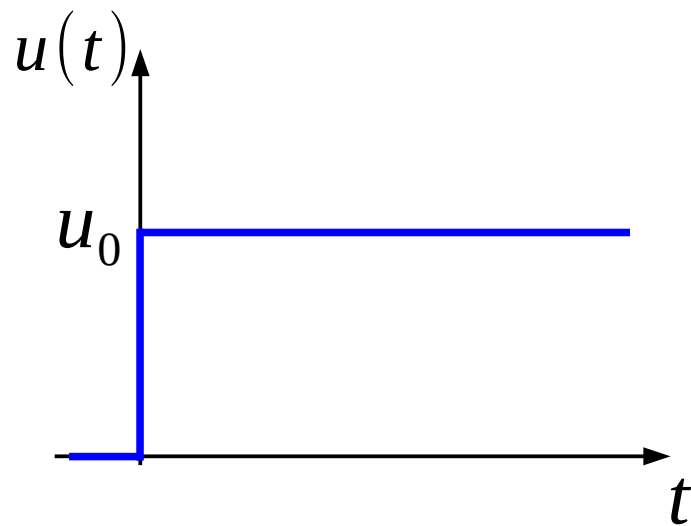
wyjście: $y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} =$

$$= \begin{cases} \frac{k u_0}{T_1^2} \left(1 - e^{-ht} \left(\cos \omega t + \frac{h}{\omega} \sin \omega t \right) \right), & \text{dla } h \leq \omega_0 \\ \frac{k u_0}{T_1^2} \left(1 + e^{-ht} \left(\left(\frac{h+w}{2w} - 1 \right) e^{-wt} - \frac{h+w}{2w} e^{wt} \right) \right), & \text{dla } h \geq \omega_0 \end{cases}$$

$$\text{gdzie: } h = \frac{T_2}{2T_1^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T_1}, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad w = \sqrt{h^2 - \omega_0^2}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

4. Odp. skokowa:



Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa:

$$G(s) = \frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$$

Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2\omega^2 + T_2 j\omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2\omega^2)}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-kT_2\omega}{(1 - T_1^2\omega^2)^2 + T_2^2\omega^2}$$

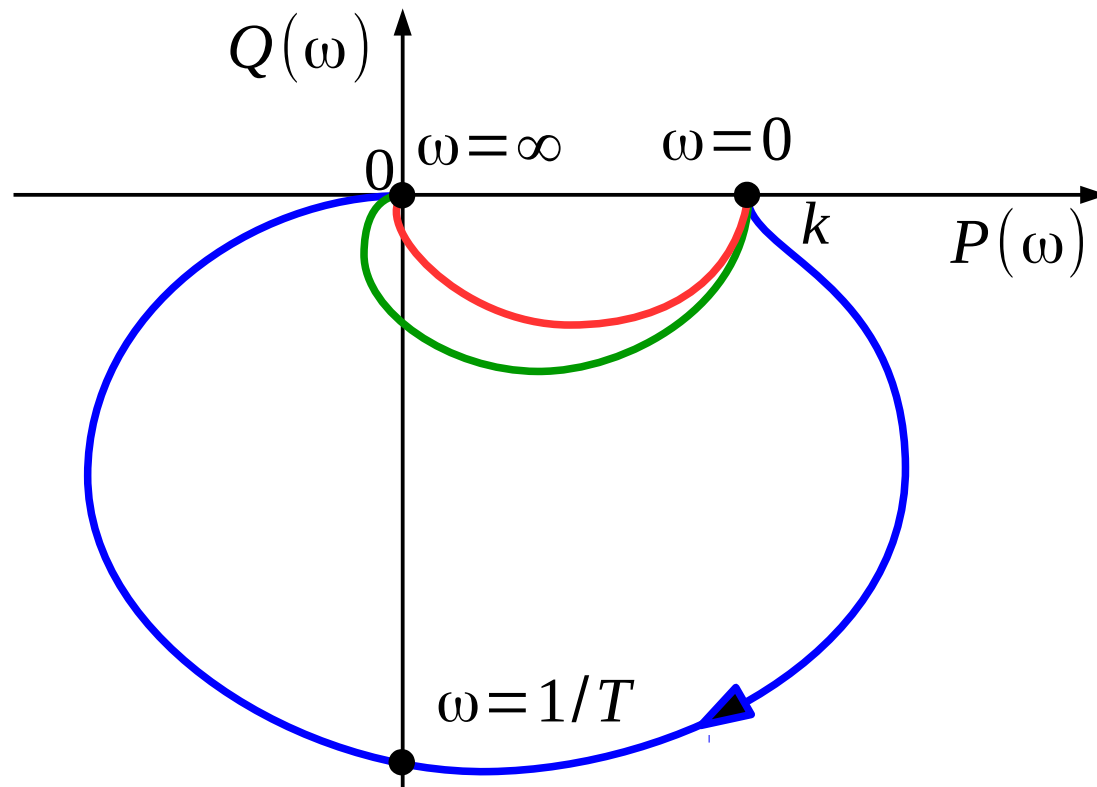
Element inercyjny drugiego rzędu

5. Transmitancja widmowa: $G(j\omega) = \frac{k}{-T_1^2 \omega^2 + T_2 j\omega + 1}$

$$P(\omega) = \frac{k(1 - T_1^2 \omega^2)}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-k T_2 \omega}{(1 - T_1^2 \omega^2)^2 + T_2^2 \omega^2}$$

6. Wykres Nyquista:

dla $k > 0$



- dla $h < \omega_0$
- dla $h = \omega_0$
- dla $h > \omega_0$

Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P}$$

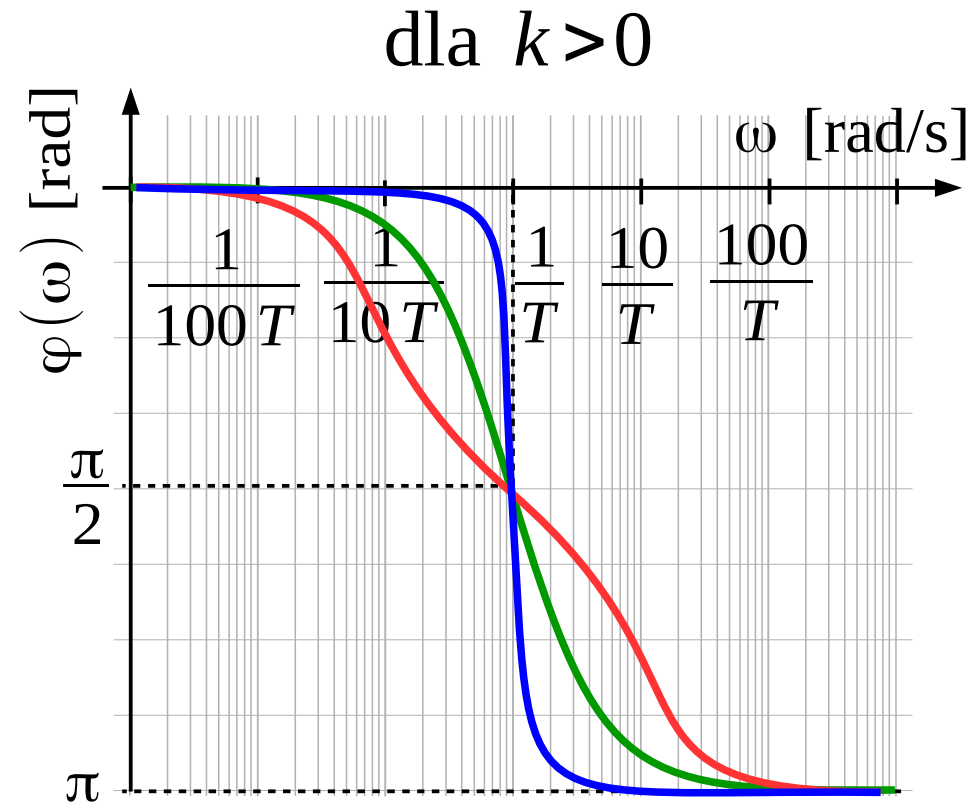
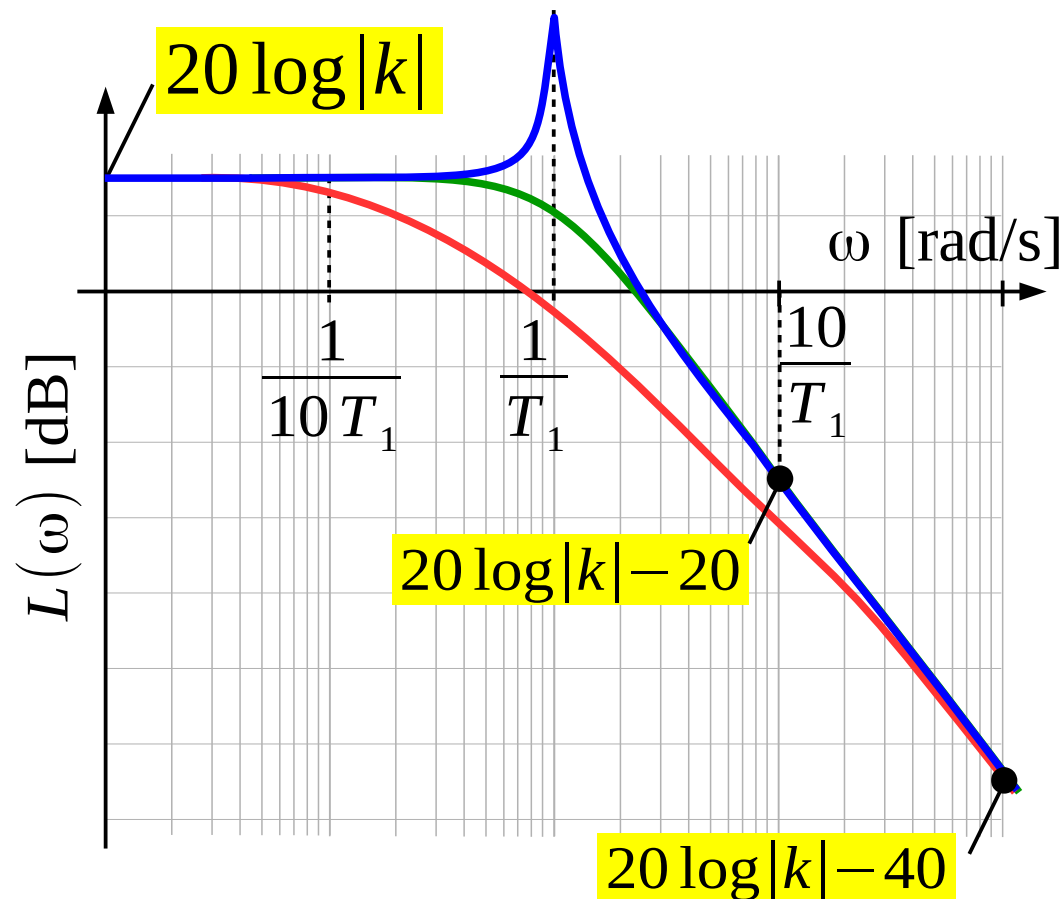
Element inercyjny drugiego rzędu

7. Wykres Bodego: $A(\omega) = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q}{P}$$

- dla $h < \omega_0$
- dla $h = \omega_0$
- dla $h > \omega_0$



Element inercyjny drugiego rzędu

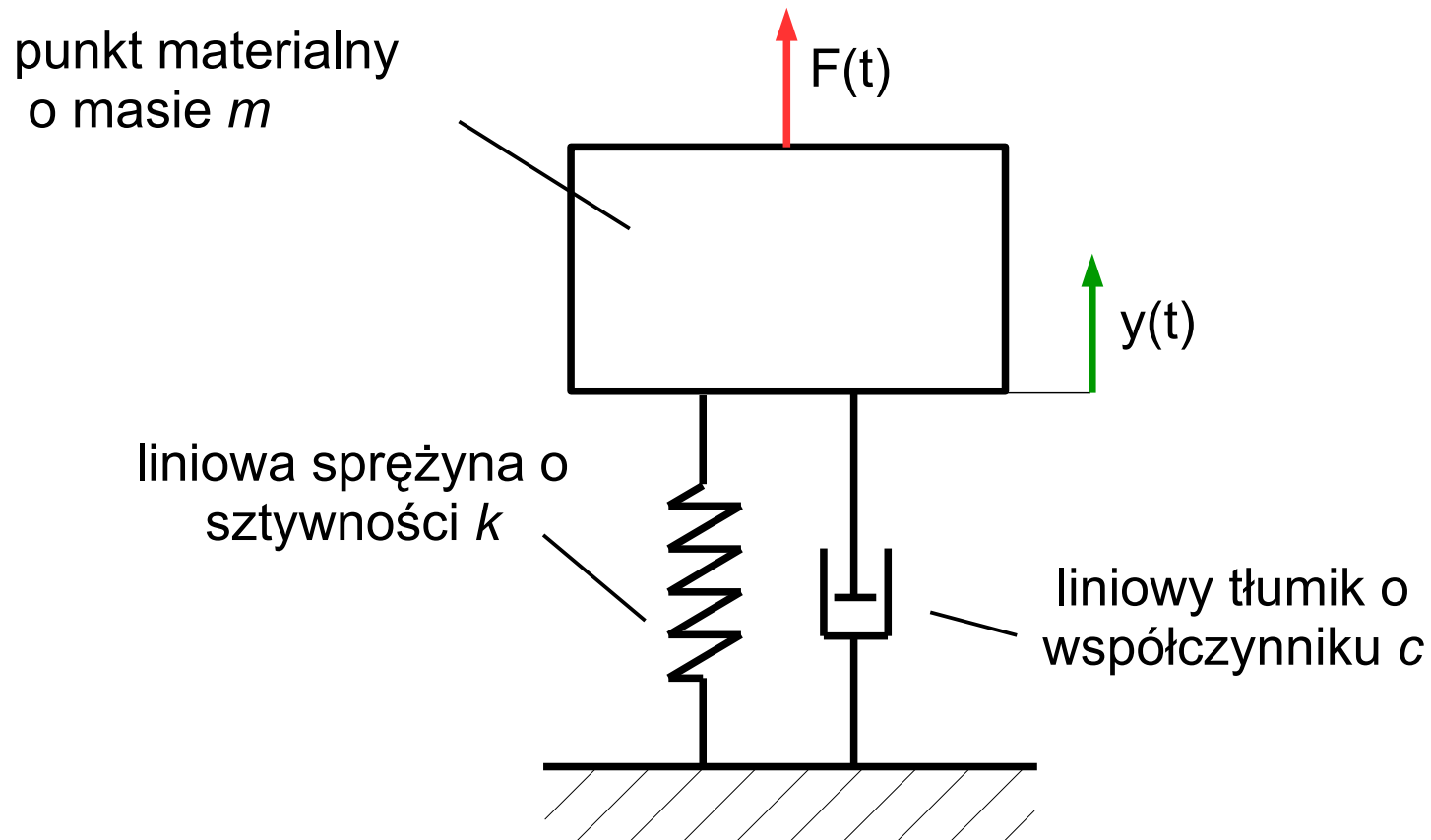
Przykłady

1

UKŁAD DRGAJĄCY:

wejscie – siła $F(t)$

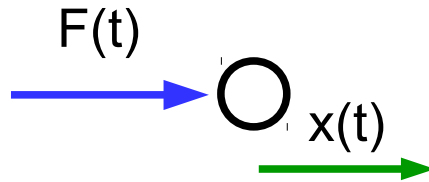
wyjście – przemieszczenie $y(t)$



Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

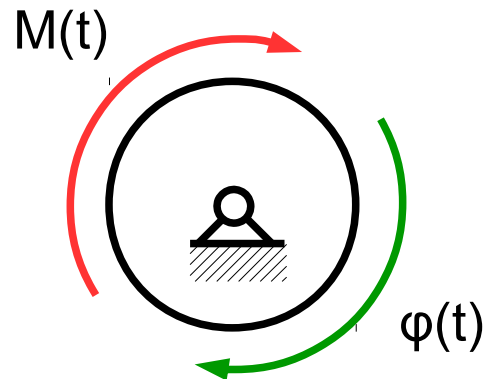
②



RUCH POSTĘPOWY PUNKTU
MATERIALNEGO Z LINIOWYM
TŁUMIENIEM:
wejście – siła $F(t)$
wyjście – przemieszczenie $x(t)$

Przykład: ruch samochodu po płaskim podłożu z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości (np. opisany za pomocą równania ruchu maszyny ze stałą masą zredukowaną)

③

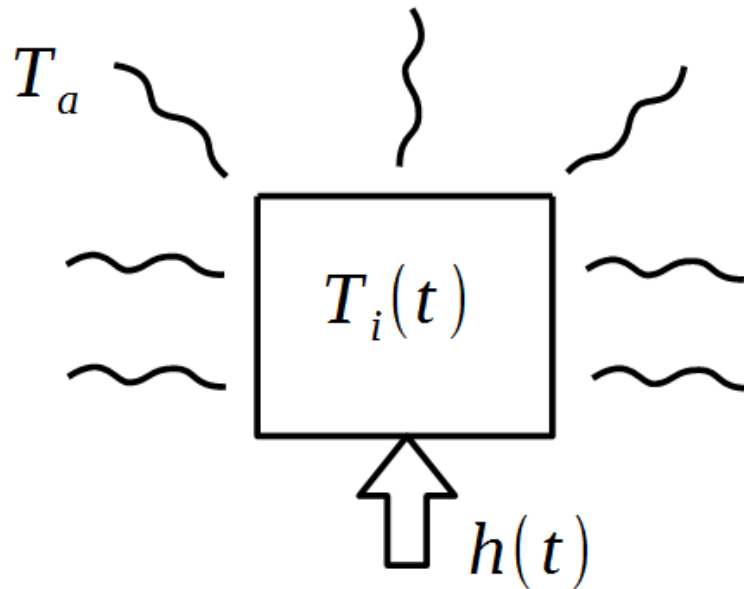


RUCH OBROTOWY BRYŁY
SZTYWNEJ Z LINIOWYM
TŁUMIENIEM:
wejście – moment $M(t)$
wyjście – kąt obrotu $\varphi(t)$

Element inercyjny drugiego rzędu

Przykłady

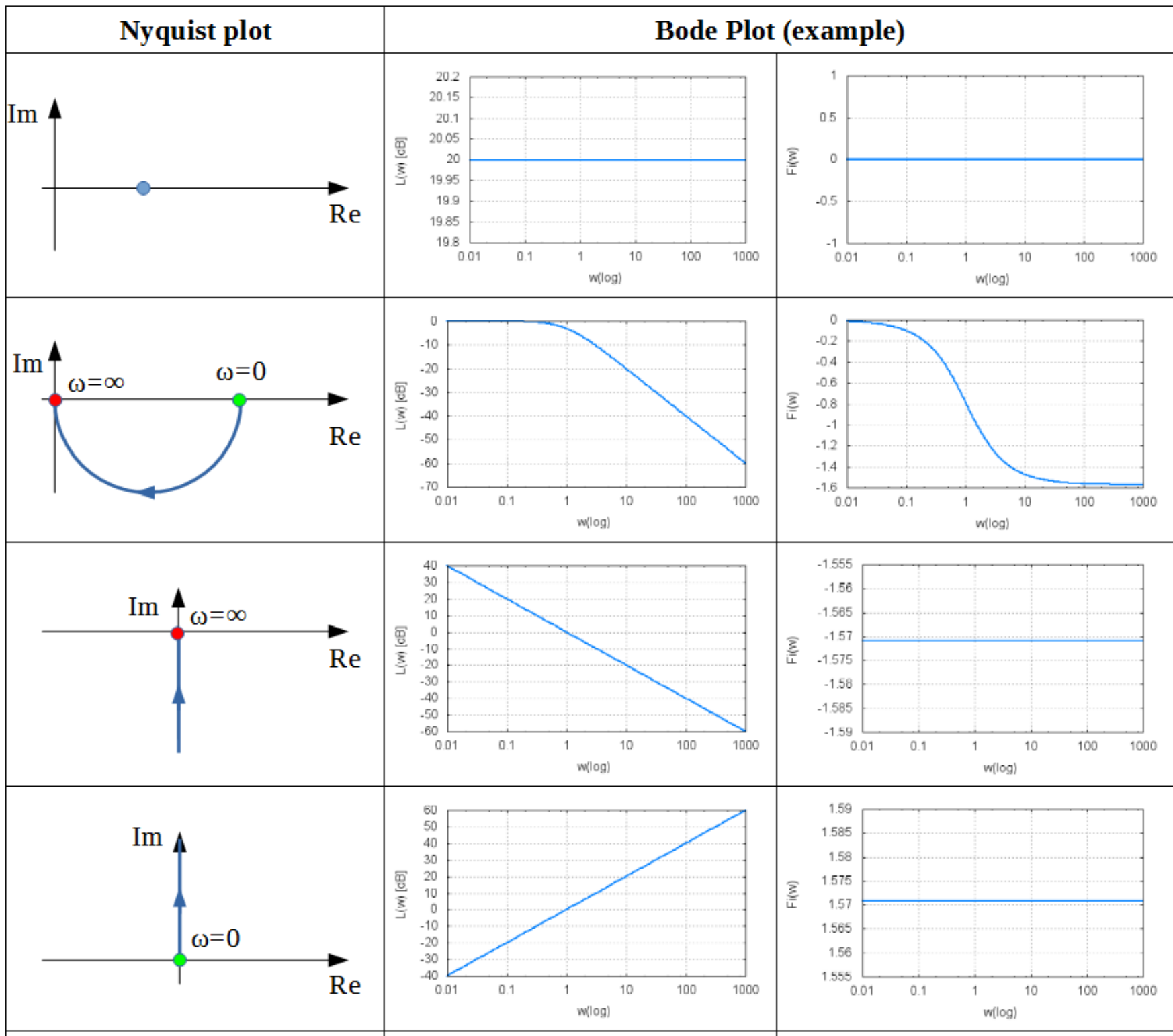
4

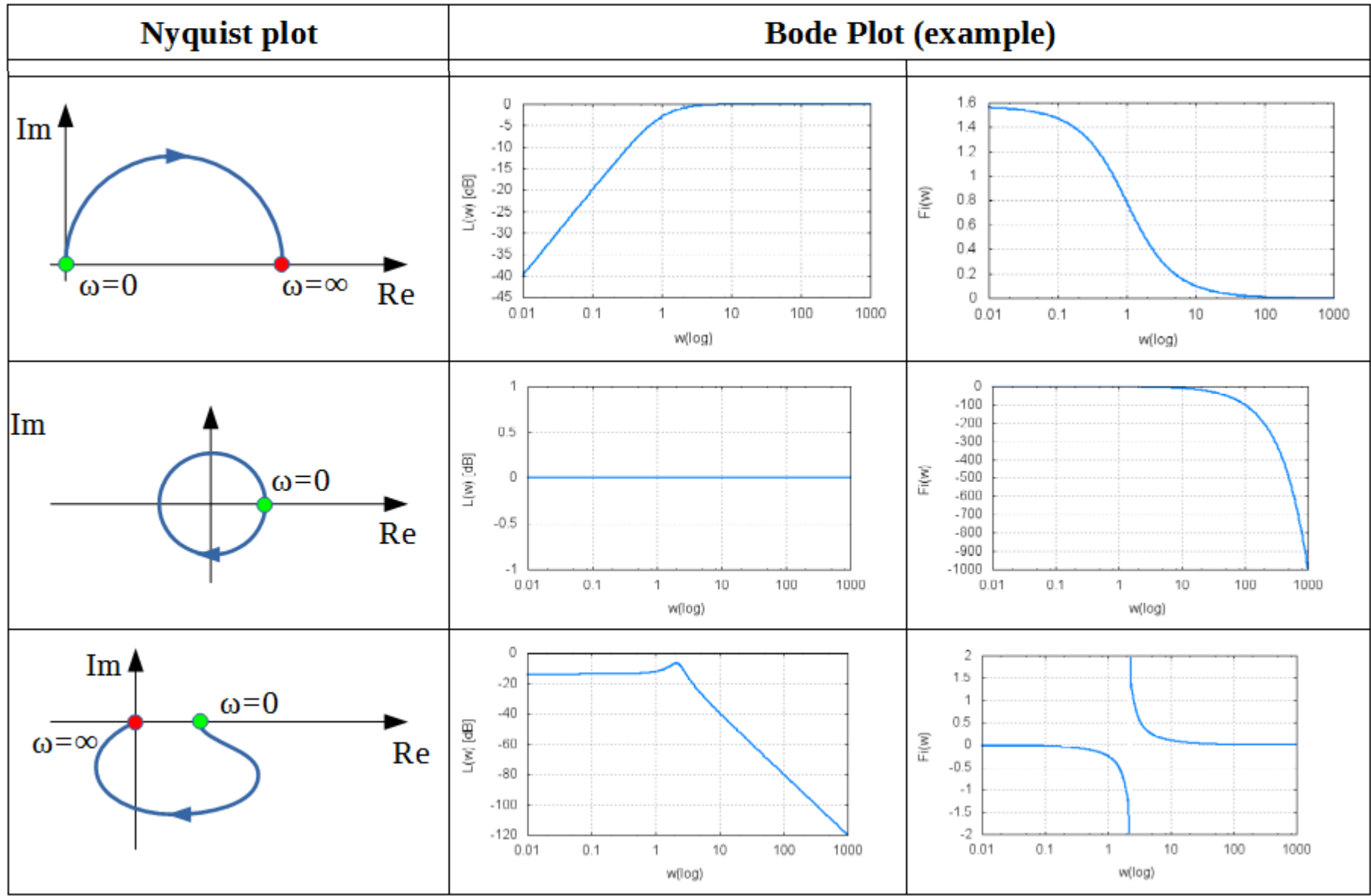


OGRZEWANY OBIEKT O DUŻEJ
BEZWŁADNOŚCI:
wejście – moc grzałki $h(t)$
wyjście – temperatura obiektu $T_i(t)$

Klasyfikacja podstawowych obiektów automatyki

nazwa elementu	transmitancja
Proporcjonalny	k
Inercyjny pierwszego rzędu	$\frac{k}{Ts+1}$
Całkujący	$\frac{k}{s}$
Różniczkujący idealny	ks
Różniczkujący rzeczywisty	$\frac{ks}{Ts+1}$
Element opóźniający	$e^{-\tau s}$
Inercyjny drugiego rzędu	$\frac{k}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1}$





Przykład

Obliczyć i naszkicować odpowiedź na wymuszenie skokowe oraz charakterystykę Bodego dla układu o transmitancji $G(s) = 3s$.

Przykład

Obliczyć i naszkicować odpowiedź na wymuszenie skokowe oraz charakterystykę Bodego dla układu o transmitancji $G(s) = 3s$.

Przykład

Obliczyć i naszkicować odpowiedź na wymuszenie skokowe oraz charakterystykę Bodego dla układu o transmitancji $G(s) = 3s$.

Przykład

Obliczyć i naszkicować odpowiedź na wymuszenie skokowe oraz charakterystykę Bodego dla układu o transmitancji $G(s) = 3s$.

Metody obliczeń komputerowych na potrzeby analizy transmitancji

Oprogramowanie do obliczeń symbolicznych:

- Strona internetowa: www.wolframalpha.com
- Maxima (darmowe)
- Wolfram Mathematica (<http://www.wolfram.com/mathematica/>)
- Mathcad
- Matlab / Scilab

Wykresy sporządzić można również w arkuszu kalkulacyjnym (np. Excel, LibreOffice Calc)

Oprogramowanie – przykład wykorzystania



transfer function $(8*s+4)/(2*s^4+7*s^3+11*s^2+19*s+6)$



[Examples](#) [Random](#)

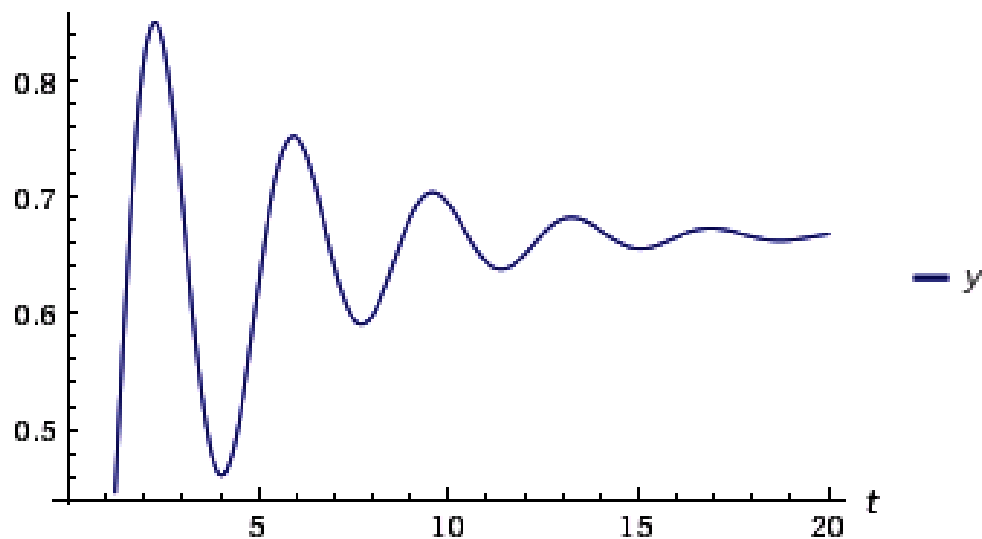
Input interpretation:

systems model

transfer function
$$\frac{4 + 8 s}{6 + 19 s + 11 s^2 + 7 s^3 + 2 s^4}$$

Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.

Unit step response plot:



Less time

More time

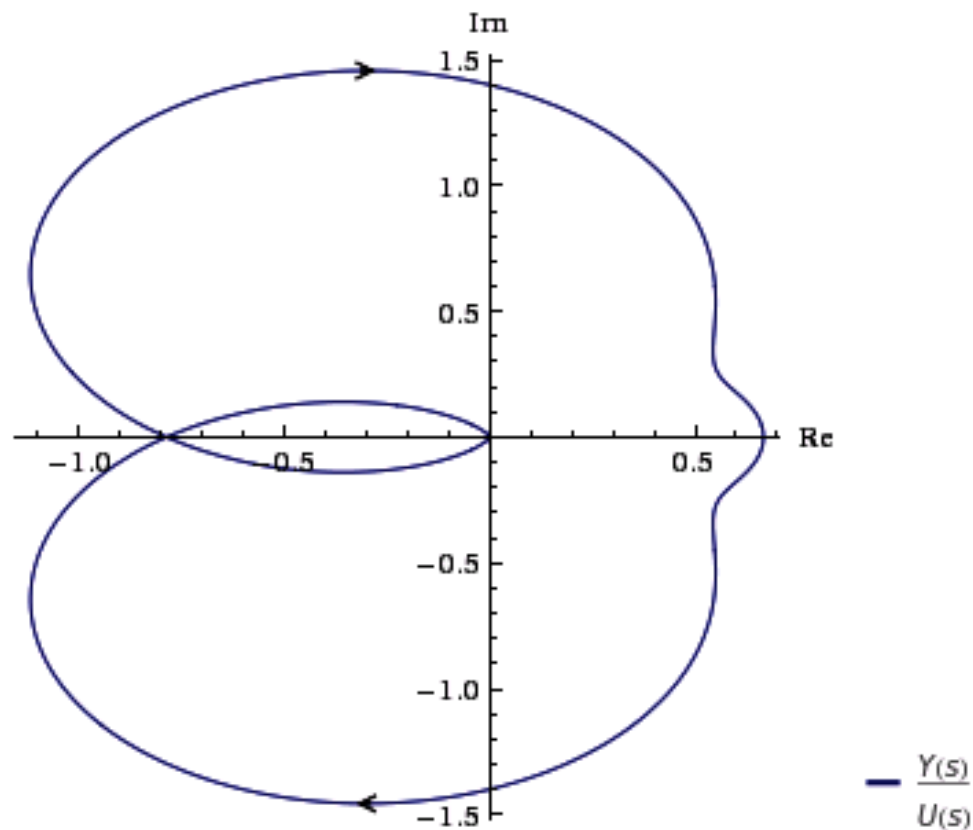
Unit step ▼

Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.

Nyquist plot:

Show Nyquist grid

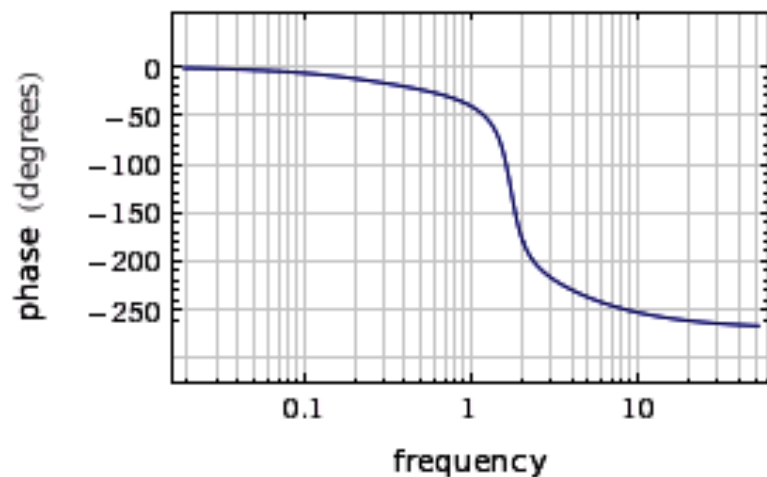
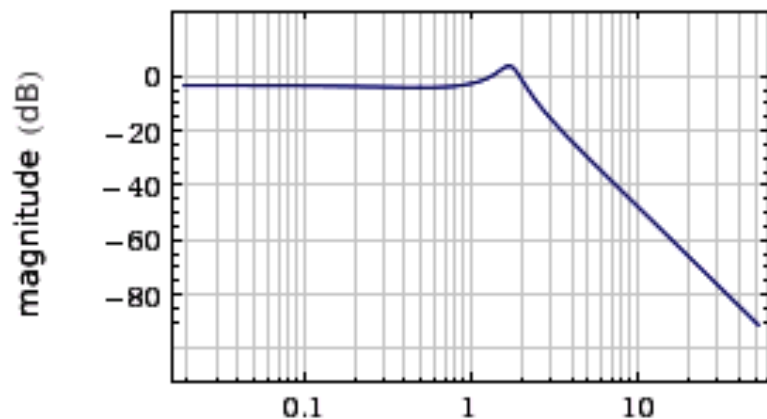
Show stability margins



Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.

Bode plot:

Show stability margins



— $Y(s)$
— $U(s)$

Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.



partial fraction decomposition $s/(s^3+4*s^2+5*s+2)$



Examples Random

Assuming "s" is a variable | Use as a unit instead

Input:

partial fractions

$$\frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}$$

Result:

Step-by-step solution

$$\frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2} = -\frac{2}{s + 2} + \frac{2}{s + 1} - \frac{1}{(s + 1)^2}$$

Oprogramowanie – przykład wykorzystania cd.



inverse laplace transform $s/(s^3+4s^2+5s+2)$



Examples Random

Assuming "s" is a variable | Use as a [unit](#) instead

Input:

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{s}{s^3 + 4s^2 + 5s + 2}\right](t)$$

$\mathcal{L}_s^{-1}[f(s)](t)$ is the inverse Laplace transform of $f(s)$ with real variable t

Result:

$$-e^{-2t} (e^t t - 2e^t + 2)$$